

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

фанидан маъруза матнлари

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ САМАРҚАНД ДАВЛАТ
АРХИТЕКТУРА - ҚУРИЛИШ ИНСТИТУТИ**

«ИНФОРМАТИКА» кафедраси

«Тасдиқлайман»
СамДАҚИнинг ўқув ишлари
буйича проректори
т.ф.д., профессор
_____ **Соатов Ў.А.**
«_____» _____ **2005 й.**

СамДАҚИ ўқув-услубий
адабиётларни чоп қилиш
кенгашида кўриб чиқилган
ва тасдиқланган
Баённома № _____
«_____» _____ **2005 й.**

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

фанидан маъруза
матнлари

САМАРҚАНД 2005 й.

Маъруза матни «**Математик программалаштириш**» фани институтда менежмент мутахассислиги бакалавр йўналиши талабалари учун мўлжаллаб ёзилган. Маъруза матни Олий таълим вазирлиги томонидан тасдиқланган намунавий дастур асосида тузилган ишчи дастурга мос келади. Фанни чуқур ва мукаммал эгаллаш учун тавсия этилаётган адабиётлардан фойдаланишни тавсия этамиз.

Маъруза матни кафедранинг 2005 йил 10 мартда бўлиб ўтган мажлисида муҳокома қилинган ва чоп этиш учун тавсия қилинган (Баённома №9).

Тузувчилар: и.ф.н., доцент

Умаров Ҳ.С.

Такризчи: Самарқанд Давлат архитектура қурилиш институти
«Информатика» кафедраси доценти Ҳикматов Ҳ.Ҳ.

К И Р И Ш

Мустақил республикамизнинг бозор муносабатларига босқичма-босқич ўтиш шароитида халқ хўжалигининг барча соҳалари каби қурилиш соҳаси тармоқларини ҳам юқори суръатларда ривожлантириш, ҳозирги замон фан ва техника ютуқларини ишлаб чиқаришга амалий тадбиқ қилиш, замонавий компьютерлардан ҳамда ривожланган хорижий давлатлар технологияларидан юксак даражада фойдаланиш маҳсулот сифати, меҳнат унумдорлик даражасини ўстириш ҳамда унинг самарадорлигини ошириш, ҳисобидан аҳолининг турмуш даражасини моддий ва маънавий фаровонлигини юксалтириш, ҳозирги куннинг долзарб вазифаларидан бири ҳисобланади.

Ана шундай вазифаларни мақсадга мувофиқ ҳал этиш учун қурилиш соҳасининг барча тармоқларини, ўзларининг иқтисодий имкониятларидан тўла фойдаланган ҳолда режалаштириш ва бошқаришнинг замон талабига жавоб берадиган энг рационал ечимларни қабул қилишни янада такомиллашган усулларини ишлаб чиқиш лозим.

Ушбу маъруза матнида мазкур мавзуларга бағишланган энг муҳим масалалар ёритилган бўлиб, улардан қурилиш корхоналарида хом – ашё ресурсларидан самарали фойдаланилган ҳолда ишлаб чиқариладиган тайёр маҳсулотлар учун сарфланадиган харажатларни камайтириш, ҳамда уларни ички ва ташқи бозорга чиқариш ҳисобидан корхона қувватини оширишнинг иқтисодий – математик моделларини тузиш, мақсадли ечимларга эга бўлиш учун керак бўладиган усуллар назарий ва амалий жиҳатидан баён қилинган. Иқтисодий, иқтисодий - статистик , тармоқлараро баланс, тармоқли моделлардан ва ишлаб чиқариш функцияларидан фойдаланиш усуллари амалий мисоллар ёрдамида атрофлича ёритилган ва таҳлил қилинган.

1- Мавзу: Математик программалаштириш фанининг предмети ва усуллари. (4 соат)

Режа:

- 1.1. Математик программалаштириш фанининг предмети**
- 1.2. Бошқаришни режалаштиришда иқтисодий математик усуллар.**
- 1.3. Энг содда иқтисодий масалаларнинг математик моделлари.**

Таянч сўз ва иборалар: модел; моделлаштириш; усул; иқтисодий жараён; математик программалаштириш; чизиқли программалаштириш; оптимал ечим; мақсад функция; оптималлик мезони; чизиқли тенглама; чизиқли тенгсизлик.

1.1. Математик программалаштириш фанининг предмети

Моделларнинг сон қийматларини топиш билан математиканинг асосий бўлимларидан бири математик программалаштириш бўлими шуғулланади. Қурилишни бошқариш жараёнини шартли равишда учта функционал қисмларга: маълумотларни йиғиш, таҳлил қилиш ва ечимни қабул қилишларга ажратиш мумкин.

Маълумки, давлат корхоналари, фирмаларни бошқаришда ишлаб чиқариш режаларини тузишнинг жуда кўп вариантлари бўлиб, математик программалаштириш усуллари ёрдамида мавжуд кўп вариантли ечимлардан, олдиндан қўйилган шартлар бажарилган тақдирда оптимал вариантыни (ечимларини) аниқлаш мумкин. Бошқариш жараёнида математик программалаштиришнинг иқтисодий-математик усуллари ҳамда замонавий компьютерларнинг тадбиқлари – қурилиш соҳасида мавжуд ресурслардан оқилона фойдаланиш, ишлаб чиқаришни тўғри ташкил этишнинг энг самарали воситаларини топиш, сарфланадиган ҳаражатларни камайтириш, мавжуд ички резервларни қидириб топиш каби кўпгина масалаларини ҳал этишда муҳим омил бўлиб ҳисобланади.

Математик программалаштириш - чизиқли, каср чизиқли, квадрат, бутун сонли, чизиқсиз, стохастик, динамик каби программалаштириш масалаларига бўлинади.

1.2. Бошқаришни режалаштиришда иқтисодий математик усуллар

Иқтисодий–математик усуллар ва замонавий компьютерлар ёрдамида ўтказилган илмий изланишлар бозор муносабатлари шакллари тақомиллаштириш ва ишлаб чиқаришни иқтисодий жиҳатдан рағбатлантиришга шунингдек халқ хўжалигининг барча тармоқларини, жумладан қурилишда ишлаб-чиқариш самарадорлигини оширишга, мавжуд хом-ашё ва меҳнат ресурсларидан оқилона фойдаланиш натижасида энг юқори кўрсаткичларга эришишга қаратилгандир.

Мана шундай оптимал режалаштириш ва бошқариш масалаларини мақбулий ечимлари фақат математик программа-лаштиришнинг вужудга келиши ва унинг тараққий этиши натижасидагина эришилади. Оптимал режалаштириш ва бошқаришда асосий масала ечимнинг энг яхши вариантыни танлаб олишдан иборатдир. Математик изланишлар натижасида математик программалаштиришнинг оптимал усуллари вужудга келди. Бу усуллар ёрдамида халқ хўжалигининг барча тармоқлари, жумладан қурилишни бошқаришнинг оптимал ечими аниқланади ва бошқарилади. Бундай масалаларнинг муқобил ечимлари чизикли программалаштириш усуллари билан аниқланади. Агар математик моделда масаланинг ечимига таъсир этувчи барча омиллар тўлиқ ҳисобга олинган бўлса, у ҳолда ушбу омиллар иқтисодий масаланинг оптимал ечими бўлиб ҳамиша тенгламалар ва тенгсизликлар системасини қаноатлантиради. Шунинг учун ҳам иқтисодий жараёнларни моделлаштиришда шартларни тўғри танлаш муҳим аҳамиятга эга ва у масалани ечишда асосий восита бўлиб ҳисобланади.

Иқтисодий жараёнларни моделлаштириш (чизикли программа-лаштириш усулларига ўтишда) тенгламалар ва тенгсизликлар системасини тузишдан иборат. Унда режалаштирилаётган объектда изланаётган миқдорлар ўзгарувчи миқдорлар вазифасини бажаради. Чизикли тенглама ва тенгсизликларда номаълум миқдорни x_j ўзгарувчи билан белгилаймиз. Системанинг ўзгармас коэффициент ларини, яъни озод ҳадларини b_i номаълумлар олдидаги коэффициентларни эса a_{ij} билан белгилаймиз (бунда $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

Ушбу масалани ечиш жараёнида қуйидаги шартларга амал қилиш лозим.

Бутун иқтисодий, техникавий, ижтимоий ва бошқа шартларни чизикли тенгламалар ва тенгсизликлар кўринишида ифодалаш мумкин бўлсин.

Масаланинг ҳамма шартларини акс эттирувчи чизикли тенгламалар ва тенгсизликлар системаси алтернатив (кўп вариантли) ечимга эга бўлсин.

Ҳамма чизикли тенгламалар ва тенгсизликлар системаси ягона мақсадли функциясига эга бўлсин.

Ушбу шартлар жуда кўплаб иқтисодий муаммоларни ҳал қилиш учун қаноатлантирувчи шартлардир. Иқтисодий ҳодисаларини математик моделини тузиш жараёнида чизикли тенгламалар ва тенгсизликлар уч хил тур кўринишида учрайди.

Биринчи тур: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_n \leq b_i \quad (i = \overline{1, n})$; b_i — ўзгармас сон. Бунда номаълумларнинг коэффициентларга кўпайт-масининг йиғиндиси ўзгармас сондан кичик ёки унга тенг.

Иккинчи тур: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_n \geq b_i \quad (i = \overline{1, n})$. Бунда номаълумларнинг коэффициентларга кўпайт-масининг йиғин-диси ўзгармас сонга тенг ёки ундан катта.

Учинчи тур: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_n = b_i \quad (i = \overline{1, n})$. Бунда номаълумларнинг коэффициентларга кўпайт-масининг йиғин-диси ўзгармас сонга тенг.

Агар $x_1, x_2, \dots, x_n$ — ларни қурилишда ишлатиладиган хом - ашёлар миқдори деб қаралса, $p_1, p_2, \dots, p_n$ лар мос равишда шу хом - ашёларнинг

$$Z(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \rightarrow \max(\min)$$

$$Z(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \rightarrow \max(\min)$$

$$Z(X) = \sum_{j=1}^n p_j \cdot x_j \rightarrow \max(\min).$$
[illegible]
$$Z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \quad (2)$$

чизикли функция энг катта (максимум) ёки энг кичик (минимум) қийматга эга бўлсин. (2) - чизикли функцияни $Z(X) = \sum_{j=1}^n p_j \cdot x_j$ кўринишида ҳам ёзиш

1.3. Энг содда иқтисодий масалаларнинг математик моделлари

1-жадвал

Хом - ашё хиллари	Хом - ашё захираси	Маҳсулот бирлигини тайёрлаш учун сарфланган хом - ашё бирлигининг миқдори.		
		A	B	C
A ₁	50	1	3	6
A ₂	70	4	5	8
A ₃	90	7	9	13
A ₄	30	10	7	15
A ₅	100	8	4	5
Бир бирлик маҳсулотдан келадиغان фойда		70	90	80

Агар А маҳсулот бирлигининг миқдори x_1 , В маҳсулот бирлигини x_2 , С маҳсулот бирлигини эса x_3 билан белгилаб, маҳсулот бирлигини тайёрлаш учун сарф бўлган хом - ашё бирлигини ва хом - ашё захираларини назарда тутсак, қўйидаги чекланиш тенгсизликларини (ёки шартларини) ҳосил қиламиз, яъни

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 50, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 70, \\ 7x_1 + 9x_2 + 13x_3 \leq 90, \\ 10x_1 + 7x_2 + 15x_3 \leq 30, \\ 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 100. \end{cases} \quad (1)$$

Бу тенгсизликлар маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом – ашёнинг, берилган хом - ашё захираларидан ошиб кетмаслигини кўрсатади. Агар А хилдаги маҳсулот ишлаб чиқарилмаса $x_1 = 0$, акс ҳолда $x_1 > 0$. В ва С хилдаги маҳсулотлар учун ҳам худди шундай муносабатлар ўринлидир.

Демак, ҳамма вақт $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ бўлар экан. А хилдаги бир – бирлик маҳсулот 70 бирлик фойда бергани учун шу хилдаги жами маҳсулотдан келадиган фойда $70 \cdot x_1$ га тенг бўлади. Худди шунингдек, иккинчи ва учинчи хил маҳсулотлардан $90 \cdot x_2$, $80 \cdot x_3$ фойда олинади. Умумий фойда эса

$$Z = Z(x_1, x_2, x_3) = 70 \cdot x_1 + 90 \cdot x_2 + 80 \cdot x_3 \quad (2)$$

кўринишида бўлади ва қўйилган масаланинг мақсад функциясини ифодалайди.

Чекланиш шартлари (1) ва мақсад функция (2) чизикли бўлганлиги учун (1)–(2) ифода чизикли программалаштириш масаласининг, яъни хом-ашёдан оқилона фойдаланишнинг математик моделини ташкил қилади.

Демак, масалани ечиш учун (1) - системанинг шундай манфий бўлмаган (x_1^1, x_2^1, x_3^1) ечимини топамизки, унда (2) - формула билан аниқланадиган Z – чизикли функция энг катта қийматга эришади, яъни умумий фойда энг катта бўлади.

Энди умумий ҳолда хом - ашёдан фойдаланиш масаласини қуйидагича баён қилиш мумкин. Айтайлик, корхона n хил B_j ($j = \overline{1, n}$) турдаги маҳсулотни тайёрлаш учун, m хил A_i ($i = \overline{1, m}$) хом - ашёдан фойдаланадиган бўлсин.

Хом - ашё захираларини b_i билан ; j – хилдаги бир-бирлик маҳсулотни тайёрлаш учун, i турдаги хом - ашё бирлигидан қанча миқдорда сарф қилинганлигини a_{ij} билан; j –хилдаги маҳсулот бирлигини сотишдан олинадиган фойдани c_j билан ва j –хилдаги маҳсулот бирлигининг миқдорини x_j билан белгиласак, қўйилган масаланинг математик модели қуйидагича булади:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max) \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (4)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (4')$$

Қўйилган мақсаддан кўриниб турибдики, мақсад функция (3) ни максималлаштирадиган $x_j \geq 0$ ларни топиш учун чизикли тенгсизликлар системаси (4) нинг манфий бўлмаган ечимларини топишдан иборатдир.. Тенгсизликлар системасини ечиш, тенгламалар системасини ечишга

караганда мураккаб бўлганлиги учун, кўпинча тенгсизликлар системасини унга тенг кучли бўлган тенгламалар системаси билан алмаштирилади. Бунинг учун тенгсизликлар системаси (4) нинг чап томонига, номаълум ва мусбат бўлган $x_{n+i} \geq 0$, $(i = \overline{1, m})$ ўзгарувчиларни қўшиб ёзиш кифоядир:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (5).$$

Хосил қилинган тенгламалар системасида номаълумлар сони тенгламалар системасидаги тенгламалар сонидан кўп. Номаълумлар сони $(n + m > n)$ бўлгани учун (5) система чексиз кўп ечимларга эгадир. Бу ечимлар тўпламидан шундай $x_j \geq 0$ ларни танлаб олиш керакки, натижада мақсад функция (3) ўзининг энг катта қийматига эришсин. Демак, умумий ҳолда (3); (4); (4') хом – ашёдан оқилона фойдаланиш масаласининг математик моделини ифодалайди.

2. Транспорт масаласи. Маълум миқдордаги юкларни, ишлаб чиқариш корхоналаридан истеъмол қилувчи корхоналарга ташиб бориш учун чизикли программалаштиришнинг транспорт масаласи моделидан фойдаланилади. Бунда транспорт воситалари учун сарфланадиган харажат, энг кам сарф қилган ҳолда истеъмолчиларнинг талабини тўла қондиришдан иборатдир. $A_i, (i = \overline{1, m})$ маҳсулот ишлаб чиқариш корхоналари дейлик. $B_j, (j = \overline{1, n})$ шу маҳсулотларга бўлган истеъмолчилар бўлсин. Ҳар бир $A_i, (i = \overline{1, m})$ корхоналарда ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг миқдори $a_i, (i = \overline{1, m})$. Худди шунингдек $B_j, (j = \overline{1, n})$ истеъмолчи-

ларнинг маҳсулотларга бўлган талаби $b_j - (j = \overline{1, n})$ – бўлсин. A_i корхоналарда ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг умумий миқдори, B_j истеъмолчиларнинг маҳсулотларга бўлган талабининг умумий миқдорига тенг бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

тенглик ўринли бўлади.

A_i ишлаб чиқариш корхонасидан B_j истеъмолчига олиб борилган маҳсулотнинг умумий миқдорини x_{ij} билан ва A_i ишлаб чиқариш корхонасидан B_j истеъмолчига бир - бирлик маҳсулотни ташиб бориш учун сарф қилинган харажатни c_{ij} билан белгилаймиз. Соддалик учун ушбу масаланинг ҳамма берилган маълумотларини қуйидаги жадвалда келтирамиз.

Ишлаб чиқариш корхоналари	Ишлаб чиқарилган маҳсулотлар	Истеъмолчилар					
		B_1		B_2		$\dots$	B_n
A_1	a_1	x_{11}	c_{11}	x_{12}	c_{12}	$\dots$	x_{1n} c_{1n}
A_2	a_2	x_{21}	c_{21}	x_{22}	c_{22}	$\dots$	x_{2n} c_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_m	x_{m1}	c_{m1}	x_{m2}	c_{m2}	$\dots$	x_{mn} c_{mn}
Маҳсулотга бўлган талаб		b_1		b_2		$\dots$	b_n

Энди масаланинг математик моделини тузиш учун, ҳар бир ишлаб чиқариш корхонасини, истеъмолчиларга шундай мос қилиб қўйиш керакки, биринчидан ҳар бир ишлаб чиқариш корхонасидаги маҳсулотлар тўла тақсимлансин. Ушбу шартни тенгламалар системаси орқали қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2 \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \end{cases} \quad (6)$$

Иккинчидан, ҳар бир истеъмолчининг талаби тўласинча қондирилсин. Бу шартлар қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2 \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{cases} \quad (7)$$

Учинчидан, маҳсулотларни ташиш учун сарф қилинадиган жами харажат энг кам бўлсин. Бу эса қуйидаги чизикли функция орқали ифодаланади.

$$\begin{aligned} Z = & c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + \dots + c_{1n} \cdot x_{1n} + c_{21} \cdot x_{21} + \\ & + c_{22} \cdot x_{22} + \dots + c_{2n} \cdot x_{2n} + \dots + c_{m1} \cdot x_{m1} + c_{m2} \cdot x_{m2} + \\ & + \dots + c_{mn} \cdot x_{mn} . \end{aligned} \quad (8)$$

Тўртинчидан, масаланинг иқтисодий қўйилишидан ечимларнинг манфий бўлмаслик шартини қаноатлантириши лозим:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (9)$$

Юқоридаги (6) – (9) муносабатларни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad (i = \overline{1, m}) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad (j = \overline{1, n}) \\ x_{ij} &\geq 0, \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ва

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}, \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (11)$$

Шундай қилиб (10)–(11) биргаликда транспорт масаласининг математик модели деб аталади. Демак, (10) шартни қаноатлантирувчи шундай $x_{ij} \geq 0$ ечимларни топиши керакки, натижада (11) мақсад функция энг кичик қийматга эришсин.

Агар ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг умумий миқдори, уларга бўлган талабнинг умумий миқдorigа тенг бўлса, яъни

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = M > 0, \quad (12)$$

у ҳолда бу масалани ёпиқ модели, акс ҳолда очик модели транспорт масаласи деб атаймиз.

Мисол. A_1, A_2, A_3 ва A_4 омборларда мос равишда 100т., 250т., 500т., ва 150т., цемент сақланади. Ушбу омборлардаги цементни B_1, B_2, B_3, B_4 ва B_5 қурилиш иншоотларига уларнинг талабига кўра мос равишда 300т., 350т., 100т., 170т., ва 80т., миқдорларда етказиб бериш керак бўлсин. A_1 омбордан 1т цементни B_1, B_2, B_3, B_4 ва B_5 қурилиш иншоотларига етказиб бериш учун сарф қилинадиган транспорт харажатлари мос равишда (1;4;6;2; ва 3) сўмни, A_2 омбордан (4; 5; 3; 7; ва 6) сўмни ташкил қилса, ва ҳоказо ташишда сарф қилинган умумий транспорт харажати энг кам бўладиган ечим топилсин. Ушбу транспорт масаласининг математик моделини тузамиз.

Ечиш. $A_i, (i=\overline{1,4})$ омборлардан $B_j, (j=\overline{1,5})$ қурилиш иншоот-ларига етказиб бериладиган цементнинг миқдорини x_{ij} ; A_i омборларда сақланаётган цемент миқдорини

$a_i, (a_1=100_T, a_2=250_T, a_3=500_T, a_4=150_T)$, B_j – қурилиш иншоотларининг цементга бўлган талабини b_j , (бунда $b_1=300_T, b_2=350_T, b_3=100_T, b_4=170_T, b_5=80_T$) билан белги-ласак, у ҳолда омборлардаги цементнинг тўла тақсимланиш шартини

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 250, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 500, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 150. \end{cases} \quad (13)$$

кўринишда ва қурилиш иншоотларининг цементга бўлган талабини тўла қондириш шартини

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 300, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 350, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 100, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 170, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 80. \end{cases} \quad (14)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

$A_i, (i=\overline{1,4})$ омбордан $B_j, (j=\overline{1,5})$ қурилиш иншоотларига 1 т цементни етказиб бериш учун сарф қилинган транспорт харажатини $c_{ij} (i=\overline{1,4}; j=\overline{1,5})$ билан белгиласак, цементни ташиш учун сарф қилинадиган жами харажатнинг миқдорини аниқлайдиган чизиқли функция қуйидагича бўлади:

$$Z = x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 4x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23} + 7x_{24} + 6x_{25} + x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 6x_{34} + 4x_{35} + 2x_{41} + x_{42} + 4x_{43} + 7x_{44} + 6x_{45}, \quad (15)$$

ва $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1,4}; j = \overline{1,5}$).

Иқтисодий нуктаи назардан транспорт масаласининг оптимал ечимлари манфий бўлмаслиги керак. Демак: (13)-(15) муносабатлар биргаликда берилган транспорт масаласининг математик моделини ифодалайди.

Назорат учун саволлар

1. Математик программалаштириш предмети.
2. Математик программалаштиришнинг таркибий қисмлари.
3. Математик моделларни тузишда тенглама ва тенгсизликлар қандай кўринишларда бўлади.
4. Мақсад фнкция деганда нимани тушунаси?
5. Чекланиш шартлари нима?
6. Энг содда иқтисодий масалаларга математик моделларини куриш ва уни изоҳланг.

Адабиётлар

1. Т.Х.Холматов, Х.С. Умаров Курилишни бошқаришда иқтисодий-математик усуллар. Ўқув кўлланма, Самарқанд 2004 й. 196 бет.
2. М.Атхамов, Г.Отабоев Планлаштиришда математик методларни қўлланилиши. Тошкент. Ўқитувчи 1982 й.
3. Ю.Н.Кузнецов и.др. Математическое программирование. М. Высшая школа 1976 г.
4. И.Г.Шепелев «Математические методы и модели управления в строительстве» М: Высшая школа, 1980 г.
5. Шодиев Т.Ш. ва бошқ. «Экономика» Тошкент, Шарқ конд. 1999 й.

2- Мавзу: Чизиқли программалаштириш (6 соат)

Режа:

- 2.1. Чизиқли программалаштириш масаласининг қўйилиши ва унинг турли формаларда ифодаланиши.
- 2.2. Чизиқли программалаштириш масаласининг геометрик талқини ва уни график усулда ечиш.
- 2.3. Чизиқли программалаштириш масаласининг ечишнинг симплекс усули.
- 2.4. Чизиқли программалаштириш масаласининг ечишнинг симплекс жадваллар усули.
- 2.5. Сунъий базис усули.

Таянч сўз ва иборалар: модел; моделлаштириш; усул; иқтисодий жараён; математик программалаштириш; чизиқли программалаштириш; оптимал ечим; график усул; ўринли ечим; ечимлар кўпбурчаги; чизиқли форма; экстремал нукта; мақсад функция; симплекс усул; симплекс жадваллар усули; сунъий базис усули.

2.1. Чизиқли программалаштириш масаласининг қўйилиши ва унинг турли формаларда ифодаланиши

Чизиқли программалаштириш ишлаб чиқаришни режалаш-тириш ва бошқариш каби масалаларни мақбулий ечимини аниқлашда қўлланилади. Чизиқли программалаштириш ишлаб чиқаришни режалаштириш ва бошқаришда режанинг берилган шарт ва мумкин бўлган вариантларининг орасидан оптимал вариантыни топишга имкон беради.

Чизикли программалаштиришнинг қўлланиладиган энг муҳим соҳаси ишлаб чиқариш тармоқларини иқтисодий томондан бошқаришдир. Шунинг учун чизикли программа-лаштириш иқтисодий режалаштириш ҳамда бошқариш масала-ларини ечишда қўлланилади.

Чизикли программалаштиришнинг умумий масаласи симплекс усули билан ечилади. Чизикли программалаштиришнинг бу усули ёрдамида қурилиш, техник ва иқтисодий масалаларнинг оптимал ечими топилади. Симплекс усулининг бошқа усуллардан афзаллиги шундаки, у ўлчов бирлигининг бир хил бўлишини талаб қилмайди. Бу усул ёрдамида ечимни оптимал даражага кўтаради.

Чизикли программалаштиришнинг умумий масаласи математик кўринишда қуйидагича ифодаланади:

Шундай $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг манфий бўлмаган қийматлари аниқланиб, чизикли кўринишдаги мақсад функция

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max (\min) \quad (1)$$

экстремал (энг катта ёки энг кичик) қийматга эришиб, қуйидаги чизиқли чекланиш шартлари бажарилсин,

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \quad \theta \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \quad \theta \quad b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \quad \theta \quad b_m \end{array} \right\} \quad (2)$$

ҳамда нomaълум ўзгарувчиларнинг қийматлари манфий бўлмасин

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, \quad x_n \geq 0 \quad (3).$$

Бунда θ муносабат белгиси бўлиб, улар ($\leq, =, \geq, >, <$) дан иборат. $c_1, c_2, \dots, c_n; a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}; b_1, b_2, \dots, b_m$ лар олдиндан берилган ўзгармас сонлардир.

(1) – (3) формулаларни қўйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$Z = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \rightarrow \max(\min) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \theta b_i, \left(i = \overline{1, m}\right), \quad (2^1)$$

$$x_j \geq 0; \left(j = \overline{1, n} \right) \quad (3')$$

Ушбу масала вектор кўринишида қуйидагича ёзилади.

Агар

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ва $\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ орқали ифодаланса, у ҳолда чизикли программалаштиришнинг умумий масаласи

$$Z = \vec{C} \cdot \vec{X} \rightarrow \max (\min) \quad (1^{||})$$

$$A \vec{X} \leq \vec{b} \quad (2^{||})$$

$$\vec{X} \geq 0 \quad (3^{||})$$

шаклида ёзилади.

1-таъриф. Тенгламалар ёки тенгсизликлар системасининг исталган манфий бўлмаган ечими ўринли ечим дейилади.

2-таъриф. Мақсад функцияга талаб қилинган максимум (ёки минимум), қиймат берувчи ўринли ечим оптимал ечим дейилади.

Эслатма. Иқтисодий масалаларни ечишдан олдин энг аввало қўйилган масаланинг моҳиятини тўлиқ акс эттирадиган иқтисодий - математик моделларини қуриш лозимдир.

2.2. Чизикли программалаштириш масаласининг геометрик талқини ва уни график усулда ечиш.

Текисликда чизикли программалаштириш масаласи берилган бўлиб,

$$Z = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad (1)$$

функциянинг чекланиш тенгсизликлари системасини

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \\ x_1 &\geq 0; \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

қаноатлантирадиган энг кичик қийматини топиш талаб қилинган бўлсин.

(2) тенгсизликлар системасини биргаликда деб фараз қилсак, у ҳолда бу тенгсизликларнинг ҳар бири

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad \text{ва} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

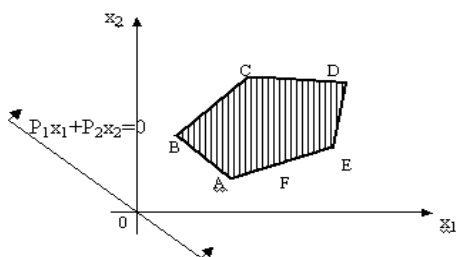
тўғри чизиклар билан, ечимларнинг манфий эмаслик шартлари эса $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ тўғри чизиклар билан ярим текисликларни ташкил этади ва бу ярим текисликлар бир – бири билан кесишиб, ўринли ечимлар тўплами бўлган бирорта кўпбурчакни ташкил қилади.

(1) мақсад функциянинг ҳар бир қийматида бирорта тўғри чизикнинг тенгламасини ифода этади.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = \text{const} . \quad (3)$$

Хусусий ҳолда $Z=0$ бўлса, бу тўғри чизик

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0 \quad (4)$$



кўринишда бўлиб, координата бошидан ўтади.

Энди қўйилган масала қуйидагича баён қилинади. Мумкин бўлган ечимлар тўпламидан кўпбурчакнинг шундай таянч тўғри чизигини топиш керакки, натижада кўпбурчак билан таянч тўғри чизикқа, умумий бўлган нуқтада (1) мақсад функция ўзининг энг кичик (энг катта) қийматига эришсин. Мақсад функция $\vec{N} = (p_1, p_2)$ вектор йўналиш бўйича ҳамма вақт ўсувчи бўлиб, бу вектор (3) тўғри чизикларга перпендикуляр бўлади.

Шунинг учун (4) тўғри чизикни $\vec{N}$ вектор йўналиши бўйича ўзига параллел равишда кўчира бошласак, у ABCDEF кўп-бурчакка А ва D нуқталарда таянч тўғри чизик бўлади ва мақсад функция А нуқтада энг кичик, D нуқтада эса энг катта қийматга эришади.

А нуқтанинг координаталари АВ ва АF, D нуқтанинг координаталари DC ва DE тўғри чизикларнинг тенгламаларидан тузилган системани биргаликда ечиш оркали топилади,

$$\begin{aligned} AB: & \begin{cases} a_{11} x_1^{(0)} + a_{12} x_2^{(0)} = b_1 \\ a_{21} x_1^{(0)} + a_{22} x_2^{(0)} = b_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

худди шунингдек

$$\begin{aligned} DC: & \begin{cases} a_{11}^I x_1^{(0)} + a_{12}^I x_2^{(0)} = b_1^I \\ a_{21}^I x_1^{(0)} + a_{22}^I x_2^{(0)} = b_2^I \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Чизикли программалаштириш масаласининг (ЧПМнинг) геометрик талқини -ечимлар тўплами $\{D\}$ да $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = 0$ гипертекисликдан энг кам (энг кўп) узоқлашган четки нуқтани топишдан иборат.

Умуман чизикли программалаштириш масаласини график усулда ечиш учун, қуйидагиларни кетма-кет бажариш лозимдир

1. чегаравий тўғри чизикларнинг тенгламалари ёзилади;
2. текисликдаги бу тўғри чизикларнинг графиклари ясалади;
3. система тенгсизликларининг ечимлар соҳаси топилади;
4. ечимлар кўпбурчаги ясалади;
5. чизикли форма ёки мақсад функция графиги ясалади;
6. кўпбурчакдаги экстремал нуқта аниқланади;
7. экстремал нуқтада мақсад функциясининг қиймати ҳисобланади.

Мисол: График усулдан фойдаланиб $Z = 2x_1 + x_2$ функцияга энг катта қиймат берадиган ҳамда қуйидаги тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи манфий бўлмаган ечимлар соҳасини топинг.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ечиш : Чегаравий тўғри чизикларнинг тенгламалари ёзилади ва координаталар текислигида уларнинг графиклари ясалади.

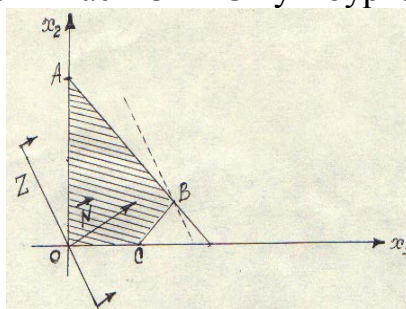
$$x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

Ҳар бир тенгсизликнинг ечимлар соҳасида ёрдамчи нукта ажратиб олинади, бу нукта сифатида $O(0; 0)$ нуктани олиш энг қулайдир. Ясалган ярим текисликларнинг кесишмаси $OABC$ кўп-бурчак бўлади.



1 – расм

Мақсад функция ихтиёрий сонга тенглаштирилади ва ҳосил бўлган тенгламага мос тўғри чизик ясалади;

$2x_1 + x_2 = 0$ тўғри чизик координаталар боши $O(0; 0)$ ва яна бир нуқтадан ўтади, бу нуқтанинг координатларини аниқлаш осон. Тўғри чизикни $\vec{N}(2;1)$ вектор йўналишида параллел кўчириб бориб, экстремал нукта $B(x_1, x_2)$ топилади. Бу нуқтанинг координатлари қуйидаги тенгламалар системасини

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

биргаликда ечиш орқали топилади. Системанинг биринчи тенгламасидан x_1 – ни аниқлаб, $x_1 = 4 - x_2$ ни системанинг иккинчи тенгламасидаги x_1 – номаълум ўзгарувчининг ўрнига қўйиб, x_2 – ни топамиз.

$$4 - x_2 - x_2 = 2$$

$$- 2x_2 = - 2$$

$$x_2 = 1$$

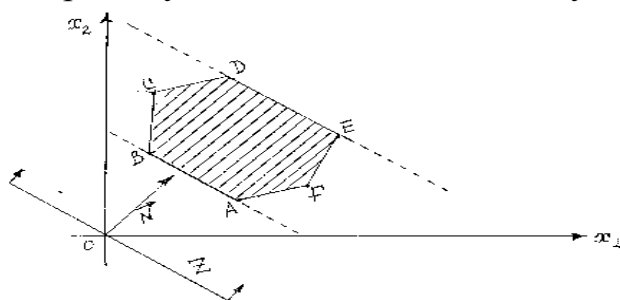
x_2 – нинг қийматидан фойдаланиб, x_1 – ни топамиз.

$$x_1 = 4 - 1$$

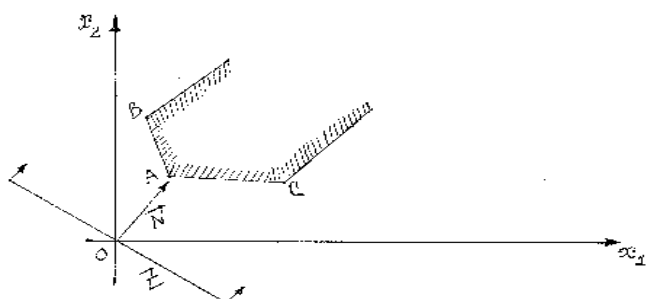
$$x_1 = 3$$

Демак: $B(3; 1)$ экан. Бундан $\max Z(3; 1) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ эканлигини аниқлаймиз.

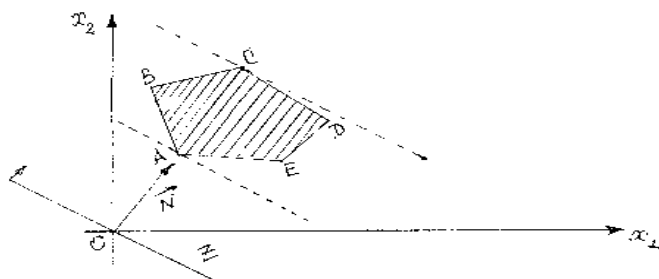
Чизикли программалаштириш масаласини ечиш жараёнида, уларнинг график кўринишларини қуйидагича таҳлил қилиш мумкин.



2-расм. Масала чексиз кўп ечимлар тўпламига эга.



3-расм. Чеклашлар системаси биргаликда эмас.



4-расм. Масала ягона ечимга эга.



5-расм. Чизикли форма чегараланмаган.

2.3. Чизикли программалаштириш масаласининг ечишнинг симплекс усули

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

[illegible]

(1) - мақсад функцияни (3) дан фойдаланиб қуйидаги

кўринишига келтирамиз ва чизиқли функциянинг энг кичик қийматини топамиз. (3) нинг чап томонидаги $x_1, x_2, \dots, x_m$ номаълумлар тўплами чизиқли программалаш-тириш масаласининг базиси дейилади ва y

кўринишида белгиланади. $x_1, x_2, \dots, x_m$ -лар базис номаълумлар,
 $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ лар эса озод номаълумлар дейилади.

Агар $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = 0$ бўлса, у ҳолда (3) формуладан $x_1 = b_1' \geq 0, x_2 = b_2' \geq 0, \dots, x_m = b_m' \geq 0$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб базис ечим деб аталган ушбу

Ўринли ечимга эга бўламиз. Z – нинг бу ечимдаги қиймати куйидагига тенг:

Ушбу масалада икки ҳол рўй бериши мумкин:

I ҳол. (4) – да ҳамма $P'_{m+1}, P'_{m+2}, \dots, P'_n$ сонлар манфий, у ҳолда (4) дан $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$ шартда $Z(B1) = P'_0$ минимум қийматга эришади ва (5)

базис ечим оптимал ечим бўлади, чунки бирор $P'_j < 0$ ва $x_j \geq 0$ учун $P'_j x_j > 0$ бўлади. Демак, $Z = P'_0 - P'_j x_j > P'_0$ муносабат ўринли бўлади.

II ҳол. (4) даги $P'_{m+1}, P'_{m+2}, \dots, P'_n$ сонлар орасида мусбатлари бор.

Масалан $P'_j > 0$ (мусбат сонлар) дейлик, у вақтда

$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_n = 0, x_j \geq 0$ деб олиб,

x_j ларнинг қийматини орттириб бориш натижасида эришиш мумкин бўлади.

Бундан $Z = P'_0 - P'_j x_j$ нинг қийматини камайтириш мумкин. Бу ҳолда (3) - дан келиб чиқадиган қуйидаги

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1j} x_j \\ x_2 = b'_2 - a'_{2j} x_j \\ \dots\dots\dots \\ x_m = b'_m - a'_{mj} x_j \end{cases} \quad (6)$$

тенгламалардаги $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг бирортаси ҳам манфий бўлмаслиги керак.

Бу ерда ҳам икки ҳол рўй беради:

II а. (6) да $a'_{1j}, a'_{2j}, \dots, a'_{mj}$ сонларнинг ҳаммаси мусбат эмас. $x_j \geq 0$ мусбат булганлиги учун $-a'_{kj} x_j \geq 0, (k = \overline{1, m})$ дир. $x_k = b'_k - a'_{kj} x_j \geq b'_k > 0$ дир. Демак, $Z = P'_0 - P'_j x_j$ да $P'_j > 0$ ва $x_j \geq 0$ бўлгани учун x_j ни чексиз орттира бориш билан

$\min Z = +\infty$ эга бўламиз. Бундан эса, мақсад функция Z минимумга эришмаслиги келиб чиқади.

II б. (6) даги $a'_{1j}, a'_{2j}, \dots, a'_{mj}$ сонлар орасида мусбатлари ҳам бор. Масалан $a'_{kj} > 0$ бўлсин. У ҳолда $x_k = b'_k - a'_{kj} x_j$ да x_j га $\frac{b'_k}{a'_{kj}}$ дан катта қиймат бериш

мумкин эмас, акс ҳолда $x_k > 0$ бўлиб қолади. Бунда $\frac{b'_k}{a'_{kj}} \geq 0$ эканлиги равшан.

Бундай касрлар орасида энг кичиги $\frac{b_i}{a_{ij}}$ бўлиб, a'_{ij} сон ҳал қилувчи элементдир.

Қисқалик учун $\frac{b_i}{a_{ij}}$ белгилашни киритамиз. (6) да x_j ни ρ гача орттира оламиз,

акс ҳолда $x_i < 0$ бўлишини кўрдик. Озод номаълумларга

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_n = 0, x_j = \rho \quad (7)$$

қийматларини бериб, базис номаълумларини қуйидагича аниқ-лаймиз.

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1j} \rho \\ x_2 = b'_2 - a'_{2j} \rho \\ \dots\dots\dots \\ x_i = b'_i - a'_{ij} \rho \\ \dots\dots\dots \\ x_m = b'_m - a'_{mj} \rho \end{cases} \quad (8)$$

$$B2 = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, 0, 0, \dots, 0\}$$
$$Z = (B2) = P'_0 - P'_j \rho \leq Z(B1), \quad P'_j < 0.$$
$$x_2 = b'_i - (a'_{im+1}x_{m+1} + \dots + a'_{ij}x_j + \dots + a'_{in}x_n)$$
$$x_j = \frac{b'_i}{a_{ij}} - \left(\frac{a'_{im+1}}{a'_{ij}} x_{m+1} + \frac{a'_{im+2}}{a'_{ij}} x_{m2} + \dots + \frac{1}{a'_{ij}} x_i + \dots + \frac{a'_{in}}{a'_{ij}} x_n \right)$$
$$\begin{cases} x_1 = b_1'' - (a_{1m+1}''x_{m+1} + a_{1m+2}''x_{m+2} + \dots + a_{1i}''x_i + \dots + a_{1n}''x_n) \\ x_2 = b_2'' - (a_{2m+1}''x_{m+1} + a_{2m+2}''x_{m+2} + \dots + a_{2i}''x_i + \dots + a_{2n}''x_n) \\ \vdots \\ x_j = b_j'' - (a_{jm+1}''x_{m+1} + a_{jm+2}''x_{m+2} + \dots + a_{ji}''x_i + \dots + a_{jn}''x_n) \\ \vdots \\ x_m = b_m'' - (a_{mm+1}''x_{m+1} + a_{mm+2}''x_{m+2} + \dots + a_{mi}''x_i + \dots + a_{mn}''x_n) \end{cases} \quad (9)$$
$$Z = P_0'' - (P_{m+1}''x_{m+1} + P_{m+2}''x_{m+2} + \dots + P_i''x_i + \dots + P_n''x_n) \quad (10)$$

Шундай қилиб, симплекс усули ёрдамида ЧПМ – ни ечиш қуйидаги жараёни ифодалайди:

1. Чекланиш тенгламалар системаси (2) ни (3) кўринишга;
(1) мақсад функцияни эса (4) кўринишга келтирамиз.
2. (4) тенгламадан ва барча $P'_{m+1}, P'_{m+2}, \dots, P'_n$ оэффицентлар Б1 базиснинг $\{b'_1, b'_2, \dots, b'_m, 0, 0, \dots, 0\}$ оптимал ечими бўлиб, бу ечимда $Z = (Б1) = P'_0$ минимумга эришади.
3. (4) -формулада $P'_{m+1}, P'_{m+2}, \dots, P'_n$ лар орасида мусбатлари мавжуд деб фараз қилиб, масалан $P'_j > 0$ десак, $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_{j-1} = \dots = x_{j+1} = \dots = x_n = 0, x_j > 0$ қийматларда (3) система (6) кўринишни олади. Агар (6) да барча $a'_{1j}, a'_{2j}, \dots, a'_{mj}$ коэффицентлар мусбат бўлмаса, $\min Z = -\infty$ келиб чиқади, яъни Z функция минимумга эришмайди.

системани янги $B2 = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0\}$ базис ечимга нисбатан ёзиб (9) ни ҳосил қиламиз, мақсад функция (4) ни эса (10) кўринишда ифодалаймиз. Янги номаълумлар $x_1 = x_2 = \dots = x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n$ дан иборат бўлади. Юқорида баён этилган жараён (10) ва (9) га нисбатан яна такрорланади ва мақсадга эришилади.

Чизиқли программалаштириш масаласининг мақбулий ечимини симплекс усули билан топиш бир неча босқичдан иборат эканлигини биз юқорида кўриб ўтдик. Бу усулнинг асосий қийинчилиги шундан иборатки, ҳар бир босқичда янги базисга нисбатан мақсад функция ва чекланиш шартларини қайтадан ёзиб чиқиш керак бўлади. Агар шу босқичларнинг ҳаммаси симплекс жадваллар ёрдамида бажарилса, чизиқли программалаштириш масаласини симплекс усули билан ечиш анча осонлашади.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1m+1}x_{m+1} + \dots + a'_{1j}x_j + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a'_{2j}x_j + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ x_i + a'_{im+1}x_{m+1} + \dots + a'_{ij}x_j + \dots + a'_{in}x_n = b'_i \\ \vdots \\ x_m + a'_{mm+1}x_{m+1} + \dots + a'_{mj}x_j + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, b_s \geq 0, s = \overline{1, m} \end{cases} \quad (1)$$

Фараз қилайлик $P'_j < 0$ бўлганда ҳал қилувчи элемент учун a'_{ij} танланган бўлсин. (1) да $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$ базис номаълумлар, $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_j, \dots, x_{m+n}$ - озод номаълумлар бўлганлиги учун мақсад функция (2) га минимум қиймат берувчи оптимал ечимни топиш учун $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$ базисдан янги $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ базисга ўтишимиз ва шу янги базисга нисбатан чекланиш шартлари (1) ни

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a''_{1m+1}x_{m+1} + a''_{1m+2}x_{m+2} + ... + a''_{1j}x_j + ... + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ x_2 + a''_{2m+1}x_{m+1} + a''_{2m+2}x_{m+2} + ... + a''_{2j}x_j + ... + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \\ x_i + a''_{im+1}x_{m+1} + a''_{im+2}x_{m+2} + ... + a''_{ij}x_j + ... + a''_{in}x_n = b''_i \\ \\ x_m + a''_{mm+1}x_{m+1} + a''_{mm+2}x_{m+2} + ... + a''_{mj}x_j + ... + a''_{mn}x_n = b''_m \end{array} \right. \quad (3)$$

кўринишда, (2) мақсад функцияни эса

$$Z_{\min} + P''_{m+1}x_{m+1} + \dots + P''_jx_j + \dots + P''_nx_n = P_0 \quad (4)$$

кўринишда ёзиб оламиз. (1) – (2) масала учун симплекс жадвални тузамиз.

1- жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	...	x_i	...	x_m	x_{m+1}	...	x_i	...	x_n
x_1	b'_1	1	0	...	0	...	0	$a'_{1\ m+1}$	...	$a'_{1\ j}$	...	$a'_{1\ n}$
x_2	b'_2	0	1	...	0	...	0	$a'_{2\ m+1}$	...	$a'_{2\ j}$	...	$a'_{2\ n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	b'_i	0	0	...	1	...	0	$a'_{i\ m+1}$	...	a'_{ij}	...	$a'_{i\ n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	b'_m	0	0	...	0	...	1	$a'_{m\ m+1}$	...	a'_{mj}	...	$a'_{m\ n}$
Z	P'_0	0	0	...	0	...	0	P'_{m+1}	...	P'_j	...	P'_n

1-жадвалнинг x_1 дан бошланувчи сатрида (1) системадаги биринчи тенгламанинг озод ҳади ва номаълумлар олдидаги коэффициентлар, x_2 дан бошланувчи сатрида эса иккинчи тенгламанинг озод ҳади ва номаълумлар олдидаги коэффициентлар жойлаштирилган ва ҳоказо. Z дан бошланувчи охириги сатрида эса (2) - тенгликдаги озод ва номаълумлар олдидаги коэффициентлар жойлаштирилган. Худди шу усул билан (3) – (4) масалага мос келувчи жадвални ҳам тузиш мумкин. 1 – жадвалдан фойдаланиб 2 – жадвал қуйидагича тузилади: Z - га мос келувчи сатр элементлари орасида мусбатлари бўлса, шу элементларнинг энг каттаси яъни P'_j жойлашган устун

2 – жадвал

Базис номалар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	...	x_i	...	x_m	x_{m+1}	...	x_i	...	x_n
x_1	b_1''	1	0	...	a_{1i}''	...	0	a_{1m+1}''	...	0	...	a_{1n}''
x_2	b_2''	0	1	...	a_{2i}''	...	0	a_{2m+1}''	...	0	...	a_{2n}''
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	b_i''	0	0	...	a_{ii}''	...	0	a_{im+1}''	...	1	...	a_{in}''
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	b_m''	0	0	...	a_{mi}''	...	1	a_{mm+1}''	...	0	...	a_{mn}''
Z	P_0''	0	0	...	P_i''	...	0	P_{m+1}''	...	0	...	P_n''

элементларидан мусбатини белгилаб оламиз, масалан, $a'_{ij} > 0$ бўлсин. Ажратилган a'_{ij} элементлар билан битта сатрда жойлашган озод ҳадлар b'_i ни шу a'_{ij} ларга нисбатини тузамиз ва тузилган нисбатларнинг энг кичигини $\frac{b'_i}{a'_{ij}}$ билан белгилаймиз, бунда a'_{ij} ҳал қилувчи элементдир. 1 – жадвалда ҳал қилувчи элемент, a'_{ij} тўртбурчак ичига олинган, у турган устун ва сатр стрелкалар билан кўрсатилган.

Ҳал қилувчи a'_{ij} элемент 1 дан фарқли бўлса, уни 1 га тенг қилиб олиш мумкин. Бунинг учун шу элемент жойлашган сатрнинг барча элементларни a'_{ij} га бўлиш кифоя. Бунинг ўзи эса (1) да i тенгламани x_i га нисбатан ечиш билан тенг кучлидир. Энди 1 – жадвал сатрларининг элементларини шундай ўзгартирамизки, ҳал қилувчи элемент турган устундаги шу элементдан бошқалари 0 га айлансин. Бунинг учун 1–жадвалнинг i сатрини $-a'_{kj}$, $(k = \overline{1, m}, k \neq i)$ ва p'_j га кўпайтириб, мос равишда $k = 1, 2, \dots, m+1$, $k \neq i$ сатрларга қўшамиз. У ҳолда юқорида келтирилган 2 – жадвал маълумотлари келиб чиқади. Юқорида келтирилиб ўтилган иш натижасига кўра аввалги $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$ базисдаги x_i ўрнига x_j келади ва 2 – жадвалда кўрсатилганидек янги $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$ базис ҳосил бўлади.

Агар 2 - жадвалнинг охириги сатридаги барча $P_i'', P_{m+1}'', \dots, P_n''$ элемент манфий бўлса, $Z_{\min} = P_0''$ бўлади, акс ҳолда юқоридаги келтирилган усул билан 3 – жадвални тузишга тўғри келади. Ушбу жараён оптимал ечим топилгунча ёки масаланинг ечими мавжуд эмаслиги исботлангунга қадар давом эттирилади.

Агар бирор N – жадвалда ҳал қилувчи элемент туриши мумкин бўлган устуннинг барча элементлари манфий бўлса, $Z_{\min} = -\infty$ бўлиб, масала ечимига эга эмаслиги исботланган бўлади.

Чизиқли программалаштириш масаласи берилган бўлиб,

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min (\max),$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad (j = \overline{1, n}), \quad x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n})$$

унинг таянч ечими $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*, 0, 0, \dots, 0)$ бўлсин. Агарда қўйилган масала минимумга ечилса, таянч ечим учун $\Delta_j \leq 0$, акс ҳолда $\Delta_j \geq 0$ шартлар j – нинг ихтиёрий қийматлари учун бажарилиши лозимдир.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 = 4 \\ x_2 + 4x_4 + x_5 = 5 \\ x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 8 \end{cases} \quad (5)$$

системанинг манфий бўлмаган ечимлари орасидан

$$Z = 4x_4 - x_5 \quad (6)$$

функцияга минимум қиймат берувчи ечимни топинг.

Ушбу масалани қуйидагича ёзиш мумкин

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 = 4 \\ x_2 - 4x_4 + x_5 = 5 \\ x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 8 \\ Z - 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(5) системани x_1, x_2, x_3 га нисбатан осонгина ечиш мумкин. Шунинг учун бу номаълумларни (5) системанинг базис номаълумлари деб қабул қиламиз. Базис номаълумлари x_1, x_2, x_3 ва Z ларни жадвалнинг биринчи устунига, озод ҳадларни иккинчи устунига, x_1 нинг коэффициентларини учинчи устунига ва ҳоказо x_5 нинг коэффициентларини охирги устунига ёзиб, қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

3 – жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	4	1	0	0	2	-3
x_2	5	0	1	0	-4	1
x_3	8	0	0	1	3	2
$Z_j - c_j$	0	0	0	0	-4	1

Z дан бошланувчи охирги сатрда мусбат сон бўлганлиги учун Z ни камайтириш имконияти бор. Шунинг учун x_1, x_2, x_3 базисдан янги базисга ўтамиз. Бу иш симплекс жадваллар усули ёрдамида қуйидагича бажарилади:
1. Z дан бошланувчи охирги сатрда ягона мусбат 1 сони мавжуддир.

Шу сабабли у жойлашган устунни ҳал қилувчи устун деб қараймиз (агар охирги сатрда мусбат сонлар икки ва ундан ортиқ бўлса, уларнинг энг каттаси жойлашган устун ҳал қилувчи устун бўлади).

Ҳал қилувчи устундан мусбат элементларни олиб, уларга мос келувчи озод ҳадларни шу элементларига нисбатини қараймиз. Уларнинг нисбатларидан энг кичигининг махражи ҳал қилувчи элемент бўлади, яъни

$y \min \left\{ \frac{5}{1}; \frac{8}{2} \right\} = 4$ га тенг. Демак 3 – жадвалдаги ҳал қилувчи элемент [2] –

бўлиб, у тўғри тўртбурчак ичига олинган ва элемент жойлашган сатр ва устун стрелка билан кўрсатилган.

Ҳал қилувчи элемент [2] га тенг бўлгани учун, шу элемент турган сатри элементларини [2] га бўламиз.

4.жадвалнинг қолган сатр элементларини $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj} \cdot a_{ip}}{a_{kp}}$

формула орқали топиб, 4 – жадвал элементларини ҳосил қиламиз:

$$a'_{14} = a_{14} - \frac{a_{34} \cdot a_{15}}{a_{35}} = 2 - \frac{3 - (3)}{2} = \frac{4 + 9}{2} = \frac{13}{2} = 6,5,$$

$$a'_{24} = a_{24} - \frac{a_{34} \cdot a_{25}}{a_{35}} = 4 - \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{-8 - 3}{2} = \frac{-11}{2} = -5,5,$$

$$p'_4 = p_4 - \frac{a_{34} \cdot p_5}{a_{35}} = 4 - \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{-8 - 3}{2} = \frac{-11}{2} = -5,5$$

4 – жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	16	1	0	1/3	6,5	0
x_2	1	0	1	-1/2	-5,5	0
x_3	4	0	0	1/2	3/2	1
$Z_j - c_j$	-4	0	0	-0	-5,5	0

Берилган ЧПМ сида мақсад функцияга минимум қиймат берувчи номаълум ўзгарувчиларнинг манфий бўлмаган қийматларини топиш талаб этилгани учун 4 – жадвалнинг $Z_j - c_j$ қаторининг барча элементлари учун $Z_j - c_j \leq 0$ шартни бажарилганлигини эътиборга олиб, 4 –жадвалнинг базис номаълумлар устунидаги ўзгарувчиларни озод ҳадлар устунидаги мос элементлари билан тенглаштирилади, яъни $x_1 = 16$; $x_2 = 1$; $x_3 = x_4 = 0$; $x_5 = 4$ ва топилган ечимларга асосланган ҳолда мақсад функциянинг энг кичик қиймати $Z_{\min} = -4$ га тенг эканлиги аниқланади.

2.5. Сунъий базис усули

Чизиқли программалаштириш масалаларини симплекс усул билан ечиш учун чекланиш шартлари албатта базис номаълумларга нисбатан ечилган бўлишлигини юқорида кўриб ўтган эдик. Унда қуйидаги (1) – муносабат ўринлидир.

[illegible]

Агар чекланиш тенгламалари системасида номаълумлар сони тенгламалар сонидан етарлича катта бўлганида чекланиш шартларини (1) кўринишга келтириш анча қийинчиликка олиб келар эди. Шунинг учун бундай масалаларни ечишнинг энг қулай усулларида бири сунъий базис усулидир.

Қуйидаги кўринишдаги

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{m1}x_1 + \overline{\alpha}_{m2}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_n = \overline{\beta}_m \\ x_j \geq 0, j=1,n, \beta_i \geq 0, i=\overline{1,m}. \end{cases} \quad (2)$$

системанинг ечимлари орасидан

$$P = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j \quad (3)$$

функцияга минимум қиймат берувчи оптимал ечимни симплекс усули билан ечиш талаб қилинган бўлсин. Чекланиш шартлари (2) базис номаълумларга нисбатан ечилмаган бўлганлиги сабабли, тўғридан-тўғри симплекс усули билан ечиб бўлмайди. Бунинг учун қуйидаги тенгламалар системаси

$$\begin{cases} y_1 = \beta_1 - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n) \\ y_2 = \beta_2 - (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_m = \beta_m - (\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_n) \end{cases} \quad (4)$$

билан аниқланадиган $y_1, y_2, \dots, y_m$ сунъий номаълумлар киритамиз.

Агар $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$ бўлса (4) системанинг ечимлари (2) системанинг ҳам ечими бўлади. Ёрдамчи мақсад функциясини тузамиз:

$$Z = y_1 + y_2 + \dots + y_m \quad (5)$$

ҳамда (4) шартни қаноатлантирадиган минимумни топамиз. Энди (4) – (5) масалани симплекс усули билан ечиш мумкин.

Усулни m марта қўллаш натижасида $y_1, y_2 \dots y_m$ сунъий номаълумлар қатнашмаган янги $x_1, x_2 \dots x_m$ базисга ўтилади.

Янги базисдан $F \geq 0$ шарт ўринли бўлса, қўйилган (2)- (6) масала $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$ бўлганда $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$ шартни қаноатлантирадиган ечимга эга бўлмайди. Агар $\min F = 0$ бўлса, $\{x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0\}$ базис ечим (4) – (5) масаланинг оптимал ечими бўлади. $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$ бўлганда (6) дан $x_1, x_2, \dots, x_m$ базис номаълумларга нисбатан ечилган чекланиш шартларини ҳосил қиламиз. У ҳолда (3) муносабат қуйидаги кўринишда бўлади.

Қуйидаги чекланиш шартларини

қаноатлантирадиган ҳамда (7) мақсад функциянинг минимумини симплекс жадвал усули билан топиш мумкин, чунки чекланиш шартлари базис номаълумларга нисбатан ечилгандир.

Мисол: Ушбу чекланишлар системасини каноатлантирувчи

хамда $Z = -x_1 - x_2 - x_3$ мақсад функцияга энг кичик қиймат берувчи манфий бўлмаган ечим топилсин.

Ечиш: Чекланиш шартлари базис номаълумларга нисбатан ечилмаганлиги сабабли симплекс усулдан фойдаланиб бўлмайди. Симплекс жадвал усули билан ечиш учун сунъий базис усулидан фойдаланамиз. y_1, y_2 сунъий номаълумлар ёрдамида бу масалага мос чизикли программалаштириш масаласини қуйидагича ёзамиз.

Бу система учун манфий бўлмаган $x_j \geq 0, (j = \overline{1,3})$ ларни ва

ёрдмачи мақсад функцияга минимум қиймат берувчи y_1, y_2 ларни топамиз.

Дастлабки жадвал элементлари учун базис номаълумлар y_1, y_2 ларни олиб, куйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} y_1 - x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ y_2 + 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ F + 2x_1 + 2x_3 = 2 \\ Z + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ушбу масалага мос 1-симплекс жадвални тўлдирамиз.

1 – жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
y_1	2	-1	1	1	1	0
y_2	0	3	-1	1	0	1
F	2	2	0	2	0	0
Z	0	1	1	1	0	0

F дан бошланувчи сатрда мусбат элементлар икки жойда бўлиб, улар $[2 > 0]$ дан иборатдир. Ҳал қилувчи устун x_1 ёки x_3 ларга мос устунлардан ихтиёрий биттасини танлаш мумкин. Айтайлик x_1 га мос келувчи устун ҳал қилувчи устун бўлсин. ҳал қилувчи элемент [3]-ни танлаймиз ва тўғри тўртбурчак ичига оламиз ва шу сатр элементларини ҳал қилувчи элементга бўлиб юборамиз ва 2 – жадвалга эга бўламиз.

2 - жадвал

⊕

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
y_1	2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
x_1	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
F	2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
Z	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

Юқоридаги 2 – жадвал қуйидагича тўлдирилади.

Озод ҳадлар устунидаги элементлар қуйидагича аниқланади.

$$b'_1 = b_1 - \frac{b_2 \cdot a_{11}}{a_{21}} = 2 - \frac{0 \cdot (-1)}{3} = 2 - 0 = 2, \quad b'_2 = \frac{0}{3} = 0$$

$$b'_3 = b_3 - \frac{b_2 \cdot a_{31}}{a_{21}} = 2 - \frac{0 \cdot 2}{3} = 2 - 0 = 2$$

$$b'_4 = b_4 - \frac{b_2 \cdot a_{41}}{a_{21}} = 0 - \frac{0 \cdot 1}{3} = 0$$

Устун элементлар: $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj} \cdot a_{ip}}{a_{kp}}$ формулага кўра ҳал қилувчи устундаги

элементлар p – устун элементларига тенг бўлиб қолади, яъни $p = j$. У ҳолда юқоридаги формула бўйича

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj} \cdot a_{ip}}{a_{kp}} = a_{ij} - a_{ij} = 0$$

га тенг эканлиги аниқланади.

Шунинг учун ҳал қилувчи устундаги аниқланган ҳал қилувчи элемент 1 – дан ташқариси 0 – лардан иборат бўлади.

X_2 – устундаги элементлар юқорида келтириб ўтилган формулаларга асосланган ҳолда қуйидагича аниқланади.

$$a'_{12} = a_{12} - \frac{a_{22} \cdot a_{11}}{a_{21}} = 1 - \frac{-1 \cdot (-1)}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad a'_{22} = -\frac{1}{3},$$

$$a'_{32} = a_{32} - \frac{a_{22} \cdot a_{31}}{a_{21}} = 0 - \frac{-1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3},$$

$$a'_{42} = a_{42} - \frac{a_{22} \cdot a_{41}}{a_{21}} = 1 - \frac{-1 \cdot 1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

X_3 – устундаги элементлар .

$$a'_{13} = a_{13} - \frac{a_{22} \cdot a_{11}}{a_{21}} = 1 - \frac{-1 \cdot (-1)}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \quad a'_{23} = \frac{1}{3},$$

$$a'_{33} = a_{33} - \frac{a_{22} \cdot a_{31}}{a_{21}} = 2 - \frac{-1 \cdot 2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3},$$

$$a'_{43} = a_{43} - \frac{a_{22} \cdot a_{41}}{a_{21}} = 1 - \frac{-1 \cdot 1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3};$$

Y_1 – устундаги элементлар:

$$a'_{14} = a_{14} - \frac{a_{24} \cdot a_{11}}{a_{21}} = 1 - \frac{0 \cdot (-1)}{3} = 1 - 0 = 1; \quad a'_{24} = \frac{0}{3} = 0;$$

$$a'_{34} = a_{34} - \frac{a_{24} \cdot a_{31}}{a_{21}} = 0 - \frac{0 \cdot 2}{3} = 0 - 0 = 0;$$

$$a'_{44} = a_{44} - \frac{a_{24} \cdot a_{41}}{a_{21}} = 0 - \frac{0 \cdot 1}{3} = 0 - 0 = 0.$$

Y_2 –устундаги элементлар:

$$a'_{15} = a_{15} - \frac{a_{25} \cdot a_{11}}{a_{21}} = 0 - \frac{1 \cdot (-1)}{3} = \frac{1}{3}; \quad a'_{25} = \frac{1}{3};$$

$$a'_{35} = a_{35} - \frac{a_{25} \cdot a_{31}}{a_{21}} = 0 - \frac{-1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3};$$

$$a'_{45} = a_{45} - \frac{a_{25} \cdot a_{41}}{a_{21}} = 0 - \frac{1 \cdot 1}{3} = -\frac{1}{3}$$

аниқланиб, 2 – жадвал маълумотларига эга бўламиз.

2 –жадвал элементларидан ҳал қилувчи элементни топамиз. F сатрда мусбат элементлар $\frac{2}{3} > 0$ ва $\frac{4}{3} > 0$ дан иборат. Уларни таққослаб энг кичигини

танлаймиз. $\min\left\{\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\} = \frac{2}{3}$. Демак ҳал қилувчи устун X_2 – га мос келувчи устундир. Ҳал қилувчи элемент эса $\frac{2}{3}$ бўлади ва у 2 – жадвалда тўғри тўртбурчак ичига олинган. 3 – жадвалнинг элементлари юқорида келтирилган формулага кўра амалга оширилиб тўлдирилади.

3 – жадвал.

Базис номалар	Ўзод ҳаллар	X_1	X_2	X_3	y_1	y_2
x_1	3	0	1	2	$3/2$	$1/2$
x_2	1	1	0	1	$1/2$	$1/2$
F	0	0	0	0	-1	-1
Z	-4	0	0	-2	-2	-1

Охирги 3 - жадвалда F – дан бошланувчи сатрда мусбат элемент мавжуд эмас. Топилган $\{3; 1; 0; 0\}$ ечим оптимал ечим бўлади, чунки бу ечимда $F = 0$. Бундан эса $y_1 = y_2 = 0$ да мақсад функция $Z = -4 + 2x_3$ дан иборат бўлиб, базис ечим $B = \{3; 1; 0\}$ бўлади. Топилган базис ечимда мақсад функция $Z(B) = -4$. Демак $x_1 = 3; x_2 = 1; x_3 = 0$ берилган масаланинг оптимал ечими бўлиб, Z мақсад функциянинг энг кичик қиймати $Z_{\min} = -4$ га тенг бўлади.

Назорат учун саволлар

1. Чизикли программалаштириш масаласини баён қилинг?
2. Чизикли программалаштириш умумий масаласи математик моделини вектор матрица ва йиғинди кўринишида ёзинг?
3. Чизикли программалаштириш умумий масаласи геометрик талқинини беринг?
4. Ечимлар кўпбурчаги деб нимага айтилади?
5. Чизикли функция куп бурчакнинг каерда узининг оптимал кийматига эришади?
6. Чизикли программалаштириш умумий масаласини ечишнинг график усули нимага асосланган?
7. Таянч ечим деб нимага айтамыз ва биринчи таянч (базис) ечим қандай топилади?
8. Қандай шарт ўринли бўлганда таянч ечим оптимал ечим бўлади?
9. Ҳал қилувчи элемент деб қандай элементга айтилади?
10. Ҳал қилувчи устун қандай аниқланади?
11. Қандай ўзгарувчилар сунъий ўзгарувчилар дейилади ?
12. Сунъий ўзгарувчилар қачон киритилади?

Адабиётлар

1. Т.Х.Холматов, Х.С. Умаров Курилишни бошқаришда иқтисодий-математик усуллар. Ўқув қўлланма, Самарқанд 2004 й.196 бет.
2. М.Атхамов, Г.Отабоев Планлаштиришда математик методларни қўлланилиши. Тошкент.Ўқитувчи 1982 й.
3. Ю.Н.Кузнецов и.др. Математическое программирование. М. Высшая школа 1976 г.
- 4.И.Г.Шепелев «Математические методы и модели управления в строительстве» М: Высшая школа, 1980 г.
5. Шодиев Т.Ш. ва бошқ. «Экономика» Тошкент ,Шарқ конд. 1999 й.

3- Мавзу: Чизиқли программалаштиришнинг иккиланмалик назарияси (2 соат)

Режа:

- 3.1. Чизиқли программалаштиришнинг ўзаро икки ёқлама масалалари.**
- 3.2. Ўзаро икки ёқлама масалалар математик моделларининг турлари**
- 3.3. Тўғри ва унга иккилама масалани ечиш усули.**

Таянч сўз ва иборалар: ўзаро икки ёқлама масала; чизиқли функция; экстремум; чекланиш шартлари; дастлабки масала; симметрик; симметрик бўлмаган;

3.1. Чизиқли программалаштиришнинг ўзаро икки ёқлама масалалари

Ҳар қандай чизиқли программалаштириш масаласига, унга ўзаро икки ёқлама бўлган чизиқли программалаштириш масаласи тўғри келади, яъни бирининг ечимидан иккинчисининг ечими келиб чиқади.

Берилган дастлабки масала ва унга нисбатан ўзаро икки ёқлама бўлган масала ҳам бирор – бир иқтисодий жараёни ифода этади. Қуйидаги чизиқли

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j, \quad (1)$$

функцияга максимум қиймат берадиган, чекланиш тенгсизликлари системасининг манфий бўлмаган ечими топилсин.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{array} \right\} \quad (2)$$

(1)–(2) масалага нисбатан икки ёқлама бўлган масаланинг математик моделини тузамиз. Бунинг учун $y_i (i = \overline{1, m})$ билан i –хилдаги ресурс бирлигининг нархини белгилаймиз, у ҳолда ҳар бир j –бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф бўлган ресурснинг нархи

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$$

га тенг бўлади. Сарф қилинган умумий ресурснинг нархи ишлаб чиқарилган маҳсулот нархидан ошиб кетмаслиги учун

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (3)$$

шарт ўринли бўлиши лозим. Корхона $b_i (i = \overline{1, m})$ бирлик ресурсга эга бўлганлиги учун сарф этилган умумий ресурснинг нархи

$$F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (4)$$

га тенг бўлади. (3) – (4) масала дастлабки (1) – (2) масалага нисбатан икки ёқлама масаланинг математик моделини ифодалайди.

Бу масалани иқтисодий нуқтаи назардан қуйидагича талқин қилиш мумкин. Ресурс миқдори b_i га тенг бўлиб, маҳсулот бирлигининг нархи c_j га тенг бўлганда, ресурс бирлигининг нархини умумий сарф энг кам бўладиган қилиб танлаш керак. Бошқача қилиб айтганда (4) функциянинг чекланиш шартлари (3) ни қаноатлантирадиган энг кичик қиймати топишдан иборатдир.

Дастлабки (1) – (2) масалани матрицавий кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{array}{l} Z_{\max} = CX \\ AX \leq B, \quad X \geq 0 \end{array}$$

Унга икки ёқлама (3)–(4) масалани эса қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{array}{l} F_{\min} = B'Y \\ A'Y \geq C, \quad Y \geq 0. \end{array}$$

Матрица формада ёзилган дастлабки ҳамда икки ёқлама масалаларнинг матрицалари ва векторлари бир-бирига нисбатан транспонирлангандир. Уларнинг кўринишлари қуйидагича ифодаланади:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ b_m \end{pmatrix}, \quad B' = (b_1, b_2, \dots, b_m), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad c' = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ c_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Умуман олганда чизикли программалаштиришнинг ўзаро икки ёқлама масалалари халқ хўжалигининг барча тармоқларини жумладан қурилишни мақбулий бошқариш масалаларини ечшда муҳим восита бўлиб хизмат қилади.

Биз қуйида айнан шу кўринишдаги масалалар билан танишиб чиқамиз.

3.2. Ўзаро икки ёқлама масалалар математик моделларининг турлари

Ўзаро икки ёқлама масалаларнинг математик моделлари икки хил кўринишда бўлади.

I. Симметрик бўлмаган ўзаро икки ёқлама масалалар

Симметрик бўлмаган ўзаро икки ёқлама масалаларнинг дастлабки масаласида чекланиш шартлари тенгламалар системасидан иборат бўлиб, унга нисбатан икки ёқлама бўлган масалада эса чекланиш шартлари тенгсизликлар системасидан иборат бўлади ва номаълумлар манфий қийматлар ҳам қабул қилиши мумкин бўлади.

Масалан:

а) Дастлабки масала Икки ёқлама масала.

$$Z_{\min} = CX$$

$$Z_{\max} = B'Y$$

$$AX = B$$

$$A'Y \leq C';$$

$$X \geq 0$$

$$Y \geq 0 \text{ ёки } Y \leq 0.$$

Дастлабки масала Икки ёқлама масала

$$Z_{\max} = CX$$

$$Z_{\min} = B'Y$$

$$AX = B$$

$$A'Y \leq C';$$

$$X \geq 0$$

$$Y \geq 0 \text{ ёки } Y \leq 0.$$

2. Симметрик бўлган ўзаро икки ёқлама масалалар

Симметрик бўлган икки ёқлама масалаларнинг дастлабки ва унга нисбатан икки ёқлама бўлган масалаларида чекланиш шартлари тенгсизликлар системасидан иборат бўлиб, изланаётган номаълум ўзгарувчилар албатта мусбат бўлиши керак.

Масалан:

а) Дастлабки масала

$$Z_{\max} = CX$$

$$AX \leq B$$

$$X \geq 0$$

Икки ёқлама масала.

$$Z_{\min} = B'Y$$

$$A'Y \geq C';$$

$$Y \geq 0$$

Б). Дастлабки масала

$$Z_{\min} = CX$$

$$AX \leq B$$

$$X \geq 0$$

Икки ёқлама масала

$$Z_{\max} = B'Y$$

$$A'Y \leq C';$$

$$Y \geq 0$$

Мисол: Дастлабки масала: ушбу мақсад

$$Z = 4x_2 - 3x_4 - 7x_5$$

функциянинг чекланиш тенгламалари системасини

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 4x_4 + x_5 &= 10 \\ 84x_1 + x_3 + 12x_4 - 6x_5 &= 23 \\ 13x_2 + 5x_5 + 7x_6 &= 15 \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1,6} \end{aligned} \right\}$$

қаноатлантирадиган минимумини топиш масаласига икки ёқлама масала тузилсин.

Ечиш. Дастлабки масала учун

$$C = (0; 4; 0; -3; -7; 0),$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 84 & 0 & 1 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\min} = CX; \quad AX = B; \quad X \geq 0 \text{ бўлади.}$$

Дастлабки масала симметрик бўлмаган масалага тўғри келади.

Шунинг учун а) босқичга асосан икки ёқлама масала қуйидагича бўлади.

$$F_{\max} = B'Y; \quad A'Y \leq C'$$

бу ерда

$$C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 84 & 0 \\ 2 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = (10; 23; 15).$$

ёки умумий кўринишда қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} 2y_1 + 84y_2 \leq 0 \\ 2y_1 + 13y_3 \leq 4 \\ y_2 \leq 0 \\ -4y_1 + 12y_2 \leq -3 \\ y_1 - 6y_2 + 5y_3 \leq -7 \\ 7y_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 10y_1 + 23y_2 + 15y_3$$

3.3. Тўғри ва унга иккилама масалани ечиш усули

Бизга қуйидаги дастлабки

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ва унга нисбатан икки ёқлама бўлган масалалар

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\leq c_j, \quad j = \overline{1, n} \\ y_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

берилган бўлсин.

Теорема. Дастлабки масала ечимга эга бўлса, унга икки ёқлама бўлган масала ҳам ечимга эга бўлади ва қуйидаги $\min Z = \max F$ тенглик ўринли бўлади.

Агар ўзаро икки ёқлама масаланинг бирортасида мақсад функция чегараланмаган бўлса, иккинчи масала ечимга эга бўлмайди. Дастлабки масаланинг ечими, унга нисбатан икки ёқлама масаланинг ёки икки ёқлама масаланинг ечимидан дастлабки масаланинг ечимини келтириб чиқаришга имкон берадиган симплекс усул, ўзаро икки ёқлама симплекс усул дейилади.

Бу усул ўзаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремасига асослангандир. Айтайлик ўзаро икки ёқлама симплекс усулнинг асосий дастлабки (1) ва (2) масалалари берилган бўлсин:

$$\left. \begin{aligned} Z_{\min} &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, n} \end{aligned} \right\}$$

ва унга нисбатан икки ёқлама бўлган (3) – (4) масалага симплекс усулни қўллаш учун чекланиш шартлари базис номаълумларга нисбатан ечилган бўлиши лозим.

$$x_{n+i} = -b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad b_i \leq 0; i = \overline{1, m} \quad (5)$$

$$y_{m+j} = -\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i + c_j, \quad c_j \geq 0; j = \overline{1, n} \quad (6).$$

Бу ерда (5), (6) тенгламалар системаси (2) ва (4) тенгсизликлар системасидан қўшимча $x_{n+i} \geq 0, i = \overline{1, m}; y_{m+j} \geq 0, j = \overline{1, n}$ номаълумларни киритиш натижасида келиб чиқади. (5) ва (6) да $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ номаълумлар берилган масала учун базисдир. $x_1, x_2, \dots, x_n$ озод номаълумлардир $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$ номаълумлар эса икки ёқлама масала учун базис, $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$ лар озод номаълумлар бўлади. Ўзаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремасига кўра $\min Z = \max F$. Демак юқоридаги масалаларнинг бирини оптимал ечимини топсак, иккинчисининг ҳам оптимал ечимини топган бўламиз.

Бунинг учун берилган масаладаги базис номаълумлар, икки ёқлама масаладаги озод номаълумлар, икки ёқлама масаладаги базис номаълумлар билан дастлабки масаладаги озод номаълумлар ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш кифоядир.

$$\begin{array}{ccccccc} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+m} & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & y_{m+1} & y_{m+2} & \dots & y_{m+n} \end{array}$$

Берилган масаланинг мақбулий (оптимал) ечими

$\{0; 0; \dots; 0; x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}\}$ бўлса, унга икки ёқлама масаланинг оптимал ечими

$\{y_1, y_2, \dots, y_m, 0, 0, \dots, 0\}$ бўлиб, y_1 га x_{n+1} нинг олдидаги коэффициент $y_1 = P_{n+1}$ га; y_2 эса x_{n+2} нинг олдидаги коэффициент $y_2 = P_{n+2}$ га; ва ҳоказо муносабатлар ўринлидир.

Мисол. қуйидаги масалага икки ёқлама масала тузилсин ва уларнинг ечими ўзаро икки ёқлама симплекс усули билан ечилсин.

$$\left. \begin{aligned} Z_{\min} &= 2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &\geq 10 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\geq 4 \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1,4} \end{aligned} \right\} \text{ёки} \begin{cases} x_5 - x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = -10 \\ x_6 - 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4 \end{cases}$$

Ечиш. Дастлабки масалага икки ёқлама масала қуйидагича

$$\left. \begin{aligned} F_{\max} &= 10y_1 + 4y_2 \\ y_1 + 2y_2 &\leq 2 \\ 2y_1 + y_2 &\leq 4 \\ y_1 - 2y_2 &\leq 0 \\ 4y_1 + 3y_2 &\leq 12 \\ y_j &\geq 0, j = \overline{1,2} \end{aligned} \right\} \text{ёки} \left. \begin{aligned} F_{\max} &= 10y_1 + 4y_2 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 &= 2 \\ 2y_1 + y_2 + y_4 &= 4 \\ y_1 - 2y_2 + y_5 &= 0 \\ 4y_1 + 3y_2 + y_6 &= 12 \\ y_j &\geq 0, j = \overline{1,2} \end{aligned} \right\}$$

Дастлабки масаладаги x_4, x_5 базис номаълумлар билан икки ёқлама масаладаги y_1, y_2 озод номаълумлар ва берилган масаладаги x_1, x_2, x_3, x_4 озод номаълумлар билан икки ёқлама масаладаги y_3, y_4, y_5, y_6 базис номаълумлар ўртасида

$$\begin{array}{cccccc} x_4 & x_5 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \text{ва} & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{array}$$

ўзаро бир қиймати мосликни ўрнатиб, бевосита биринчи масаланинг ечимидан иккинчи масаланинг ечими келиб чиқишини аниқлаймиз. Икки ёқлама масалалар учун симплекс усулни қўллаш осондир, чунки озод ҳадлар мусбатдир. Ушбу маълумотлардан фойдаланиб, 1 – жадвални ҳосил қиламиз.

1 – жадвал

↓

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_3	2	1	2	1	0	0	0
y_4	4	2	1	0	1	0	0
y_5	0	1	-2	0	0	1	0
y_6	12	4	3	0	0	0	1
→ Z	0	-10	-4	0	0	0	0

1 – жадвалнинг Z – каторидаги манфий сонлар (– 10, – 4) дан иборат бўлиб, уларнинг абсолют қиймати бўйича энг каттаси 10 бўлганлиги учун, (– 10 < 0) га мос келувчи устун ҳал қилувчи устун бўлади, y_3 – базис номаълум, y_1 – базис билан алмашинади. Бу ҳолдаги таянч (оптимал бўлмаган) ечим {0; 0; 2; 4; 0; 12} дан иборат бўлиб, мақсад функциянинг қиймати

Z = 0 га тенг бўлади.

Ҳал қилувчи элемент, ҳал қилувчи устунда ётади. У элемент қуйидагича аниқланади.

$$\min\left\{\frac{2}{1}; \frac{4}{2}; \frac{0}{1}; \frac{12}{4}\right\}$$

ва уларнинг энг кичигининг махражи ҳал қилувчи элемент бўлади. Демак, ҳал қилувчи элемент 1 – га тенг бўлганлиги учун y_5 – га мос келувчи қатор элементлари ўзгаришсиз қолади.

Озод ҳадлар устундаги элементлар қуйидагича топилади.

$$b'_1 = b_1 - \frac{b_3 \cdot a_{11}}{a_{13}} = 2 - \frac{0 \cdot 1}{1} = 2 - 0 = 2,$$

$$b'_2 = b_2 - \frac{b_3 \cdot a_{21}}{a_{13}} = 4 - \frac{0 \cdot 2}{1} = 4 - 0 = 4, \quad b'_3 = 0,$$

$$b'_4 = b_4 - \frac{b_3 \cdot a_{41}}{a_{31}} = 12 - \frac{0 \cdot 4}{1} = 12 - 0 = 12,$$

$$b'_5 = b_5 - \frac{b_3 \cdot a_{51}}{a_{31}} = 0 - \frac{0 \cdot (-10)}{1} = 0 - 0 = 0.$$

Y_1 – га мос келувчи устундаги элементлар ҳал қилувчи элемент 1 – дан ташқариси 0 –лардан иборат бўлади, яъни

$$a'_{11} = 0; a'_{21} = 0; a'_{31} = 1; a'_{41} = 1; a'_{51} = 0,$$

Y_2 – га мос келувчи устундаги элементлар қуйидагича аниқланади:

$$a'_{12} = a_{12} - \frac{a_{32} \cdot a_{11}}{a_{31}} = 2 - \frac{-2 \cdot 1}{1} = 2 + 2 = 4,$$

$$a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{32} \cdot a_{21}}{a_{31}} = 1 - \frac{-2 \cdot 2}{1} = 1 + 4 = 5, \quad a'_{32} = 0;$$

$$a'_{42} = a_{42} - \frac{a_{32} \cdot a_{41}}{a_{31}} = 3 - \frac{-2 \cdot 4}{1} = 3 + 8 = 11,$$

$$a'_{52} = a_{52} - \frac{a_{32} \cdot a_{51}}{a_{31}} = -4 - \frac{-2 \cdot (-10)}{1} = -4 - 20 = 24.$$

Y_3, Y_4, Y_5 устунларга мос келувчи элементлар ҳам юқоридагидек топилади:

$$a'_{13} = 1 - \frac{0 \cdot 1}{1} = 1; a'_{23} = 0; a'_{33} = 0; a'_{43} = 0; a'_{53} = 0;$$

$$a'_{14} = 0; a'_{24} = 1; a'_{34} = 0; a'_{44} = 0; a'_{54} = 0;$$

$$a'_{15} = 0 - \frac{1 \cdot 1}{1} = -1; a'_{25} = 0 - \frac{1 \cdot 1}{1} = -1; a'_{35} = 1;$$

$$a'_{45} = 0 - \frac{1 \cdot 4}{1} = -4; a'_{55} = 0 - \frac{1 \cdot (-10)}{1} = 10;$$

$$a'_{16} = 0; a'_{26} = 0; a'_{36} = 0; a'_{46} = 1; a'_{56} = 0.$$

Демак: топилган натижалардан фойдаланиб, 2 – жадвал элементларини ҳосил қиламиз.

2 – жадвал.

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
Y_3	2	0	4	1	0	-1	0
Y_4	4	0	5	0	1	-1	0
Y_1	0	1	-2	0	0	1	0
Y_6	12	1	11	0	0	-4	1
Z	0	0	-24	0	0	10	0

2 – жадвал маълумотларига кўра масаланинг таянч ечими $\{0, 0, 2, 4; 0, 12\}$ дан иборат бўлиб, мақсад функциянинг қиймати $Z = 0$ бўлади. Ушбу топилган таянч ечим мақбулий ечим эмасдир, чунки жадвалнинг Z- қаторида $-24 < 0$ элемент мавжуд.

Юқоридаги бажарилганларга асосан 3 – жадвални ҳосил қиламиз.

3 – жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
Y_2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0
Y_4	$\frac{3}{2}$	0	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	0
Y_1	1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
Y_6	$\frac{13}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	1
Z	12	0	0	6	0	4	0

3-жадвал маълумотларидан кўриниб турибдики, топилган ечим $\left\{1; \frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}; 0; \frac{13}{2}\right\}$ оптимал ечимдир, чунки Z – қатор элементлари учун $Z \geq 0$ оптималлик шarti ўринлидир. Ушбу топилган оптимал ечимда мақсад функциянинг қиймати $Z_{\max} = 12$ га тенглиги жадвалдан аниқланади.

$$x_1 = x_3 = 6, \quad x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = x_5 = 4, \quad x_4 = x_6 = 0.$$

бўлиб, ушбу қийматлар дастлабки масаланинг ечими:

$$Z_{\min} = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 12 \text{ бўлади.}$$

Демак, бундан асосий теореманинг ўринли эканлигини тасдиқлаш мумкин.

$$\min Z = \max F = 12.$$

Бу эса масаланинг тўғри ечилганлигини билдиради.

Назорат учун саволлар

1. Чизиқли программалаштириш масаласида иккиланганлик маъноси нима?
2. Симметрик бўлмаган ўзаро икки ёқлама масалани изоҳлаб беринг?
3. Дастлабки масала билан икки ёқлама масалалар ўртасида қандай фарк мавжуд?
4. Симметрик бўлган ўзаро икки қлама масалаларни изоҳлаб беринг?
5. Ўзаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремасини изоҳлаб беринг?

Адабиётлар

1. Т.Х.Холматов, Х.С. Умаров Курилишни бошқаришда иқтисодий-математик усуллар. Ўқув қўлланма, Самарқанд 2004 й.196 бет.
2. М.Атхамов, Г.Отабоев Планлаштиришда математик методларни қўлланилиши. Тошкент.Ўқитувчи 1982 й.
3. Ю.Н.Кузнецов и.др. Математическое программирование. М. Высшая школа 1976 г.
- 4.И.Г.Шепелев «Математические методы и модели управления в строительстве» М: Высшая школа, 1980 г.
5. Шодиев Т.Ш. ва бошқ. «Экономика» Тошкент ,Шарқ конд. 1999 й.

4- Мавзу: Чизикли программалаштиришнинг махсус масалалари
(6 соат)

Режа:

- 4.1. Транспорт масаласининг қўйилиш ва унинг математик модели.**
- 4.2. Очик ва ёпиқ модели транспорт масалалари.**
- 4.3. Таянч ечимини топиш усуллари.**
- 4.4. Потенциаллар усули.**
- 4.5. Бутун сонли программалаштириш масаласининг қўйилиши ва унинг ечиш усули.**

Таянч сўз ва иборалар: минимал қиймат; мезон; модель; очик модели; ёпиқ модели; таянч ечим; оптимал ечим; шимоли-ғарб бурчак усули; потенциаллар усули; оптималлик мезони; мақсад функция; чекланиш шартлари; контур; потенциаллар системаси.

4.1. Транспорт масаласининг қуйилиш ва унинг математик модели

Бозор иқтисодиёти даврида саноат, қишлоқ хўжалиги, қурилиш ва бошқа тармоқларда учрайдиган кўпгина режалаштириш ва бошқариш масалаларининг мақбулий ечимлари транспорт масаласига келтирилиб ечилмоқда.

Умумий ҳолда транспорт масаласини қуйидагича баён қилиш мумкин: бир нечта ишлаб чиқариш корхоналаридан бир қанча истеъмолчиларга керакли юкларни (хом – ашё, буюм ва ҳ.к) шундай ташишни ташкил этиш керакки, натижада истеъмолчилар-

нинг маҳсулотларга бўлган талаби, ишлаб чиқарувчиларнинг имкониятларига қараб қондирилади ва юкларни ташиш учун сарфланадиган транспорт харажатлари эса энг кам қийматга эга бўлади.

Транспорт масаласининг минимал қиймат мезони бўйича моҳияти қуйидагича: $A_1, A_2, \dots, A_m$ омборларда мос равишда $a_1, a_2, \dots, a_n$ миқдорда бир хил турдаги юклар бор. $A_1, A_2, \dots, A_m$ омборлардан бу юкларга бўлган эҳтиёжлари мос равишда $b_1, b_2, \dots, b_n$ бўлган $B_1, B_2, \dots, B_n$ корхоналарга юклар ташилади. A_i дан B_j га бир - бирлик юк ташиш қиймати C_{ij} ни ташкил қилсин. Юк ташишни шундай ташкил қилиш керакки, жўнатиш омборларидаги ҳамма юклар тўласича ташиб кетилсин ҳамда истеъмолчи корхоналарнинг эҳтиёжлари тўла қондирилсин (тесқари йўналишда ташилмайди) ва бу юкларни ташишнинг жами харажат қиймати энг кичик (минимал) бўлсин.

x_{ij} – орқали A_i омбордан B_j корхонага ташиладиган юк миқдорини

белгилаймиз. Равшанки $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ ифода A_i омборлардан

$B_1, B_2, \dots, B_n$ корхоналарга жўнатилган жами юк миқдори: $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$

ифода эса B_j корхоналарга $A_1, A_2, \dots, A_m$ омборлардан келтирилган жами юк миқдорини билдиради. Юкларни ташишнинг жами қиймати

$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$ га тенг бўлади. Берилган маълумотларни қуйидаги

жадвалда келтирамиз.

1 – жадвал

Транспорт масаласи учун қуйидаги шарт

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

ўринли бўлса, ёпиқ модели масала, акс ҳолда очик модели масала дейилади.

Очик типдаги масала ёпиқ типдаги масалага келтириш учун сохта (фиктив)ишлаб чиқарувчи ёки истеъмолчиларни киритиш йўли билан амалга оширилади. Фараз қилайлик

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

бўлсин, у ҳолда моделга B_{n+1} сохта истеъмолчи киритилади, унинг юкларга бўлган эҳтиёжи

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

га тенг бўлиб, ташиш қиймати $c_{i,m+1} = 0$ ($i = \overline{1, m}$) бўлади.

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

бўлган ҳолда эса A_{m+1} сохта омбор киритилиб, ундаги юклар захираси

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

ва ташиш қиймати $c_{n+1,j} = 0$ ($j = \overline{1, n}$) бўлади.

Шундай қилиб, транспорт масаласи ЧПМ нинг хусусий ҳоли бўлиб, у қуйидаги хусусиятларга эга:

- чеклаш шартлари тенгламалар билан тасвирланади;
- ҳар бир ўзгарувчи фақат иккита тенгламада учрайди.

Ҳозирга қадар бу масалани ечишнинг бир неча усуллари ишлаб чиқилган бўлиб, лекин номаълумлар сони $(m+n)$ тенгламалар сони $(n+m-1)$ дан катта бўлганда симплекс усул мақсадга мувофиқ эмас. Транспорт масаласининг оптимал ечимини топиш алгоритми қуйдагича:

- таянч ечим (режа) тузилади;
- ечимнинг (режанинг) оптималлиги текширилади;
- агар ечим (режа) оптимал бўлмаса, у кетма – кет яхшиланади;

Таянч ечимни (режани) топишининг энг кенг тарқалган усули, шимоли-ғарб бурчак усулидир.

4.3. Таянч ечимини топиш усуллари (Шимоли-ғарб бурчак усули ва унинг алгоритми).

Жадвалнинг устки чап бурчак танланади.

					a_1	} <u>ресурслар</u>
					a_2	
					$\vdots$	
					a_m	
b_1	b_2	b_3	...	b_n	} <u>эҳтиёжлар</u>	

Бу кататка мос ресурс a_1 ва эҳтиёж b_1 таққосланади.

Агар $a_1 > b_1$ бўлса, у ҳолда пастки чап бурчакка b_1 сони ёзилади. Ушбу катат сатридаги ресурс $(a_1 - b_1)$ га тенг бўлади, бу катат устунидаги эҳтиёж эса 0 га тенг бўлади.

Агар $a_1 < b_1$ бўлса, у ҳолда кататнинг пастки чап бурчагига a_1 сони ёзилиб, ушбу катат сатрининг ресурси энди 0 дан иборат бўлади. Бу катат устунидаги эҳтиёж эса $(b_1 - a_1)$ га тенг бўлади.

Агар $a_1 = b_1$ бўлса, у ҳолда бу кататнинг пастки чап бурчагига a_1 ёки b_1 ёзилади. Бу кататнинг ресурси ёки эҳтиёжи 0 бўлади.

Жараён битта сатр ёки устунга камайтирилгач, қолган қисми ресурслар ва эҳтиёжларнинг янги қийматларини ҳисобга олган ҳолда, 1 – босқичдан бошлаб қайтадан такрорланади.

Масала. A_1 омборда $a_1 = 60$ т. цемент, A_2 омборда $a_2 = 50$ т. цемент, A_3 омборда $a_3 = 90$ т. цемент мавжуд. Мос равишда B_1 , B_2 истеъмолчиларга $b_1 = 130$ т., $b_2 = 70$ т. цемент ташиб беришнинг таянч режаси шимоли – ғарб бурчак усулидан фойдаланиб топилсин.

Қуйидаги жадвални тузамиз.

Омборлар	истеъмолчилар	B_1	B_2
		$b_1=130$	$b_2=70$
A_1	$a_1 = 60$	60	0
A_2	$a_2 = 50$	50	0
A_3	$a_3 = 90$	20	70

Ечиш: устки чап бурчакни танлаймиз.

Ресурс 60 билан эҳтиёж 130 ни таққослаймиз ва уларнинг энг кичиги $\min(60; 130) = 60$. Демак: $x_{11} = 60$, $x_{12} = 0$.

Демак: A_1 омбордаги 60т. цемент тўласинча B_1 истеъмолчига ташиб борилади. $130 - 60 = 70$ тонна цементни B_1 истеъмолчига етказиб бериш керак. 70 билан 50 таққосланади ва $\min(50; 70) = 50$ бўлганлиги учун 60 сонини пастидан 50 сони ёзилади, яъни $x_{21} = 50$; $x_{22} = 0$. B_1 истеъмоли учун $70 - 50 = 20$ т. цемент истеъмол қилинади. Шунинг учун 20 т. цемент билан 90 т. цемент таққосланади ва $\min(20; 90) = 20$; $90 - 20 = 70$ т. цемент A_3 омборда қолганлиги сабабли B_2 истеъмолчи учун 70 т. цемент A_3 пунктдан етказилиб берилиши керак. Шунинг учун 70 билан 70 таққосланади ва $\min(70; 70) = 70$ т.

20 т. нинг ўнг томонига 70 т. ёзилади, яъни $x_{33} = 70$.

Таянч ечим: $x_{11} = 60$ т, $x_{12} = 0$, $x_{21} = 50$ т, $x_{22} = 0$; $x_{31} = 20$ т, $x_{32} = 70$ т.

Демак бу ечимлардан кўринадики A_1 омбордан B_1 истеъмолчига 60 т., A_2 омбордан B_1 истеъмолчига 50 тонна, A_3 омбордан B_1 истеъмолчига 70 тонна цемент етказиб бериш керак эканлиги аниқланади.

4.4. Потенциаллар усули

Транспорт масалаларини ечиш учун қўлланиладиган биринчи аниқ усул потенциаллар усули 1949 йилда рус олимлари Л.В. Конторович ва М.К. Гавурин томонидан таклиф қилинган. Бу усулнинг асосий мазмуни, чизиқли программалаштириш масалаларини ечиш усулларига боғлиқ бўлмаган ҳолда транспорт масаласига мослашган симплекс усулдан иборатдир. Бу усул ёрдамида бошланғич таянч ечимдан, чекли сондаги қадамдан сўнг масаланинг оптимал ечими топилади.

Айтайлик топилган таянч ечим (режа) оптимал ечим эканлигини текшириш учун ҳар бир ишлаб чиқариш корхонаси (A_i) ва истеъмол қилувчи (B_j) – га уларнинг потенциаллари деб аталувчи миқдорлари u_i ва v_j мос қўйилади. Бунда A_i ва B_j ларга мос келувчи потенциаллар йиғиндиси, A_i ишлаб чиқариш корхонасидан B_j истеъмолчига n бирлик маҳсулотни олиб бориш учун сарф қилинган c_{ij} харажатга тенг бўлиши керак.

Транспорт масаласининг ечими оптимал бўлиши учун қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема: Агар $x = (x_{ij})$ ечим транспорт масаласининг оптимал ечими бўлса, у ҳолда унга қуйидаги

$$\begin{cases} u_i + v_j = c_{ij}, & (x_{ij} > 0) \\ u_i + v_j \leq c_{ij}, & (x_{ij} = 0) \end{cases}$$

шартни қаноатлантирувчи $(n+m)$ та u_i , v_j сонлар мос келади. u_i ва v_j сонлар мос равишда ишлаб чиқариш корхоналари ва истеъмолчиларнинг потенциаллари дейилади.

а) Шундай қилиб, тўлдирилган ҳар бир катакчалар учун потенциаллар йиғиндиси шу катакчаларга жойлашган бир бирлик маҳсулотни ташиш учун сарфланган харажатга тенг бўлиши керак, яъни

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (1)$$

б) Бўш турган ҳар бир катакчалар учун потенциаллар йиғиндиси шу катакчаларда жойлашган бир-бирлик маҳсулотни ташиш учун сарфланган харажатга тенг ёки ундан кичик бўлиши лозим, яъни

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (2)$$

Шундай қилиб потенциаллар усулининг асосий ғояси қуйидагидан иборат:

1. шимоли – ғарб бурчак усули ёрдамида бошланғич таянч ечим топилади;
2. топилган таянч ечимнинг оптимал ечим эканлигини аниқлаш учун потенциалларга боғлиқ система тузилади.

Потенциаллар системаси фақат $(m+n - 1)$ та тўлдирилган катакчалар бўйича амалга оширилади.

3. Барча бўш катакчалар учун $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ (3) шарт текширилиб кўрилади. Агар $\Delta_{ij} \leq 0$ шарт ўринли бўлса, топилган таянч ечим оптимал ечим бўлади, акс ҳолда таянч ечим оптимал бўлмай у алмаштирилади. Бу жараён қуйидагича амалга оширилади. Агар бирорта бўш катакча учун $\Delta_{ij} > 0$ бўлса, ўша катакча учун $x_{ke} = \theta$ сон мос қўйилади, яъни катакчага θ ёзилиб, соат стрелкаси йўналиши бўйича ушбу катакчадан бошлаб тўлдирилган катакчаларга (-) ва (+) ишоралар қўйиб борилади. Натижада ёпиқ L контур ҳосил бўлади ва θ нинг сон қиймати $\theta = \min x_{ij} = x_{ij}$. (4) формула ёрдамида $x_{рд} \in L$ – топилади.

4. Янги таянч ечим $x_{ij} \in L$ – қуйидагилар аниқланади.

$$x_{kl} = \theta, \quad x_{qk} = 0, \quad x''_{ij} = x_{ij}, \quad \text{агар } x_{ij} \in L,$$

$$x''_{ij} = x_{ij} + \theta, \quad \text{агар } x_{ij} \in L-,$$

$$x''_{ij} = x_{ij} - \theta, \quad \text{агар } x_{ij} \in L+,$$

Бунда (L) - бутун ёпиқ контур, $(L-)$ (-) ишорали катакчаларни, $L+ (+)$ ишорали катакчаларни ўз ичига олувчи ярим контурларни билдиради.

Янги таянч ечимдаги тўлдирилган катакчалар сони $(n+m-1)$ бўлгани учун (4) шартни қаноатлантирувчи катакчалар бирдан ортиқ бўлса, улардан биттасини бўш катакчага айлантириб, қолган катакчалардаги тақсимотни нолга тенг деб қабул қиламиз.

Ҳар бир қадамда топилган янги таянч ечим учун яна қайтадан потенциаллар системаси тузилади ҳамда ечимнинг оптимал ёки оптимал эмаслиги (1) ва (2) шартлар бўйича текширилади.

Агар бу шартлар бажарилмаса 3 ва 4 босқичларда кўрсатилган амаллар такрорланади. Такрорлаш жараёни барча бўш катакчалар учун $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ шарт бажарилгунга қадар давом эттирилади.

4.5. Бутун сонли программалаштириш масаласининг қўйилиши ва унинг ечиш усули

Экстремал масалада ўзгарувчиларнинг қийматлари бутун сонлардан иборат бўлса, у ҳолда бундай математик программалаштириш масаласи бутун сонли программалаштириш масаласи дейилади.

Бутун сонли программалаштириш масаласининг математик моделида мақсад функция, чегараланганлик системаси чизиқли, чизиқсиз ва аралаш ҳолларда чегараланганлик системаси учун чизиқли бўлган ҳолни қарайлик.

Мақсад функцияга энг катта қиймат берувчи

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (1)$$

ва ушбу

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (3)$$

$$x_j \text{ бутун } (j = \overline{1, n}) \quad (4)$$

шартларни қаноатлантирувчи бутун сонли программалаштириш масаласида берилган бўлсин. Бу масалананинг ечиш усулларида бири Гомори усули билан танишамиз.

Гомори усули.

(1) – (4) бутун сонли программалаштириш масаласи учун ўзгартирувчиларнинг қийматлари бутун бўлишлиги ҳисобга олинмаган ҳолда симплекс усули ёрдамида оптимал ечим топилади. Агарда топилган ўзгарувчиларнинг қийматлари бутун бўлса, у ҳолда ечим оптимал бўлади, акс ҳолда x_j ўзгарувчиларнинг қийматлари каср кўринишида бўлса (2) га

$$\sum_j f(a_{ij}^*) \geq f(b_i^*) \quad (5)$$

тенгсизлик киритиб (1) – (4), (5) масалаларнинг ечими топилади.

(5) даги a_{ij}^* ва b_i^* лар, a_{ij} ва b_i миқдорларнинг охириги симплекс жадвалдаги алмаштирилган қийматларидан олинади. $f(a_{ij}^*)$ ва $f(b_i^*)$ лар сонларнинг каср қисмини билдиради. Агар (1) – (4) масаланинг оптимал ечимда ўзгарувчиларнинг қийматлари бир нечта каср кўринишдаги қийматларни қабул қилса, (5) қўшимча тенгсизлик энг катта каср қисмга мос ҳолда аниқланади.

Умуман жараён давом эттирилади. Янги топилган оптимал ечим ўзгарувчиларнинг қийматлари каср кўринишда бўлса, (5) тенгсизлик аниқланиб ҳисоблаш жараёни яна такрорланади. Охириги қадамда бутун сонли программалаштириш масаласининг оптимал ечими топилади ёки ечимга эга эмаслиги аниқланади.

Агар (5) тенгсизликни тузиш қандайдир бирор ўзгарувчи учун талаб этилса, бундай масалага хусусий ҳолдаги бутун сонли программалаштириш масаласи дейилади. Бундай кўринишдаги масаланинг ечимда қўшимча тенгсизлик

$$\sum_j \gamma_{ij} x_j \geq f(b_i^*) \quad (6)$$

кўринишда бўлиб, γ_{ij} қуйидагича аниқланади.

1. x_j - учун бутун бўлмаган қийматни қабул қилса:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^* & \text{агар } a_{ij}^* \geq 0, \\ \frac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} |b_{ij}^*| & \text{агар } a_{ij}^* < 0, \end{cases} \quad (7)$$

орқали топилади.

2. x_j - учун фақат бутун қийматларни қабул қилса

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f(a_{ij}^*) & \text{агар } f(a_{ij}^*) \leq f(b_{ij}^*), \\ \frac{f(b_{ij}^*)}{1 - f(b_{ij}^*)} [1 - f(a_{ij}^*)] & \text{агар } f(a_{ij}^*) > f(b_{ij}^*) \end{cases} \quad (8)$$

орқали топилади.

Демак: бутун сонли программалаштириш масаласининг оптимал ечими Голори усули билан ечиш жараёни қуйидаги босқичлар кетма – кет бажарилади.

1. Симплекс усулини (1)– (4) масала учун қўллаб ўзгарувчиларнинг қийматлари эътиборга олинган ҳолда оптимал ечими топилади.

2. (1) – (4) масаланинг оптимал ечимидаги ўзгарувчи энг катта каср қисмига мос қўшимча (5) тенгсизлик тузилади ва (1) (5) масаланинг ечими бутун бўлишлиги талаб этилади.

3. Иккиланган симплекс – усулни татбиқ этиб, масаланинг ечими қўшимча тенгсизликни қўшиш орқали (1) – (4) масаланинг ечими келиб чиқади.

4. (1) – (5) масалани ечиш жараёнида яна қўшимча тенгсизлик тузиш керак бўлса, қайтадан тузилиб масаланинг ьоптимал ечими топилгунга қадар давом эттирилади ёки ечимга эга эмаслиги аниқланади.

Мисол. Гомори усулини қўллаб

$$F = 3x_1 + 2x_2 \quad (9)$$

функциянинг энг катта қиймати топилсин ва ушбу шарт бажарилсин

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases} \quad (10) \quad x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5})$$

(11)

$$x_j - \text{бутун } (j = \overline{1,5}) \quad (12)$$

Ечиш.

Дастлаб берилган масала учун симплекс усулни қўллаб оптимал ечимга ечимни топамиз.

i	Базис	C _б	B	3	2	0	0	0
				A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
1	A ₃	0	13	1	1	1	0	0
2	A ₄	0	6	1	-1	0	1	0
3	A ₅	0	9	-3	1	0	0	1
m+1	Z _j - C _j		0	-3	-2	0	0	0
1	A ₃	0	7	0	2	1	-1	0
2	A ₁	3	6	1	-1	0	1	1
3	A ₅	0	27	0	-2	0	3	0
m+1	Z _j -C _j		18	0	-5	0	3	0
1	A ₂	2	7/2	1	1	1/2	-1/2	0
2	A ₁	3	19/2	0	0	1/2	1/2	0
3	A ₅	0	34	0	0	1	2	1

m+1	$Z_j - C_j$	71/2	0	0	5/2	1/2	0
-----	-------------	------	---	---	-----	-----	---

Масаланинг оптимал ечими: $X=(19/2; 7/2; 0; 0; 10)$

Топилган ечим: (9) – (12) масаланинг, оптимал ечими эмас, чунки топилган ўзгарувчиларнинг айрим қийматлари каср кўринишидадир. x_1 ва x_2 ўзгарувчиларнинг каср қисмлари бир хил бўлганлиги учун уларнинг ихтиёрий бири учун масалан x_2 учун қўшимча тенгсизлик тузамиз. Охирги симплекс жадвалдан

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{2}$$

эга бўламиз.

(9) – (12) масалага

$$f(1)x_2 + f(1/2)x_3 + f(-1/2)x_4 \geq f(7/2)$$

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

ёки

$$x_3 + x_4 \geq 1$$

тенгсизликни қўшамиз ва янги симплекс – жадвални тузамиз.

i	Базис	C_6	B	3	2	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_2	2	7/2	0	1	1/2	-	0	0
2	A_1	3	19/2	1	0	1/2	1/2	0	0
3	A_5	0	34	0	0	1	1/2	1	0
4	A_6	0	-1	0	0	-1	2	0	1
							-1		
m+1	$Z_j - C_j$		71/2	0	0	5/2	1/2	0	0
1	A_2	2	4	0	1	1	0	0	-
2	A_1	3	9	1	0	0	0	0	1/2
3	A_5	0	32	0	0	-1	0	1	1/2
4	A_4	0	1	0	0	1	1	0	2
									-1
m+1	$Z_j - C_j$		35	0	0	2	0	0	1/2

Навбатдаги ечим берилган масаланинг оптимал ечими бўлади:

$$X = (9; 4; 0; 1; 32)$$

Мақсад функциянинг энг катта қиймати

$$F_{\max} = 35.$$

Назорат учун саволлар

1. Транспорт масаласининг қўйилишини баён қилинг?

2. Транспорт масаласининг математик моделини ёзинг?
3. Очик ва ёпик транспорт масалаларини изохлаб беринг?
4. Транспорт масаласи қачон ечимга эга?
5. Бошланғич таянч ечимни топишусулларини баён қилинг?
6. Потенциаллар системаси қандай тузилади?
7. Таянч ечим қачон оптимал ечим бўлади?
8. Очик модели транспорт масаласи қандай қилиб ёпик моделига келтирилади?
9. Қандай масалага бутун сонли программлаштириш масаласи дейилади?
10. Бутун сонли программлаштириш масаласининг математик моделини изохлаб беринг?
11. Гомори усули ва унинг алгоритмининг изохлаб беринг?
12. Бутун сонли программлаштириш масалаларининг мақбулий ечими қандай бўлади?
13. Бутун сонли программлаштириш масалаларининг амалий масалаларга тадбиқлари?

Адабиётлар

1. Т.Х.Холматов, Х.С. Умаров Курилишни бошқаришда иктисодий-математик усуллар. Ўқув қўлланма, Самарқанд 2004 й.196 бет.
2. М.Атхамов, Г.Отабоев Планлаштиришда математик методларни қўлланилиши. Тошкент.Ўқитувчи 1982 й.
3. Ю.Н.Кузнецов и.др. Математическое программирование. М. Высшая школа 1976 г.
- 4.И.Г.Шепелев «Математические методы и модели управления в строительстве» М: Высшая школа, 1980 г.
5. Шодиев Т.Ш. ва бошқ. «Экономика» Тошкент ,Шарқ конд. 1999 й.

5- Мавзу: Чизиксиз программалаштириш (4 соат)

Режа:

- 5.1. Чизиксиз программалаштириш масаласининг қўйилиши.
- 5.2. Чизиксиз программалаштириш масаласининг график усули.
- 5.3. Лагранж купайтувчилар усули.
- 5.4. Шартли экстремум масаласини ечишнинг сонли усуллари.

Таянч сўз ва иборалар: чизиксиз программалаштириш; энг катта; энг кичик; график усул; ечимлар соҳаси; лагранж усули; шартли минимум; шартсиз экстремум; лагранж кўпайтувчилари.

5.1. Чизиксиз программалаштириш масаласининг қўйилиши

Чизиксиз программалаштириш масаласининг умумий ҳолда қўйилиши ва унинг иқтисодий – математик модели қуйидаги кўринишда бўлади.
Ушбу чекланиш шартларини

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, & (i = \overline{1, k}) \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, & (i = \overline{k+1, m}) \end{cases} \quad (1)$$

қаноатлантирувчи шундай $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ нуқтани топиш талаб қилинсинки, натижада мақсад функция

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

масаланинг иқтисодий томондан қўйилишига қараб, ўзининг энг кичик (энг катта) қийматига эришсин. Бунда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва

$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ қандайдир функциялар, $b_i (i = \overline{1, m})$ берилган сонлардир.

(1), (2) масаланинг ечиш жараёнида топиладиган $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ нуқта учун мақсад функция (1) нинг энг кичик қийматини топиш талаб этилса, $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ акс ҳолда эса $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ шартларнинг бажарилиши лозимдир.

Агар (1)-(2) масалада f ва g_i функциялар чизикли функция-лардан иборат бўлса, чизикли программалаштириш масаласидан иборат бўлади.

Чизиқсиз программалаштириш масалаларининг мумкин бўлган ечимлар соҳаси ҳамма вақт ҳам қавариқ соҳадан иборат бўлмайди. Ундан шундай нуқта топиладики, ушбу нуқтадан $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = h$ гиперсирт ўтиб, (1) – мақсад функция ўзининг энг катта ёки энг кичик қийматларига эришиши мумкин.

Ушбу нуқта мумкин бўлган ечимлар соҳасининг чегарасида ёки соҳанинг ичида жойлашган бўлиши мумкин.

Чизиқсиз программалаштиришнинг (1), (2) кўринишдаги масалаларининг мақбулий (оптимал) ечимларини топишнинг бир қанча усуллари мавжуд бўлиб, улардан график ҳамда Лагранж кўпайтувчилар усуллари билан танишиб чиқамиз. Қуйидаги масалани қарайлик.

Масаланинг қўйилиши: Режа бўйича курилиш корхонасида 150 дона плита ишлаб чиқарилиши лозим. Плита ишлаб чиқариш жараёни икки хил технологик усул билан амалга оширилади. Биринчи технологик усул ёрдамида x_1 дона плита ишлаб чиқариш учун $4x_1 + x_1^2$ қонуният, иккинчи технологик усулни қўллашда x_2 дона плита ишлаб чиқариш учун $8x_2 + x_2^2$ қонуният бўйича ҳаражат қилинади.

Ҳар бир усулни қўллашда жами маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарфланадиган умумий ҳаражат энг кам (минимал) бўлишлиги аниқлансин.

Ечиш: Масаланинг иқтисодий - математик моделини тузамиз.

Ишлаб чиқариш корхонаси x_1 ва x_2 миқдорлардаги плита ишлаб чиқариш учун сарфланадиган ҳаражатлар энг кам (минимал) бўлишлиги ушбу функция

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

орқали аниқланган бўлсин, ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирсин. Ишлаб чиқариладиган плиталарнинг умумий миқдори

$$x_1 + x_2 = 150 \quad (2)$$

га тенг бўлиб, номаълумларнинг манфий бўлмаслиги

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \quad (3)$$

назарда тутилсин.

Ушбу масалани икки усул ёрдамида мақбулий ечимини топамиз.

1. График усул.

2. Лагранж кўпайтувчилар усули.

5.2. Чизиқсиз программалаштириш масаласининг график усули

Масаланинг мақбулий ечимини аниқлашда қуйидаги босқич ишларини бажарамиз.

Ечиш: 1. (1)–мақсад функция чизиксиз функция кўринишида бўлганлиги учун (1)–(3) масала чизиксиз программалаштириш масаласидан иборатдир.

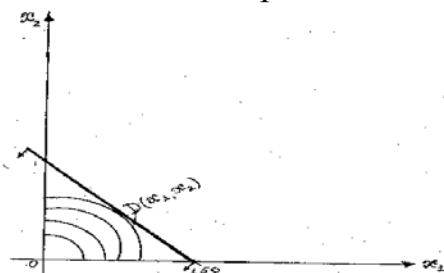
Масаланинг мумкин бўлган ечимлар соҳасини (2) – (3) муносабатларга асосланган ҳолда ҳосил қиламиз. Бунинг учун

$$x_1 + x_2 = 150 \quad (L_1)$$

$$x_1 = 0 \quad (L_2)$$

$$x_2 = 0 \quad (L_3)$$

тўғри чизикларни $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ текисликда тасвирлаймиз



1-расм.

2. Гиперсирт $F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$ мақсад функция ор-қали ҳосил қилинади.

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = h$$

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4)^2 - 4 - 16 = h$$

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4)^2 = h + 20 = c$$

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4)^2 = (\sqrt{c})^2 \quad (4)$$

(4) – тенглама маркази $E(-2; -4)$ нуқтада бўлган ва радиуси $\sqrt{c}$ га тенг бўлган айлана тенгламасидан иборатдир. c нинг турли хил қийматлари учун гиперсирт айланалар оиласидан иборат бўлади (1 – расм).

Қўйилган масаланинг мумкин бўлган ечимлар соҳаси AB кесма ҳамда маркази $E(-2; -4)$ ва радиуси $R = \sqrt{c}$ га тенг бўлган айланаларни ташкил этувчи эгри чизикларнинг умумий нуқтасидан иборатдир. 1–расмдан маркази $E(-2; -4)$ нуқтадан ўтувчи, R радиуснинг турли қийматлар учун айланалар оиласини ҳосил қиламиз.

(1) – мақсад функция ўзининг энг кичик қийматига $D(x_1, x_2)$ нуқтада эришади. Ушбу нуқтанинг координаталарини аниқлашда $x_1 + x_2 = 150$ тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти $k = -1$ тенглиги ҳамда $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = c$ айлана билан $D(x_1, x_2)$ нуқтада устма–уст тушишлигидан фойдаланамиз. Айлана тенгламасидаги x_2 ни x_1 га нисбатан аниқмас функция сифатида қараб, уни дифференциалласак қуйидагига эга бўламиз

$$4 + 2x_1 + 8x_2^1 + 2x_2 x_2^1 = 0.$$

Ҳосил бўлган тенгламани x_2 га нисбатан ечиб,

$$x_2^1 = \frac{2 + x_1}{4 + x_2}$$

ни ҳосил қиламиз.

Ҳосил бўлган тенгламани – 1 га тенглаштириб $D(x_1, x_2)$ нуқтанинг координаталарини топиш жараёнида битта тенгламага эга бўламиз.

$$x_1 - x_2 = 2$$

$x_1 - x_2 = 2$ тенгламани ҳамда $D(x_1, x_2)$ нуқтанинг $x_1 + x_2 = 150$ тўғри чизикда ётганлигини эътиборга олсак, қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 150. \end{cases}$$

Ушбу тенгламалар системасини ечиб, $x_1=76$ ҳамда $x_2=74$ ларни аниқлаймиз ва мақсад функциянинг қийматини топамиз.

$$F = 4 \cdot 76 + 76^2 + 8 \cdot 74 + 74^2 = 304 + 5776 + 5476 = 12148.$$

Бундан эса курилиш корхонаси I–технологик усул билан 76, II–технологик усул билан 74 дона плита ишлаб чиқариб, энг кам сарфланадиган ҳаражат 12 млн.148 минг сўмни ташкил қилишлигини аниқлаймиз.

5.3. Лагранж купайтувчилар усули

Айтайлик математик программалаштириш масаласи куйи-даги кўринишда берилган бўлсин:

$$\text{ушбу } z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

функциянинг

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2)$$

чекланиш шартлари бажарилганда максималлаштирилсин.

Масалада чекланишлар системаси тенгламалар билан берилганлиги учун унинг ечимини бир неча ўзгарувчили функция сифатида қараб, шартли экстремумини топишнинг классик усулидан фойдаланиш мумкин. Бунда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($i = \overline{1, m}$) ўзининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан узлуксиз деб фараз қиламиз.

Масалани ечиш учун ушбу функцияни тузамиз:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

ва ундан x_j ($j = \overline{1, n}$), λ_i ($i = \overline{1, m}$) лар бўйича хусусий ҳосилаларни олиб, нолга тенглаштирамиз. Натижада қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j} &= \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad (j = \overline{1, n}) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} &= g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = \overline{1, m}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(3)–функцияга Лагранж функцияси, λ_i ($i = \overline{1, m}$) сонлар эса Лагранж кўпайтувчилари дейилади.

Агар $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, нуктада экстремумга (энг катта ёки энг кичик) эга бўлса, у ҳолда шундай $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$ вектор мавжуд бўлиб, ушбу $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$ нукталар (4) тенгламалар системасининг ечими бўлади. Равшанки (4) системани ечиш орқали F функциянинг экстремал қийматлар қабул қиладиган нукталар тўпламига эга бўламиз. Бундан эса глобал максимум (минимум) ни аниқлаш учун функциянинг мос нукталардаги қийматларини топиш етарлидир.

Юқоридаги масалани энди Лагранж кўпайтувчилар усули ёрдамида ечамиз.

Ушбу келтирилган масалани ечиш учун қуйидаги босқич ишларини бажарамиз.

Ечиш: 1. Лагранж кўпайтувчилар усулидан фойдаланиб (2) муносабатни қаноатлантирувчи ҳамда номаълумларнинг манфий бўлмаслик шартларини эътиборга олмаган ҳолда (1)–қўринишдаги мақсад функциянинг энг кичик (минимал) қийматини топамиз.

Бунинг учун Лагранж функциясини тузамиз.

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(150 - x_1 - x_2) \quad (5)$$

2. Ҳосил бўлган (1) – қўринишдаги Лагранж функциясидан x_1, x_2, λ лар бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаштирамиз.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 150 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 4 + 2x_1 = \lambda \\ 8 + 2x_2 = \lambda \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases}$$

Тенгламалар системасининг биринчи ва иккинчи тенгламасидан

$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2$ ёки $x_1 - x_2 = 2$ га эга бўламиз, ҳамда қуйидаги

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases} \quad (6)$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

3. Ҳосил қилинган (6) – тенгламалар системасини бирор усул масалан алгебраик қўшиш усулини қуллаб,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases} + \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases}$$

$$2x_1 = 152$$

$$x_1 = 152/2 = 76 \quad \text{ёки} \quad x_1 = 76$$

га эга бўламиз, бунга кўра (6) – системасининг биринчи тенгламасидан.

$$76 - x_2 = 2 \quad \text{ёки} \quad x_2 = 74$$

ни ҳосил қиламиз.

Топилган x_1 ва x_2 номаълум ўзгарувчиларнинг қийматлари манфий бўлмаслик шартни қаноатлантиради ҳамда $D(x_1, x_2)$ нуктанинг координаталаридан иборат бўлади.

4. Ушбу нукта (1) мақсад функцияга экстремум қиймат берадиган шубҳали нукта бўлиши мумкин. Шартсиз экстремум масаласига кўра, иккинчи тартибли хусусий ҳосиладан фойдалансак, D нуктада F мақсад функция шартли минимумга эга бўлади.

Мақсад функциянинг шартли минимум қийматини топишнинг бошқача усули билан ҳам ҳал қилиш мумкин. Бунинг учун (2)–тенгламадан $x_2 = 150 - x_1$ га эга бўлиб, уни (1) га қўйсак, бир ўзгарувчи x_1 га нисбатан ушбу

$$F_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8(150 - x_1) + (150 - x_1)^2 \quad (7)$$

қўринишдаги функцияга эга бўламиз.

(7) – функциянинг стационар нуктасини топамиз. Бунинг учун (7) дан x_1 бўйича ҳосила олиб, уни нолга тенглаштирамиз:

$$\frac{dF_1}{dx_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2(150 - x_1) = 0$$

$$4 + 2x_1 - 8 - 300 + 2x_1 = 0 \text{ ёки } 4x_1 = 304$$

бундан эса $x_1 = 76$ ҳамда $x_2 = 74$ га эга бўламиз. Худди юқоридагидек D нуктада мақсад функция ўзининг энг кичик $F = 12148$ қийматига эришади.

Олинган натижани худди юқоридагидек изоҳлаш мумкин; қурилиш корхонаси I – технологик усул билан 76, II – технологик усул билан 74 дона плита ишлаб чиқариб, энг кам сарфланадиган ҳаражат 12 млн. 148 минг сўмни ташкил этади.

2- масала Ушбу чекланиш шартларини каноатлантирувчи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_2 \leq 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \quad (2)$$

ҳамда

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \quad (3)$$

мақсад функцияга энг катта (максимал) қиймат берувчи x_1 ва x_2 ларнинг қийматлари топилсин.

Ушбу масалани график ҳамда Лагранж кўпайтувчилар усуллари ёрдамида ечамиз.

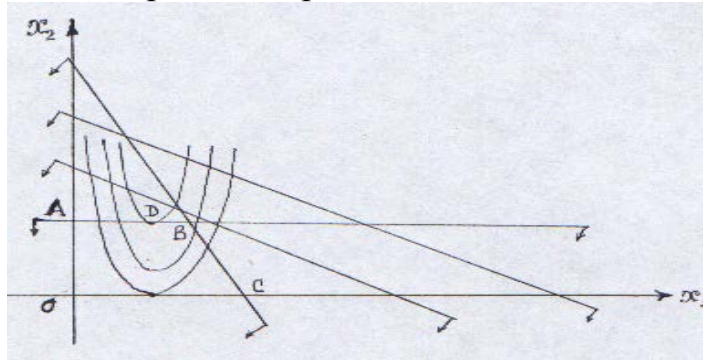
График усул

Ечиш Қўйилган масаланинг мақсадли ечимини юқорида қараб ўтилган масала учун тузилган режа бўйича аниқлаймиз.

Берилган масала чизиқсиз программалаштириш масаласидир, чунки (3)-мақсад функция чизиқсиз функциядан иборат. Унинг мумкин бўлган ечимлари соҳасини (1) - (2) муносабатларга асосланган ҳолда ҳосил қиламиз. Бунинг учун $x_1 0 x_2$ тўғри бурчакли декарт координаталар системасида

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= 14, & (L_1) \\
2x_1 + x_2 &= 12, & (L_2) \\
4x_1 + 2x_2 &= 18, & (L_3) \\
x_2 &= 3, & (L_4) \\
x_1 &= 0, & (L_5) \\
x_2 &= 0, & (L_6)
\end{aligned}
\tag{1}$$

$(L_1) - (L_6)$ тўғри чизикларни тасвирлаймиз.



2 – расм.

1. Масаланинг мумкин бўлган ечимлари соҳаси 2-расмга кўра OABC тўртбурчакдан иборатдир.
2. Гиперсирт $F(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$ мақсад функция орқали ҳосил қилинади. Бунда h –қандайдир узгармас сон бўлиб, унинг ҳар -хил ўзгармас қийматлари учун параболалар оиласига эга бўламиз.
3. x_1, x_2 – ўқидан қанча узоқлашсак, h нинг шунча катта қийматиغا эришилади. (2-расмга қаранг). Демак F мақсад функция OABC тўртбурчакнинг чегарасида параболаларнинг бири билан уринган D нуқтада энг катта қийматиغا эришади.
4. $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 12$ парабола, OABC тўртбурчакнинг AB томони билан D нуқтада уринганлигини эътиборга олсак, у ҳолда D нуқтанинг координаталари қуйидаги

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 12 \\ x_2 = 3 \end{cases}
\tag{4}$$

тенгламалар системанини ечиш орқали топилади.

(4)–тенгламалар системасининг биринчи тенгламасидан

$$3 - x_1^2 + 6x_1 = 12$$

ёки

$$x_1^2 - 6x_1 + 9 = 0$$

квадрат тенгламага эга бўламиз ва ечамиз.

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{10}}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$x_1 = 3$ га эга бўламиз.

Бундан эса $x_1 = 3$; $x_2 = 3$ эканлигини аниқлаймиз.

Демак D нуктанинг координатлари $D(3;3)$ бўлиб, мақсад функциянинг энг катта (максимал) қиймати

$$F(3;3) = 3 - 3^2 + 6 \cdot 3 = 3 - 9 + 18 = 12$$

га тенг эканлигини аниқлаймиз.

Лагранж кўпайтувчилар усули ёрдамида қуйидаги кўринишдаги масалаларни ечиш учун ҳам қўллаш мумкин.

Умумий ҳолдаги чизиқсиз программалаштириш масаласининг хусусий холи

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \quad (1)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2)$$

кўринишда берилган бўлсин. Бунда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциялар ўзларининг хусусий ҳосилалари билан узлуксиз бўлиб, номаълум ўзгарувчиларга нисбатан манфий бўлмаслик шартлари талаб этилмасин.

(1), (2) масаланинг мақбулий ечимини аниқлашда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ўзгарувчиларни киритамиз ҳамда уларни Лагранж кўпайтувчилари деб номлаб, Лагранж функциясини тузамиз.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] \lambda_i \quad (3).$$

Лагранж функцияси (3) дан $x_j (j = \overline{1, n})$, $\lambda_i (i = \overline{1, m})$ бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаштириб, λ_j ва λ_i ларга нисбатан $(n+m)$ номаълумли $(n+m)$ та тенгламалар системасига эга бўламиз, яъни

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 & (j = \overline{1, n}) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 & (i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (4)$$

(4) тенгламалар системасини ечиб, $X = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ни топамиз. Ушбу ечим $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мақсад функциянинг экс-тремуми (энг катта ёки энг кичик қиймати) бўлиши мумкин. Топилган нукталар (ечимлар) ёрдамида (1) функцияни шартсиз экстремумга текшириш-ни давом эттириш мумкин.

Шундай қилиб (1) ва (2) масаланинг экстремум нукталарини Лагранж кўпайтувчилар усули ёрдамида аниқлаш учун қуйидаги босқич ишларини бажариш лозим.

1. Лагранж функциясини тузиш;
2. Лагранж функциясидан x_j ва λ_i лар бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаштириб (4) тенгламалар системасини ҳосил қилиш;

3. (4)-тенгламалар системасини ечиб, нуқталарни топиб (1) мақсад функция экстремумга эга ёки эга эмаслигини текшириш;

4. Топилган нуқталар орасидан (1) мақсад функциянинг экстремумга эришишини таъминловчи шубҳа қилинадиган нуқталарини аниқлаб ҳамда мақсад функциянинг қийматини ҳисоблашдан иборатдир.

Мисол: $f = 3x_1^2 + 5x_2^2$ функциянинг $x_1 + x_2 = 5$ шарт ўринли бўлганда экстремум нуқталарини топинг.

Ечиш:

1. Лагранж функциясини тузамиз

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2) \quad (5)$$

2. Лагранж функциясидан x_1, x_2 ва λ лар бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаштириб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx_1} = 6x_1 - \lambda = 0 \\ \frac{dF}{d\lambda} = 10x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{dF}{dx_2} = 5 - x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 6x_1 - \lambda = 0 \\ 10x_2 - \lambda = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 = 5 \end{cases} \quad (6)$$

3. (6) - тенгламалар системасидан x_1, x_2, λ ларнинг қиймат-ларини бирор усулни қўллаш орқали топамиз. Бунинг учун системанинг биринчи тенгламасидан, иккинчи тенгламасини ҳадма-ҳад айирамиз, натижада

$$\begin{cases} 6x_1 - 10x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \quad (7)$$

тенгламалар системасига эга бўламиз ва ундан x_1, x_2 ларнинг қийматларини аниқлаймиз. (7) нинг иккинчи тенгламасини $-6 \neq 0$ га купайтириб, унинг биринчи тенгламасига ҳадма-ҳад қўшамиз, натижада $-16x_2 = -30$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан эса $x_2 = 15/8$ га тенг эканлигини аниқлаймиз. (7) системасининг иккинчи тенгламасидан $x_1 + 15/8 = 5$ ёки $x_1 = 5 - 15/8 = 25/8$; $x_1 = 25/8$; $6 \cdot 25/8 - \lambda = 0$; $\lambda = 75/4$ топилади. Шундай қилиб, $A(25/8; 15/8)$ нуқта шубҳали нуқта бўлиб, ушбу нуқтада берилган функция шартли равишда экстремумга эга бўлиши мумкин.

4. Ушбу шубҳа қилинган нуқта учун қўшимча текширишни давом эттириб, иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар оламиз.

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 6; B = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 10; C = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (8)$$

Бундан $\Delta = AC - B^2$ дискриминантни тузиб, уни ҳисоблаймиз. Қуйидаги ҳолларни келтириб ўтамыз:

а) агар $A < 0$ (ёки $C < 0$) бўлиб, $\Delta > 0$ шарт ўринли бўлса, берилган функция $M(x_0, y_0)$ нуқтада айнан максимумга; $A > 0$ (ёки $C < 0$) бўлганда минимумга эгалир.

б) агар $\Delta < 0$ шарт бажарилса, дастлабки берилган

функция $M(x_0, y_0)$ нуқтада экстремумга эга эмасдир.

в) $\Delta = 0$ бўлса, экстремумга текшириш яна давом эттирилади. Бундай ҳолда функция экстремумга эга ёки эга бўлмаслиги мумкин.

Юқорида келтирилган масала учун ушбу ҳолларнинг бажарилишини текширамыз:

$\Delta = 6 \cdot 0 - 10^2 = -100 < 0$ бўлганлиги учун берилган масаланинг экстремумга эриштира оладиган нуқта мавжуд эмасдир.

Мисол: Қуйидаги масаланинг шартли экстремумини топинг.

$$\begin{cases} f = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Ечиш: 1. Лагранж функциясини тузамиз:

$$f = (x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 + \lambda_1 (4 - x_1 - x_2 - x_3) + \lambda_2 (12 - 2x_1 + 3x_2)$$

2. Лагранж функциясидан $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$ лар бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаштирамыз:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 1 - \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 4 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Натижада беш номаълумли бешта тенгламалар системасини ҳосил қиламыз:

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 1 - \lambda_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасидаги номаълумларнинг қийматларини замонавий компьютерларнинг дастурий таъми-нотиға мурожаат қилиш орқали ҳам топиш мумкин.

Ушбу тенгламалар системасини бирор усул ёрдамида ечиб, экстремумга эга бўлиши мумкин бўлган нуқталарни топамиз. Системанинг учинчи тенгламасидан $\lambda_1 = 1$ га тенг эканлигини аниқлаб, қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_2 = 1 \\ 2x_2 + 3\lambda_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Системанинг биринчи тенгламасини $1,5 \neq 0$ га купайтириб, унинг иккинчи тенгламасига ҳадма-ҳад қўшамиз. Натижада $3x_1 + 2x_2 = 2,5$, системанинг тўртинчи тенгламасини $(-1,5)$ га қўпайтириб $-3x_1 + 4,5x_2 = -18$ тенгламаларга эга бўламиз ва қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2,5 \\ -3x_1 + 4,5x_2 = -18 \end{cases}$$

Алгебраик қўшиш усулини қўллаб,

$$0 \cdot x_1 + 6,5x_2 = -15,5$$

ёки $65x_2 = -155 \Rightarrow x_2 = -155/65 = -31/13$ топилади.

$$\text{Бундан эса } 3x_1 - 2 \cdot \frac{31}{13} = 2,5 \Rightarrow 3x_1 - \frac{5}{2} + \frac{62}{13} = 2,5; 3x_1 = \frac{189}{26}; x_1 = \frac{63}{26}$$

га тенглиги аниқланади. Системанинг учинчи тенгламасидан

$$\frac{63}{26} - \frac{31}{13} + x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 4 - \frac{1}{26} = \frac{103}{26}.$$

Топилган x_1, x_2, x_3 ларнинг қийматларига асосланиб, $2 : \frac{63}{26} - 2\lambda_2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\lambda_2 = \frac{63}{13} - 1 = \frac{50}{13} \Rightarrow 2\lambda_2 = \frac{50}{13}; \lambda_2 = \frac{50}{13} : 2 = \frac{50}{26}.$$
 эканлигини аниқлаймиз.

Мақсад функциянинг экстремумга эриштира оладиган

$$M\left(\frac{63}{26}; \frac{-31}{13}; \frac{103}{26}\right)$$

шубҳали нуқтага эга бўламиз.

Ушбу нуқтада мақсад функциянинг экстремумга эга бўлишлигини аниқлаймиз. Бунинг учун экстремумнинг етарлилик шартларини текширамиз. Функциядан иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар оламиз.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2; \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2; \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

Қуйидаги дискриминантини тузамиз

$$\Delta = AC - B^2 \text{ ёки } \Delta_1 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 \text{ ҳамда } \Delta_2 = 0; \Delta_3 = 0$$

$\Delta_1 > 0$ ҳамда $A > 0$ (ёки $c > 0$) шартларининг ўринли эканлигини, $M\left(\frac{63}{26}, -\frac{31}{13}, \frac{103}{26}\right)$ стационар (критик) нуктада мақсад функция минимум (энг кичик) қийматига эришади ва ушбу нуктада унинг қиймати қуйидаги тенг бўлади

$$f\left(\frac{63}{26}, -\frac{31}{13}, \frac{103}{26}\right) = \left(\frac{63}{26}\right)^2 + \left(-\frac{31}{13}\right)^2 + \frac{103}{26} = \frac{3969}{676} + \frac{961}{169} + \frac{103}{26} =$$

$$= \frac{3969 + 3844 + 2678}{676} = 15 \frac{351}{676};$$

бундан эса $f_{\min} = 15 \frac{351}{676}$ га тенг эканлигини аниқлаймиз.

5.4. Шартли экстремум масаласини ечишнинг сонли усуллари

Лагранж кўпайтувчилар усулини қуйидаги ҳолда ҳам қўллаш мумкин. Агар чизиқсиз программалаштириш масаласида ўзгарувчилар орасидаги боғланишлардаги чекланиш шартлари $q_i(x) \leq B$ тенгсизликлар кўринишида бўлса, $Z = f(x)$ мақсад функциянинг экстремумини топиш учун $\frac{df}{dx_k} = 0, (k = \overline{1, n})$ тенгламалардан $Z = f(x)$ нинг шартсиз экстремумга эга бўладиган нукталар топилади.

Аниқланган ушбу нукталар тупламидан $q(x) < b$ шартни қаноатлантирувчи нукта аниқланади, ҳамда

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_k} - \lambda \frac{\partial q}{\partial x_k} = 0, & (k = \overline{1, n}) \\ q(x) = b \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимлари топилади.

Тенгламалар системасининг ечимлари, топилган $q(x) < b$ шартни қаноатлантирувчи нукталарни биргаликда қараб, масалани худди шартсиз экстремумга текшириш жараёнидек амалга оширилади.

Икки ўзгарувчини $Z = f(x, y)$ функция берилган бўлса, унга мос Лагранж функция

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

дан иборат бўлади.

$P_0(x_0, y_0)$ ҳамда λ_0 учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & \Phi'_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & \Phi'_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & \Phi'_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & \Phi'_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}$$

$\Delta < 0$ бўлса, $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуктада шартли максимумга, $\Delta > 0$ да шартли минимумга эга бўлади.

Назорат учун саволлар

1. Чизиқсиз программалаштириш масаласи деб нимага айтилади?
2. Чизиқсиз программалаштириш масаласининг математик моделини ифодаланг.
3. Чизиқсиз программалаштириш масалаларини геометрик талқинини изохлаб беринг.
4. Чизиқсиз программалаштириш масаласининг график усули.
5. Лагранж кўпайтувчилар усули ва унинг мазмунини ифодаланг.
6. Лагранж функцияси қандай тузилади?
7. Шартли экстремум масалаларини ечиш қандай амалга оширилади?

Адабиётлар

1. Т.Х.Холматов, Х.С. Умаров Курилишни бошқаришда иктисодий-математик усуллар. Ўқув қўлланма, Самарқанд 2004 й. 196 бет.
2. М.Атхамов, Г.Отабоев Планлаштиришда математик методларни қўлланилиши. Тошкент. Ўқитувчи 1982 й.
3. Ю.Н.Кузнецов и.др. Математическое программирование. М. Высшая школа 1976 г.
4. И.Г.Шепелев «Математические методы и модели управления в строительстве» М: Высшая школа, 1980 г.
5. Шодиев Т.Ш. ва бошқ. «Экономика» Тошкент, Шарқ конд. 1999 й.

6-Мавзу: Қавариқ программалаштириш

(4 соат)

Режа:

- 6.1. Қавариқ функциялар.
- 6.2. Қавариқ программалаштириш масаласи.
- 6.3. Кун-Таккер теоремаси.
- 6.4. Франк-Вулф усули ва унинг тадбиқлари.

Таянч сўз ва иборалар: қаварик функция; ботик функция; регулярилик; локал максимум; глобал максимум; қаварик программалаштириш; эгар нукта; градиент усул; компонента; итерацион; усул; вектор.

6.1. Қаварик функциялар

Таъриф 1. Қаварик X тўпламда аниқланган $f(x)$ функция агар бу тўпламга қарашли ихтиёрий $x_1, x_2 \in X$ нукталар учун $0 \leq \lambda \leq 1$ шартни қаноатлантирувчи ҳамма λ ларда қуйидаги

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad (1)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция қаварик функция дейилади.

Таъриф 2. Агар x_1, x_2 ва λ ларнинг шу қийматларида қуйидаги

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad (2)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция ботик функция дейилади.

Агар $f(x)$ функция қаварик бўлса, $-f(x)$ ботик ва аксинча $f(x) = cx$ чизиқли функция бир вақтда қаварик ва ботикдир, бунда ихтиёрий x_1, x_2 ва λ лар учун қуйидаги тенглама ўринлидир.

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda cx_1 + (1-\lambda)cx_2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Таъриф 3. Чизиқсиз программалаштириш масаласининг

$$f(X) \rightarrow \max \quad (1)$$

$$g_i(X) \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2)$$

$$X \geq 0 \quad (3)$$

мумкин бўлган ечимлар тўплами регулярилик шартини қаноатлантиради дейилади, агарда мумкин бўлган ечимлар тўпламининг ақалли бирорта нуктаси x_i учун $g_i(x_i) < b_i \quad (i = \overline{1, m})$ шарт ўринли бўлса.

6.2. Қаварик программалаштириш масаласи

Теорема 4. (1)–(3) масала қаварик программалаштириш масаласи дейилади, агарда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция ботик (қаварик) бўлиб, $g_i(x_i) \quad (i = \overline{1, m})$ функция қаварик бўлса.

Теорема 1. Қаварик программалаштириш масаласининг ҳар қандай локал максимум (минимум) қийматлари унинг глобал максимум (минимум) қийматларидан иборатдир.

Таъриф 5. (3) қаварик программалаштириш масаласининг

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i x g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4)$$

функциясига Лагранж функцияси дейилади.

Бунда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ Лагранж кўпайтувчилари дейилади.

Таъриф 6. $(x_0; \lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ нукта Лагранж функциянинг эгар нуктаси дейилади, агарда

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m^0) &\leq F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0) \leq \\ &\leq F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \end{aligned} \quad (5)$$

барча $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$) ва $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$) лар учун ўринли бўлса.

6.3. Кун-Таккер теоремаси

Теорема: (Кун – Таккер теоремаси)

Агар $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нукта қаварик программалаштириш масаласи (1) – (3) нинг ечими бўлса, шундай $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0) \geq 0$ вектор мавжуд бўладики, унда (X_0, λ_0) нукта Лагранж функциясининг эгар нуктасини ташкил этади. Бошқача қилиб айтганда барча $\lambda \geq 0$ ва $X \in R_n$ лар учун (5) тенгсизлик ўринлидир.

Исбот. $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ Агар $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нукта қаварик программалаштириш масаласи (1) – (3) нинг ечими бўлсин. У ҳолда шу нуктада Лагранж функциясининг минимуми мавжудлигини биринчи тартибли зарурий шарт бажарилиш керак, яъни

$$\frac{\partial F(X_0, \lambda_0)}{\partial X} = 0, \quad \lambda_0 g(X_0) = 0$$

шарт ўринлидир.

$f(x)$ ва $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ($i = \overline{1, m}$) функциялар қаварик функциялар бўлганлиги учун ихтиёрий $\lambda_i \geq 0$ учун

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6)$$

функциянинг ҳам қавариклиги келиб чиқади.

Шу сабабли ихтиёрий $X \in R_n$ лар учун

$$\begin{aligned} F(X_0, \lambda_0) &= f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 g_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \leq \\ &\leq f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(X, \lambda_0) \end{aligned} \quad (7)$$

бўлади. $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуктани, теорема шартига кўра, қаварик программалаштириш масаласи (1) – (3) нинг ечими деб фараз қилганимиз учун

$$g_i(X_0) = g_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \leq 0, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (8)$$

тенгсизлик ўринлидир. (8) га кўра, барча $\lambda \geq 0$ учун

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \leq 0 \quad (9)$$

эканлиги келиб чиқади. Иккинчи томондан (6) дан (9) ни назарда тутсак.

$$F(x_0, \lambda) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \leq \leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = F(X_0, \lambda_0) \quad (10)$$

эканлиги келиб чиқади. (7) ва (10) тенгсизликлардан (5) нинг тўғрилиги келиб чиқади. Демак, исбот қилинган теоремага кўра, Лагранж функциясининг эгар нуқтаси мавжуд бўлса, каварик программалаштириш масаласининг ечими мавжуд деган хулосага келамиз.

Чизиксиз программалаштириш масаласининг градиент усули

Градиент усули ёрдамида, ҳар қандай чизиксиз программалаштириш масаласини ечиш мумкин

Градиент усули билан берилган масаланинг ечимини топиш жараёни, итерацион (кетма–кет) жараён бўлиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг градиенти $X^{(k+1)}$ қадамда ноль бўлмагунча ёки етарлича кичик $\varepsilon > 0$ учун

$$|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})| \leq \varepsilon \quad (1)$$

шарт ўринли бўлгунча давом эттирилади. (1) га топилиши керак бўладиган ечимнинг аниқлигини билдиради.

Градиент усули икки гуруҳга бўлиниб, улардан биринчи гуруҳга кирувчи Франк – Вулф усули билан танишамиз.

6.4. Франк-Вулф усули ва унинг тадбиқлари

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \quad (1)$$

ботиқ функциянинг энг катта қийматини топиш талаб этилсин ва қуйидаги шартлар бажарилсин

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (j = \overline{1, m}) \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Масаланинг ечиш жараёни (1) – (3) масаланинг мумкин бўлган ечимлар соҳасида ётувчи нуқтани аниқлаймиз. Бу нуқта $X^{(k)}$ бўлсин.

У ҳолда бу нуқтада (1) функциянинг градиентини топамиз, яъни

$$\nabla f(X^{(k)}) = \left(\frac{(\partial f)(X^{(k)})}{\partial x_1}, \frac{(\partial f)(X^{(k)})}{\partial x_2}, \dots, \frac{(\partial f)(X^{(k)})}{\partial x_n} \right)$$

ва чизикли функцияни узамиз

$$F = \left(\frac{(\partial f)(X^{(k)})}{\partial x_1} x_1 + \frac{(\partial f)(X^{(k)})}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{(\partial f)(X^{(k)})}{\partial x_n} x_n \right) \quad (4)$$

тузилган функциянинг (2) – (3) шартларни қаноатлантирувчи энг катта қийматини топамиз. Бу масаланинг ечими $Z^{(k)}$ нукта аниқланган бўлсин.

У ҳолда кейинги (янги) берилган масаланинг ечими учун $X^{(k+1)}$ ни қабул қиламиз, яъни

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k (Z^{(k)} - X^{(k)}) \quad (5)$$

бунда $\lambda_k, (0 \leq \lambda_k \leq 1)$ ораликдаги қандайдир сон бўлиб, ҳисоблаш қадамини билдиради. λ_k сони ораликдан ихтиёрий олинади ёки $\frac{df}{d\lambda_k} = 0$ тенгламани

ечиш орқали топилади. Агар ечимда $\lambda_k > 1$ бўлса, $\lambda_k = 1$ деб қабул қилинади. λ_k нинг қиймати топилгандан сўнг $X^{(k+1)}$ нуктанинг координаталари топилади, мақсад функциянинг қиймати топилади ва янги (кейинги) $X^{(k+2)}$ нуктага ўтиш ёки ўтмасликнинг зарурияти аниқланади. Агар янги $X^{(k+2)}$ нуктага ўтиш зарурияти туғилса, $X^{(k+1)}$ нуктада мақсад функциянинг градиенти ҳисобланиб, унга мос чизиқли программалаштириш масаласига ўтиб ечим топилади. $X^{(k+2)}$ нуктанинг координаталари топилгандан сўнг, кейинги ҳисоблаш жараёни амалга оширилади. Охирги қадамда зарур бўлган аниқликдаги берилган масаланинг ечимига эга бўламиз.

Шундай қилиб (1) – (3) масаланинг Франк – Вулф усули билан ечиш жараёни қуйидаги босқич ишларини бажариш орқали амалга оширилади.

1. Масаланинг мумкин бўлган дастлабки ечими топилади.
2. (1) функциянинг градиенти топилиб, бу нуктада мумкин бўлган ечим аниқланади.
3. (2) – (3) шартни қаноатлантирувчи (4) функция тузилиб, унинг қиймати топилади.
4. Ҳисоблаш қадами аниқланади.
5. (5) формула бўйича янги (кейинги қадамдаги) мумкин бўлган ечимнинг компоненталари топилади.
6. Кейинги қадамдаги ечимга ўтиш ёки ўтмаслик зарурияти текширилади. Агар зарурият бўлса, кейинги босқичга ўтилади, акс ҳолда топилган ечим оптимал ечим бўлади.

Мисол Франк – Вулф усули билан

$$f = 2x_1 + 4x_2 = x_1^2 - 2x_2^2 \quad (6)$$

функциянинг энг катта қийматини топинг ва бунда ушбу шартлар бажарилсин

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases} \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (8)$$

Ечиш : Функциянинг градиентини топамиз.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2 - 2x_1; 4 - 4x_2)$$

Мумкин бўлган ечим сифатида $X^{(0)} = (0; 0)$ нуқтани оламиз. Баҳолаш критерияси сифатида, оптимал ечим учун $|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| < \varepsilon$, бунда $\varepsilon = 0,01$ тенгсизлиқни қабул қиламиз.

1 – қадам. $X^{(0)}$ нуқтада градиент $\nabla f(x^{(0)}) = (2; 4)$ га тенг.

$$F_1 = 2x_1 + 4x_2 \quad (9)$$

функциянинг максимумини топамиз ва бунда қуйидаги шартлар бажарилсин.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases} \quad (10)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (11)$$

(9) – (11) масаланинг оптимал ечими $Z^{(0)} = ()$ га тенг. Берилган масаланинг янги: мумкин бўлган ечимини (5) формула орқали топамиз.

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda_1 (Z^{(0)} - X^{(0)}) \quad \text{бунда } 0 \leq \lambda_1 \leq 1 \quad (12)$$

$X^{(0)}$ ва $Z^{(0)}$ ларни (12) га қўйсак

$$\begin{cases} x_1^{(11)} = 0 + \lambda_{1.0} \\ x_2^{(1)} = 0 + \lambda_{1.4} \end{cases} \quad (13)$$

ни ҳосил қиламиз. λ_1 - ни қийматини топамиз.

(6) даги x_1 ва x_2 лар ўрнига (13) муносабатнинг мос қийматларини қуйиб

$$f(\lambda_1) = 16\lambda_1 - 32\lambda_1^2$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан λ_1 бўйича ҳосила олиб, уни нолга тенглаштириб,

$$f^{(1)}(\lambda_1) = 16 - 64\lambda_1 = 0$$

бундан $\lambda_1 = \frac{1}{4} = 0,25$ ни аниқлаймиз. λ_1 нинг қиймати $0 \leq \lambda \leq 1$ оралиқда

бўлганлиги учун кейинги қадамга ўтиш миқдорини билдиради.

Шундай қилиб,

$$X^{(1)} = (0; 1), \quad f(x^{(1)}) = 2; \quad |f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})| = 2 > \varepsilon = 0,01$$

2 – қадам.

$x^{(1)}$ нуқтадаги функциянинг градиенти

$$\nabla f(x^{(1)}) = (2; 0)$$

Функциянинг максимумини топамиз, яъни

$$F_2 = 2X_1$$

ва ушбу шарт

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

ўринли бўлсин. Ечим $Z^{(1)} = (6,4; 0,8)$ иборат бўлади. Энди

$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_2 (Z^{(1)} - x^{(1)})$ аниқлаймиз ва

$$\begin{cases} x_1^2 = 6,4 \lambda_2, \\ x_2^2 = 1 - 0,2 \lambda_2 \end{cases} \quad (14)$$

ни ҳосил қиламиз.

(6) даги x_1 ва x_2 лар ўрнига (14) нинг мос қийматларини қўйсак

$$f(\lambda_2) = 2 + 12,8 \lambda_2 - 41,76 \lambda_2^2$$

эга бўламиз. Бундан $f'(\lambda_2) = 12,8 - 83,52 \lambda_2$ бўлиб, уни нолга тенглаштирсак $f'(\lambda_2) = 0$, бундан $\lambda_2 \approx 0,15$

шундай қилиб,

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,96 \\ x_2^{(2)} = 0,97 \end{cases}$$

$$X^{(2)} = (0,96; 0,97), \quad f(x^{(2)}) = 2,9966, \quad |f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})| = \\ = |2,9966 - 2| = 0,9966 > \varepsilon = 0,01$$

3 – кадам.

f функциянинг градиентини $X^{(2)}$ нуқтада $\nabla f(x^{(2)}) = (0,08; 0,12)$. $F_3 = 0,08x_1 + 0,12x_2$ функциянинг максимумини топамиз ва бунда (10), (11) шартлар бажарилсин.

$X^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_3(Z^{(2)} - x^{(2)})$ ни топамиз ва қуйидагиларга эга бўламиз

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,96 + \lambda_3(6 - 0,96) = 0,96 + 5,04 \lambda_3, \\ x_2^{(3)} = 0,97 + \lambda_3(0 - 0,97) = 0,97 - 0,97 \lambda_3 \end{cases}$$

$$f(3) = 2,9384 + 0,4032 \lambda_3 - 27,3416 \lambda_3^2$$

$$f'(3) = 0,4032 - 54,6832 \lambda_3$$

$f'(\lambda_3) = 0$ тенгламани ечиб, $\lambda_3 \approx 0,007$ ни топамиз.

Булардан $x^{(3)} = (0,99528; 0,96321)$, $f(x^{(3)}) = 2,99957$,
 $X^{(3)} = (0,99528; 0,96321)$ эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, $X^{(3)} = (0,99528; 96321)$ берилган масаланинг изланган ечимини билдиради.

Назорат учун саволлар

1. Қандай функцияга қаварик функция дейилади?
2. Қандай функцияга ботик функция дейилади?
3. Қандай масалага қаварик праграммлаштириш масаласи дейилади?
4. Қандай функцияга Лагранж функцияси дейилади?
5. Лагранж кўпайтувчилари деганда нимани тушунаси?

6. Қандай нуктага эгар нукта дейилади?
7. Кун –Таккер теоремасини изохлаб беринг?
8. Градиент усули ёрдамида қандай масалалар ечилади?
9. Франк-Вулф усули ёрдамида қандай масалалар ечилади?

Адабиётлар

1. Т.Х.Холматов, Х.С. Умаров Курилишни бошқаришда иктисодий-математик усуллар. Ўқув қўлланма, Самарқанд 2004 й.196 бет.
2. М.Атхамов, Г.Отабоев Планлаштиришда математик методларни қўлланилиши. Тошкент.Ўқитувчи 1982 й.
3. Ю.Н.Кузнецов и.др. Математическое программирование. М. Высшая школа 1976 г.
- 4.И.Г.Шепелев «Математические методы и модели управления в строительстве» М: Высшая школа, 1980 г.
5. Шодиев Т.Ш. ва бошқ. «Экономика» Тошкент ,Шарқ конд. 1999 й.

7-Мавзу: Динамик программалаштириш элементлари. (6 соат)

Режа:

- 7.1. Динамик программалаштириш.**
- 7.2. Ресурсларни оптимал тақсимлаш ҳақидаги масала. Р.Белманнинг функционал экстремал тенгламаси.Оптималлик принципи.**
- 7.3. Иктисодиётга оид баъзи бир масалаларни динамик программалаш-тириш усули ёрдамида ечиш.**

Таянч сўз ва иборалар: динамик программалаштириш; қадамма-қадам; капитал маблағ; оптимал тақсимлаш; мумкин бўлган бошқариш; оптималлик принципи; пул маблағлари; асбоб ускуналар; рекурент тенглама.

7.1. Динамик программалаштириш

Динамик программалаштириш - кўп босқичли ишлаб чиқариш жараёнларининг оптимал ечимларини топишнинг назарияси ва унинг сонли усулларини топиш билан шуғулланади.

Динамик программалаштириш масалаларининг оптимал ечимларини топиш усулларида бири Р.Беллманнинг рекурриент муносабатидир.

Динамик программалаштириш - кўп босқичли ёки кўпқадамли масала деб ҳам юритилади.

7.2. Ресурсларни оптимал тақсимлаш ҳақидаги масала оптималлик принципи

Фараз қилайлик, маълум миқдордаги ресурслар мавжуд бўлиб, бу ресурсларни шундай тақсимлаш керакки, натижада олинadиган фойда энг кўп бўлиб, сарф қилинадиган харажат энг кам бўлсин.

Қўйилган масаланинг математик модели қуйидагича ифода-ланади: ресурслардан фойдаланиш имконияти n хил бўлиб, ҳар бир имкониятдан келадиган фойда миқдори $g_i(x_i)$ бўлсин. У ҳолда умумий фойда

$$Z = \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \quad (1)$$

га тенг бўлади.

Ҳар бир имкониятдан фойдаланиладиган ресурслар миқдори-нинг йиғиндиси ресурсларнинг умумий миқдорига тенг бўлган-лиги учун у

$$\sum_{i=1}^n x_i = X, \quad x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2)$$

орқали ифодаланади.

Булардан эса ресурсларни тақсимлаш масаласини қуйидагича баён қилиш мумкин: Чекланиш шартлари (2) ни қаноатлантирувчи шундай x_j –ларнинг қийматларини топиш керакки, (1) мақсад функция энг катта қийматга эришсин. (1) - нинг максимум (энг катта) қиймати ресурсларининг умумий миқдори X ва имкониятлар сони n -га боғлиқ бўлганлиги сабабли уни

$$f_n(x) = \max g_i(x_i), \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = X$$

орқали ифодалаш мумкин.

$f_n(x)$ - ресурсларни тақсимлаш ва ундан фойдаланиш натижасида олинadиган максимал фойда; $g_n(x_n)$ - миқдори x_n - га тенг бўлган ресурслардан фойдаланиш натижасида олинadиган фойдани; $f_{n-1}(x - x_n)$ эса қолган $(x - x_n)$ ресурсдан $(n-1)$ хил йўл билан фойдаланиш натижасида олинadиган максимал фойдани назарда тутсак, у ҳолда умумий миқдори X - га тенг бўлган ресурсларни тақсимлашда ва ундан n - хил йўл билан фойдаланишдаги максимал фойда

$$f_n(x) = \max \{g_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n)\} \quad (4)$$

$$0 \leq x_n \leq x$$

тенглама билан аниқланади.

(4) тенгламага (1) - (2) масалани ечиш учун қўлланиладиган Р.Беллманнинг рекурриент типдаги функционал тенгламаси деб юритилади.

Кўпинча (4) тенгламани Р.Беллманнинг оптималлик принципи ҳам дейилади, чунки бошланғич тақсимлаш $f_0(x) \geq 0$ ни билган ҳолда $f_1(x)$ ни, ва ҳоказо $f_{n-1}(x)$ ни билганда $f_n(x)$ ни (4) формула орқали топиш мумкин.

7.3. Иқтисодиётга оид баъзи бир масалаларни динамик программалаш тириш усули ёрдамида ечиш

Динамик программалаштириш усуллариининг афзаллиги шундан иборатки, кўпгина классик таҳлил усуллари билан ечиб бўлмайдиган масалаларни оддий ҳисоблаш алгоритмлари ёрдамида ҳал этиш имконини беради.

Масала Қўйидаги 1-жадвалда 4 та ғишт заводида уларни қайта қуриш ва янгилаш учун қўшимча капитал маблағларни ажратган ҳолда маҳсулот ишлаб чиқаришнинг мумкин бўлган ўсиш суръати кўрсатилган.

Капитал маблағнинг тақсимлашнинг маҳсулот ишлаб чиқариш умумий ўсишининг максималлаштирадиган режасини тузиш талаб этилсин.

Ечиш. $q_i(x)$ орқали i -корхонадаги x сўм капитал маблағ сарфлангандаги маҳсулот ишлаб чиқариш ўсишини белгилайлик. Айтайлик 4 чи заводга x сўм ажратилганда, $F_4(c)$ орқали C сўмmani тўртта корхона ўртасида тақсимлашда олинadиган маҳсулот ишлаб чиқариш ўсишининг мумкин бўлган максимал қийматини белгилайлик. У ҳолда Р.Беллманнинг асосий функционал тенгламасига асосан ушбу тенгламаларга эга бўламиз:

$$F_4(c) = \max [q_4(x) + F_3(c-x)],$$

$$0 \leq x \leq c$$

$$F_1(x) = \max [q_1(x)] = q_1(x).$$

$$0 \leq x \leq c$$

Энди масаланинг сонли ечимини топишни кўрсатамиз. Тўрт устунли жадвал (ж 2) тузиб, унга $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ ва $F_4(x)$ ларининг қийматларини ёзамиз. Бунда $F_1(x) = q_1(x)$ ни ҳисобга олиб биринчи устуни элементларини 1-жадвалдан оламиз.

	F_1	F_2	F_3	F_4
F_i X_i				
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110

200	140	140	140	146
-----	-----	-----	-----	-----

1-Жадвал

Кейин мос функционал тенгламалардан фойдаланиб, қолган устунларнинг элементларини ҳисоблаймиз.

$$F_2(50) = \max_{0 \leq x \leq 50} [q_2(x) + F_1(50-x)] = \max_{0 \leq x \leq 50} [q_2(0) + F_1(50); q_2(50) + F_1(0)] = \max[0+25; 30+0] = 30;$$

$$F_2(100) = \max_{0 \leq x \leq 100} [q_2(x) + F_1(100-x)] = \max_{0 \leq x \leq 100} [q_2(0) + F_1(100); q_2(50) + F_1(50); q_2(100) + F_1(0)] = \max[0+60; 30+25; 70+0] = 70;$$

$$F_2(150) = 100; F_2(200) = 140 \text{ топилади.}$$

ва х.к.

Учинчи устуннинг элементлари

Учинчи устуннинг элементлари

$$F_3(50) = \max_{0 \leq x \leq 50} [q_3(x) + F_2(50-x)] = 36$$

ва х.к. кўринишида топилади. Туртинчи устуннинг элементлари эса

$$F_4(50) = \max_{0 \leq x \leq 50} [q_4(x) + F_3(50-x)]$$

дан топилади.

Олинган натижалардан кўринадикки энг катта мумкин бўлган ишлаб чиқариш усьиши 146 минг сўм.:

$$F_4(200) = F_3(50) + q_2(150) = 36 + 110 = 146$$

$$F_3(50) = F_2(0) + q_3(50) = 0 + 36 = 36$$

Бундан кўринадикки тўртинчи корхонага 150 минг сум, учинчи корхонага 50 минг сум, биринчи икки заводга эса 0 сум ажратиш керак.

Шундай қилиб, бизнинг масаламизнинг ечими

$$X_1=0; \quad X_2=0; \quad X_3=50; \quad X_4=150 \quad \text{бўлади.}$$

Яъни 200 минг сумни 4 завод ўртасида шундай таксимланганда максимал ўсьиш 146 минг сум бўлади. Шундай қилиб, функционал тенгламалар усулини динамик программлаштириш масалаларини ечишга куллаш бир n – ўлчами масалани n та бир ўлчами масалалар кетма-кетлигига келтиришга имкон беради. Демак кетма-кет қарор қабул қилинадиган куп этапли процессларда системанинг этапдан этапга ва вазиятдан – вазиятга ўтиши функционал тенгламалар билан ифодаланади. Агар динамик программлаштиришда процесс охиридан бошига қараб, қаралишини ҳисобга олсак, дискрет процессини ифодаловчи функционал тенглама ушбу кўринишда бўлади.

$$F_n(x) = \max_{0 \leq y_n \leq x} [q_n(y_n) + F_{n-1}(x - y_n)]$$

ХУЛОСА.

Шундай қилиб, динамик программалаштириш методлари билан амалда кенг қўлланиладиган муҳим масалаларни ечиш мумкин экан. Шулардан бири сифатида маҳсулотлар оқими тармоқлар орасида вақт бўйича ўзгарганда улардаги тармоқлараро балансни анализ қилиш масаласини кўрсатиш мумкин.

Яна шуни айтиш керакки, биз курган масала системанинг бошланғич вазияти ва масаланинг n –қадамли ечиш процесси унинг охиригى натижасини бир қийматли аниқлайди. Бундай процеслар детерминарланган дейилади. Агар системанинг берилган бошланғич вазиятида унинг охиригى вазияти кандайдир эҳтимоллик билан кутилса, бундай процесс стохастик дейилади. Оптималлаштириладиган катталиқ тасодифий бўлганидан (хар хил сон қийматлар қабул қила олади), уни ечишда муҳим тускинлик киритмайди. Яъни унинг утраса қиймати оптимуми хақида гапириш мумкин.

Функционал тенгламалар методи шундай масалаларни ҳам ечишга имкон беради.

Назорат учун саволлар

1. Динамик программалаштириш масаласини баён қилинг?
2. Босқичма-босқич оптимал бошқариш принципи деганда нимани тушунасиз?
3. Функционал тенгламалар усулининг маъноси нимадан иборат?
4. Р.Белманнинг рекурент тенгламасини изохлаб беринг?
5. Оптималлик принципи деганда нимани тушунасиз?

Адабиётлар

1. Т.Х.Холматов, Х.С. Умаров Курилишни бошқаришда иқтисодий-математик усуллар. Ўқув қўлланма, Самарқанд 2004 й. 196 бет.
2. М.Атхамов, Г.Отабоев Планлаштиришда математик методларни қўлланилиши. Тошкент. Ўқитувчи 1982 й.
3. Ю.Н.Кузнецов и.др. Математическое программирование. М. Высшая школа 1976 г.
4. И.Г.Шепелев «Математические методы и модели управления в строительстве» М: Высшая школа, 1980 г.
5. Шодиев Т.Ш. ва бошқ. «Экономика» Тошкент, Шарқ конд. 1999 й.

Режа:

8.1. Ўйинлар назарияси масалалари.

8.2. Ўйинлар назарияси масалаларининг асосий тушунчалари.

8.3. Матрицали ўйинлар ва уларни чизикли программалаштириш масаласига келтириш ёрдамида ечиш.

8.4. Табиат билан ўйин.

8.5. Ўйинлар назарияси усуллари ёрдамида иқтисодиётнинг бази бир масалаларини ечиш.

Таянч сўз ва иборалар: ўйинлар назарияси; оптимал стратегия; йўл; максимал; минимал; энг кам ютуқ; энг кўп ютуқ; қуйи баҳо; юқори баҳо; эгар нўқта; чизикли программалаштириш; оптимал ечим; мезон.

8.1. Ўйинлар назарияси масалалари

Оптималлаш назарияси масалаларини ечиш жараёнида аниқ ечимларга эга бўлинмасада, бундай кўринишдаги масалаларни ўйинлар назарияси масалаларига келтирилиб, махсус усуллар ёрдамида оптимал ечим топилади.

Ўйинлар назарияси математика фанининг энг ёш бўлимларидан бири ҳисобланиб, 1944 йилда Нейман ва Моргенштернларнинг “Теория игры экономической поведения” номли монографиясида келтирилган .

Ўйинлар назарияси - бу математик моделлаштириш назариясининг бўлими бўлиб, зиддиятли ёки ноаниқ ҳодисаларнинг оптимал ечимларини топиш билан шуғулланади.

8.2. Ўйинлар назарияси масалаларининг асосий тушунчалари

Ўйинларда икки ёки ундан кўп томонлар иштирок этиши мумкин. Улар ўз мақсадларига эришиш учун турли хил йўллارни қўллашга уринадилар. Амалиётда учрайдиган ўйинларда кўпинча икки томон иштирок этиб, уларни А ва В орқали белгилаймиз. Ўйинда ўйинчиларнинг тутадиган йўллари стратегиялар деб аталади.

Ўйинлар назарияси масалаларида оптимал стратегия деб ўйинчиларнинг ўйинда тутган йўлларида мақсадга эришиш учун ягона йўлни танлаш тушунилади. Соддалик учун А ва В ўйинчиларнинг ўйинларини кузатайлик.

А – ўйинчи, мумкин бўлган $A_i, (i = \overline{1, m})$ йўлларида бирини, худди шунингдек В - ўйинчи ҳам ўзининг $B_j, (j = \overline{1, n})$ мумкин бўлган йўлларида бирини танлайди. Ундан ташқари уларнинг ўйинда тутадиган йўллари бир-бирларига маълум эмас.

Натижада ўйиндаги ютуқлар $Y_1(A_i, B_j)$ ва $Y_2(A_i, B_j)$ функциялардан иборат бўлиб,

$$Y_1(A_i, B_j) + Y_2(A_i, B_j) = 0 \quad (1)$$

тенглик ўринли бўлади.

Агарда

$$Y_1(A_i, B_j) + Y_2(A_i, B_j) = 0$$

муносабатни ўринли десак, у ҳолда

$$Y_1(A_i, B_j) = - Y_2(A_i, B_j) \quad (2)$$

эканлиги келиб чиқади.

8.3. Матрицали ўйинлар ва уларни чизиқли программалаштириш масаласига келтириш ёрдамида ечиш

Фараз қилайлик A -ўйинчи ўйинда $Y(A_i, B_j)$ функциянинг қийматини катталаштиришга (максималлаштириш) мақсад қилиб қўйсин. Худди шунингдек B -ўйинчи ҳам шу функцияни кичиклаштиришга (минималлаштиришга) ҳаракат қилади. Қуйидаги матрицани тузамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицанинг сатр элементлари A ўйинчининг ўйинда тутадиган A_i стратегиялари, устун элементлари эса B ўйинчининг ўйинда тутадиган B_j йўллари (стратегиялари) бўлсин. A – матрицага эса матрицавий ўйин дейилади.

A -ўйинчи энг кам ютуқга эришиш учун у $\min a_{ij}$ - га тенг бўладиган йўлни қўллайди ва уни максималлаштиришга ҳаракат қилади, яъни

$$\alpha = \max_i \min_j (a_{ij}) \quad (3)$$

га эга бўламиз. α -миқдорга A -ўйинчининг гарантияланган ютуғи дейилиб, ўйиннинг қуйи баҳоси дейилади. Худди шунингдек B ўйинчи B_j ($j = \overline{1, n}$) йўллари қўллаганда қуйидаги муносабат ўринлидир

$$\beta = \min_j \max_i (a_{ij}) \quad (4)$$

β -миқдорга ўйиннинг юқори баҳоси дейилади.

Агарда

$$\max_i \min_j (a_{ij}) = \min_j \max_i (a_{ij}) = v \quad (5)$$

тенглик ўринли бўлса, ўйиннинг баҳоси V -га тенг бўлиб, матрицавий ўйин эгар нуқтага эга дейилади.

Фараз қилайлик матрицавий ўйин

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

кўринишда берилган бўлсин. Агар $\alpha = \beta$ бўлса, у ҳолда бу масала аралаш йўлли масала бўлиб, А-ўйинчининг йўли $X = (x_1, x_2)$ кўринишда бўлади. А-ўйинчининг ўйинда қўллайдиган оптимал йўлини топиш учун куйидаги тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v \end{array} \right\} \quad (6)$$

бунда $x_1 + x_2 = 1$ тенглик ўринлидир. (6) - тенгламалар системасининг ечими қуйидаги формулалар бўйича топилади.

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad \text{Үйиннинг}$$

баҳоси: $V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$ орқали топилади. Худди шунингдек В-ўйинчининг оптимал стратегияси

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

формулалар орқали топилади. Агар $(m \times n)$ ўлчовли матрицавий ўйин берилган бўлса,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

ҳамда эгар нуқтага эга бўлмаса, ўйиннинг оптимал ечими аралаш стратегиялар $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ кўринишида бўлади. Бундай ҳолларда масала чизиқли прог-раммалаштириш масаласига келтирилади ҳамда оптимал ечим (стратегия) топилади. А- ўйинчи учун ўйинда тутган стратегияси учун ушбу муносабат ўринли.

[illegible]

Системанинг ҳар бир тенгсизлигини чап ва ўнг томонларини V-га бўлиб, қуйидагига эга бўламиз.

[illegible]

бунда $t_i = \frac{x_i}{v}$, ($i = \overline{1, m}$) орқали ифодаланган.

Ҳосил бўлган масалани чизиқли программалаштиришнинг каноник кўринишидаги масаласига келтириш учун $t_{m+1} \geq 0, t_{m+2} \geq 0, \dots, t_{m+n} \geq 0$, базис ўзгарувчиларни айирамиз.

$$\left. \begin{aligned} & \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{t}_2 + \dots + \boldsymbol{a}_{m1}\boldsymbol{t}_m - \boldsymbol{t}_{m+1} = 1 \\ & \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{t}_2 + \dots + \boldsymbol{a}_{m2}\boldsymbol{t}_m - \boldsymbol{t}_{m+2} = 1 \\ & \dots\dots\dots \\ & \boldsymbol{a}_{1n}\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{a}_{2n}\boldsymbol{t}_2 + \dots + \boldsymbol{a}_{mn}\boldsymbol{t}_m - \boldsymbol{t}_{m+n} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

бунда $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$ ўринли эканлигидан, $t_1 + t_2 + \dots + t_m = \frac{1}{v}$, муносабат
бажарилиб, мақсад функция қуйидаги кўринишда

$$Z = \sum_{i=1}^m t_i \rightarrow \min \quad (8)$$

бўлади. $t = \frac{1}{v}$ тенгликдан $X_i = v \cdot t_i$ ларнинг қийматлари аниқланади.

Натижада $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ оптимал ечимга эга бўлинади.

Худди шу каби В ўйинчининг оптимал стратегияларини аниқлаш учун қуйидаги муносабатларга эга бўламиз,

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots a_{m1}y_n \leq V \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots a_{2n}y_n \leq V \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1 + a_{22}y_2 + \dots a_{mn}y_n \leq V \end{array} \right\} \quad (9)$$

(9) нинг ҳар бир тенгсизлигининг иккала томонини V -га бўлсак

[illegible]

эга бўламиз.

Бунда $u_i = \frac{y_j}{V} \quad (i = \overline{1, n})$ ва $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$ ўринли бўлганда,

$$W = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{\nu} \text{ бўлиб, мақсад функциянинг}$$

$$W = \sum_{i=1}^n u_i \rightarrow \max \quad (11)$$

кўринишдаги ҳол учун қараб, $y_i = v \cdot u_i$ -нинг қийматлари аниқланади ҳамда В - ўйинчининг $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ оптимал ечими (стратегияси) топилади.

8.4. Табиат билан ўйин

Биз қараб ўтган ўйин иккита қарама - қарши томон иштирок этган ҳолатдаги ўйинни қараган эдик. Кўпгина масалаларда ўйиндаги қўйилган шартларда ноаниқ маълумотларни йўқотишга ҳаракат қилиш таклифи киритилади. Бу шартлар бошқа ўйинчининг дунёқарашига боғлиқ бўлмай, объектнинг таъсирига боғлиқ бўлади. Бундай ҳоллардаги ўйин табиат билан ўйин деб аталади. Масалан А ўйинчи табиат билан ўйинда ютуқ бўлишлигига ҳаракат қилсин. Иккинчи ўйинчи В (табиат) тасодифан ҳаракат қилади. Мумкин бўлган стратегиялари унинг ҳолати орқали аниқланади (масалан шу тумандаги об-ҳаво шароити, маҳсулотларга бўлган талаб, юк ташиш ҳажми ва бошқалар). Бундай кўринишдаги масалаларда табиатнинг ҳолати эҳтимоллик характерга эга бўлишлиги назарда тутилади.

Матрицавий ўйин

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда берилган бўлиб, унинг a_{ij} элементи А-ўйинчининг A_i стратегияни қўллагандаги ютуғи, табиатнинг ҳолати P_j эҳтимолликка тенг бўлсин.

Матрицани элементлари r_{ij} , А-ўйинчи табиатнинг ҳолати P_j ни билган ҳолда A_i стратегияни қўллаб, ютуқ

$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ бўлиб, бунда $\beta_j = \max(a_{ij})$ дан иборат бўлади.

Табиат билан ўйин учун бир нечта мезонларни қарайлик.

1. Максимал Вальда мезони. Бу критерия (мезон) қуйидаги муносабатга асосланган, яъни $a = \max \min a_{ij}$ орқали баҳоланади.

2. Минимал риск Севиджа мезони. Бу мезон қуйидаги муносабат орқали $b = \min \max r_{ij}$ баҳоланади.

3. Гурвиц мезони: бу мезон қуйидаги муносабатга асосланган:

$$\max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_i a_{ij} \right\}$$

бунда $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$. ораликдаги қийматларни қабул қилади.

8.5. Ўйинлар назарияси усуллари ёрдамида иқтисодиётнинг бази бир масалаларини ечиш

Қуйидаги масалани қарайлик.

Масала: Қурилиш ташкилоти ўз автосаройини турли хил русумли автомобиллар билан тўлдириш учун $B = 500$ млн. сўм ажратган бўлсин.

Бунда қаралаётган давр учун маҳсулот ташиш турлари маълум бўлиб, лекин ташиш ҳолати номаълум. Автосаройга уч хил русумли автомашина сотиб олиш таклиф этилган бўлсин. Автосаройнинг меҳнат унумдорлигини

ошириш учун ажратилган маблағдан қанчасини қайси русумдаги автомашиналарни сотиб олиш кераклиги топилсин. Шунинг билан бирга меҳнат унумдорлик даражасини қанчага ошириш ишончилиги қандай бўлишлиги аниқлансин.

Ечиш: Биринчи ўйинчи қурилиш ташкилоти раҳбари уч хил русумдаги автомашиналар сотиб олиши мумкин.

Иккинчи В ўйинчи «табиат» эса учта стратегия (уч хил ташиш тури)ни қўллаш мумкин.

Масалада қўйилган шартлар асосида барча ташиш турларини ҳисобга олиб, қўйилган масала учун берилган маълумотларни қуйидаги 1- жадвалда келтирамиз.

1- жадвал.

Автомоб ил турлари	Автомашинанинг йиллик унумдорлиги		
	2	3	4
1			
A ₁	2000	3000	4000
A ₂	7000	6000	2000
A ₃	5000	2000	3000

Ҳисоблаш ишларини соддалаштириш мақсадида 1- жадвалдаги барча элементларни 1000 бўлиб, қуйидаги 1- жадвал элементларини ҳосил қиламиз:

1' - жадвал

1	2	3	4
A1	2	3	4
A2	7	6	2
A3	5	2	3

Икки томон ўртасидаги ўйиннинг қуйи ва юқори баҳоларини аниқлаймиз:
 $\alpha = \max_i (2, 2, 2) = 2, \quad \beta = \min_j (7, 6, 4) = 4$

Кўриниб турибдики $\alpha \neq \beta$ шартнинг бажарилганлигидан, қаралаётган ўйин аралаш стратегияли масаладир. Агарда $\alpha = \beta$ шарт ўринли бўлса, ўйиннинг баҳоси $\alpha = \beta = V$ га тенг бўлади.

$\alpha \neq \beta$ бўлганлиги учун, қаралаётган масала чизиқли программалаштириш масаласига келтирилади.

Юқорида кўрсатилганидек, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_6 = 1 \end{cases}$$

Бу ерда x_4, x_5, x_6 , қўшимча киритилган ўзгарувчилардир.

Минимум шarti (амалиётда максимум деб юритишга тўғри келади) қуйидагича бўлади

$$f = \frac{1}{m} = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

Замонавий компьютерларнинг амалий дастурларидан фойдаланиб, куйилган масалани симплекс усули ёрдамида куйидаги ечимларга эга бўламиз:

$$x_1 = 0,0724$$

$$x_2 = 0,0144$$

$$x_3 = 0,2029$$

ҳамда

$$m = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{1}{0,0724 + 0,0144 + 0,2029} = \frac{1}{0,2897} = 3,4518$$

ни аниқлаймиз.

A_1 стратегияни қўллаш натижасида

$$P_1 = x_1 \cdot m = 0,0724 \cdot 3,4518 = 0,25$$

эга бўламиз. Худди шунингдек A_2 , A_3 стратегиялар бўйича

A_2 стратегия учун:

$$P_2 = x_2 \cdot m = 0,0144 \cdot 3,4518 = 0,0497$$

A_3 – стратегия учун:

$$P_3 = x_3 \cdot m = 0,2029 \cdot 3,4518 = 0,7000,$$

ларга эга бўламиз. Буларга кўра аралаш стратегиялар учун мақсадли ечимларни куйидаги жадвалда келтирамиз.

A_1	A_2	A_3
0,25	0,05	0,7

Демак ажратилган маблағнинг 0,25 қисми $500 \times 0,25 = 125$ млн. сўм A_1 русумли автомашина учун, 0,05 қисми $5600 \times 0,05 = 280$ млн. сўм A_2

русумли автомашина учун, 0,7 қисми $500 \cdot 0,7 = 350$ млн. сўм A_3 русумли автомашинани сотиб олиш учун ишлатиш мақсадга мувофиқ эканлиги аниқланади.

$m = 3,4518$ бўлганлигидан ҳамда ҳисоблаш жараёнини соддалаштириш учун 1000 га бўлинганлигини эътиборга олсак, ташкилот раҳбари янги сотиб оладиган ҳар бир русумли автомашина учун энг ками билан $3,4518 \cdot 1000 = 3451,8$ тонна меҳнат унумдорликка эришишни тахмин қилиш мумкин.

Назорат учун саволлар

1. Қандай кўринишдаги масалалар ўйинлар назарияси масалаларига келтирилади?
2. Стратегия нима?
3. Ўйиннинг қуйи баҳоси қандай аниқланади?
4. Ўйиннинг юқори баҳоси қандай аниқланади?

5. Ўйинлар назарияси масалаларида аралаш стратегияли масалани изоҳлаб беринг?
6. Эгар нуқтага эга деганда нимани тушунасиш?
7. Максимал Вальда, минимал риск Севиджа, Гурвиц мезонлари қандай аниқланади?

Адабиётлар

1. Т.Х.Холматов, Х.С. Умаров Курилишни бошқаришда иқтисодий-математик усуллар. Ўқув қўлланма, Самарканд 2004 й. 196 бет.
2. Ю.Н.Кузнецов и.др. Математическое программирование. М. Высшая школа 1976 г.
3. И.Г.Шепелев «Математические методы и модели управления в строительстве» М: Высшая школа, 1980 г.
4. М.Атхамов, Г.Отабоев Планлаштиришда математик методларни қўлланилиши. Тошкент. Ўқитувчи 1982 й.
5. Шодиев Т.Ш. ва бошқ. «Экономика» Тошкент, Шарқ конд. 1999 й.

М у н д а р и ж а

Кириш 4

1- Мавзу: Математик программалаштириш фанининг предмети ва усуллари

- 1.1. Математик программалаштириш фанининг предмети 5
- 1.2. Бошқаришни режалаштиришда иқтисодий математик усуллар. .5
- 1.3. Энг содда иқтисодий масалаларнинг математик моделлари... .7

2- Мавзу: Чизиқли программалаштириш

- 2.1. Чизиқли программалаштириш масаласининг қўйилиши ва унинг турли формаларда ифодаланиши.14
- 2.2. Чизиқли программалаштириш масаласининг геометрик талқини ва уни график усулда ечиш... .. 16
- 2.3. Чизиқли программалаштириш масаласининг ечишнинг симплекс усули 20
- 2.4. Чизиқли программалаштириш масаласининг ечишнинг симплекс жадваллар усули.24
- 2.5. Сунъий базис усули. 30

3- Мавзу: Чизиқли программалаштиришнинг иккиланмалик

назарияси

- 3.1. Чизикли программалаштиришнинг ўзаро икки
ёклама масалалари. 37
- 3.2. Ўзаро икки ёклама масалалар математик моделларининг турлари 39
- 3.3. Тўғри ва унга иккилама масалани ечиш усули. 41
- 4-Мавзу: Чизикли программалаштиришнинг махсус масалалари**
- 4.1. Транспорт масаласининг қўйилиш ва унинг математик модели. 48
- 4.2. Очик ва ёпиқ модели транспорт масалалари. 50
- 4.3. Таянч ечимини топиш усуллари. 51
- 4.4. Потенциаллар усули. 53
- 4.5. Бутун сонли программалаштириш масаласининг қўйилиши
ва унинг ечиш усули. 55
- 5-Мавзу: Чизиксиз программалаштириш**
- 5.1. Чизиксиз программалаштириш масаласининг қўйилиши. . . . 60
- 5.2. Чизиксиз программалаштириш масаласининг график усули. . . 62
- 5.3. Лагранж купайтувчилар усули. 63
- 5.4. Шартли экстремум масаласини ечишнинг сонли усуллари. . . 73
- 6-Мавзу: Қаварик программалаштириш**
- 6.1. Қаварик функциялар. 75
- 6.2. Қаварик программалаштириш масаласи. 76
- 6.3. Кун-Таккер теоремаси. 76
- 6.4. Франк-Вулф усули ва унинг тадбиқлари. 78
- 7-Мавзу: Динамик программалаштириш элементлари**
- 7.1. Динамик программалаштириш. 84
- 7.2. Ресурсларни оптимал тақсимлаш ҳақидаги масала. Р.Белманнинг
функционал экстремал тенгламаси. Оптималлик принципи. . 84
- 7.3. Иқтисодиётга оид баъзи бир масалаларни динамик прогн-
лаштириш усули ёрдамида ечиш. 85
- 8-Мавзу: Ўйинлар назарияси элементлар**
- 8.1. Ўйинлар назарияси масалалари. 89
- 8.2. Ўйинлар назарияси масалаларининг асосий тушунчалари. . . 89
- 8.3. Матрицали ўйинлар ва уларни чизикли программалаштириш
масаласига келтириш ёрдамида ечиш. 90
- 8.4. Табиат билан ўйин. 94
- 8.5. Ўйинлар назарияси усуллари ёрдамида иқтисодиётнинг бази
бир масала ларини ечиш. 94

Умаров Ҳаким Содикович

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Маъруза матнлари

Компьютерда саҳифаловчи: Рустамова Х

4.03.2005 й. Босишга рухсат этилди.

Қоғоз бичими 60 90¹/16

6,7 шартли босма иабок. Адади 100

Буюртма ____

**Самарқанд Давлат архитектура-қурилиш институти босмахонасида
босилди.**

Самарқанд, 703047, Лолазор , 70.