

**O'ZBEKSTAN RESPUBLIKASI XALIQ
BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI
A'JINIYAZ ATINDAG'I NO'KIS MA'MLEKETLIK
PEDAGOGIKALIQ INSTITUTI**

**FIZIKA MATEMATIKA FAKUL'TETI
«Informatika ha'm xabar texnologiyaları» kafedrası**

«Fizika-matematika» fakul'tetinin' matematika-informatika
ta'lim bag'darı 4-kurs studenti Nietullaeva Gu'lzardın'

PITKERIW QA'NIGELIK JUMISI

**Tema: «EN' KISHI KVADRATLAR USILI HA'M
ONI QOLLANIW»**

qa'nigeli: 5140100- Matematika ha'm informatika

Ilimiy basshi _____ **dots.M.Berdimuratov**

Kafedra baslig'ı _____ **dots. A.Abdullaev**

No'kis-2011

MAZMUNI

KIRISIW.....	3
I BAP. FUNKTSIYALARDI ORTASHA KVADRATLIQ JUWIQLASTIRIW..	5
1.1. Ma'selenin' qoyilwı.....	5
1.2. Keste usılında berilgen funktsiyalardı kishi kbadratlar usılı menen juwıqlastırw.....	8
1.3. Funktsiyalardı kesindide en' kishi kbadratlar usılı menen juwıqlastırw.....	15
1.4. En' kishi kbadratlar usılı menen juwıqlastırwdın' ulıwma ma'selesı.....	18
1. 5. Trigonometriyalıq ko'pag'zalılar ja'rdeminde ortasha kvadratlıq juwıqlastırwlar.....	25
II BAP. FUNKTSIYALARDI TEN' O'LSHEMLI JUWIQLASTIRIW.....	29
2.1. $P_m(x)$ ko'pag'zalısnın' $f(x)$ funktsiyasınan awısıwının' absolyut shaması.....	29
2.2. U'lken koeffitsienti birge ten' bolg'an, m -da'rejeli qa'legen $P_m(x)$ ko'pag'zalı.....	33
JUWMAQLAW.....	36
PAYDALANG'AN A'DEBIYATLAR.....	37

KIRISIW

Esaplaw matematikasının' ko'plegen ma'selelerinde funksiylardıń' bazı bir ken' funksiylardıń' P ko'pligine derek bolg'an $f(x)$ funksiya, funksiylardıń' og'an qarag'anda a'dewir tar $\bar{P}$ ko'pligine derek ha'm belgili ma'niste $f(x)$ funksiyaǵa jaqın bolg'an, $\varphi(x)$ funksiya menen juwıqlastırıw za'ru'rliǵı kelip shıǵ'adı.

Ma'selen, P -u'zliksiz funksiylardıń' ko'pligi, al $\bar{P}$ -juwıqlastırıwshı funksiya esabında ken' qollanılatug'ın, algebralıq yamasa trigonometriyalıq ko'pag'zalılardıń' ko'pligi bolıwı mu'mkin.

Matematikalıq analizdin' ulıwma kursınan funksiylardı juwıqlastırıwdın' geypara usılları ma'lim. Ma'selen, $[a,b]$ kesindisinde u'zliksiz ha'm n -ta'rtipke shekemgi u'zliksiz tuwındılarg'a iye bolg'an $f(x)$ funksiya Teylor formulası ja'rdeminde ko'rsetiliwi mu'mkin:

$$P(x) = \left[f(x) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2!} f''(c) + \dots + \frac{(x-c)^n}{n!} f^n(c) \right] + R_n(x),$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad f(x) \approx P_n(x)$$

Bunda $c \in [a,b]$ bazı bir noqat, $P_n(x)$ $-n$ -da'rejeli Teylor jıyındısı, $R_n(x)$ onın' qaldıq ag'zasının' shaması menen anıqlanadı.

Og'ada ulıwma sha'rtlerdi qanaatlandiratug'ın $f(x)$ funksiyanı trigonometriyalıq ko'pag'zalı menen Fur'e qatarının' kesindisi menen juwıqlastırıwǵa bolatug'ını belgili.

Ulıwma alg'anda, funksiyanı juwıqlastırıw ma'selesini, $X \subseteq R$ ko'pliginde grafik, ko'rinishinde yamasa anıq emes tu'rde berilgen $f(x)$ funksiya, og'an qarag'anda a'piwayı ha'm esaplaw maqsetleri ushın qolaylı $\varphi(x)$ funksiya menen albastırıwdan ibarat boladı.

Egerde X shekli sandag'I $x_0, x_1, \dots, x_n$ noqatların' ko'pliginen ibarat bolsa, bunday juwıqlastırıw noqatlıq juwıqlastırıw dep, al egerde $X=[a,b]$ bolsa, onda integrallıq juwıqlastırıw dep ataladı.

Meyli $f(x)$ funktiyası X ko'pliginde, esaplawlar ushın qolaylıraq ha'm bazı bir ma'niste $f(x)$ funksiyaşına jaqın, $\varphi(x)$ funksiyaşına menen juwıqlastırılğ'an bolsın. Juwıqlastırıwdın' sapasın, yag'nıy eki funksiyanın' jaqınlıg'ın, sheshilip atırğ'an ma'selenin' fizikalıq mazmunına baylanıslı, ha'r qıylı bahalaw mu'mkin. Basqasha aytqanda, $[a, b]$ kesindisinde $\varphi(x)$ funksiyaşının' $f(x)$ funksiyaşına jaqın bolıwın ha'r qıylı ma'niste tu'siniw mu'mkin. Ma'selen:

1) $[a, b]$ kesindisinin' $n+1$ noqatlarında juwıqlasırwshı $\varphi(x)$ funksiyaşının' $f(x)$ funksiyaşına menen sa'ykes keliwin, yag'nıy $f(x_i) = \varphi(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) ten'liklerinin' orınlanıwın talap etiw mu'mkin. Funktsiyanı usınday usıl menen juwıqlastırıw onı interpolyatsiyalaw dep ataladı. Egerde dara jag'dayda, $\varphi(x)$ - n -da'rejeli algebralıq ko'pag'zalı bolsa, onda funksiyanı bunday juwıqlastırıw parabolalıq interpolyatsiyalaw dep ataladı ("interpolyatsiya" ataması latınnın' "interpolatio" degen so'zinen alıng'an bolıp, bizin'she, "o'zgeritiw", "du'zetiw" degen ma'nislerdi an'latadı);

$$2) \varphi(x) \text{ funksiyaşın, } \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \text{ integralı yamasa } \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2$$

qosındısı en' kishi (minimum) ma'niske iye bolg'anday etip, saylap alıw mu'mkin. Bunday qa'siyetke iye bolg'an $\varphi(x)$ funksiyaşına, $f(x)$ funksiyaşın ortasha kvadratlıq ma'nisinde juwıqlastırıwshı funksiya dep ataladı;

3) $\varphi(x)$ funksiyaşın $\max |f(x) - \varphi(x)|, x \in [a, b]$ en' kishi ma'niske iye bolg'anday etip saylap aladı. Bul jag'dayda $\varphi(x)$ funksiyaşına $f(x)$ funksiyaşın ten' o'lsheмли juwıqlastıradı dep ataydı.

Juwıqlastırıwshı funksiya esabında, a'dette algebralıq ha'm trigonometriyalıq ko'pag'zalılar paydalanıladı.

I BAP. FUNKTSIYALARDI ORTASHA KVADRATLIQ JUWIQLASTIRIW

1.1. Ma'selenin' qoyılıwı

Biz joqarıda, funktsiyalardı interpolyatsiyalaw, berilgen $y = f(x)$ fuiktsiyasın $x \in [a, b]$ ($i = \overline{0, n}$) noqatlarında

$$y_i = f(x_i) = \varphi(x_i), i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

sha'rtlerin qanaatlandıratug'ın basqa $\varphi(x)$ funktsiyası menen almastırıwdan ibarat ekenligin ko'rdik. Biraqta ko'plegen ma'selelerde funktsiyalardı bunday juwıqlastırıw qolaylı ha'm maqsetke muwapıq bola bermeydi. Sebebi

1) $x_i \in [a, b]$ ($i = \overline{0, n}$) kesindisinin' uzınlıg'ı kishi bolg'anda g'ana (1) talaptı basshılıqqa alıp, interpolyatsiyalawshı funktsiyalardı jasaw praktikanın' talapların qanaatlandıradı. Al egerde $[a, b]$ uzın kesindi bolg'an jag'dayda, onı birneshe kishi kesindilerge bo'lip, olardıń ha'r birinde berilgen funktsiyanı interpolyatsiyalaw kerek boladı. O'ytkeni, bul jag'dayda, pu'tkil $[a, b]$ kesindisi boyınsha jasalg'an interpolyatsiyalawshı funktsiya berilgen da'llikti ta'miyinlemeydi. Sonlıqtan $[a, b]$ u'lken kesindi bolg'an jag'dayda interpolyatsiyalawshı funktsiyanı jasaw u'lken ko'lemdegi esaplaw jumısların orınlawdı talap etedi.

2) berilgen funktsiyanı da'rejeli ko'pag'zalılar ja'rdeminde interpolyatsiyalawdın' da'lligin arttırıw maqsetinde, interpolyatsiya tu'yinlerinin' sanı arttırılса, interpolyatsiyalawshı ko'pag'zalınnı' da'rejesi de o'sedi. Bul interpolyatsiyalawshı ko'pag'zalını jasawdı ha'm onnan paydalanıwdı qıyınlastıradı,

3) interpolyatsiya tu'yinlerinde $y = f(x)$ ha'm $\varphi(x)$ funktsiyalarınnı' ma'nislerinin' da'l sa'ykes keliwin talap etiw tiykarsız boladı. Sebebi, egerde $y_i = f(x_i)$ ($i = \overline{0, n}$) ma'nislerin esaplag'anda bazı bir qa'teliklerge jol qoyılса yamasa bunday qa'telikler tosattan payda bolsa (ilimiy ta'jiriybelerdin' yamasa o'lshewlerdi orınlawdın' qa'telikleri xtb), onda (1) talaptı qanaatlandıratug'ın $\varphi(x)$

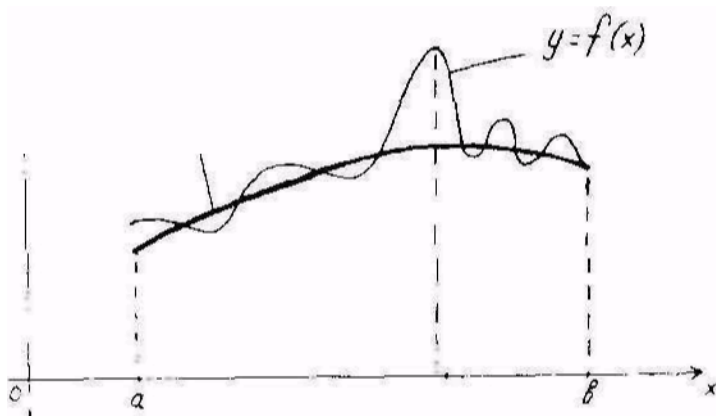
interpolyatsiyalawshı funksiya, $y(i=\overline{0,n})$ di esaplawda jiberilgen qa'teliklerdi ta'kirarlaydı. Sonlıqtan bunday jag'daylarda juwıqlastırwshı $\varphi(x)$ funksiya, son'g'ı na'tiyjege ilimiy ta'jiriybelerdin' yamasa o'lshewlerdin' qa'telikleri u'lken ta'sir jasamaytug'ınday etip jasaw, u'lken a'hmiyetke iye boladı.

Usı jag'daylarg'a baylanıslı, $[a,b]$ kesindisinde $y=f(x)$ funksiya interpolyatsiyalawdın' ko'rsetilgen kemshiliklerinen qutıl'g'anday etip, bul funksiyanı baskasha usıl menen juwıqlastırw ma'selesı kelip shıg'adı. Bunday usıllardın' biri $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesindisinde ortasha kbadratlıq ma'nisinde juwıqlastırw usılı boladı. Onın' ma'nisi mınadan ibarat. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesindisinde juwıqlastırwshı $f(x)$ funksiya

$$J = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \Rightarrow \min \quad (2)$$

sha'rti orınlang'anday etip jasaladı.

Egerde (2) integralı kishi bolsa, onda ortasha alg'anda, $[a,b]$ kesindisinin' u'lken u'lesinde $f(x)$ ha'm $\varphi(x)$ funksiya bir-birine jaqın boladı. Biraqta, $[a,b]$ kesindisinin' ayırım noqatlarında yamasa onın' kishi u'lesinde, $f(x) - \varphi(x)$ ayırması jetkilikli u'lken bolıwı da mu'mkin (1-su'wret).



Egerde funksiyanın' berilgen ma'nisleri qa'telikler menen anıqlang'an bolsa, onda (2) sha'rtinin' orınlanıwınan anıqlang'an $\varphi(x)$ funksiyanın' ma'nisleri $f(x)$ funksiyanın' berilgen ma'nislerine qarag'anda da'llirek bolatug'ını

ku'tiledi. O'ytkeni, ortasha kbadratlıq ma'nisinde juwıqlastırw funksiyasının' jergilikli nadurılıqların (kemshiliklerin) tegislewge alıp keledi.

$$p = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx}, \quad (3)$$

shaması $f(x)$ ha'm $\varphi(x)$ funksiyalarının' ortasha kbadratlıq awısıwı (taysalıwı) dep ataladı. Ol $f(x)$ funksiyasın $\varphi(x)$ funksiyası menen ortasha kbadratlıq ma'nisinde juwıqlastırwdın' qa'teligin anıqlaydı. Egerde p kishi bolsa, onda bunnan $f(x)$ funksiyasın $[a, b]$ kesindisinde $\varphi(x)$ funksiyası menen juwıqlastırwdın' absolyut qa'teligi, yag'nıy

$$\alpha(x) = |f(x) - \varphi(x)| \quad (4)$$

shaması, ha'r qanday $x \in [a, b]$ noqatında kishi bolatug'ını kelip shıqpaydı. Biraqta, kerisinshe, (4) nin' xa'r bir $x \in [a, b]$ noqatında kishi bolıwınan, barlıq waqıtta, p nın' kishi bolatug'ını kelip shıg'adı. Bunnan, funksiyalardıń ortasha kbadratlıq ma'nisinde juwıqlastırwdın' keregi joq degen juwmaq kelip shıqpaydı. Funksiyalardı bunday juwıqlastırwdın' maqsetke muwapıq keletug'ını joqarıda ayıldı.

Egerde funksiya $x_i \in [a, b] (i = \overline{0, n})$ noqatlarındag'ı sa'ykes $y_i = f(x_i) (i = \overline{0, n})$ ma'nisleri menen berilse, yag'nıy onın' analitikalıq an'latpası belgisiz bolsa, onda (2) integralının' ornına

$$S = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 \Rightarrow \min \quad (5)$$

qosındısı qaraladı. Bul jag'dayda, (3) nin' ornına, funksiyalardıń ortasha kbadratlıq awısıwı esabında

$$p_n = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2} \quad (6)$$

shaması paydalanıladı.

Konkret ma'selelerdi qarag'anda juwıqlastırırwshı $\varphi(x)$ funktsiyası esabında ko'binese algebralıq yamasa trigonometriyalıq ko'pag'zalılar saylap alınadı.

1.2. Keste usılında berilgen funktsiyalardı kishi kbadratlar usılı menen juwıqlastırırw

Meyli, $y_i = f(x_i) (i = \overline{0, n})$ $y = f(x)$ funktsiyasının' $x_i \in [a, b] (i = \overline{0, n})$

noqatlarındag'ı sa'ykes ma'nisleri bolsın. Bul jag'dayda, en kishi kbadratlar usılınan paydalanıp, keste usılında berilgen funktsiyanı ortasha kbadratlıq ma'nisinde juwıqlastırırw ma'selesı bılay koyıladı: m-da'rejeli ($m < n$)

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (7)$$

ko'pag'zalılarının' arasınan

$$S = \sum_{i=0}^n [y_i - P_m(x_i)]^2 \quad (8)$$

an'latpasına en' kishi (minimum) ma'nis beretug'ın ko'pag'zalını tabırw talap etiledi.

Bul en' kishi ma'nistin' bar bolatug'ını guman tuwdırmaydı. Sebebi (8) an'latpası $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ koefitsientlerinin' funktsiyası esabında, ekinshi da'rejeli ko'pag'zalı boladı ha'm bug'an qosımsha, $S \geq 0$, yag'nıy to'mennen shegaralang'an.

S an'latpası en' kishi ma'niske iye bolatug'ın a_k koefitsientlerinin' ma'nislerin anıqlaw ushın, barlıq a_k boyınsha S ten dara tuwındılardı tawıp, olardı nol'ge ten'eymiz. Na'tiyjede $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ koefitsientlerine qarata m+1 sıızıklı teklemelsrinin sistemasına iye bolamız:

$$\sum_{i=0}^n (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_mx_i^m) x_i^k = 0$$

$$(k = 0, 1, \dots, m)$$

Bul sistemanı to'mendegi ko'riniste jazamız:

$$c_k = \sum_{i=0}^n x_i^k, \quad d_k = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m = d_0 \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \dots + c_{m+1} a_m = d_1 \\ \dots\dots\dots \\ c_m a_0 + c_{m+1} a_1 + c_{m+2} a_2 + \dots + c_{2m} a_m = d_m \end{array} \right.$$
$$D_{m+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{2m} \end{vmatrix} \quad (10)$$

To'mendegishe aniqlang'an m-da'rejeli ko'pag'zalini $F_m(x)$ orqali belgileymiz:

$$F_m(x) = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^m \end{vmatrix}}{\dots} \quad (11)$$

Qa'legen $k < m$ ushın $F_m(x_i)$ di x_i^k g'a ko'beytip ha'm kelip shıqqan na'tiyjelerdi qosıp, mınag'an iye bolamız:

$$\sum_{i=0}^n x_i^k F_m(x_i) = \sum_{i=0}^n \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \\ x_i^k & x_i^{k+1} & x_i^{k+2} & \dots & x_i^{k+m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \\ \sum_{i=0}^n x_i^k & \sum_{i=0}^n x_i^{k+1} & \sum_{i=0}^n x_i^{k+2} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{k+m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \\ c_k & c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{k+m} \end{vmatrix} = 0$$

Solay etip, to'mendegi ten'likler kelip shıg'adı:

$$\sum_{i=0}^n x_i^k F_m(x_i) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (12)$$

Ekinshi jaqtan, $F_m(x_i)$ di x_i^m ge ko'beytip ha'm kelip shıkkann na'tiyjelerdi qosıp, mına ten'likke kelemiz:

$$\sum_{i=0}^n x_i^m F_m(x_i) = D_{m+1}, \quad (13)$$

(12) ha'm (13) ten'liklerinin' ja'rdeminde

$$N_m = \sum_{i=0}^n F_m^2(x_i) = D_m D_{m+1} \quad (14)$$

qatnasının' durıslıg'ı an'sat ko'rsetiledi.

Haqıyqatında da, (14)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n F_m^2(x_i) &= \sum_{i=0}^n F_m(x_i) \cdot \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \\ 1 & x_i & x_i^2 & \dots & x_i^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \\ \sum_{i=0}^n F_m(x_i) & \sum_{i=0}^n x_i F_m(x_i) & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^m F_m(x_i) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & \dots & c_{2m-1} \\ 0 & 0 & \dots & D_{m+1} \end{vmatrix} = D_{m+1} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{m-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & \dots & c_{2m-1} \end{vmatrix} = D_{m+1} D_m \end{aligned}$$

N_m shaması, kvadratlardıń qosındısı esabında, tek

$$F_m(x_0) = F_m(x_i) = \dots = F_m(x_n) = 0$$

bolg'anda g'ana nol'ge aylanadı. Biraqta, $m < n$ bolg'anda bul tek $F_m(x) = 0$ bolg'an jag'dayda orınlanıwı mu'mkin.

Meyli $m=1$ bolsın. Sonda (11) boyınsha

$$F_1(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = c_0x - c_1 = (n+1)x - c_1 \neq 0$$

Demek, $N_1 = D_1D_2 > 0$. Bunnan $D_1 = c_0 - n + 1 > 0$ ekenligin esapqa alsaq, onda $D_2 > 0$ bolatug'ınlıg'ı kelip shıg'adı

Endi (14) te $m=2$ bolsa, onda $N_2 = D_2D_3$ boladı (14)-ten'ligi tiykarında, $F_2(x)$ ko'pag'zalıında x^2 tın' aldındag'ı koeffitsient D_2 ge ten' ha'm ko'rsetkenimiz boyınsha $D_2 \neq 0$.

Sonlıqtan $N_2 > 0$ boladı ha'm bunnan, o'z gezeginde, $D_3 > 0$ bolatug'ını kelip shıg'adı. Bul talqılawlardı dawam etip, $D_{m+1} > 0$ boladı degen juwmaqqqa kelemiz.

Solay etip, (9) sistema barqulla sheshimge iye boladı ha'm bul sheshim tek birew g'ana boladı. Bul sheshim, (8) ten'ligi menen anıqlang'an S an'latpasına, izlenip atırg'an en' kishi ma'nisti beredi.

Meyli, $a_0 = a_0^*, a_1 = a_1^*, \dots, a_m = a_m^*$ (9) sistemasının' sheshimi bolsın. Sonda $P_m^*(x) = a_0^* + a_1^*x + \dots + a_m^*x^m$ ko'pag'zalı, $f(x)$ funksiyaşınan en' kishi $\rho_n^* = \min \rho_n$ ortasha kbadratalıq awısıwına iye bolg'an, birden-bir m-da'rejeli ko'pag'zalı boladı.

Egerde dara jag'dayda $m > n$ bolsa, onda juwıqlastırıwshı $P_m^*(x)$ ko'pag'zalı $x_0, x_1, \dots, x_n$ noqatları ushın jasalg'an Lagranjdın' interpoliyatsiyalıq ko'pag'zalı menen sa'ykes keledi ha'm $\min \rho_n = 0$ boladı.

Solay etip, funksiylardı ortasha kbadratalıq ma'nisinde juwıqlastırıw, olardı interpoliyatsiyalaug'a qarag'anda a'dewir ulıwmaraq protsess boladı. (9) sızıqlı ten'lemeler sistemasın EEM lerden paydalanıp sheshiw qolaylı. Dara jag'dayda, (10) ten'ligi menen anıqlang'an D_{m+1} matrıtıası on' anıqlang'an matrıtıa bolg'anlıqtan, bul sistema ushın Zeydel' usılı jıynaqlı boladı.

(9) sistemani jasaw ushın esaplawlardı to'mendegi keste boyınsha orınlaw qolaylı boladı. Kestede $t = 2$ dep qabıl etilgen.

En' kishi kbadratlar usılın qollanıw sxeması.

x_0^2	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x^2_i y_i$
1	x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	y_0	$x_0 y_0$	$x^2_0 y_0$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	$x_1 y_1$	$x^2_1 y_1$
1	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	y_2	$x_2 y_2$	$x^2_2 y_2$
1	x_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	y_3	$x_3 y_3$	$x^2_3 y_3$
1	x_4	x_4^2	x_4^3	x_4^4	y_4	$x_4 y_4$	$x^2_4 y_4$
5	c_1	c_2	c_3	c_4	d_0	d_1	c_2

$n+1$ noqatlarda keste tu'rinde berilgen $f(x)$ funktsiyasın

juwıqlastıratug'ın m -da'rejeli $P_m(x)$ ko'pag'zalısnın' koeffitsientlerin en' kishi kbadratlar usılı menen esaplaw ushın $\left[n(m^2 + 5m + 2) \right] / 2 + \left[m(m^2 + 9m + 8) \right] / 6$ qosıw a'mellerin, $\left[(n+1)(m^3 + 3m^2) \right] / 2 + \left[(m+1)(m^2 + 11m + 12) \right] / 6$ ko'beytiw a'mellerin, $m+1$ bo'liw a'mellerin ha'm $m+1$ kbadrat koren' shıg'arıw a'mellerin orınlaw talap etiledi.

Mısalı, $y = f(x)$ funktsiyası to'mendegi keste tu'rinde berilgen:

x_i	0.56	0.84	1.14	2.44	3.16
$f(x_i)$	-0.80	-0.97	-0.98	1.07	3.66

Bul funktsiyanı ortasha kbadratlık ma'nisinde juwıqlastıratug'ın, ekinshi da'rejeli $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ko'pag'zalısn jasan'.

Sheshiliwi: Kerekli esaplawlardı 1-kestesindegi sxema boyınsha orınlaymız ha'm 2-kestesin du'zemiz. Bunda esaplawlar bir artuq tsifrdı saklaw menen, yag'ny u'tirden son' u'sh onlıq belgi menen, orınlang'an.

Sonda $P_2(x)$ ko'pag'zalısinın' a_0, a_1, a_2 koeffitsientleri anıqlanatug'ın sızıqlı ten'lemelerinin' sisteması to'mendegishe jazıladı:

$$5a_0 + 8,14a_1 + 18,260a_2 = 1,98$$

$$8,14a_0 + 18,260a_1 + 48,335a_2 = 11,797$$

$$18,260a_0 + 48,335a_1 + 137,456a_2 = 40,710$$

Bul sistemanın' sheshimi $a_0 = 0, a_1 = -2, a_2 = 1$ bolıp, izlsnip aturg'an ko'pag'zalı mınaday boladı:

$$P_2^*(x) = x^2 - 2x$$

2-keste

x_i^0	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0.56	0.314	0.176	0.098	-0.80	-0.448	-0.251
1	0.84	0.706	0.593	0.498	-0.97	-0.815	-0.685
1	1.14	1.300	1.482	1.690	-0.98	-1.117	-1.274
1	2.44	5.954	14.528	35.450	1.07	2.611	6.371
1	3.16	9.986	31.556	99.720	3.66	11.566	36.549
5	8.14	18.260	48.335	137.456	1.98	11.797	40.710

Endi 2-kestedegi da'slepki $y_i = f(x_i) \quad (i = \overline{0,4})$ ma'nislerin

$P_2^*(x)$ ko'pag'zalısinın' sa'ykes noqatlardag'ı ma'nisleri menen salıstıramız. Sonda to'mendegi kestege iye bolamız:

x_i	y_i	$P_2^*(x_i)$	$y_i - P_2^*(x_i)$
0.56	-0.80	-0.81	0.01
0.84	-0.97	-0.97	0.00
1.14	-0.98	-0.98	0.00
2.44	1.07	1.07	0.00
3.16	3.66	3.65	0.01

Egerde $y_i = f(x_i) (i = \overline{0,4})$ ma'nisleri qa'telikler menen aling'an bolsa, onda juwıqlastırw na'tiyjesinds aling'an funksiyanın' ma'nisleri funksiyanın' berilgen ma'nislerinen jaksıraq boladı dep esaplawg'a tiykar bar. O'ytkeni, en' kishi kbadratlar usılı msnen funksiylardı juwıqlastırğ'anda tosattan payda bolg'an qa'telikler tegislenip barıladı.

S qosındısın (8) formula menen du'zgende, barlıq $x_i \in [a, b] (i = \overline{0, n})$ noqatları ten'dey rol' atqaradı. Bul, barlıq $y_i - P_m(x_i) = 0 (i = \overline{0, n})$ ten'liklerinin' orınlanıwı, ten'dey a'hmiyetke iye ekenligin an'latadı. Biraqta, anaw yamasa mınaw sebeplerge baylanıslı, bul ten'liklerdin' ayırımlarına ko'birek, al basqalarına azıraq a'hmiyet beriliwi mu'mkin. Ma'selen, egerde y_i ma'nisleri, ha'r qıylı da'llikke iye bolg'an a'sbap-u'skeneler ja'rdeminde o'lshewlerdi orınlaw na'tiyjesinde aling'an bolsa, onda da'lirek ha'm isenimlirek a'sbaplar ja'rdeminde aling'an mag'lıwmatlarg'a u'lken isenim menen qatnas jasaymız ha'm olarg'a u'lken "salmaq" beremiz. Matematikalıq jaqtan bunı bılay an'latıw mu'mkin: en' kishi ma'nisi anıqlanatug'ın S qosındısı (8) ge qarag'anda ulıwmaraq tu'rde, to'mendegishe alınadı:

$$\bar{S} = \sum_{i=0}^n \delta_i [y_i - P_m(x_i)]^2, \quad (15)$$

bunda ha'r bir δ_i -arnawlı tu'rde saylap aling'an on' san bolıp, ol x_i noqatındag'ı salmaq dep ataladı. Ayırım jag'daylarda δ_i -salmaqları $\sum_{i=0}^n \delta_i = 1$ ten'ligi orınlang'anday etip, normalastırıladı.

(15) qosındısı alıng'an jag'dayda (9) sistemasının' koeffitsentleri ha'm saltan' ag'zaları sa'ykes

$$c_k = \sum_{i=0}^n \delta_i x_i^k \quad (k=0,1,2,\dots,2m), \quad d_k = \sum_{i=0}^n \delta_i x_i^k y_i \quad (k=0,1,2,\dots,m)$$

formulaları menen anıqlanatur'ının atap o'temiz.

1.3. Funktsiyalardı kesindide en' kishi kvadratlar usılı menen juwıqlastırıw

Meyli, endi $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesindisinde analitikalıq an'latpa menen berilgen bolsın. Sonda, bul funksiyanı $[a, b]$ kesindisinde (7) ko'pag'zalısı menen ortasha kvadratlıq ma'nisinde juwıqlastırıw talap etiledi. Bul jag'dayda qosındısının' ornına

$$J_m = \int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx \quad (16)$$

integralı qaralalı $P_m(x)$ ko'pag'zalisının' koeffitsientlerin berilgen m ushın (16) integralı en' kishi ma'niske iye bolg'anday etip, saylap alamız Onın' ushın (16) iitegralınan barlıq a_k lar boyınsha alıng'an dara tuwındılardı nol'ge ten'ep, ten'lemelerdin' mına sistemasına iye bolamız:

$$\int_a^b [f(x) - P_m(x)] x^k dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

yamasa ashıp jazsaq

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^m a_i \int_a^b x^i dx - \int_a^b f(x) dx, \\ \sum_{i=0}^m a_i \int_a^b x^{i+1} dx - \int_a^b f(x) x dx, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=0}^m a_i \int_a^b x^{i+m} dx - \int_a^b f(x) x^m dx, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Egerde

$$c_k = \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2m)$$

bolatug'ının esapqa alsaq, onda (17) sistemani to'mendegishe jazıwǵ'a boladı:

[illegible]

Bul sistemanın' anıqlawshısı sızıqlı baylanıssız $1, x, x^2, \dots, x^m$ funksiýalarının' Gram anıqlawshısı boladı. Sonlıqtan ol nol'den o'zgeshe boladı. Solay etip, (18) sisteması sheshimge iye ha'm onın' sheshimi tek 6irew g'ana boladı. $a_0 = a_0^*, a_1 = a_1^*, \dots, a_n = a_n^*$. Koeffitsientlsrdin' bul tabılg'an ma'nislerin (7) ko'pag'zalıısına aparıp qoyıp, (16) integralına en' kishi ma'nis beretug'ın, m da'rejeli algebralıq ko'pag'zalıını anıqlaymız. Demek, izlenip aturg'an ko'pag'zalıını tabamız.

Egerde qanday da bir uyg'arıwlar boyınsha, $[a, b]$ kesindisinin' bazı bir u'leslerinde onın' basqa u'lesleri menen salıstırğ'anda, $f(x)$ funksiyanın $P_m(x)$ ko'pag'zalıı menen da'lirek juwıqlastırw kerek bolsa, onda (16) integralının' ornına, og'an qarag'anda ulıwmaraq bolg'an

$$J_m = \int_a^b \mathcal{D}(x) [f(x) - P_m(x)]^2 dx \quad (19)$$

integralı qaraladı. Bunda $\delta(x)$ arnawlı tu'rde saylap alınatug'ın, salmaq funksiyası dep atalatug'ın teris emes funksiya. Egerde $\bar{x} \in [a, b]$ noqatında, bul kesindinin' basqa noqatlarına salıstırğ'anda, juwıqlastırıldı joqarıraq da'llik penen anıqlaw kerek bolsa, onda $\delta(x)$ funksiyasın onın' $\bar{x}$ noqatındag'ı ma'nisi kesindinin' basqa noqatlarındag'ı ma'nislerinen u'lken bolğ'anday etip, saylap aladı.

Bul jag'dayda (18) sistemasının' koefitsientleri ha'm saltan' ag'zaları sa'ykes to'mendegi formulalar menen an'latıladi:

$$c_k = \int_a^b \delta(x) x^k dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2m)$$

$$d_k = \int_a^b \delta(x) f(x) x^k dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

Mısalı. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyanın $[0;1]$ kesindisinde ekinshi da'rejeli $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ko'pag'zalı menen juwıqlastırın'.

Sheshiliwi. Bul jag'dayda $a = 0$, $b = 1$, $m = 2$ bolg'anlıqtan:

$$a) \quad c_k = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$c_0 = 1; c_1 = \frac{1}{2}; c_2 = \frac{1}{3}; c_3 = \frac{1}{4}; c_4 = \frac{1}{5}$$

$$b) \quad d_k = \int_0^1 x^k f(x) dx = \int_0^1 x^k \sqrt{x} dx, \quad k = 0, 1, 2$$

$$d_0 = \frac{2}{3}; d_1 = \frac{2}{5}; d_2 = \frac{2}{7}$$

Sonda (18) sistema to'mendegishe jazıladi:

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{2}{5}, \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Bul sistemani sheship, $P_2(x)$ ko'pag'zalıının' koefitsient-lerinin' mına ma'nislerine iye bolamız:

$$a_0 = \frac{6}{35}, \quad a_1 = \frac{48}{35}, \quad a_2 = -\frac{4}{7}$$

Sonda izlenip atırg'an ko'pag'zalı

$$P_2(x) = \frac{6}{35} + \frac{48}{35}x - \frac{4}{7}x^2$$

ko'riniside boladı. Bul tabılǵ'an $P_2(x)$ ko'pag'alısının' $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyaşınan ortasha kbadratlıq awısıwı mınag'an ten'

$$\rho = \sqrt{\int_0^1 \left[\sqrt{x} - \frac{6}{35} - \frac{48}{35}x + \frac{4}{7}x^2 \right]^2 dx} = \frac{\sqrt{2}}{70}$$

1.4. En' kishi kbadratlar usılı menen juwıqlastırıwdın' ulıwma ma'selesı

Meyli $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x) - [a, b]$ kesindisinde berilgen u'zliksiz ha'm sıızılıq baylanıssız funksiyaşardıń' sisteması bolsın. Sonda

$$P_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x) \quad (20)$$

an'latpası m-da'rejeli ulıwmalasqan ko'pag'zalı dep ataladı. Bunda $a_0, a_1, \dots, a_m$ - turaqlı koeffitsientler.

Bunın' aldındag'ı eki punktge alıng'an na'tiyjelerdin' ulıwmalasqan ko'pag'zalılar menen ortasha kvadratlıq ma'nisinde juwıqlastırıwg'a qollanıwın qaraymız. Bul jerde tek u'zliksiz $[a, b]$ kesindisi berilgen jag'day menen sheklenemiz. Sebebi $[a, b]$ kesindisinde shekli sandag'ı noqatlar berilgen jag'day bug'an uqsas u'yreniliwi mu'mkin.

Mına ma'seleni qoyamız:

$$J_m = \int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x) \right]^2 dx \quad (21)$$

integralı en' kishi ma'niske iye bolg'anday etip, (20) ulıwmalasqan ko'pag'zalısının' $a_0, a_1, \dots, a_m$ koeffitsientlerin anıqlaw talap etiledi.

(21) integralının' barlıq a_k lar boyınsha alıng'an tuwındıların nol'ge ten'ep, ten'lemelerdin' mına sistemasına iye bolamız:

$$\sum_{i=0}^m a_i (\varphi_i, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m) \quad (22)$$

Bunda to'mendegi qısqasha belgilewler kirgizigen:

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx, \quad (f, \varphi_k) = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx$$

Bul sistemanın' aniqlawshısı, sızıqlı baylanıssız $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ funksiýaların' sisteması ushın Gram aniqlawshısı boladı. Sonlıqtan ol nol'den o'zgeshe boladı. Solay etip, (22)-sistema sheshimge iye ha'm onın' sheshimi tek g'ana birew boladı.

Egerde $\{\varphi_k(x)\}_0^m$ funksiýaların' sisteması $[a, b]$ kesindisinde ortogonal' bolsa, yag'nıy $i \neq k$ bolg'anda

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (23)$$

bolsa, onda (22)-sistemanı jasaw ha'm onı sheshiw a'dewir an'satlasadı. Haqıyqatında da, bul jag'dayda (20) ulıwmalasqan ko'pag'zalıssının' koeffitsientleri tikkeley aniqlanadı:

$$a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x) dx} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m) \quad (24)$$

(24)-formula menen aniqlang'an a_k sanları $f(x)$ funksiýasının' $\{\varphi_k(x)\}_0^m$ ortogonal' funksiýaların' sistemasına qarata Fur'e koeffitsientleri dep ataladı.

Fur'e koeffitsientli ulıwmalasqan $P_m(x)$ ko'pag'zalıssı mına a'hmiyetli qa'siyetlerge iye boladı:

1) qosılıwshılardıń sanı m nin' artıwı menen, (24) formuladan ko'rinip turg'anınday, kishi a_j koeffitsientleri o'zgerissiz qaladı, yag'nıy jan'a ag'zalardıń qosılıwı menen burıng'ı orınlarg'an jumıs tolıq saqlanıw qaladı;

2) m nin' artıwı menen ortasha kvadratlıq qa'telik

$$J_m = \int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx$$

ken' ma'nisinde monoton kemip baradı, yag'nıy $J_1 \geq J_2 \geq \dots \geq J_m \geq J_{m+1} \geq \dots$ ten'sizlikleri orınlanadı. Solay etip, jan'a qosılıwshılardıń qosılıwı menen juwıqlastırılıwıń da'lligi artadı.

Fur'e ko'pag'zalılarının' bug'an uqsas qa'siyetleri noqatlıq juwıqlastırıw jag'dayında da durıs boladı.

Funktsiyalardıń ortogonal' sistemasının' mısalı esabında, $[0, 2\pi]$ kesindisinde ortogonal' bolg'an trigonometriyalıq funktsiyalardıń mına sistemasın keltiremiz:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos mx, \sin mx$$

Haqıyqatında da, tikkeley integrallaw arqalı, qa'legen pu'tin k ha'm n ushın, to'mendegi ten'liklerdin' durıslıg'ına iseniwge boladı:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin nx \sin kx dx &= \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \pi, & k = n \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{болса,} \\ \text{болса,} \end{matrix} \\ \int_0^{2\pi} \cos kx \sin nx dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos nx \cos kx dx &= \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \pi, & k = n \\ 2\pi, & k = n = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{болса,} \\ \text{болса,} \\ \text{болса} \end{matrix} \end{aligned} \quad (25)$$

Algebralıq ko'pag'zalılar menen juwıqlastırıw jag'dayındag'ı sıyaqlı, bazı bir ma'selelerde (21) integralının' ornına, a'dewir ulıwmaraq bolg'an

$$\overline{J}_m = \int_a^b \delta(x) [f(x) - P_m(x)]^2 dx = \int_a^b \delta(x) \left[f(x) - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) \right]^2 dx, \quad (26)$$

integralı qaraladı, bunda $\delta(x)$ -(19)-dag'ı sıyaqlı salmaq funktsiyası.

Bul jag'dayda $\{\varphi_k(x)\}_0^m$ funktsiyalarını sisteması $\delta(x)$ salmag'ı menen ortogonal' bolg'anday, yag'nıy $i \neq k$ bolg'anda

$$\int_a^b \delta(x) \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0$$

ten'likleri orınlang'anday etip, saylap alınadı.

Sonda, ulıwmalasqan ko'pag'zalının' koeffitsientleri to'mendegishe anıqlanadı:

$$a_k = \frac{\int_a^b \delta(x) f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b \delta(x) \varphi_k^2(x) dx} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m) \quad (27)$$

Funktsiyalardı en' kishi kvadratlar usılı menen juwıqlastırǵanda $\{\varphi_k(x)\}_0^m$ funktsiyaların' sisteması esabında ko'binese arnawlı ortogonal' ko'pag'zalılarnı, ma'selen, Lejandrdın', Chebıshevtin', YAkobidin' h. t. b. ko'pag'zalılarnı saylap aladı. Bul jag'daylarda, ulıwmalasqan $P_m(x)$ ko'pag'zalısı en' son'g'ı esapta, a'dettegi da'rejeli ko'pag'zalıǵ'a keltiriledi.

Mısal retinde Lejandrdın' ha'm Chebıshevtin' ortogonal' ko'pag'zalılarnı qaraymız.

Lejandrdın' ko'pag'zalılarnı Rodrigtin' to'mendegi formulası menen anıqlanadı [33, 37]:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (28)$$

Ma'selen, bul formulada izbe-iz $n = 0, 1, 2, 3, 4$ dep uyg'arıp, Lejandrdın' da'slepki bes ko'pag'zalısın bılay anıqlaymız:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, L_1(x) = x, L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ L_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned} \quad (29)$$

(28) formuladan paydalanıp, bo'leklep integrallaw arqalı to'mendegi ten'liklerdin' durıslıǵına an'sat iseniwge boladı

$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{егерде } n \neq m \text{ болса,} \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{егерде } n = m \text{ болса} \end{cases} \quad (30)$$

Solay etip, Lejandrdın' ko'pag'zalılarnı $[-1, 1]$ kesindisinde $\delta(x) - 1$ salmag'ı menen ko'pag'zalılarnı ortogonal' sistemasın du'zedi.

Chebıshevtin' ko'pag'zalılarnı

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

formulası menen anıqlanadı. Bul formulada $n = 0, 1, 2, 3, 4$ dep uyg'arıp ha'm eseli mu'yeshlerdin' trigonometriyalıq formulasınan paydalanıp, Chebishevtin' da'slepki bes ko'pag'zalıısına iye bolamız:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned} \quad (32)$$

Tikkeley esaplawlar jolı menen to'mendegi tenliklerdin' durıslıg'ına iseniwge boladı:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 0, \quad \text{егерде } n \neq m \quad \text{болса,} \\ \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \begin{cases} \pi, & \text{егерде } n = 0 \quad \text{болса,} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{егерде } n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{болса,} \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

Bunnan, Chebishev ko'pag'zalılarının' $[-1, 1]$ kesindisinde $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

salmag'ı menen ko'pag'zalılardın' ortogonal' sistemasın du'zetug'ınlıg'ı kelip shıg'adı.

Mısalı. $f(x) = |x|$ funktsiyasın $[-1, 1]$ kesindisinde Lejandrın' ha'm Chebishevtin' to'rtinshi da'rejeli ko'pag'zalıları menen ortasha kvadratlıq ma'nisinde juwıqlastırın'.

Sheshiliwi. 1) Da'slep, berilgen funktsiyanı juwıqlastıratug'ın ko'pag'zalını, Lejandrın' da'slepki bes ko'pag'zalıısının' sıızıqlı birikpesi (kombinatsiyası) tu'rinde alamız:

$$P_4(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + a_3 L_3(x) + a_4 L_4(x),$$

bundag'ı a_k koeffitsientleri (24) ha'm (30) formulalarına sa'ykes mına ten'likler menen anıqlanadı:

$$a_k = \frac{\int_{-1}^1 |x| L_k(x) dx}{\int_{-1}^1 L_k^2(x) dx}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Bug'an $L_k(x)$ tın' (29) dag'ı an'latpaların a'kelip qoyıp, tikkeley esaplawlardı orınlaw arqalı, koeffitsientlerdin' mına ma'nislerine iye bolamız:

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = 0, a_2 = \frac{5}{8}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{3}{16}$$

Demek,

$$P_4(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{16}(3x^2 - 1) - \frac{3}{128}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{15}{128}(-7x^4 + 14x^2 + 1)$$

Olay bolsa $|x| \leq 1$ bolg'anda $|x| \approx P_4(x) = \frac{15}{128}(1 + 14x^2 - 7x^4)$ boladı.

2) Endi $P_4(x)$ ko'pag'zalısın Chebıshevtin' da'slepki bes ko'pag'zalısının' sıızıqlı birikpesi tu'rinde izleyemiz:

$$P_4(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + a_3T_3(x) + a_4T_4(x),$$

Bul jag'dayda, a_k koeffitsientleri (27) ha'm (33) formulalarına sa'ykes, to'mendegishe anıqlanadı:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{|x|dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 |x|T_k(x)dx \quad (k=1,2,3,4)$$

Bundag'ı ekinshi ten'likke $T_k(x)$ tın' (32) degi an'latpaların a'kelip qoyıp,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}, a_1 = 0, a_2 = \frac{4}{3\pi}, a_3 = 0, a_4 = \frac{4}{15\pi}$$

ma'nislerine iye bolamız. Sonlıqtan $P_4(x) = \frac{1}{15\pi}(-16x^4 + 36x^2 + 3)$ boladı.

Endi bul eki usıl menen alıng'an na'tiyjelerdin' da'lligin salıstıramız. $x=1$ bolg'anda:

a) Lejandr ko'pag'zalıları menen juwıqlastırwdın' qa'teligi:

$$|x| - P_4(x) = 1 - \frac{15}{128}(1 + 14 - 7) = \frac{1}{16} = 0,0625$$

ke ten' boladı;

b) Chebıshev ko'pag'zalılarının paydalanıp juwıqlastırwdın' qa'teligi

$$|x| - P_4(x) = 1 - \frac{46}{150} \approx 0,0238$$

ge ten', yag'nıy salıstırmalı a'dewir joqarı boladı.

Chebıshev ko'pag'zalıları ja'rdeminde tabılg'an juwıqlasıw, juwıqlastırılatus'ın funksiyanın' $[-1, 1]$ kesindisinin' ushlarındag'ı ma'nislerin joqarı da'rejede, al Lejandr ko'pag'zalıları ja'rdeminde alıng'an juwıqlasıw, bul funksiyanın' $[-1, 1]$ kesindisindegi barlıq ma'nislerin ten'dey da'rejede esapqa alatug'ının atap o'temiz.

Meyli, $P_m(x)$ - en' kishi kvadratlar usılı menin' tabılg'an m -da'rejeli ulıwmalasqan ko'pag'zalı bolsın. Sonda (3) formulası tiykarında $f(x)$ funksiyanın' ha'm $P_m(x)$ ko'pag'zalınsın' ortasha kvadratlq awısıwı:

$$\rho_m = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b \delta(x) [f(x) - P_m(x)]^2 dx}$$

formulası menen anıqlanadı.

ρ_m shaması $f(x)$ funksiyanın $P_m(x)$ ko'pag'zalınsın' menen juwıqlastırılwdın' qa'teligin anıqlaydı. Sonlıqtan $P_m(x)$ ulıwmalasqan ko'pag'zalınsın, funksiylardıń $\{\varphi_k(x)\}_0^m$ ortogonal' sistemalarınan, $[a, b]$ kesindisinde kvadratı menen integrallanatus'ın qa'legen $f(x)$ funksiya ushın, ρ_m shaması qa'legenshe kishi bolg'anday etip jasaw, maqsetke muwapıq keledi. Bul sha'rtti qanaatlandıratus'ın funksiylardıń ha'r qanday sisteması, berilgen kesindide tolıq sistema dep ataladı. Demek, en' kishi kvadratlar usılı menen funksiylardı juwıqlastırğ'anda, da'slepki sistema esabında funksiylardıń tolıq sisteması alınsa, onda m nin' jetkilikli u'lken ma'nislerinde ρ_m kishi shama boladı dep tastıyıqlawg'a boladı.

Funksiylardı ortasha kvadratlq ma'nisinde juwıqlastırılwdın' teoriyasında qaralatus'ın funksiylardıń barlıq sistemaları, ma'selen, joqarıda qaralg'an trigonometriyalıq funksiylardıń, Lejandr ko'pag'zalılarının', Chebıshev ko'pag'zalılarının', sonday-aq, arnawlı ortogonal' ko'pag'zalılarının' sistemaları tolıq sistemalar boladı. Sonlıqtan olar m nin' jetkilikli u'lken ma'nislerinde

funktsiyalardı ortasha kvadratlıq ma'nisinde joqarı da'llik penen juwıqlastırıwdı ta'miyinleydi.

1. 5. Trigonometriyalıq ko'pag'zalılar ja'rdeminde ortasha kvadratlıq juwıqlastırıwlar

Barlıq x ko'sherinde anıqlang'an periodlı funktsiyalardı trigonometriyalıq ko'pag'zalılar menen juwıqlastırıw a'dewir qolaylı boladı.

Meyli, $[0, 2\pi]$ kesindisinde berilgen u'zliksiz $f(x)$ funktsiyası, anıqlılıq ushın, periodı 2π ge ten' bolg'an, periodlı funktsiya bolsın.

Bul jag'dayda, juwıqlastırışı $P_m(x)$ ko'pag'zalısı

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (34)$$

ko'rinisinde alınadı. Bul ko'pag'zalının' a_k ha'm b_k koefitsienleri, (24) ha'm (25) formulalarg'a sa'ykes, to'mendegi ko'riniste jazıladı:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \quad (35)$$

Bular, bizge analizden ma'lim bolg'an, $f(x)$ funktsiyasının' Fur'e koefitsientleri boladı.

Dara jag'dayda, egerde $f(x)$ - jup funktsiya bolsa, onda:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (35')$$

al egerde $f(x)$ - taq funktsiya bolsa, onda:

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (35'')$$

boladı.

(34)-formulag'a (35)-koefitsientlerin aparıp qoyıp, $m \rightarrow \infty$ da $f(x)$ funktsiyası ushın Fur'enin' trigonometriyalıq qatarına iye bolamız:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

funktsiyanı Fur'enin' trigonometriyalıq ko'pag'zalı menen yamasa Fur'enin' trigonometriyalıq qatarı menen ko'rsetiw, garmonikalıq analiz dep ataladı. A'piwayı jag'daylarda berilgen funktsiyanın' Fur'e trigonometriyalıq ko'pag'zalıının' koeffitsientleri (35) formulalar menen tikkeley esaplanadı.

Egerde integrallardı esaplaw qıyın yamasa $f(x)$ funktsiyası keste tu'rinde berilgen bolsa, onda Fur'e koeffitsientlerin esaplaw ushın juwıq integrallaw formulaların' birewinen paydalanadı. Bul jerde (35) integralları anıqlıq ushın trapetsiyalar formulası boyınsha juwıq esaplanadı.

Bunda to'mendegi u'sh jag'day bolıwı mu'mkin.

1-jag'day. $f(x)$ - jup funktsiya. (35') integrallarına trapetsiyalardıń

$$\int_a^b \varphi(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2} \varphi(x_0) + \varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_{n-1}) + \frac{1}{2} \varphi(x_n) \right]$$

formulasın qollanıp, mına na'tiyjege kelemiz:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \left[\frac{1}{2} f(x_0) \cos kx_0 + f(x_1) \cos kx_1 + \dots + f(x_{n-1}) \cos kx_{n-1} + \frac{1}{2} f(x_n) \cos kx_n \right],$$

bunda $x_i = \frac{\pi i}{n}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

$$y_0 = \frac{1}{2} f(x_0), \quad y_1 = \frac{1}{2} f(x_1), \quad \dots, \quad y_{n-1} = \frac{1}{2} f(x_{n-1}), \quad y_n = \frac{1}{2} f(x_n)$$

belgilerin kirgizip. a_k koeffitsientlerin to'mendegishe jazamız:

$$a_k = \frac{2}{n} (y_0 \cos kx_0 + y_1 \cos kx_1 + \dots + y_n \cos kx_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^n y_i \cos kx_i \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

2-jag'day. $f(x)$ - taq funktsiya. Bul jag'dayda trigonometriyalıq ko'pag'zalıńı jasaw ma'selesi b_k koeffitsientlerin (35'') formulası menen anıqlawg'a keltiriledi. Bul integrallarg'a trapetsiyalar formulasın qollanıp, mınag'an iye bolamız:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \left[\frac{1}{2} f(x_0) \sin kx_0 + f(x_i) \sin kx_i + \dots + f(x_{n-1}) \sin kx_{n-1} + \frac{1}{2} f(x_n) \sin kx_n \right],$$

bunda $x_i = \frac{\pi i}{n}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Bul jag'dayda $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) belgilewlerin kirgizip ha'm $\sin kx_0 = \sin kx_n = 0$ ekenligin esapqa alıp, b_k koefitsientlerin to'mendegishe anıqlaymız:

$$b_k = \frac{2}{n} (y_1 \sin kx_1 + y_2 \sin kx_2 + \dots + y_{n-1} \sin kx_{n-1}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} y_i \sin kx_i \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

3-jag'day. $f(x)$ jup ta, taq ta funksiya emes. Bul jag'jayda $f(x)$ funksiyanın to'mendegishe ko'rsetemiz.

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$$

Sonda bul ten'liktin' on' jag'ındag'ı birinshi qosılıwshı jup, al ekinshi qosılıwshı – taq funksiya boladı. Bunda

$$F(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)], \quad G(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$$

Belgilewlerin kirgizip, qa'legen $f(x)$ funksiyanın jup ha'm taq funksiyalardıń qosındısı tu'rinde ko'rsetemiz:

$$f(x) = F(x) + G(x)$$

Solay etip, $f(x)$ funksiyanın Fur'e trigonometriyalıq ko'pag'zalı $F(x)$ ha'm $G(x)$ funksiyanıń Fur'e trigonometriyalıq ko'pag'zalılarının qosındısınan turadı. Biraqta, $F(x)$ funksiyanın trigonometriyalıq ko'pag'zalı $F(x)$ koefitsientleri (36)-formula menen, al $G(x)$ funksiyanın trigonometriyalıq ko'pag'zalı $G(x)$ koefitsientleri (37)-formula menen anıqlanadı. Bunnan, qaralıp atırǵan ulıwma jag'day, joqarıda qaralg'an eki jag'dayǵa keltiriletug'ının ko'remiz.

Mısalı. Berilgen periodlı

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & \text{егерде } 0 \leq x \leq \pi \text{ болса,} \\ x(\pi + x), & \text{егерде } -\pi \leq x \leq 0 \text{ болса,} \end{cases}$$

funktsiyası ushın Fur'enin' trigonometriyalıq ko'pag'zalısn jasan'.

Sheshiliwi. Berilgen funktsiya taq funktsiya bolg'anlıqtan, (35") formulaları boyınsha mınag'an iye bolamız.

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \left[x(\pi - x) \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos kx dx \right] = \\ &= \frac{2}{\pi k} \left[(\pi - 2x) \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^\pi + \frac{2}{k} \int_0^\pi \sin kx dx \right] = \frac{4}{\pi k^2} \int_0^\pi \sin kx dx = -\frac{4}{\pi k^3} [1 - (-1)^k] \end{aligned}$$

$$\text{Demek, } b_{2n} = 0, \quad b_{2n-1} = -\frac{8}{\pi(2n-1)^3}.$$

Sonlıqtan izlenip atırg'an trigonometriyalıq ko'pag'zalı to'mendegishe jazıladı:

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3} = \frac{8}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{27} \sin 3x + \right. \\ &\left. + \frac{1}{125} \sin 5x + \frac{1}{343} \sin 7x + \dots + \frac{1}{(2m-1)} \sin(2m-1)x \right] \end{aligned}$$

II BAP. FUNKTSIYALARDI TEN' O'LSHEMLI JUWIQLASTIRIW

2.1. $P_m(x)$ ko'pag'zalisinin' $f(x)$ funktsiyasidan awısıwının' absolyut shaması

Ko'pshilik jag'daylarda, a'sirese ta'jiriybelerden aling'an mag'lıwmatlardı qayta islegende, ortasha kvadratlıq juwıqlastırıw praktikanın' talaplarına tolıq juwap beredi. O'ytkeni, ol $f(x)$ funktsiyasının' geypara qa'teliklerin tegisleydi ha'm funktsiya haqqında durıs tu'sinik beredi, Biraqta, geyde juwıqlastırıwshı funktsiyalardı jasag'anda a'dewir qatan' sha'rt qoyıladı, bazı bir $[a, b]$ kesindisinin' barlıq noqatlarında $P_m(x)$ ko'pag'zalisinin' $f(x)$ funktsiyasidan awısıwının' absolyut shaması berilgen $\varepsilon > 0$ shamasınan kishi bolıwı talap etiledi:

$$|f(x) - P_m(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b$$

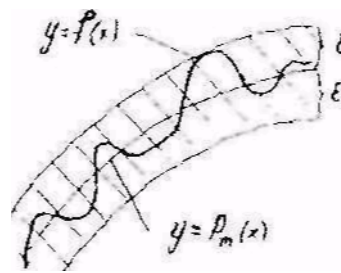
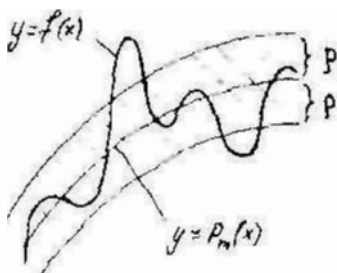
Bul jag'dayda, $P_m(x)$ ko'pag'zalı $f(x)$ funktsiyasın, $[a, b]$ kesindisinde ε da'lligi menen ten' o'lsheмли juwıqlastıradı dep ataydı. Sonda

$$\Delta(f, P_m) = \Delta_m = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_m(x)| \quad (1)$$

shaması $P_m(x)$ ko'pag'zalisinin' $[a, b]$ kesindisindegi $f(x)$ funktsiyasidan absolyut awısıwı dep ataladı.

Egerde $\Delta_m \leq \varepsilon$ bolsa, onda (1) formuladan barlıq $x \in [a, b]$ ushın

$|f(x) - P_m(x)| \leq \varepsilon$ bolatug'inlıg'ı kelip shıg'adı. Funktsiyalardı ortasha kvadratlıq juwıqlastırıw menen ten' o'lsheмли juwıqlastırıwdın' ayırmashılıg'ı, 3-su'wrette ko'rsetilgen.



3-su'wret.

Juwiqlastırıwlar: a) ortasha kvadratlıq, b) ten' o'lsheмли.

Berilgen funktsiyanı ten' o'lsheмли juwıqlastıratug'ın ko'pag'zalını jasaw mu'mkinshiligi, da'lillewsiz keltirilgen, Veyershtrastın' to'mendegi teoremasınan kelip shıgadı [11, 17, 32].

1-Teorema. Egerde $f(x)$ funktsiyası $[a, b]$ kesindisinde u'zliksiz bolsa, onda qa'legen $\varepsilon > 0$ kishi sanı ushın $f(x)$ funktsiyasınan $[a, b]$ kesindisindegi absolyut awısıwı ε nan kishi bolatug'ın, yag'nıy barlıq $x \in [a, b]$ noqatlarında

$$|f(x) - P_m(x)| < \varepsilon$$

ten'sizligin qanaatlandıratug'ın, $m = m(\varepsilon)$ - da'rejeli $P_m(x)$ ko'pag'zalısı bar boladı.

Egerde dara jag'dayda, $f(x)$ funktsiyası $[a, b]$ kesindisinde ten' o'lsheмли jıynaqlı da'rejeli qatarg'a (Teylor qatarına) jiklense, onda juwıqlastırıwshı ko'pag'zalı esabında usı qatardın' dara qosındısın alıwg'a boladı. Solay etip, egerde

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k, \quad c \in [a, b], \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

bolsa, onda teoremanın' sha'rtin qanaatlandıratug'ın $P_m(x)$ ko'pag'zalısın to'mendegishe anıqlawg'a boladı:

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k (x-c)^k$$

Ko'pag'zalının' da'rejesi m berilgen ε da'lligine baylanıslı saylap alınadı.

Bunday usıl a'piwayı funktsiyalardıń ma'nislerin EEM nen paydalanıp esaplag'anda ken' qollanıladı.

Meyli, endi $P_m(x)$ ko'pag'zalisının' da'rejesi m aldın ala berilgen ha'm $f(x)$ funktsiyasın berilgen X ko'pliginde usı $P_m(x)$ ko'pag'zalı menen en' jaqsı juwıqlastırıw kerek bolsın. Bul jag'dayda $P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ ko'pag'zalisının' koeffitsientlerin

$$\Delta_m = \max_{x \in X} |f(x) - P_m(x)|$$

shaması en' kishi bolg'anday etip saylap alıw kerek boladı.

Δ_m shamasına en' kishi ma'nis beretug'ın $P_m(x)$ ko'pag'zalı en' jaqsı ten' o'lishemli juwıqlasıwshı ko'pag'zalı yamasa X ko'pliginde $f(x)$ funktsiyasınan en' kishi (az) awısıwıg'a iye ko'pag'zalı dep ataladı.

En' kishi $E_m[f, X] = \min \Delta_m$ awısıwı $f(x)$ funktsiyasının' X ko'pligindegi en' kishi awısıwı dep ataladı.

Funktsiyalardı juwıqlastırıw teoriyasında qa'legen u'zliksiz funktsiya ushın en' jaqsı juwıqlastırıwshı ko'pag'zalınnın' bar bolatug'ını ha'm onın' tek g'ana birew bolatug'ınlıg'ı da'lillenedi.

2-Teorema. Shegaralang'an tuyıq X ko'pliginde u'zliksiz bolg'an qa'legen $f(x)$ funktsiyası ha'm qa'legen m natural sanı ushın, da'rejesi m nen artıq bolmag'an ha'm en' kishi

$$\Delta(f, P_m) = E_m[f, X]$$

awısıwına iye $P_m(x)$ ko'pag'zalı bar boladı ha'm bunday ko'pag'zalı tek g'ana birew boladı.

Geypara jag'daylarda $P_m(x)$ ko'pag'zalına qosımsha shekleniwler qoyadı, ma'selen, u'lken koeffitsienti $a_m = 1$ dep uyg'aradı. Sonda

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^m$$

tu'rinde boladı.

Dara jag'dayda, meyli $f(x) = 0$ bolsın. Bul jag'dayda

$$\rho_m = \max_{x \in [a, b]} |P_m(x)|$$

shaması en' kishi bolatug'ın $P_m(x)$ ko'pag'zalısı, $[a, b]$ kesindisinde nol'den en' kishi awısıwshı ko'pag'zalı dep ataladı.

Chebıshevtin' ko'pag'zalıları usınday qa'siyetke iye bolatug'ının ko'rsetemiz. Onın' ushın u'lken ag'zasının' koeffitsienti birge ten' bolg'an Chebıshev ko'pag'zalısın qaraymız. Bunday ko'pag'zalı to'mendegi formula menen anıqlanadı.

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

3-Teorema. U'lken ag'zasının' koeffitsienti birge ten' bolg'an, $m \geq 1$ da'rejeli Chebıshev ko'pag'zalısı, $[-1; 1]$ kesindisinde nol'den en' kishi awısıwg'a iye boladı.

Da'lilleniwi. Meyli u'lken koeffitsienti birge ten' bolg'an ha'm to'mendegi sha'rtti qanaatlandıratug'ın $P_m(x)$ ko'pag'zalısı bar bolsın:

$$\max_{x \in [a, b]} |P_m(x)| = \max_{x \in [a, b]} |\bar{T}_m(x)| = \rho_m = \frac{1}{2^{m-1}} \quad (2)$$

Sonda $[-1; 1]$ kesindisinde

$$\bar{T}_m(\xi_k) = (-1)^k \rho_m \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

ten'ligin qanaatlandıratug'ın $1 = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m = -1, m+1$ noqatları bar boladı.

$R(x) = \bar{T}_m(x) - P_m(x)$ ayırmasın qaraymız. $\bar{T}_m(x)$ ha'm $P_m(x)$ ko'pag'zalılarının' u'lken koeffitsientleri ten' bolg'anlıqtan, $R(x)$ ko'pag'zalısının' da'rejesi $m-1$ den artıq bolmaydı.

(2) sha'rtinen ha'm (3) formulasınan mına na'tiyjege kelemiz:

$$R(\xi_0) \geq 0, R(\xi_1) \leq 0, \dots, R(\xi_m)(-1)^m \geq 0 \quad (4)$$

Bul ten'sizliklerdin' tiykarında, $R_m(x)$ ko'pag'zalısı $[\xi_1, \xi_0], [\xi_2, \xi_1], \dots, [\xi_m, \xi_{m-1}]$ kesindilerinin' ha'r birinde en' keminde bir ret nol'ge aylanadı degen juwmaqqa kelemiz. Bul ko'pag'zalının' nol'lerinin' sanı m

nen kishi emes. Al $R(x)$ ko'pag'zalısının' da'rejesi $m-1$ den artıq emes. Bul tek $R(x) \equiv 0$ bolg'anda, yag'niy $P_m(x) \equiv \bar{T}_m(x)$ bolg'anda g'ana mu'mkin boladı. Teorema da'lillendi.

2.2. U'lken koeffitsienti birge ten' bolg'an, m -da'rejeli qa'legen $P_m(x)$ ko'pag'zalı

1-Saldar. U'lken koeffitsienti birge ten' bolg'an, m -da'rejeli qa'legen $P_m(x)$ ko'pag'zalı ushın

$$\max |P_m(x)| \geq \frac{1}{2^{m-1}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

ten'sizligi orınlanadı.

2-Saldar. $f(x) = x^m$ ($m \geq 1$) ko'pag'zalı ushın $[-1; 1]$ kesindisinde $m-1$ da'rejeli en' jaqsı juwıqlastıratug'ın $P_{m-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1}$ ko'pag'zalı

$$P_{m-1}(x) = x^m - T_m(x) \quad (5)$$

ko'pag'zalı boladı, bunda $T_m(x)$ - Chebıshev ko'pag'zalı.

Haqıyqatında da, ma'selenin' ma'nisi boyınsha

$$f(x) - P_{m-1}(x) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \dots - a_1x - a_0$$

ayırması $[-1; 1]$ kesindisinde nol'den en' kishi awısıwshı ko'pag'zalı boladı, yag'niy Chebıshevtin' $T_m(x)$ ko'pag'zalı boladı. Bunnan tikkeley (5) formulası kelip shıg'adı.

Eskertiw. 3-teoremadan paylalanıp, $[a, b]$ kesindisinde nol'den en' kishi awısıwg'a iye, u'lken koeffitsienti birge ten' bolg'an, m -da'rejeli $\bar{T}_m(x)$ ko'pag'zalı an'sat jasawg'a boladı. Haqıyqatında da,

$$x = -\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

sızıqlı ornına qoyıwı $x \in [a, b]$ kesindisin $t \in [-1, 1]$ kesindisine tu'rlendiredi ha'm bunda t^m nin' aldındag'ı u'lken koeffitsient $\left[\frac{b-a}{2} \right]^m$ ne ten' boladı.

Sonlıqtan $\bar{T}_m(x)$ to'mendegishe anıqlanadı:

$$\bar{T}_m(x) = \left(\frac{b-a}{2} \right)^m T_m(t) = \left(\frac{b-a}{2} \right)^m T_m \left(\frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} \right) \quad (6)$$

Bul formuladan $\bar{T}_m(x)$ ko'pag'zalısnın' nol'den awısıwı ushın mına formulag'a

$$\text{ıye bolamız: } \bar{E}_m = \left(\frac{b-a}{2} \right)^m \frac{1}{2^{m-1}} = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^m.$$

Mısalı: $f(x) = x^2$ funksiyanın $[0, 1]$ kesindisinde birinshi da'rejeli $P_1(x) = ax + b$ ko'pag'zalısnı menen en' jaqsı ten' o'lsheмли juwıqlastırın'.

Sheshiliwi. $P_1(x)$ ko'pag'zalısnın' a ha'm b koeffitsientlerin

$$E = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^2 - ax - b| \quad (7)$$

shaması en' kishi bolg'anday etip saylap alıw talap etiledi. Demek $P_2(x) = x^2 - ax - b$ ko'pag'zalısnı $[0, 1]$ kesindisinde nol'den en' kishi awısıwg'a iye ko'pag'zalı boladı. $a = 0$, $b = 1$ dep uyg'arıp, (6) formula boyınsha mınag'an iye bolamız:

$$P_2(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 T_2 \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{4} T_2(2x - 1) = \frac{1}{4} \left[(2x - 1)^2 - \frac{1}{2} \right] = x^2 - x + \frac{1}{8}$$

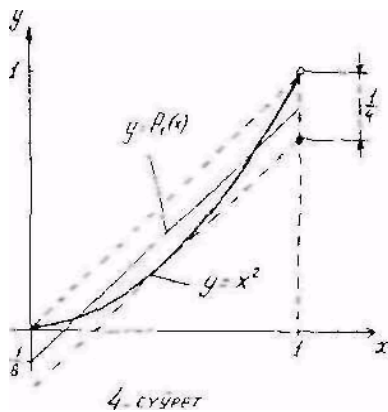
Bunnan,

$$P_1(x) = x - \frac{1}{8}, \quad E_1 = 2 \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{8}$$

E_1 awısıwı u'sh noqatda iske asadı:

$$P_1(0) = P\left(\frac{1}{2}\right) = P_1(1) = E_1 = \frac{1}{8}$$

Bul qubılıs en' jaqsı juwıqlasıwshı ko'pag'zalılar ush'sh ta'n na'rse ekenligin atap o'temiz. Geometriyalıq jaqtan $y = P_1(x)$ funktsiyasının' grafigi $O(0,0)$ ha'm $A(1,1)$ noqatları arqalı o'tetug'in kesiwshi ha'm og'an parallel' bolg'an urınbanın' arasındag'ı ortan'g'ı parallel' sıziqtı an'latadı. 4-su'wrettegi iymek sıziq $y = x^2$ funktsiyasının' grafigi. Ulıwma jag'dayda, en' jaqsı ten' o'lshemli juwıqlasıwshı m da'rejeli ko'pag'zalını jasaw u'lken qıyınshılıqlarg'a alıp keledi.



Sonlıqtan ko'binese en' jaqsı juwıqlasıwshı ko'pag'zalıg'a jaqın ko'pag'zalını tabıw menen yamasa $f(x)$ funktsiyasın berilgen $\varepsilon > 0$ da'lligi menen ten' o'lshemli juwıqlastırıwshı bazı bir $P_m(x)$ ko'pag'zalısn jasaw menen sheklenedi.

J U W M A Q L A W

Bul pitkeriw qa'nigelik jumısı esaplaw matematikasinın' interpol'yatsiya ma'selesin en' kishi kvadratlar usılı menen sheshiwge ha'm usılların u'yreniwge bag'ishlang'an.

Berilgen pitkeriw qa'nigelik jumısında interpol'yatsiya ma'selelerin sheshiwdin' ortasha kvadratlıq juwıqlastırıw ha'm ten' o'lsheмли juwıqlastırıw usılları qaralg'an bolıp, mısal ha'm ma'selelerni sheshiw, olardı a'piwayıdan quramalıg'a qarap barıw sıyaqlı a'hmiyetli tiykarg'ı fundamental mag'lıwmatlar keltirilgen.

Pitkeriw qa'nigelik jumısının' teması boyınsha jazılğ'an barlıq mag'lıwmatlar bo'limlerge bo'lip u'yrenilgen. Bul bo'limlerde keltirilgen tiykarg'ı tu'sinikler EEM ja'rdeminde mısal ha'm ma'selelerdi sheshiwde paydalanıwshı alg'a sol tiykarg'ı tu'sinik ha'm ko'rsetpelerge tayang'an jag'dayda protsesslerdi basqıshpa-basqısh a'melge asırıw imkaniyatın beredi.

Bul jumısta keltirilgen mag'lıwmatlardan, mısal ha'm ma'selelerden "Esaplaw usılları" ha'm "Sanlı usıllar" pa'nlerinin' a'meliy sabaqlarında paydalanıw mu'mkin. Bul bolsa talaba- oqıwshılardıń a'meliy sabaqlarındag'ı bilim ha'm ko'nlikpelerdi asırıwg'a ha'm rawajlandırıwg'a sebep boladı.

Pitkeriw qa'nigelik jumısının' o'z aldına qoyg'an tiykarg'ı maqsetlerinen biri bul ma'selelerdi sheshiw basqıshları ha'm oqıwshılardıń bilim ha'm ko'nlikpelerin basqıshpa-basqısh asırıp barıwg'a ja'rdem beriwden ibarat edi. Bul maqsettin' a'melge asıwında keltirilgen mısallarda ha'm berilgen tiykarg'ı tu'siniklerde o'z sa'wleleniwin tapqan.

Bul jumıstan esaplaw usılların u'yreniwshiler, til talaplarına ha'm sanlı usıllardı sheship na'tiyje alıwg'a qızıg'ıwshılar paydalanıwı mu'mkin.

PAYDALANG'AN A'DEBIYATLAR

1. Babenko K.I. Osnovı chislennogo analiza.M.: Nauka, 1986.
2. Baxvalov N.S., Jidkov N.P., Kobelkov G.M. Chislennıe metodı.- M.: Nauka, 1987.
3. Isroilov M. Hisoblash metodlari.-Toshkent: O'zbekiston, 2003.
4. Kalitkin N.N. Chislennıe metodı. M.: Nauka, 1978.
5. Otarov A.O., Allanazarov J.P. Esaplaw usılları.(I bo'lim) No'kis: Bilim, 2001.
6. Otarov A.O., Allanazarov J.P. Esaplaw usılları. (II bo'lim) No'kis: Bilim, 2006.

Internet saytlari

1. www.ziyonet.uz
2. www.pedagog.uz
3. www.bilimdon.uz
4. www.doda.uz
5. www.dissercat.com
6. www.books.ru
7. www.intuit.ru