

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

Matematika yo'nalishi talabasi

**XUDOYQULOV RUSTAMJON O'KTAM O'G'LINING
5460100- Matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr darajasini
olish uchun**

**“Noma'lum chegarali chegaraviy masalalarning
umumlashgan yechimi” mavzusidagi**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

**fizika-matematika fanlari
nomzodi, dots. Jamuratov K.**

Guliston 2014

MUNDARIJA

I.	KIRISH	3
II.	Asosiy qism.....	7
1-Bob.	O'RTA FUNKSIYALAR VA UMUMLASHGAN HOSILALAR.....	7
1.1§	O'rta funksiyalar va ularning ayrim xossalari.....	7
1.2§	Umumlashgan hosila tushunchasi va umumlashgan hosilalarning asosiy xossalari.....	16
1.3§	$W_p^{(k)}$ fazolar. Sobolevning integral ayniyati. Fridriks va Puankare tengsizliklari.....	24
2-Bob.	NOMA'LUM CHEGARALI CHEGARAVIY MASALALAR VA ULARNING UMUMLASHGAN YECHIMI.....	31
2.1§	Differensail tenglamalarning umumlashgan yechimi.....	31
2.2§	Noma'lum chegarali chegaraviy masalalar va ularning klassik yechimi haqida	41
2.3§	Noma'lum chegarali chegaraviy masalalarning umumlashgan yechimi va uning yagonaligi haqida.....	43
III.	Xulosa va takliflar	48
IV.	Foydalanilgan adabiyotlar va manbalar	49

KIRISH

Matematika va uning tadbqiqida ikki xil chegaraviy masalalarni farqlashadi. Ulardan biri analitik funksiyalar nazariyasidagi chegaraviy masala bo'lib, unda soha chegarasida ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi va ichkarida (tashqarida) analitik bo'lgan funktsiyani qidiriladi.

Ikkinchi xili esa matematik fizikaning chegaraviy masalalari deyilib, unda biror xususiy hosilali differensial tenglamaning yechimi qo'shimcha boshlang'ich-chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan bo'lishi lozim.

Masalan cheksiz uzunlikga ega tor tebranishi tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasini qaraylik.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \quad (0,1)$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad U_t|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (0,2)$$

Bu masalaning yechimi Dalamber formulasi yordamida topilgan quyidagi funktsiyadir:

$$U(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad (03)$$

Ko'rinib turibdiki (0,3) tenglik bilan aniqlangan $U(x, t)$ funktsiya (0,1) tenglamani qanoatlantirishi uchun $\varphi(x)$ funktsiya 2 marta, $\psi(x)$ va $f(x, t)$ funktsiyalar esa bir marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lishi lozim. Ammo bu funktsiyalar sinov-tajriba natijasida bo'lgani uchun eslatilgan tartibdagi hosilaga ega bo'lavermaydi. Bu holda (0,1), (0,2) masalaning yechimini (0,3) formula bilan topib bo'lmaydi, boshqacha aytganda masala klassik ma'noda yechimga ega emas.

Bunday holat chegaraviy masala yechimi tushunchasini kengaytirishni taqozo etadi. Tabiiyki kabi tenglamalarda oddiy ma'nodagi hosila ishtirok etadi, demakki hosila tushunchasini kengaytirish masalasi paydo bo'ladi.

Mazkur bitiruv malakaviy ish umumlashgan funktsiyalar, umumlashgan hosila va umumlashgan yechim tushunchalari, ularning chegaraviy masalalar, xususan

nomalum (qo'zg'aluvchan) chegaraviy masalalarni yechishga, o'rganishga bag'ishlangan.

Bitiruv ishi quyidagi tarkibiy qismlardan iborat:

- I.** Kirish
- II.** Asosiy qism
- III.** Xulosa va takliflar
- IV.** Foydalanilgan adabiyotlar va manba'lar.

Kirish qismida adabiyotlar tahlili mavzuning dolzarbligi, tadqiqot maqsadi, muommosi, obykti, predmeti, farazi, vazifalari, yangiligi, fan uchun ahamiyati haqida batafsil to'xtalib o'tilgan.

Asosiy qismi ikki bob, har bir bob esa uchtdan paragraflarni o'z ichiga olgan.

Birinchi bob “ O'rta funksiyalar va ularning umumlashgan hosilalari” deb nomlangan. Birinchi paragrafda o'rta funksiyalar va ularning asosiy xossalari haqida atroflicha to'xtalgan.

$$\omega_r(x) = \begin{cases} C_r e^{-\frac{r^2}{r^2-|x|^2}} & |x| < r \\ 0 & , |x| \geq r \end{cases}$$

Funksiyaning o'rta funksiya ekanligi ko'rsatilgan. Ikkinchi paragrafda umumlashgan hosila tushunchasi va umumlashgan hosilalaening asosiy hossalari o'rganilgan. Karrali integrallarda n marta bo'laklab integrallash formulasi keltirib chiqarilgan.

Uchinchi paragrafda umumlashgan hosilasi mavjud (k marta) va p daraja bilan jamlanuvchi funksiyalar fazosi $W_p^{(k)}$ o'rganilgan. Shu fazo elementlari uchun Sobolev S.L. integral ayniyati, Fridriks va Puankare tengsizliklari keltirib chiqarilgan.

Ikkinchi bob “Noma'lum chegarali chegaraviy masalalar va ularning umumlashgan yechimi” deb nomlanib bitiruv malakaviy ishning ilmiy ahamiyatga *Molik* qismi hisoblanadi. Birinchi paragrafda Differensial tenglamalarning klassik va umumlashgan yechimi tushunchasi ta'riflangan.

Ikkinchi paragrafda noma'lum funksiyadan tashqari sohaning chegarasi ham izlanadigan masalalar sinfiga tegish konkret fizik ma'noga ega masalaning klassik yechimi haqida so'z boradi.

Uchinchi paragrafda noma'lum chegarali chegaraviy masalaning umumlashgan yechimi mavjudligi hamda yagonaligi haqida to'xtab o'tilgan. Bu masalaning umumlashgan yechimi $W_2^{(2,1)}$ klassdan izlangan, bu klassdagi funksiyalar Fridriks va Puankare tengsizliklarini qanoatlantiruvchiligi tekshirib ko'rilgan.

Adabiyotlar tahlili. [3] Alimov SH.O. Ashurov R.R. Matematik tahlil, 1-qismida aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi, shuningdek [10], [11] Владимиров В.С. ning "Уравнения математической физики", "Обобщение функций в математической физики" kitoblarda umumlashgan hosila, umumlashgan yechim tushunchalari, shuningdek [21],[22] Михлин С.Г., "Линейные уравнения в частных производных", "Курс математической физики" kitoblarida o'rta funksiyalar, o'rtalovchi yadro, Sobolevning integral ayniyati, Fridriks va Puankare tengsizliklari kabi ma'lumotlar keltirilgan.

Mavzuning dolzarbligi. Hozirgi kunga kelib barcha jarayonlarni matematik modellashtirish fanda texnikada o'z yechimi kutayotgan juda ko'p masalalarni yechishni bilishni taqoza etmoqda. Chegaraviy masalalarning klassik ma'noda yechimi mavjud bo'lganda, umumlashgan yechimini izlash *mavusi dolzarb* bo'lib qolmoqda.

Tadqiqod mavzusi. Matematik fizikaning noma'lum chegarali chegaraviy masalalari bugunga kelib atroflicha o'rganilgan deb hisoblansa noma'lum sirtli, noma'lum chegarali chegaraviy masalalarni *tadqiqod mavzusi* sifatida olish maqsadga muvofiqdir.

Tadqiqod maqsadi. Noma'lum chegarali chegaraviy masalalarni o'rganishdan tadqiq qilishdan maqsad-ayrim amaliy jihatdan muhim bo'lgan masalalar uchun klassik yechim qidirish metodlari umumlashgan yechim izlashga o'tmay qoladi, aynan shu paytda noma'lum chegaralarni yoki "yashirish" yoki "qotirib qo'yish" tadqiqot maqsadlaridan biri bo'lishi shubhasiz.

Tadqiqod muammosi. Hozirgi paytda umumlashgan yechim ikki yo'nalishda kiritilgan, birinchisi silliq yechimlar ketma-ketligi limiti sifatida, ikkinchisi biror integral ayniyatni ixtiyoriy finit funksiyaga ko'paytirish natijasida bajarilish ma'nosidagi funksiya sifatida olinadi. *Tadqiqodda* umumlashgan yechimni qaysi ma'noda olish *muammo* bo'lib qoladi.

Tadqiqod obyekti. Differensial tenglamalarni o'rganish shundan so'ng chegaraviy-boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini izlash va umumlashgan yechimlarni o'rganish tadqiqot obyekti hisoblanadi.

Tadqiqod predmeti. Matematik fizikaning chegaraviy masalalarini tahlil qilgan turli o'quv adabiyotlar, ilmiy maqolalar shuningdek dissertatsiyalar *tadqiqod predmeti* hisoblanadi.

Tadqiqod farazi. Ishni himoyaga olib chiqadigan jihatlar-bular $W_2^{(2.1)}$ sinfdagi funksiyalar fazosida noma'lim chegarali chegaraviy masalalarning umumlashgan yechimi mavjud va yagona degan *farazni* haqiqatga aylantirish lozim bo'ladi.

Tadqiqod vazifalari. Universitet dasturida (hajmida) matematik analiz kursida, differensial tenglamalar kursini, matematik fizika tenglamalari kursini, shuningdek umumlashgan funksiyalar maxsus kursini yetarlicha o'rganish *tadqiqod vazifalari* hisoblanadi.

Tadqiqod yangiligi. Noma'lum chegarali chegaraviy masalaning umumlashgan yechimi shunday yo'l bilan kiritilganki, bunda noma'lum chegara integral ayniyatga "yashirib" qo'yilgan, bunday holatlar *tadqiqod yangiligi* hisoblanadi.

Fan uchun ahamiyati. Chagaraviy masalalarni yechish metodlaridan biri umumlashgan funksiyalar apparati bo'lib, undan samarali foydalanish, usullarini ishlab chiqarilgan, bu esa fanning shu sohasi uchun ehamiyatga egadir.

Amaliyot uchun ahamiyati. Matematik fizikaning noma'lum chegarali chagraviy masalalari yer osti g'ovak muhitda suyuqlik va gazlar harakatini shuningdek moddalarning bir-biriga kirishish-diffuziya hodisasi kabi *amaliy masalalarni* hal qilishda muhim ahamiyatga ega ekanligini ta'kidlash o'rinlidir.

1-BOB. O'RTA FUNKSIYALAR VA UMUMLASHGAN HOSILALAR.

1.1§ O'rta funksiyalar va ularning ayrim xossalari.

1. *Ayrim ta'riflar va belgilashlar.* m o'lchovli Evklid fazosini E_m simvol bilan belgilaymiz. Agar bu fazonining nuqtasi x harfi bilan belgilansa, uning dekart koordinatalari $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ orqali belgilanadi. Bizga E_m fazoda joylashgan turli sohalar bo'yicha integrallash va ko'proq $m-1$ o'lchovli sirtlar bo'yicha integrallashga to'g'ri keladi. Barcha hollarda ham integrallashni bitta integral belgisi bilan belgilab olamiz. Agar o'zgaruvchi x orqali belgilangan bo'lsa, E_m fazodagi elementning Lebeg o'lchovini ("hamma elementi" ni) dx orqali belgilaymiz. Sirt elementining yuzasini esa dS , $d\Gamma$ va hakoza simvollar bilan, sirtlarning o'zlarini esa $S, \Gamma, \dots$ va hakoza harflar bilan belgilaymiz. Agar M E_m fazoning to'plami bo'lsa, uning yopig'ini $\overline{M}$ orqali belgilaymiz. Xususan Ω E_m fazodagi soha, Γ uning chegarasi bo'lsa $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ bo'lishi ravshan. Shuningdek agar Ω orqali soha belgilangan bo'lsa uning hajmini $|\Omega|$ orqali, Γ sirtning yuzasini belgilaymiz.

E_m fazodagi R radiusli sferani S_R orqali belgilab olamiz.

E_m fazodan olingan x nuqtada E_m da yotuvchi G to'plamgacha bo'lgan $\rho(x, G)$ masofa deganda x bilan G to'plam nuqtalari orasidagi masofalarning quyi chegarasini tushunamiz.

Ω sohaning δ enli chegaraviy poloskasi deb, shu sohaning chegaraviy nuqtalarga masofasi δ dan oshmaydigan nuqtalari to'plami tushuniladi. δ enli poloskani Ω_δ , orqali belgilaymiz. Agar Ω soha va $K \subset \Omega$ bo'lgan yopiq chegaralangan to'plam bo'lsa, u holda K ni Ω ga nisbatan kompakt deymiz. G E_m fazodagi to'plam bo'lsin. G da uzluksiz, chegaralangan funksiyalar to'plamini $C(G)$ orqali belgilaymiz, shuningdek bu funksiyalar barcha k tartibli hosilalari bilan chegaralangan va uzluksiz bo'lsa, ularning to'plami

$C^{(k)}(G)$ orqali belgilaymiz. $C_0^{(k)}(\Omega)$ orqali esa chekli $\overline{\Omega}$ sohada k marta uzluksiz differensiallanuvchi hamda $\delta\Omega$ da $k-1$ tartibli hosilalarigacha nolga aylanadigan funksiyalar to'lamini belgilatmiz.

Ω -biror soha va k butun son bo'lib $0 \leq x \leq \infty$ bo'lsin, $M^{(k)}(\Omega)$ orqali Ω da k marta uzluksiz differensiallanuvchi hamda va har biri uchun Ω sohada aniqlangan chegaraviy poloskada nolga aylanadigan funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Agar Ω chegaralanmagan soha bo'lsa, funksiyalardan yana qo'shimcha ravishda har bir funksiya uchun biror sharning tashqarisida nolga aylanishi talab qilinadi. Tabiiyki $M^{(k)}(\Omega) \subset M^{(k-1)}(\Omega)$ munosabat o'rinli.

$M^{(k)}(\Omega)$ klassdagi funksiyalarni Ω da finit funksiyalar deyiladi.

Agar G sohada aniqlangan, $U(x)$ funksiyalar uchun ixtiyoriy $x, x' \in G$ nuqtalar olganimizda ham

$$|U(x') - U(x)| \leq A|x' - x|^\lambda$$

Tengsizlik bajarilsa, bunday $U(x)$ funksiyalarni G da λ ko'rsatkich bilan Lipshtits shartini qanoatlantiradi deymiz. Bunda A va λ musbat o'zgarmaslar. Bu holni simvollarda $U \in Lip_\lambda(G)$ kabi yozamiz. Shuni takidlash lozimki, agar $\lambda > 1$ bo'lsa, bo'lganda Lipshtits shartini Gyolder sharti ham deb atashadi.

Agar Ω sohaning qariyb hamma joyida aniqlangan funksiyalar Ω da joylashgan ixtiyoriy kompaktda jamlanuvchi bo'lsalar, ularni Ω da lokal jamlanuvchi deymiz va bu funksiyalar to'plamini $L_{loc}(\Omega)$ orqali belgilaymiz.

Agar $v_n, v_0 \in L_{loc}(\Omega)$ bo'lib, ixtiyoriy $\Omega' \subset \Omega$ ichki Ω' qism to'plamda $\|v_n - v_0\|_{L(\Omega')} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ bo'lsa $\{v_n\}$ ketma-ketlik v_0 ga L_{loc} da yaqilashadi deymiz.

$U(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsin. Bu funksiya noldan farqli bo'ladigan nuqtalar to'plamining yopig'iga, bu funksiyaning tashuvchisi deymiz va $Supp U$ kabi belgilaymiz.

Tabiiyki fuksiya hosilasining tashuvchisi, funksiyaning o'zining tashuvchisiga qism to'plam bo'ladi.

Biz qaraydigan funksiyalar ekvivalent funksiyalar bo'lib, ularni teng deb hisoblayveramiz (ular nol o'lchovli to'plamdagina bir-biridan farq qiladi).

E_m fazoda har bir nuqtasida normal mavjud bo'lgan Γ sirt berigan bo'lsin. $x_0 \in \Gamma$ bo'lsin. Agar $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ dekart koordinatalar sistemasining boshi x_0 nuqtada va y_m koordinata o'qi x_0 nuqtadan o'tuvchi nomal bo'ylab yo'nalgan bo'lsa, bu sistemani x_0 ga bo'langan mahalliy sistema deymiz.

$\Gamma \in C^{(k)}$ deb yozamiz agar $d = \text{const} > 0$ son mavjud bo'lib Γ dan olingan ixtiyoriy x_0 nuqtani markaz qilib sfera chizganda Γ sirtning bu sfera bilan umumiy qismi x_0 bilan bog'langan mahalliy sistemada $y_m = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{m-1})$ tenglama bilan berilib, f funksiya k gacha barcha tartibli uzluksiz hosilalariga ega bo'lsa.

Shuningdek bu holda f funksiyaning k - hosilasi $0 < \lambda \leq 1$ ko'rsatkich bilan Lipshits shartini qanoatlantirsa, (bu holda λ ko'rsatkich ham, A-Lipshits o'zgarishi ham x_0 dan bog'liq bo'lmasa), $\Gamma \in C^{(k, \lambda)}$ deb yozamiz. $C^{(1, \lambda)}$ klassdagi sirtlar Lyapunov sirlari deyiladi.

Agar A - biror operator bo'lsa, uning aniqlanish sohasi $D(A)$ orqali belgilanadi, o'zgarish sohasi esa $R(A)$ orqali belgilanadi. Manfiy bo'lmagan m ta sonlardan tuzilgan $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ketma-ketlikni multiindeks deymiz (m tartibli), $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ sonni esa bu multiindeksning uzunligi deymiz.

Multiindekslar uchun ularni qo'shish va butun manfiy bo'lmagan songa ko'paytirish amali odatdagidek aniqlanadi: agar n - manfiy bo'lmagan butun son va $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ multiindekslar bo'lsa (bir xil tartibli), u holda

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m), \quad n\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2, \dots, n\alpha_m)$$

Agar $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ -vektor bo'lsa, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_m^{\alpha_m}$ deb yozamiz.

Xususan $x \in E_m$ fazoning nuqtasi bo'lsa, u holda $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ deb yoziladi.

Shuningdek

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m.$$

Biz aksariyat holda

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

belgidan foydalanamiz.

Ba'zida differensiallash x ning koordinatalari bo'yicha amalga oshayotganini takidlash maqsadida $D_x^\alpha u$ deb yozamiz.

2. O'rtalovchi yadro.

E_m fazoning x va y ixtiyoriy nuqtalari, $r = |x - y|$ va h -ixtiyoriy musbat son bo'lsin.

Quyidagi xossalarga ega $\omega_h(r)$ funksiyani o'rtalovchi yadro deymiz:

1) $\omega_h(r)$ funksiya x va y nuqtalarning dekart koordinatalari bo'yicha cheksiz ko'p marta differensiallanuvchi;

2) $\omega_h(r) > 0$, $r < h$, $\omega_h(r) = 0$, $r \geq h$;

3) $\int_{r < h} \omega_h(r) dy = \int_{r < h} \omega_h(r) dx = 1$.

Bunday yadrodan hech bo'lmaganda bittasi borligiga quyidagi funksiya kafil bo'ladi:

$$\omega_h(r) = \begin{cases} C_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r}}, & r < h, C_h = \text{const} > 0 \\ 0, & r \geq h. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Bu funksiyaning 2) xossani qanoatlantirishiga shubha yo'q.

Agar

$$C_h = \left\{ \int_{r < h} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} dy \right\}^{-1} \quad (1.1.2)$$

Deb olinsa 3) xossa ham o'rinli bo'ladi. 1) xossa o'rinli bo'lishini ko'rsaytamiz. $r < h$ va $r > h$ bo'lganda (1.1.1) ning cheksiz ko'p differensiallanuvchi ekanligiga shubha tug'ilmaydi, shuningdek $r > h$ bo'lgan holda barcha hosilalar nolga teng ham bo'ladi. Shuning uchun ham (1.1.1) funksiyaning r bo'yicha barcha hosilalari mavjud va nolga teng bo'lishini ko'rsatish, aniqrog'i $r < h$ bo'lgan holda hisoblangan hosilada $r \rightarrow h$ dagi limit nolga intilishini ko'rsatish yetarli.

Isbotni birinchi tartibli hosila uchun olib boramiz, chunki yuqori tartibli hosilalar uchun bu o'xshash bo'ladi.

a) $\omega_h(r)$ funksiya $r = h$ bo'lganda uzluksiz. Haqiqatan ham, (1.1.1) formuladan

$$\omega_h(h+0) = 0 = \omega_h(h), \quad \omega_h(h-0) = \lim_{r \rightarrow h-0} C_h e^{\frac{h^2}{h^2-r^2}} = 0,$$

chunki
$$-\frac{h^2}{h^2-r^2} \xrightarrow{r \rightarrow h-0} -\infty.$$

b) $\omega_h(r)$ funksiyaning hosilasi mavjud va nolga teng. Haqiqatan ham,

$$\lim_{r \rightarrow h+0} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{h-r} = \lim_{r \rightarrow h+0} \frac{0}{h-r} = 0.$$

Ikkinchi tomondan

$$\lim_{r \rightarrow h-0} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{r-h} = \lim_{r \rightarrow h-0} \frac{e^{\frac{h^2}{h^2-r^2}}}{h-r} = 0.$$

Oxirgi tenglikning to'g'riligiga Lopital qoidasini qo'llab ishonch hosil qilish mumkin. Shunday qilib $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{r-h} = \omega'_h(h)$ hosila mavjudligi kelib chiqadi.

v) Lopital qoidasidan foydalansak

$$\lim_{r \rightarrow h-0} \omega'_h(r) = \lim_{r \rightarrow h-0} C_h \frac{2rh^2}{(h^2-r^2)^2} \cdot e^{\frac{h^2}{h^2-r^2}} = 0$$

to'g'riligini ko'rish oson.

Shunday qilib, $\omega_h(r)$ funksiyaning r bo'yicha $\omega'_h(r)$ birinchi hosilasi barcha r lar uchun mavjud bo'lar ekan. Xuddi yuqoridek yuqori tartibli hosilalari mavjudligi va uzluksizligini ko'rsatish mumkin. 1) xossa ham bajarilar ekan.

3. O'ta funksiyalar.

Ω E_m fazoning chekli sohasi va $U(y)$ Ω da jamlanuvchi funksiya bo'lsin. Bu funksiyani Ω dan tashqarida nolga teng qilib davom ettiramiz. $x \in E_m$ fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

$$U_h(x) = \int_{\Omega} \omega_h(r) U(y) dy \quad (1.1.3)$$

Deb olaylik, bu yerda $\omega_h(r)$ 1), 2), 3) xossaga ega biror o'rtalovchi yadro .

U_h funksiyani U funksiyaga nisbatan o'rta funksiya deyiladi;

h sonni esa o'rtalashtirishning radiusi deyiladi. O'rta funksiyani quyidagi uchta formada tavsiya qilish mumkin:

1) $y \in \Omega$ bo'lganda $U(y) = 0$ ekanligini e'tirofga olib, (1.1.3) integralni butun fazo bo'yicha yoyish mumkin:

$$U_h(x) = \int_{E_m} \omega_h(r) U(y) dy \quad (1.1.3a)$$

2) o'rtalovchi yadroning 2) xossasiga asosan integralni butun fazo bo'yicha emas, balki faqat shar radiusi h bo'yicha (markazi x nuqtada bo'lgan) ham amalgam oshirsa bo'ladi:

$$U_h(x) = \int_{r < h} \omega_h(r) U(y) dy \quad (1.1.3b)$$

3) Nihoyat $\Omega \cap \{r < h\}$ kesishma bo'yicha integrallashni amalgam oshirsa ham bo'ladi, chunki bu kesishmaning tashqarisida integral ostidagi funksiyadan kamida bittasi nolga aylanadi. Shuning uchun ham

$$U_h(x) = \int_{\Omega \cap \{r < h\}} \omega_h(r) U(y) dy \quad (1.1.3v)$$

Formula o'rinlidir.

4. O'rta funksiyalarning sodda xossalari.

1) O'rta funksiya butun fazoda cheksiz differensiallanuvchi va uning hosilasini integral ostida differensiallash bilan hosil qilish mumkin. (ya'ni (1.1.3a) – (1.1.3v) formulalardan istalgan biridagi integral ostida):

$$D^\alpha U_h(x) = \int_{\Omega} U(y) D_x^\alpha \omega_h(r) dy \quad (1.1.4)$$

Bu yerda α – ixtiyoriy m - tartibli multiindeks;

(1.1.4) formuladagi Ω sohani $E_m, r < h, \Omega \cap \{r < h\}$ sohadan istalgan biri bilan almashtirish mumkin.

2) O'rta funksiya masofasi (Ω sohagacha) h dan kam bo'lmagan barcha nuqtalarda nolga teng. Haqiqatan, bu holda $r < h$ bo'lgan shar butunlay Ω sohadan tashqarida yotadi, demak (1.1.3b) formulaga asosan $U(y) \equiv 0$.

Shunday qilib, o'rta funksiya shunday $\Omega^{(h)}$ sohada aynan noldan farqli bo'ladiki, bu sohani quyidagicha quramiz: har bir $x \in \Omega$, x nuqtani markaz qilib, uni h radiusli shar bilan olamiz, huddi sharlarning birlashmasi o'sha $\Omega^{(h)}$ soha bo'ladi. Tabiiyki $\Omega^{(h)} \supset \Omega$; Masalan Ω soha R radiusli shar bo'lganda edi, $\Omega^{(h)}$ Ω shar bilan konsentrik bo'lgan $R + h$ radiusli shar bo'lar edi.

5. O'rta funksiyalarning yaqinlashishi.

Teorema 1.1.1. _Agar $U \in C(\Omega)$ bo'lsa, u holda o'rta funksiya ixtiyoriy Ω da to'liq yotadigan ichki yopiq sohada $h \rightarrow 0$ da $U(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi.

Isbot. Ω' soha Ω ning ichki sohasi bo'lsin. Ω'' sohani shunday quramizki, bu soha Ω' sohani o'z ichiga olib o'zi Ω soha uchun to'plam osti bo'ladi.

Ω' va Ω'' sohalarning chegaralarini mos ravishda Γ' va Γ'' orqali belgilaylik va h_0 Γ' va Γ'' nuqtalari orasidagi eng kichik masofa bo'lsin. $h < h_0$ deb olamiz. (1.1.3b) formulaga ko'ra va o'rtalovchi yadroni 3) xossasiga ko'ra

$$U_h(x) - U(x) = \int_{r < h} [U(y) - U(x)] \omega_h(r) dy \quad (1.1.5)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar $x \in \overline{\Omega}'$ bo'lsa, u holda (1.1.5) integralda $y \in \overline{\Omega}''$ bo'ladi.

$\overline{\Omega}''$ yopiq sohada uzluksiz bo'lgan funksiya tekis uzluksiz hamdir, shuning uchun yetarli kichik U va $r \leq h$ bo'lganda $|U(y) - U(x)| < \varepsilon$ tengsizlik ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun bajariladi.

$\omega_h(r) \geq 0$ bo'lgani uchun (2) – xossa), (1.1.5) formuladan

$$|U(y) - U(x)| \leq \varepsilon \int_{r < h} \omega_h(r) dy = \varepsilon.$$

teorema isbot bo'ldi.

Teorema 2. O'rtalash paytida $L_p(\Omega)$ fazoning normasi $1 \leq p \leq \infty$ oraliqdagi p uchun o'smaydi.

Isbot. $U \in L_p(\Omega)$ bo'lsin va $1 < p < \infty$. Gyolder tengsizligiga ko'ra

$$\begin{aligned} |U_h(x)|^p &= \left| \int_{\Omega} U(y) \omega_h(r) dy \right|^p = \left| \int_{\Omega} U(r) \omega_h^{\frac{1}{p}} \omega_h(r)^{\frac{1}{p}} dy \right|^p \leq \\ &\leq \int_{\Omega} |U(y)|^p \omega_h(r) dy \left\{ \int_{\Omega} \omega_h(r) dy \right\}^- \leq \int_{\Omega} |U(y)|^p \omega_h(r) dy \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

O'rtalovchi qiymatning 2) xossasiga asosan

$$\int_{\Omega} \omega_h(r) dy = \int_{\Omega \cap (r < h)} \omega_h(r) dy \leq \int_{r < h} \omega_h(r) dy = 1.$$

(1.1.6) tengsizlikni Ω soha bo'yicha integrallab

$$\|U_h\|_p^p = \int_{\Omega} |U_h(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} |U_h(y)|^p \left\{ \int_{\Omega} \omega_h(r) dx \right\} dy \leq \int_{\Omega} |U_h(y)|^p dy = \|U\|_p^p$$

Qolgan $p = 1$ va $p = \infty$ hollarda teoremaning isboti yuqoridagidek mulohaza yuriytish bilan amalga oshiriladi.

Teorema 3. Agar $U \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ bo'lsa, u holda $\|U - U_h\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ bo'ladi.

Isbot. Oliy matematika kursidan ma'lumki, $U \in L_p(\Omega)$ funksiya uchun ixtiyoriy

$\varepsilon > 0$ son olganimizda ham $\|U - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi f ko'phadni

tuzish mumkin.

Uchburchak tengsizligini qo'llaymiz:

$$\|U - U_h\| \leq \|U - f\| + \|f - f_h\| + \|f_h - U_h\|.$$

Teorema 2. ga ko'ra $\|f_h - U_h\| \leq \|f - U\|$, shuning uchun

$$\|U - U_h\| \leq 2\|f - U\| + \|f - f_h\| < 2\frac{\varepsilon}{3} + \|f - f_h\|,$$

Ω soha Ω_1 sohaga qat'iy soha osti bo'ladigan qilib Ω_1 ni tanlaymiz. f ko'phad Ω_1 da uzluksiz bo'lgani uchun, $f_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f$ intilish Ω_1 dagi xar qanday soha osti, jumladan $\overline{\Omega}$ soha uchun ham tekis intilish bo'ladi. Ammo tekis yaqinlashishdan (yopiq sohada) o'ratcha yaqinlashish kelib chiqqani uchun, yetarlicha kichik h lar uchun $\|f - f_h\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$ bo'ladi. Bu yerdan bizning tasdiq to'g'ri ekanligini ko'rish qiyin emas.

Teorema 4. Ω sohada finit funksiyalar to'plami $1 \leq p < \infty$, $L_p(\Omega)$ fazoda o'zida zichdir.

Isbot. $L_p(\Omega)$ fazodagi har qanday $U \in L_p(\Omega)$ funksiyani ixtiyoriy aniqlik bilan $L_p(\Omega)$ fazo metrikasi bilan finit funksiya yordamida approksimatsiyalash mumkinligini ko'rsatish kifoya.

$\delta > 0$ sonni shunday tanlash mumkinki Ω_δ – poloskaning o'lchovi har qadary $\varepsilon > 0$ son olganda ham

$$\int_{\Omega_\delta} |U(x)|^p dx < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

Tengsizlikni qanoatlantirsin. Shunda $\|U - V_h\| < \varepsilon$ bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Bu yerda V_h Ω sohada finit funksiya.

1.2.§ Umumlashgan hosila tushunchasi va umumlashgan hosilaning asosiy xossalari.

1. Umumlashgan hosila tushunchasi.

Dastlab integral hisobdagi bo'laklab integrallash deb ataladigan formulani keltirib chiqaramiz.

Ω m o'lchovli evklid fazosidagi bo'lak-bo'lak silliq Γ sirt bilan o'ralgan chegaralangan soha bo'lsin. U holda

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_k} dx = \int_{\Gamma} p \cos(\nu, x_k) d\Gamma$$

Ostrogradskiy formulasi o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\nu - \Omega$ nisbatan tashqi bo'lgan Γ sirtga o'tkazilgan normal. $P(x)$ funksiyadan $C^{(1)}(\overline{\Omega})$ klassga tegishli bo'lishini talab qilish yetarli. Quydagi integralni qaraylik:

$$\int_{\Omega} p \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (PQ) dx - \int_{\Omega} Q \frac{\partial p}{\partial x_k} dx,$$

Bu yerda $P, Q \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$. Tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integralga Ostrogradskiy formulasini qo'llab, bo'laklab integrallash formulasini keltirib chiqaramiz:

$$\int_{\Omega} p \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = \int_{\Gamma} p \cos(\nu, x_k) d\Gamma - \int_{\Omega} Q \frac{\partial p}{\partial x_k} dx$$

Bu formuladan ayrim natijalar keltirib chiqaramiz. P va Q funksiyalardan birortasi Γ da nolga aylansa, Γ sirt bo'yicha olingan integral nolga aylanadi va

$$\int_{\Omega} p \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = - \int_{\Omega} Q \frac{\partial p}{\partial x_k} dx,$$

Sodda formulaga ega bo'lamiz.

Endi biroz murakkabroq integralni qaraymiz:

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial g}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx.$$

Agar P funksiya kerakli tartibli hosilalarga ega bo'lsa, k marta bo'laklab integrallash formulasini qo'llab ha.... bo'yicha olingan integral ostidagi Q funksiyani differensiallashdan ozod qilish mumkin:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} P \frac{\partial g}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial^{k-1} g}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx + \\ &+ \int_{\Gamma} P \frac{\partial^{k-1} g}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m-1}} \cos(\nu, x_1) d\Gamma = \dots = (-1)^k \int_{\Omega} Q \frac{\partial^k p}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx + \int_{\Gamma} R(P, Q) d\Gamma; \end{aligned}$$

$R(P, Q)$ orqali P, Q funksiyalar va ularning $k-1$ tartibgacha hosilalaridan bog'liq ifoda belgilangan.

Ω biror soha, $U, \varphi \in L_{loc}(\Omega)$, ya'ni Ω ning ixtiyoriy soha ostida jamlanuvchi funksiyalar bo'lsin. Faraz qilaylik ixtiyoriy $\varphi \in M^{(k)}(\Omega)$ funksiya uchun

$$\int_{\Omega} U D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^n \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad k = |\alpha| \quad (1.2.1)$$

Ayniyat o'rinli bo'lsin, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ – biror multiindeks, (1.2.1) tenglikni qanoatlantiruvchi v funksiyani $U(x)$ funksiyaning Ω sohadagi k tartibli *umumlashgan hosilasi* deyiladi.

Umumlashgan hosilani belgilashda ham odatdagi

$$V(x) = D^{\alpha} U = \frac{\partial^{|\alpha|} U}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \quad (1.2.2)$$

Simvoldan foydalaniladi.

Teorema 2.1. (1.2.2) ko'rinishdagi umumlashgan hosila yagonadir.

Agar $U(x), V_1(x), V_2(x) \in L_{loc}(\Omega)$ bo'lib va ixtiyoriy $\varphi \in M^{(k)}(\Omega)$ funksiyalar uchun

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U D^{\alpha} \varphi dx &= (-1)^k \int_{\Omega} V_1 \varphi dx, \\ \int_{\Omega} U D^{\alpha} \varphi dx &= (-1)^k \int_{\Omega} V_2 \varphi dx, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Tenglik bajarilsa, albatta $V_1 \equiv V_2$ bo'lishini isbotlaymiz. Bu yerda α – berilgan multiindeks, $k = |\alpha|$. (1.2.3) ayniyatlarni ayirib $W(x) = V_1(x) - V_2(x)$ belgilash kiritsak

$$\int_{\Omega} W(x) \varphi(x) dx = 0 \quad (1.2.4)$$

Ayniyatga kelamiz, $\varphi(x) \in M^{(k)}(\Omega)$. Shuning uchun ham $W(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$, bundan esa $V_1(x) \equiv V_2(x)$, $x \in \Omega$ ayniyat kelib chiqadi.

Agar $U(x)$ funksiya o'zining barcha k tartibli hosilalari bilan Ω da uzluksiz bo'lsa, u holda uning umumlashgan hosilasi odatdagi k – tartibli oddiy hosilalari bilan ustma-ust tushadi.

Haqiqatdan ham (1.2.1) tenglikning o'ng tomonidagi integralni k marta bo'laklab hosil qilsa bo'ladi, chunki $\varphi(x)$ funksiya va uning $k-1$ tartibigacha barcha hosilalari Ω sohaning sirtida nolligidan, sirt bo'yicha olingan integrallar nolga aylanadi. Natijada quyidagiga ega bo'lamiz

$$\int_{\Omega} U \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial^k U}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx \quad (1.2.5)$$

O'ng tomonda U funksiya olingan oddiy uzluksiz k – tartibli hosila turibdi. (1.2.5) Tenglikdan ko'rinadiki, bu holda umumlashgan hosila mavjud va

$\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}$ uzluksiz hosilaga teng bo'lar ekan.

Misollar 1. Ω soha $(-1,1)$ interval. $U(x) = |x|$ bo'lsin. Bu funksiya $U'(x) = \text{sign} x$ umumlashgan hosilaga ega bo'ladi. Haqiqatan ham, $\varphi(x) \in M^{(1)}(-1,1)$ bo'lsin, u holda $\varphi(x)$ funksiya $[-1,+1]$ segmentda uzluksiz differensiallanuvchi hamda $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$.

$$\int_{-1}^{+1} |x| \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 x \varphi'(x) dx + \int_0^{+1} x \varphi'(x) dx.$$

Bo'laklab integrallasak,

$$\int_{-1}^{+1} |x| \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + \int_0^1 x \varphi(x) dx = \int_{-1}^{+1} \text{sign} x \varphi(x) dx,$$

$|x|' = \text{sign} x$ ekanligi ko'rinadi.

2. $\text{sign} x$ funksiya $(-1,+1)$ intervalda birinchi tartibli umumlashgan hosilga ega emas (bu funksiya $x \neq 0$ bo'lganda xuddi $|x|$ funksiyaga o'xshab uzluksiz hosilaga ega bo'lsada). Bunga ishonish uchun quyidagicha yo'l tutamiz:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \varphi'(x) \operatorname{sign} x dx &= -\int_{-1}^0 \varphi'(x) dx + \int_0^1 \varphi'(x) dx = -\varphi(x) \Big|_{-1}^0 + \varphi(x) \Big|_0^1 = \\ &= -\varphi(0) + \varphi(-1) + \varphi(1) - \varphi(0) = -2\varphi(0)\end{aligned}$$

chunki $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ $\varphi(x) \in M^{(1)}(-1,1)$. sababi $(-1,1)$ intervalda lokal integrallanuvchi va har qanday $\varphi(x) \in M^{(1)}(-1,1)$ fuksiya uchun

$$\int_{-1}^{+1} V(x) \varphi(x) dx = 2\varphi(0) \quad \text{tenglikni qanoatlantiradigan funksiya mavjud emas.}$$

Haqiqatdan ham, agar bunday funksiya mavjud desak, u holda $V(x) = \int_0^x v(y) dy$ bilan aniqlangan funksiya $[a,b] \subset (-1,1)$ ixtiyoriy segmentda $v(y)$ funksiya absolyut uzluksiz funksiya uchun

$$\int_{-1}^{+1} \varphi'(x) [\operatorname{sign} x - V(x)] dx = 0$$

bo'ladi. Ammo $\operatorname{sign} x = V(x) + \text{const}$, $x \in (-1,1)$, bunday bo'lishi mumkin emas, chunki $x = 0$ nuqtada tenglikning chap tomoni uzulishga ega, o'ng tomoni esa uzluksiz.

3. $f(t)$ va $g(t)$ funksiyalar $[-1,1]$ segmentda uzluksiz, ammo ular bu segmentning biror nuqtasida ham uzluksiz bo'lmasin.

$0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ kvadratda uzluksiz bo'lgan

$$U(x) = U(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) \quad (1.2.6)$$

Ikki argumentli funksiya birinchi tartibli umumlashgan hosilaga ega emas. Ammo bu funksiya nolga teng ikkinchi tartibli umumlashgan hosilaga ega, ya'ni

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad \text{buni tasdiqlash uchun ixtiyoriy } \varphi(x_1, x_2) \in M^{(2)}(\Omega),$$

$$(\Omega = \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\} \text{ kvadrat}),$$

$\varphi(x_1, x_2)$ funksiya uchun

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = 0$$

tenglik (ayniyat) o'rinli ekanligini ko'rsatish kifoya. Bu ayniyat quyidagi tengliklar zanjiridan kelib chiqadi.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 &= \int_{-1}^{+1} f(x_1) \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 \right\} dx_1 + \int_{-1}^{+1} g(x_2) \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \right\} dx_2 = \\ &= \int_{-1}^{+1} f(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \bigg|_{x_1=-1}^{x_1=+1} dx_1 + \int_{-1}^{+1} g(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \bigg|_{x_2=-1}^{x_2=+1} dx_2 = 0 \end{aligned}$$

Bu misol shuni ko'rsatadiki, biror tartibli umumlashgan hosilaning mavjudligidan, undan oldingi tartibli hosilalar mavjud bo'lishi zarur emas ekan.

2. Umumlashgan funksiyalarning soda xossalari.

Teorema 1. $U(x)$ funksiya Ω sohada (1.2.2) ko'rinishdagi umumlashgan hosilaga ega bo'lsin: $V(x) = D^\alpha U(x)$ va $U_h(x)$ va $V_h(x)$ mos o'rta funksiyalar bo'lsin. U holda bu hosilalarning $\Omega \setminus \Omega_h$ sohadagi o'rta funksiyasi, o'sha ko'rinishdagi o'rta funksiyaning hosilasiga teng bo'ladi.

Eslatib o'tamiz: Ω_h -bu Ω sohaning h enlilidagi poloskasidir. $\Omega \setminus \Omega_h$ -ochiq to'plam va agar $x \in \Omega \setminus \Omega_h$ bo'lsa, u holda bu x nuqtadan Ω sohaning chegarasigacha bo'lgan masofa h dan katta bo'ladi, shuning uchun ham o'rtalovchi $\omega_h(r)$ yadro bo'ladi. (1.2.1) formulaga ko'ra

$$\int_{\Omega} U(y) D_y^\alpha \omega_h(r) dy = (-1)^k \int_{\Omega} U(y) \omega_h(r) dy = (-1)^k V_h(x); \quad (1.2.7)$$

Bu yerda $|\alpha| = k$ belgilangan. $\omega_h(r)$ faqat $x - y$ ayirmaga bog'liq bo'lgani uchun

$$D_y^\alpha \omega_h(r) = (-1)^k D_x^\alpha \omega_h(r) \quad \text{tenglik o'rinlidir. Buni (1.2.7) ga qo'yib}$$

$$V_h(x) = D^\alpha U_h(x) \text{ ni olamiz.}$$

Teorema 2. Ω' soha Ω sohaning soha osti bo'lsin. Agar $V(x)$ funksiya $U(x)$ funksiyaning Ω sohadagi umumlashgan funksiyasi, ya'ni $V(x) = D^\alpha U(x)$, $|\alpha| = k$ bo'lsa, $V(x)$ funksiya $U(x)$ funksiyaning Ω' sohadagi xuddi o'shanday umumlashgan hosilasi bo'ladi.

Teorema 3. Agar $V(x)$ funksiya $U(x)$ funksiyaning Ω sihadagi $V(x) = D^\alpha U(x)$ ko'rinishdagi umumlashgan hosilasi bo'lsa, shuningdek $W(x)$ funksiya $V(x)$

funksiyaning Ω sohadagi $W(x) = D^\beta V(x)$ ko'rinishdagi umumlashgan hosilasi bo'lsa, u holda $W(x) = D^{\alpha+\beta} U(x)$, $x \in \Omega$ bo'ladi.

Isbot. $|\alpha| = k$, $|\beta| = l$ va $\varphi \in W^{(k+l)}(\Omega)$ bo'lsin.

U holda $D^\beta \varphi \in M^{(k)}(\Omega)$ bo'ladi va (1.2.1) ga ko'ra

$$\int_{\Omega} U D^{\alpha+\beta} \varphi dx = (-1)^k \int_{\Omega} V D^\beta \varphi dx \quad (1.2.8)$$

$$\int_{\Omega} V D^\beta \varphi dx = (-1)^l \int_{\Omega} W \varphi dx \quad \text{bo'ladi. Oxirgi tenglikni (1.2.8) ga qo'yib}$$

$$\int_{\Omega} U D^{\alpha+\beta} \varphi dx = (-1)^{k+l} \int_{\Omega} W \varphi dx \quad \text{tenglikni olamiz.}$$

Lemma. $U(x)$ funksiya Ω sohada $\frac{\partial^k U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$ ko'rinishdagi umumlashgan

hosilaga ega va shuningdek barcha bundan oldingi hosilalarga ham ega bo'lsin.

Agar $\eta(x) \in C^{(k)}(\Omega)$ bo'lsa, u holda $\frac{\partial^k (\eta U)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$ umumlashgan hosila ham

mavjud va uni odatdagi ko'paytmadan hosila olish qoidasidan kelib chiqib hisoblash mumkin.

3. Umumlashgan funksiyalarning limit xossalari'

Teorema 4. $U_\eta(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ funksiyalar $\Omega \in E_m$ sohada bir xil tartibli

$V_n(x) = D^\alpha U_\eta(x)$ ko'rinishdagi umumlashgan hosilalarga ega bo'lsin. Agar

ikkla $\{U_\eta(x)\}$ va $\{V_\eta(x)\}$ Ketma-ketliklar $L_1(\Omega)$ fazo metrikasi bo'yicha mos

ravishda $U(x)$ va $V(x)$ limitlarga ega bo'lsa, u holda $V(x)$ funksiya Ω sohada $U(x)$ funksiyaning o'sha tartibdagi umumlashgan hosilasi bo'ladi.

Umumlashgan funksiyaning ta'rifi ga ko'ra

$$\int_{\Omega} U_\eta D^\alpha \varphi dx = (-1)^{k+l} \int_{\Omega} V_n \varphi dx \quad ; \quad k = |\alpha|, \quad \forall \varphi \in M^{(k)}(\Omega) \quad (1.2.9)$$

(1.2.9) formuladagi integrallar $U_\eta(x)$ va $V_\eta(x)$ lar ustidagi chegaralangan funksionallar bo'lgani uchun, bu integrallar ostida limitga o'tish murakkab, shunday qilib teoremani isbot qilgan bo'lamiz.

Teorema 5. $U, V \in L_p(\Omega)$, $1 \leq \rho \leq \infty$ va $V(x)$ funksiya $U(x)$ funksiyaning Ω sohadagi $V(x) = D^\alpha U(x)$ ko'inishdagi (chegaralangan bo'lishi shart emas) umumlashgan hosilasi bo'lsin. U holda Ω sohadaning ixtiyoriy Ω' soha osti $L_p(\Omega')$ fazo metrikasida $U_\eta(x) \rightarrow U$ va $D^\alpha U \rightarrow V$ bo'ladigan $\{U_\eta(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligini tuzish mumkin.

Isbot $U_\eta(x) \rightarrow U_{h_\eta}(x)$ deb olamiz, bu yerda h_η -musbat sonlarning nolga intiluvchi ketma-ketligi. U holda $U_{h_\eta} \rightarrow U$ munosabat birinchi banddagi o'rta funksiyalar mavzusidagi teorema 3. dan kelib chiqadi, $D^\alpha U \rightarrow V$ munosabat esa shu paragrafdagi teorema 4. ga ko'ra hosil bo'ladi.

4. Bir o'zgaruvchili bo'lgan hol.

Birinchi tartibli umumlashgan hosilaga ega bo'lgan funksiyalar klassi bilan absolyut uzluksiz bo'lgan funksiyalar klassi chambarchas bo'g'liq ekanligini ta'kidlamoqchimiz.

Ma'lumki, agar $[a, b]$ oraliqda jamlanuvchi $V(x)$ funksiya topilib, $U(x)$ funksiya uchun

$$U(x) = \int_a^x V(t)dt + \text{const}, \quad x \in [a, b] \quad \text{tenglik bajarilsa, } U(x) \text{ funksiyaning } x$$

argument bo'yicha $[a, b]$ segmentda absolyut uzluksiz deymiz.

Lebeg teoremlaridan ko'rinadiki, $[a, b]$ segmentda absolyut uzluksiz bo'lgan $U(x)$ funksiya shu segmentning qariyb hamma joyida $V(x)$ oddiy hosilaga ega bo'ladi.

Teorema 6. $U, V \in L_p(a, b)$, $1 \leq \rho \leq \infty$ va (a, b) interval chekli bo'lsin.

Bundan tashqari $V(x)$ funksiya $U(x)$ funksiyaning (a, b) intervaldagi

$$V(x) = \frac{dU(x)}{dx} \quad \text{umumlashgan hosilasi bo'lsin. } U \text{ holda } U(x) \text{ funksiya } [a, b]$$

segmentda absolyut uzluksiz bo'ladi va (a, b) intervalning qariyb hamma joyida $V(x)$ ga teng oddiy hosilaga ega bo'ladi.

$$\text{Isbot. } W(x) = \int_a^x V(y) dy \quad (1.2.10)$$

bo'lsin. $W(x)$ $[a, b]$ segmentda absolyut uzluksiz va shu segmentning qariyb hamma joyida $V(x)$ ga teng bo'lgan $\varphi(x) \in M^{(1)}(a, b)$ bo'lsin. Bo'laklab integrallash yordamida

$$\int_a^b \omega(y) \varphi'(y) dy = \omega(y) \varphi(y) \Big|_a^b - \int_a^b \varphi(y) \omega'(y) dy = - \int_a^b \varphi(y) \omega(y) dy$$

ni olamiz. ikkinchi tomondan, umumlashgan hosila ta'rifiga ko'ra

$$- \int_a^b \varphi(y) \omega'(y) dy = - \int_a^b \varphi(y) V(y) dy. \quad \text{shunda}$$

$$\int_a^b [U(y) - W(y)] \varphi'(y) dy = 0 \quad \text{bo'ladi.} \quad [\alpha, \beta] \text{ segment } [\alpha, \beta] \subset (a, b) \text{ bo'lsin.}$$

Shu paragrafda teorema 1 (umumlashgan funksiyaning yagonaligi) ga ko'ra oxirgi tenglik ixtiyoriy $\varphi \in C[a, b] \cap C^{(-1)}[\alpha, \beta]$ va $\varphi(x) = 0, x \in [\alpha, \beta]$ bo'lganidan $\varphi(x)$ funksiya uchun o'rinlidir. $[\alpha, \beta]$ va

$$\varphi(x) = \sin nt, \quad t = \frac{\pi(x - \alpha)}{(\beta - \alpha)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{va} \quad \varphi(x) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta] \quad \text{deb}$$

olamiz. Ko'rinib turibdiki $[\alpha, \beta]$ segmentda $U(x) - W(x)$ ayirma $\cos nt, n = 1, 2, \dots$ larga orthogonal, ammo bu holda bu ayirma o'zgarmas, ya'ni

$$U(x) = C + W(x) = C + \int_a^x V(y) dy, \quad c = \text{const.}$$

1.3. § $W_p^{(k)}$ Fazolar. Sobolevning integral ayniyati. Fridriks va Puanquare tengsizliklari.

1. $W_p^{(k)}$ fazoning ta'rifi.

$\Omega \subset E_m$ -bo'lak-bo'lak silliq chegarali chekli soha bo'lsin; keyinroq Ω ga qo'shimcha cheklashlar qo'yiladi. Ω sohada jamlanuvchi va Ω sohada P tarib bilan jamlanuvchi barcha k tartibli hosilaga (umumlashgan) ega bo'lgan $U = U(x)$ funksiyalar to'plamini qaraymiz. Tabiiyki bu to'plam chiziqli. Bu to'plamda normani

$$\|U\|_{p,k} = \|U\|_1 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha U\|_p \quad (1.3.1)$$

ko'rinishda kiritamiz. Shunday qilib eslatilgan to'plam normalangan fazoga aylanadi va bu fazoni Sobolev deb atab, uni $W_p^k(\Omega)$ kabi belgilaymiz. $W_p^k(\Omega)$ da normani (1.3.1) ko'rinishda kiritish muhim emas, ya'ni (1.3.1) ga ekvivalent bo'lgan ixtiyoriy norma kiritish mumkin, masalan:

$$\|U\|'_{p,k} = \|U\|_1 + \left\{ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha U|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \|U\|_1 + \left\{ \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha U\|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1.3.1a)$$

Va

$$\|U\|'_{p,k} = \|U\|_1 + \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha U)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1.3.1b)$$

(1.3.1b) norma koordinat o'qlarini burishga nisbatan invariant ekanligi bilan ustunlikka ega. Quyida $\|\cdot\|_{p,k}$ simvol (1.3.1) normaga ekvivalent bo'lgan ixtiyoriy normani anglatadi.

Teorema 3.1. $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo to'liqdir.

Isbot: $U_n \in W_p^{(k)}(\Omega)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ va $\|U_n - U_\delta\|_{p,k} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ bo'lsin. Aniqlik uchun $W_p^{(k)}(\Omega)$ ning normasi (1.3.1) bilan berilgan bo'lsin. Berilgan limit munosabatdan

$$\|U_n - U_\delta\|_{p,k} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0, \quad \|D^\alpha U_n - D^\alpha U_\delta\|_p \xrightarrow{n, s \rightarrow \infty} 0$$

Munosabatlar kelib chiqadi. $L_p(\Omega)$ fazo har qanday p uchun to'la, shuning uchun

$$\|U_n - U\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{va} \quad \|D^\alpha U_n - V_\alpha\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{bo'ladigan} \quad U \in L_1(\Omega) \quad \text{va}$$

$V_\alpha \in L_p(\Omega)$, $|\alpha| = k$ funksiyalar mavjud. Bir vaqtning o'zida

$$\|D^\alpha U_n - V_\alpha\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ham bo'ladi. Bunda}$$

$$\|U_n - U\|_{p,k} = \|U_n - U\|_1 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha U_n - V_\alpha\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Teorema isbot bo'ldi. Sobolev fazosini separabel fazo bo'lishini ham isbotlash qiyin emas.

Shuni ta'kidlash kerakki, $k = 0$ bo'lganda $W_p^{(k)}$ fazo $L_p(\Omega)$ fazoga o'tadi.

Ba'zi hollarda k butun son bo'lmagan holdagi $W_p^{(k)}$ fazolar qiziqish uyg'otadi. Ular quyidagicha aniqlanadi. Faraz qilaylik $k = l + \lambda$ bo'lib $l \geq 0$ bo'lgan butun son, $0 < \lambda < 1$ bo'lsin. Bu hollarda $W_p^{(k)}$ fazo elementlari $W_p^{(l)}$ fazo funksiyalari bo'lib, ular uchun

$$J(U) = \iint_{\Omega \times \Omega} \sum_{|\alpha|=l} \frac{|D^\alpha U(y) - D^\alpha U(x)|^p}{|y - x|^{m+\lambda p}} dx dy \quad (1.3.2)$$

Integral yaqinlashuvchi bo'lishi kerak. Bu fazoda norma

$$\|U\|_{W_p^{(k)}} = \|U\|_{W_p^{(l)}} + [J(U)]^{\frac{1}{p}} \quad (1.3.3)$$

ko'rinishida kiritiladi.

Hozircha $W_p^{(k)}$ fazolardan faqat k – butun musbat son bo'lgan hollarni qaraymiz.

2. Sobolevning integral aniyati.

Ta'rif .1. Agar biror nuqtadan chiquvchi ixtiyoriy nur soha chegarasi bilan faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bunday sohani yulduz soha deymiz.

Ta'rif .2. Agar soha biror nuqtada to'plamning har bir nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'lsa, bunday sohani to'plamga nisbatan yulduz soha deymiz.

Radiusi a ga teng bo'lgan S sharga nisbatan yulduzli bo'lgan Ω sohani qaraymiz. Bu sharning markaziga koordinatalar boshini o'rnatib $V(y) = \omega_\alpha(|y|)$ o'rtalovchi yadroni qaraymiz.

x va y E_m fazoning ixtiyoriy nuqtalari bo'lsin. θ orqali x nuqtadan y nuqtaga yo'nalgan ortogonal yo'nalishni belgilaymiz. θ_j – orqali esa bu ortogonal yo'nalishning x_j o'qdagi proyeksiyasini belgilaylik. Odatdagidek $r = |x - y|$ deb belgilaymiz. x funksiyadan y funksiyagacha bo'lgan masofadan bog'liq har qanday

funksiyani yana x, r va θ dan bog'liq deb qarash mumkin va aksincha. Quyidagi funksiyalarni qaraymiz:

$$t(x, y) = t(x, y, \theta) = - \int_r^{+\infty} V(x, y, \theta) \rho^{m-1} d\rho \quad (1.3.4)$$

va

$$Z(x, y) = t(x, y, \theta) = \frac{1}{(k-1)!} r^{k-1} t(x, r, \theta) \quad (1.3.5)$$

$t(x, y)$ va $Z(x, y)$ funksiyalar y nuqta sfera DS va uchi x nuqtada bo'lgan konus bilan chegaralangan D_x sohaga tegishli bo'lgandagina noldan farqli bo'ladi; agar $x \in S$ bo'lsa u holda D_x soha S shar bilan ustma-ust tushadi. D_x sohaning sirtida va tashqarisida eslatilgan funksiyalar $x \neq y$ bo'lganda aynan nolga teng bo'ladi, $x = y$ bo'lganda esa, bu holda funksiyalar aniqlanmagan.

$U(x) \in C^{(k)}(\overline{\Omega})$, $k \geq 1$ bo'lsin. Agar $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$ bo'lsa, u holda

$$U(x, y, \theta) = U(y) \frac{\partial^{k-1} z}{\partial r^k} - \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial^{k-1} z}{\partial r^{k-2}} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial r^{k-1}} \cdot z \quad (1.3.6)$$

Agar $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$ bo'lsa, u holda $U(x, r, \theta) = 0$ bo'ladigan $U(x, r, \theta)$ funksiyani qurib olamiz. (1.3.6) formulani differensiallab

$\frac{\partial u}{\partial r} = U(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{\partial^k u}{\partial r^k} \cdot Z$. Tenglikni (1.3.7) olamiz. Agar (1.3.7) da $r = 0$ deb olsak, u holda o'ng tomonda birinchi haddan boshqa barcha hadlar yo'qoladi:

$$U(x, y, \theta) = U(x) t(x, 0, \theta) = -U(x) \int_0^\infty U(x, r, \theta) r^{m-1} dr \quad (1.3.6)$$

(1.3.7) tenglikni $(0, \infty)$ oraliqda integrallaymiz. (1.3.8) munosabatni hisobga olsak

$$U(x) \int_0^\infty V(x, r, \theta) r^{m-1} dr = \int_0^\infty \left[U(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} z \frac{\partial^k z}{\partial r^k} \right] dr.$$

Oxirgi tenglikni markazi x nuqtada, radiusi 1 ga teng bo'lgan sfera elementi dS_1 ga ko'paytiramiz va so'ngra, shu fera bo'yicha integrallaymiz.

$$U(x) \int_{E_m} V(x, r, \theta) dy = \int_{E_m} \left[U(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} z \frac{\partial^k z}{\partial r^k} \right] \frac{dy}{r^{m-1}} \quad (1.3.9).$$

Ammo o'rtalovchi yadroning 3^0 xossasiga ko'ra

$$\int_{E_m} V(x, r, \theta) dy = \int_{E_m} V(y) dy = \int_{E_m} \omega(|y|) dy = 1.$$

(1.3.9) tenglikning o'ng tomonini E_m bo'yicha emas, balki Ω bo'yicha integrallash yetarli. Shunday qili biz *S.L Sobolevning quyidagi integral ayniyatiga kelamiz:*

$$U(x) = \int_{\Omega} U(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} \int_{\Omega} z \frac{\partial^k z}{\partial r^k} \frac{dy}{r^{m-1}} \quad (1.3.10).$$

Bu integralni batafsilroq o'rganamizda, eng avvalo birinchi integral x ga nisbatan darajasi $k-1$ dan oshmaydigan ko'pxad, bu ko'phadning koeffitsientlari $U(y)$ funksiya bilan y ning biror chegralangan fasksiyasidan olingan integral bo'lishiga shohid bo'lamiz.

Shunday qilib (1.3.10) ayniyatni yana boshqacharoq ko'rinishda, ya'ni

$$U(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} x^\alpha \int_S b_\alpha(y) U(y) dy + \sum_{|\alpha|=k} \int_{D_x} \frac{A_\alpha(x, y)}{r^{m-k}} D_y^\alpha U(y) dy \quad (1.3.11)$$

Ko'rinishda yozish mumkin bo'lar ekan.

Ko'rinib turibdiki *S.L Sobolev* ayniyati $U \in C^{(k)}(\Omega)$ funksiyaning uning, k – tartibli hosilalari va biror $k-1$ tartibli ko'phad bilan ifodalash mumkin bo'lar ekan. Bu ayniyatni nafaqat $C^{(k)}(\Omega)$ klassdagi funksiyalar uchun, balki $W_p^{(k)}$, $1 \leq p \leq \infty$ klassdagi funksiyalar uchun ham joriy etsa bo'ladi.

3. Fridriks va Puankare tengsizliklari.

Agar Ω xar biri biror sharga nisbatan yulduzli bo'lgan sharlar birlashmasi va $U \in W_p^{(k)}(\Omega)$ bo'lsa, u holda $D^\nu U$, $0 \leq |\nu| \leq k-1$ hosilalar $\partial\Omega$ ($\partial\Omega$ na o'lchov bo'yicha) ning qriyib hamma joyida aniqlangan va ρ – daraja bilan jamlanuvchi bo'ladi. Soddalik uchun $\partial\Omega = \Gamma$ deb belgilaymiz.

$$L_\nu u = \int_{\Gamma} D^\nu u d\Gamma; \quad 0 \leq |\nu| \leq k-1 \quad (1.3.12)$$

Funksionallar $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo metrikasi bo'yicha chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Aniqlik uchun $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazoda normani

$$\|U\|_{p,k} = \|U\|_1 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha U\|_p \quad (1.3.13)$$

Ko'rinishida aniqlaymiz. Ko'shi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra

$$|l_\nu u| \leq \left\{ \int_\Gamma |D^\alpha u|^p d\Gamma \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_\Gamma d\Gamma \right\}^{\frac{1}{p}} = |\Gamma|^{\frac{1}{p}} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Gamma)}.$$

$|\nu| = l$ deb belgilaylik. Shartga ko'ra $U \in W_p^{(k)}(\Omega)$, $l = |\gamma| \leq k-1$, shuning uchun $D^\nu u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ va $k-l \geq 1$.

Shunda

$$|D^\nu u|_{L_p(\Omega)} \leq B_1 \left\{ \|D^\nu u\|_1 + \sum_{|\beta|=k-l} \|D^{\beta+\alpha} u\|_p \right\}, \quad B_1 = \text{const} \quad (1.3.14)$$

Shundan so'ng,

$$\|D^\nu u\|_1 \leq B_2 \|U\|_{p,k}; \quad B_2 = \text{const.} \quad \text{Bundan tashqari}$$

$$\sum_{|\beta|=k-l} \|D^{\beta+\alpha} u\|_p \leq \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p \leq \|U\|_{p,k}.$$

Bu bahoni (1.3.14) ga qo'ysak, $\|D^\nu u\|_{L_p(\Gamma)} \leq B_1(B_2+1)\|U\|_{p,k}$ va nihoyat

$$|l_\nu u| \leq C \|U\|_{p,k}; \quad C = B_1(B_2+1)|\Gamma|^{\frac{1}{p}}$$

Bo'ladi va shu bilan, $l_\nu U$ funksionalning chegaralanganligini ko'rsatgan bo'ldik.

Tabiiyki (1.3.12) funksionalning soni darajasi $k-1$ dan oshmaydigan turli bir hadlar soniga teng va bu funksionallar aynan nilga teng bo'lamagan birorta ham darajasi $k-1$ dan oshmaydigan ko'phadlarda nolga aylanmaydi. Shuning uchun va oldingi paragrafdagi teoremlarga asosan

$$\|U\|_{p,k}^* = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} \left| \int_\Gamma D^\alpha u d\Gamma \right| + \left\{ \int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u)^{\frac{c}{\alpha}} \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1.3.15)$$

Norma oldingi normaga ekvivalentdir va demak, $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazoning normasi sifatida olinsa bo'ladi. $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazodan Ω sohaning chegarasida

$$D^\nu U|_\Gamma = 0, \quad 0 \leq |\nu| \leq k-1 \quad (1.3.16)$$

Shartlanri qanoatlantiradigan funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plam $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazoda fazo osti bo'la oladi, bu fazo ostini $W_{p,0}^{(k)}(\Omega)$ orqali belgilaymiz.

(1.3.14) formula $W_{p,0}^{(k)}(\Omega)$ fazoda normani

$$\|U\|_{p,k}^{**} = \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1.3.16)$$

Ko'rinishda ko'rsatsak bo'ladi. Bu yerdan darhol

$$\|U\|_p \leq C \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}; \quad U \in W_{p,0}^{(k)}(\Omega), \quad C = \text{const} \quad (1.3.16)$$

Tengsizlik kelib chiqadi. (1.3.16) tengsizlik $k=1$, $p=2$ bo'lganda Fridrixs tengsizliga deb ataluvchi ushbu

$$\|U\|_2^2 = \int_{\Omega} U^2(x) dx \leq \gamma^2 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx, \quad (1.3.17)$$

$$\forall U \in W_{2\omega}^{(1)}(\Omega), \quad \gamma = C^2 = \text{const}$$

Tengsizlikka aylanadi $W_2^{(1)}(\Omega)$ fazoni qaraymiz. Bu holda $k=1$ va darajasi k dan kichik bo'lgan faqat bitta chiziqli bog'lanmagan bir had mavjud va aynan 1 ga teng bo'ladi.

$\int_{\Omega} U dx$ funksional $W_2^{(1)}(\Omega)$ fazo metrikasida chegaralangan:

$$\left| \int_{\Omega} U dx \right| \leq \int_{\Omega} |U| dx = \|U\|_1 \leq \|U\|_{2,1} \quad \text{va} \quad U \equiv 1 \quad \text{bo'lganda noldan farqli, shuning}$$

uchun ham

$$\left| \int_{\Omega} U dx \right| + \left\{ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.18)$$

Miqdorni $W_2^{(1)}(\Omega)$ normasi sifatida olish mumkin va $\|\cdot\|_{2,1}$ haqida
 (1.3.18) $W_2^{(1)}(\Omega)$ da bir-biriga ekvivalentdir. Shunga va oldingi paragrafdagi
 teoremlarga asosan

Oxirgi tengsizlikni kvadratga ko'taramiz va $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ elementar
 tengsizlikni hisobga olib, *Puankare tengsizligiga* kelamiz:

$$\int_{\Omega} U^2 dx \leq C \left[\left(\int_{\Omega} u dx \right)^2 + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx \right]. \quad (1.3.19)$$

Bu yerda $C = 2C'^2$.

Albatta Fridriks va Puankare tengsizliklari bu yerda Ω soha har biri biror sharga
 nisbatan yulduzli bo'lgan chekli sohadagi sohalar birlashmasi bo'lganda o'rinli
 bo'lishi ko'rsatildi. Umumiy holda Puankare tengsizligi to'g'ri bo'lmaydi. Fridriks
 tengsizligi esa ixtiyoriy chekli soha uchun o'rinli bo'ladi, faqat $W_2^{(1)}(\Omega)$ fazoga
 tegishli va chegarada nolga aylanuvchi funksiyalarni tanlay bilishda (ta'riflay
 bilishda)dir.

2-BOB. NOMA'LUM CHEGARALI CHEGARAVIV MASALALAR VA ULARNING UMUMLASHGAN YECHIMI.

2.1.§ Differensial tenglamalarning umumlashgan yechimi.

1. Lokal jamlanuvchi umumlashgan yechimlar.

$L = \sum_{|\alpha|=0}^s A_{\alpha}(x) D^{\alpha}$ -biror s tartibli chiziqli differensial ifoda, Ω esa E_m fazoning chekli yoki cheksiz sohasi bo'lsin. Koeffitsentlar $A_{\alpha} \in C^{(k+|\alpha|)}(\Omega)$, $k = \text{const} > 0$ deb faraz qilamiz.

$$Lu = f(x) \quad (2.1.1)$$

Tenglamani qarab, bu tenglama $U \in C^{(s)}(\Omega)$ bo'lgan yechimga ega bo'lsin deymiz. Shuningdek $\varphi \in M^{(s)}(\Omega)$ va M -differensial operator L bilan formal qo'shma bo'lsin deymiz. Ω' orqali, uning tashqarisida $\varphi \equiv 0$ bo'ladigan sohani belgilaymiz. Tabiiyki, $U, \varphi \in C^{(s)}(\overline{\Omega}')$ va $\partial\Omega'$ da φ funksiya va uning barcha $\leq s$ hosilalari nolga teng; $\partial\Omega'$ chegarani yetarlicha silliq deb faraz qilish mumkin. Grin formulasi deb ataluvchi

$$\int_{\Omega'} (vLu - uLv) dx = \int_{\Gamma} A_{jk} (v \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial v}{\partial x_k}) \cos(\nu, x_j) d\Gamma$$

Formulani U va φ funksiyalar uchun qo'llasak

$$\int_{\Omega'} (\varphi Lu - uL\varphi) dx = 0 \quad (2.1.2)$$

Yoki

$$\int_{\Omega} u M \varphi dx = \int_{\Omega} f(\varphi) dx \quad (2.1.3)$$

Tengliklarga kelamiz.

$\Omega \setminus \Omega'$ to'plamda $\varphi \equiv 0$ bo'lgani uchun (2.1.3) tenglikda Ω' soha bo'yicha integralni Ω soha bo'yicha olingan integralga almashtirsak bo'ladi. Shunda quyidagi xulosaga kelish mumkin:

(2.1.1) tenglamaning $C^{(s)}(\Omega)$ klassga tegishli yechimi $\forall \varphi \in M^{(s)}(\Omega)$ funksiyalar uchun

$$\int_{\Omega} U M \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad (2.1.4)$$

Integral ayniyatni qanoatlantirar ekan.

Ta'rif 1. (2.1.1) tenglama berilgan va $f \in L_{loc}(\Omega)$ bo'lsin, Ω sohada ixtiyoriy $\varphi \in M^{(s)}(\Omega)$ funksiya uchun (2.1.4) integral ayniyatni qanoatlantiruvchi $U \in L_{loc}(\Omega)$ funksiyani (2.1.1) tenglamaning umumlashgan yechimi deymiz.

Ta'rifdan ko'rinadiki, (2.1.1) tenglamaning $C^{(s)}(\Omega)$ klassga tegishli har qanday oddiy (klassik) yechimi umumlashgan yechimi ham bo'ladi. Shuningdek teskarisi ham o'rinli: (2.1.1) tenglamaning $C^{(s)}(\Omega)$ klassga tegishli umumlashgan yechimi tenglamani oddiy ma'noda (klassik ma'noda) ham qanoatlantiradi. haqiqatan ham, farz qilaylik $U \in C^{(s)}(\Omega)$ funksiya uchun (2.1.4) ayniyat o'rinli bo'lsin. Bu ayniyatda $\varphi = \omega_h(r)$, ω_h - o'rtalovchi yadro, $r = |x - x_0|$, $x_0 \in \Omega$ va h x_0 dan $\partial\Omega$ chegaraga bo'lgan masofadan kichik. U holda $(Lu)_h(x_0) = f_h(x_0)$. Ko'rinib turibdiki $(Lu)(x)$ funksiya Ω da uzluksiz. Avval isbotlangan teoremlarga ko'ra $(Lu)_h(x_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} (Lu)(x_0)$ intilish har qanday yopiq soha ostida tekis bo'ladi. Bu holda $f_h(x_0)$ funksiyalar ham o'sha limitga intiladi.

Ammo avval isbotlangan teorema ko'ra $f_n \rightarrow f$ intilish $L(\Omega)$ fazo metrikasi bo'yicha ham ma'noga ega bo'ladi va u holda limit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ tekis bo'ladi.

Xulosa qilib aytganda $(Lu)(x_0) = f(x_0)$, bizning tasdiq isbotini topgan bo'ladi.

Teorema 2.1.1 $\{U_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi (2.1.1) tenglamaning Ω sohadagi umumlashgan yechimlaridan tuzilgan va bu ketma-ketlik $L_{loc}(\Omega)$ da, ya'ni $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U_0$ bo'lsin. U holda U_0 (2.1.1) tenglamaning Ω sohadagi umumlashgan yechimi bo'ladi.

Faraz qilaylik $\varphi \in M^{(s)}(\Omega)$ bo'lsin. (2.1.3) ayniyatni U_n funksiyalar uchun yozamiz:

$$\int_{\Omega'} U_n M \varphi dx = \int_{\Omega'} f \varphi dx \quad (2.1.5)$$

Ammo $\|U_n - U_0\|_{L(\Omega')} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; (2.1.5) da $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tish teoremasini isbotlaydi.

Natija 2.1.1 $B - \Omega$ sohaning qariyib hamma joyida aniqlangan funksiyalarning banax fazosi bo'lsin, shuningdek B da yaqinlashishdan $L_{loc}(\Omega)$ da yaqinlashishi kelib chiqsin. U holda (2.1.1) bir jinsli tenglamaning Ω sohadagi B fazoga tegishli umumlashgan yechimlari B ning fazosini tashkil etadi.

Xususiyl holda B fazo sirtida $L_p(\Omega)$, $W_p(\Omega)$, $C^{(k)}(\overline{\Omega})$ fazolardan ixtiyoriy birortasini olish mumkin.

Izoh 2.1.1. Shuni ta'kidlash kerakki yuqorida keltirilgan differensial tenglamaning umumlashgan yechimi tushunchasi oldingi bobda keltirilgan umumlashgan hosila tushunchasi bilan chambarchas bog'langan. Differensial ifoda L quyidagi $L = D^\alpha$ ko'rinishga ega bo'lsin, u holda u bilan formal qo'shma ifoda $M = (-1)^\alpha D^\alpha$, $k = |\alpha|$ bo'ladi.

$U, V \in L_{loc}(\Omega)$ va U funksiya $V = D^\alpha u$ tenglamaning umumlashgan yechimi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra U va V funksiyaalar (2.1.4) ayniyatni qanoatlantiradi, hozirgi holda bu ayniyat 1-bobda berilgan umumlashgan funksiya ta'rifidagi tenglik bilan ustma-ust tushadi. Bu esa o'sha 1-bobdagi ta'rifga ko'ra U funksiya Ω sohada $V = D^\alpha u$ umumlashgan hosilaga ega bo'ladi.

Teorema 2.1.2. $U(x)$ funksiya (2.1.1) tenglamaning biror Ω sohadagi lokal jamlanuvchi umumlashgan yechimi bo'lsin. Agar bu funksiya $U(x)$ (2.1.1) tenglamada ishtirok etadigan umumlashgan hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu funksiya Ω sohaning hamma joyida eslatilgan (2.1.1) tenglamani qanoatlantiradi.

Umumlashgan yechimni ta'rifga ko'ra

$$\sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} U D^\alpha (A_\alpha \varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad (2.1.6)$$

Koeffitsientlar haqidagi farazga ko'ra $A_\alpha \varphi \in M^{(|\alpha|)}(\Omega)$ va bundan so'ng umulashgan hosilaning ta'rifidan kelib chiqsak quyidagi

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} U D^\alpha (A_\alpha \varphi) dx = \int_{\Omega} A^\alpha \varphi D^\alpha dx$$

Tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib (2.1.6) ayniyat

$$\int_{\Omega} \varphi (Lu - f) dx = 0, \quad \forall \varphi \in M^{(s)}(\Omega) \quad (2.1.7)$$

Ko'rinishga keladi. Birinchi bobda umumlashgan hosilaning yagonaligini isbotlashda qilingan mulohazalarni takrorlab (2.1.7) ayniyat har qanday o'lchovli, biror chegaraviy paloskada nolga aylanuvchi φ funksiya uchun o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Shundan so'ng ixtiyoriy $\delta > 0$ son olib Ω_δ da $\varphi(x) = 0$ va $\Omega \setminus \Omega_\delta$ da esa $\varphi(x) = \text{sign}[Lu - f(x)]$ deb olamiz, natijada $\int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} |Lu - f| dx = 0$ tenglikka ega bo'lamiz. Bundan $Lu - f = 0$ tenglikning $\Omega \setminus \Omega_\delta$ sohaning qariyb hamma joyida o'rinli bo'lishini, δ ning ixtiyoriyligidan oxirgi tenglik Ω sohaning qariyb hamma joyidabajarilishini ko'rish mumkin.

2. Taqsimotlar va umumlashgan funksiyalar.

M ixtiyoriy chiziqli to'plam va bu to'plam elementlari uchun odatdagi xossalarga ega bo'lgan limit tushunchasi o'rnatilgan bo'lsin. M ni asosiy elementlar fazosi yoki qisqacha asosiy fazo deb ataymiz.

f M asosiy fazoda aniqlangan chiziqli va uzluksiz funksional bo'lsin, ya'ni a va b o'zgarmas sonlar, φ, ψ, φ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ lar M to'plamning elementlari bo'lganda, u holda $(f, a\varphi + b\psi) = a(f, \varphi) + b(f, \psi)$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$ limit mavjud bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = (f, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n)$, bu yerda oddiy qavs funksionalning asosiy elementlardagi qiymatini anglatadi.

M asosiy fazo ustida aniqlangan chiziqli uzluksiz funksionallarni shu fazo ustidagi *taqsimotlar* deyiladi. M fazo ustidagi taqsimotlar to'plamini (bu to'plam albatta chiziqlidir) M' orqali belgilaymiz. M' fazoda limit (yaqinlashish)

tushunchasi odatdagicha kiritiladi: $f, f_n, n=1,2,3,..$ lar M' da olingan bo'lsin, agar $(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f, \varphi], \quad \forall \varphi \in M \quad (2.1.8)$ bo'lsa $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ deb tushunamiz. M' taqsimotlar to'plamini taqsimotlar fazosi ham deyiladi.

Endi juda muhim bir misol qaraymiz.

Asosiy fazo sifatida biror $\Omega \subset E_m$ sohada (bu soha chekli yoki cheksiz va xatto $\Omega \subset E_m$ bo'lishi mumkin) finit funksiyalar to'plami $D = D(\Omega) = M^{(\infty)}(\Omega)$ ni olamiz. Bu $D(\Omega)$ fazo ma'nodagi yaqinlashish deyiladi. Agar φ_n funksiyalarning tashuvchisi bitta kompaktda Ω sohada bo'lsa har qanday α multiindeks uchun

$$D^\alpha \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D^\alpha \varphi \quad (2.1.8)$$

Tekis yaqinlashish bo'ladi.

D fazoda differensiallash operatori uzluksizdir: agar $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ va α – ixtiyoriy multiindeks bo'lsa, u holda $D^\alpha \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D^\alpha \varphi$ bo'ladi. Haqiqatan ham, $\sup p D^\alpha \varphi_n \subset \sup p \varphi_n$ va barcha $D^\alpha \varphi_n$ funksiyalarning tashuvchilari bitta kompaktda yotadi. So'ngra (2.1.8) ga ko'ra har qanday β multiindeks uchun

$$D^{\alpha+\beta} \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi. \quad D \quad \text{dagi} \quad \text{yaqin} \quad \text{yaqinlashishning} \quad \text{ta'rifiga} \quad \text{ko'ra}$$

$$D^\alpha \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D^\alpha \varphi.$$

$D(\Omega)$ asosiy elementlar fazosi qurilgandan keyin darhol mos taqsimotlar fazosini qurish mumkin emas.

Asosiy D fazo ustidagi taqsimotlarni ham umumlashgan funksiyalar deyiladi.

Yuqorida kiritilgan umumiy belgilashdan foydalanib, umumlashgan funksiyalar fazosini $D'(\Omega)$ yoki qisqacha, D' orqali belgilaymiz.

$f \in L_{loc}(\Omega)$ bo'lsin.

$$(f, \varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \quad (2.1.9)$$

Formula bilan aniqlangan f funksional D da chiziqli va uzluksiz, boshqacha aytganda f umumlashgan funksiyadir. Bu umumlashgan funksiyani lokal jamlanuvchi $f(x)$ funksiya bilan mos qo'yamiz. Shunday qilib har qanday lokal

jamlanuvchi funktsiyani umumlashgan funktsiya sifatida qarash mumkin eman. Agar tashuvchisi G da joylashgan har qanday asosiy funktsiya φ uchun $(f, \varphi) = 0$ bo'lsa ($G \subset \Omega$) G sohada f umumlashgan funktsiyani nolga teng deymiz. Umumlashgan funktsiya noldan farqli bo'ladigan nuqtalar to'plamining yopig'iga umumlashgan funktsiyaning yopig'i deyiladi va $\sup pf$ orqali belgilanadi.

Agar G sohada $f - g = 0$ bo'lsa, f va g umumlashgan funktsiyalarni G sohada teng: $f = g$ deyiladi.

Endi D' fazodagi umumlashgan funktsiyalar ustida amallarni qaraymiz. D' fazo chiziqli, shuning uchun uning elementlarini- umumlashgan funktsiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish mumkin. Umumiy holda umumlashgan funktsiyalarni ko'paytirish mumkin; agar $f \in D'$ va $\psi \in C^{(\infty)}(\Omega)$ bo'lsa, u holda ψf ko'paytma

$$(f\psi, \varphi) = (f, \psi\varphi), \quad \forall \varphi \in D \quad (2.1.10)$$

Formula bilan aniqlanadi. (2.1.10) tenglikning o'ng tomoni ma'noga ega, chunki $\varphi \cdot \psi \in D$ va ψ ga ko'paytirish D da chiziqli va uzluksiz operator.

Umumlashgan funktsiyalar uchun differentsiallashtirish amalini o'rnatish mumkin: agar $f \in D'$ va α – ixtiyoriy multiindeks bo'lsa, u holda $D^\alpha f$ quyidagi munosabatdan

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi); \quad \forall \varphi \in D \quad (2.1.11)$$

Aniqlash mumkin.

$D^\alpha f$ funksional tabiiyki chiziqli. Bu funksionalning uzluksiz ham ekanligini ko'rish qiyin emas: agar $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \varphi$ bo'lsa, u holda $D^\alpha \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} D^\alpha \varphi$, unda esa

$$(D^\alpha f, \varphi_n) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha f) = (D^\alpha f, \varphi)$$

bo'ladi. Bu yerdan esa, agar $f \in D'$ bo'lsa, u holda $D^\alpha f \in D'$ bo'lishi kelib chiqadi. Har qanday umumlashgan funktsiya barcha tartibli hosilaga ega va bu hosilalar yana umumlashgan funktsiya bo'ladi. Agar f biron-bir $D^\alpha f$ umumlashgan hosilaga ega bo'lgan lokal jamlanuvchi funktsiya bo'lsa, bu

funksiya bo'lsa, bu hosila umumlashgan funksiya ma'nosida hosila bilan ustma-ust tushadi.

Lokal jamlanuvchi umumlashgan funksiyalarni regulyar umumlashgan funksiyalar, qolgan baecha umumlashgan funksiyalarni singulyar umumlashgan funksiyalar deyiladi. Singulyar umumlashgan funksiyalar ichida eng muhimi bo'lgan "Dirak funksiya"si nomi bilan mashhur bo'lgan funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$(\delta(x-y), \varphi(y)) = (\delta(y-x), \varphi(y)) = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in D, \forall x \in D \quad (2.1.12)$$

Hususan, agar Ω koordinatalar boshini o'z ichiga olsa, u holda $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$. Tabiiyki, δ -funktsiya koordinatalar boshidan boshqa barcha nuqtalarda nolga teng, ya'ni δ -funksiyaning tashuvchisi faqat $x=0$ nuqtadan iborat. δ -funksiyaning hosilasi

$$(D_y^\alpha \delta(x-y), \varphi(y)) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(x) \quad (2.1.13)$$

Tenglik bilan aniqlanadi.

3. Chekli tartibli umumlashgan funksiyalar.

Agar umumlashgan funksiyani

$$f = \sum_{|\alpha| \leq j} D_{g_\alpha}^\alpha, \quad g_\alpha \in L_{loc}(\Omega) \quad (2.1.14)$$

Ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa, f umumlashgan funksiyani j dan oshmaydigan $\leq j$ singulyarlik tartibga yoki $\leq j$ tartibga ega deyiladi va $s(f) \leq j$ kabi belgilanadi.

Tabiiyki, har qanday lokal jamlanuvchi funksiyaning tartibi nolga teng. Keyinchalik δ -funksiyaning tartibi 1ga tengligini ko'ramiz.

Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

a) $s(f_1 + f_2) = \max(S(f_1), S(f_2)),$

b) agar $\psi \in C^{(\infty)}(\Omega)$ bo'lsa, u holda $S(f\psi) = S(f);$

c) $S(D^\alpha f) = |\alpha| + S(f).$

f j tartibli umumlashgan funksiya, φ -ixtiyoriy asosiy funksiya bo'lsin. Umumlashgan funksiyaning hosilasi ta'rifiga ko'ra

$$\begin{aligned}
(f, \varphi) &= \sum_{|\alpha| \leq j} (D^\alpha g_\alpha, \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq j} (-1)^{|\alpha|} (g_\alpha, D^\alpha \varphi) = \\
&= \sum_{|\alpha| \leq j} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in M^{(\infty)}(\Omega)
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Umumlashgan funksiya Ω da finit funksiyalar to'plamida aniqlangan funksionaldir. Ammo (2.1.15) formulaning o'ng tomoni har qanday $\varphi \in M^{(j)}(\Omega)$ funksiya uchun ma'noga ega.

4. Umumlashgan funksiyalar klassidagi yechimlar. Singulyar yechimlar.

Biror $\Omega \in E_m$ sohada

$$Lu = \sum_{|\alpha|=0}^s A_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \tag{2.1.16}$$

differensial tenglamani qaraymiz. $\Omega = E_m$ bo'lishi ham mumkin. A_α koeffitsientlarni $A_\alpha \in C^{(j+|\alpha|)}(\overline{\Omega})$, j – butun son, $0 \leq j \leq \infty$ deb hisoblaymiz. (2.1.16) tenglamaning $D'_j(\Omega)$ klassga tegishli bo'lgan yechimlarini qidiramiz.

Agar $D'_j(\Omega)$ klassdan U yechim mavjud bo'lsa, U ni differensial tenglamaning taqsimotlar klassiga tegishli yechim deyilib

$$\left(\sum_{|\alpha|=0}^s A_\alpha D^\alpha u, \varphi \right) = (f, \varphi); \quad \forall \varphi \in D_{j+s}(\Omega) \tag{2.1.17)}$$

Ayniyat bilan aniqlangandir. (2.1.17) ayniyatga ekvivalent bo'lgan

$$(U, M\varphi) = (f, \varphi); \quad \forall \varphi \in D_{j+s}(\Omega), \tag{2.1.18}$$

Bu yerda $M - L$ bilan formal qo'shma operator tenglik olinsa ham bo'ladi.

$$(L\theta)(y) = \sum_{|\alpha|=0}^s A_\alpha(y) D_y^\alpha v = \delta(x-y) \tag{2.1.19}$$

Tenglamaning yechimlarini L differensial ifodaning yoki $Lu = 0$ tenglamaning singulyar yechimlari deyilib, ular muhim ahamiyatga ega.

Ko'rinib turibdiki singulyar yechimlar ikki argumentli $V = V(x, y)$, $x, y \in \Omega$ funksiyalardir. (2.1.18) munosabatga ko'ra, singulyar yechim

$$(V(x-y), (M\varphi)(y)) = (\delta(x-y), \varphi(y)) = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in D_{j+s}(\Omega) \tag{2.1.20}$$

Munosabatni qanoatlantiradi.

Shunday qilib, agar $M\varphi = g(x)$ formal qo'shma tenglama $\varphi \in D_{j+s}(\Omega)$ fazodan yechimga ega bo'lsa va L differensial ifodaning biror singulyar yechimi ma'lum bo'lsa, u holda φ funksiyani (2.1.20) formula bilan hisoblash mumkin bo'ladi. Agar L ifoda formal qo'shma bo'lsa, u holda (2.1.20) munosabat quyidagi:

$$(V(x-y), (L\varphi)(y)) = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in D_{j+s}(\Omega)$$

Ko'rinishni oladi.

5. Laplas tenglamasining singulyar yechimi.

Laplas tenglamasining $-\Delta U = 0$ tenglamaning singulyar yechimini $D'(E_m)$ klassdagi umumlashashagan funksiya sifatida izlaymiz. Bu yechim

$$-\Delta v = \delta(x-y) \quad (2.1.21)$$

Tenglamani qanoatlantiradi. Agar

$$-\Delta_x v = \delta(x) \quad (2.1.22)$$

Tenglamaning yechimi bo'lsa, bu funksiya $V(x-y)$ funksiya (2.1.21) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Dirakning $\delta(x)$ funksiyasi faqat $\rho = |x|$ dan bog'liq, boshqacha aytganda, bu funksiya koordinata o'qlarini burishga nisbatan invariantdir. Xuddi shu xulosaga Laplas operatori ham egadir. Shunday qilib (2.1.22) tenglama koordinata o'qlarini burishga nisbatan invariant ekan. Bu xossadan foydalanib, uning yechimini faqat ρ dan bog'liq qilib izlaymiz: $U = U(\rho)$. U holda

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = U'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\rho} U'(\rho) \quad \text{va so'ngra}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{x_k^2}{\rho^2} U''(\rho) + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_k^2}{\rho^3} \right) U'(\rho),$$

k bo'yicha yig'ib chiqsak

$\Delta U = U''(\rho) + \frac{m-1}{\rho} U'(\rho)$. Agar $\rho \neq 0$ bo'lsa, $\delta(x) = 0$ bo'lganini hisobga olsak

$$U''(\rho) + \frac{m-1}{\rho} U'(\rho) = 0, \quad \rho \neq 0 \quad (2.1.23)$$

tenglamaga kelamiz.

Agar $m > 2$ bo'lsa (2.1.21) ning umumiy yechimi (integrali)

$$U(\rho) = C_1 \rho^{2-m} + C_2$$

$V(x, y) = \frac{1}{(m-2)|s_1|} \cdot \frac{1}{r^{m-2}}$ yechimni, agar $m = 2$ bo'lsa,

$U(\rho) = C_1 \ln \frac{1}{r} + C_2$ bo'ladi va $V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ (bu yerda $r = |x - y|$ x va y

nuqtalar orasidagi masofa) ko'rinishda bo'ladi.

6. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining singulyar yechimi.

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} = 0 \quad (2.1.23)$$

Tenglamaning singulyar yechimini izlash uchun, ya'ni $V(x - y, t - \tau)$ yechimni topish uchun

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \Delta_y V = -\delta(x - y, t - \tau) \quad (2.1.24)$$

Tenglamaning yechimini izlash lozim. Bu tenglamaning yechimi

$$V(x - y, t - \tau) = \begin{cases} \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t - \tau)})^m} e^{-\frac{r^2}{4(t - \tau)}}, & \tau < t, \\ 0, & \tau \geq t, \end{cases} \quad (2.1.25)$$

Ko'rinishda bo'ladi.

7. To'liq tenglamasining singulyar yeshimi.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_x U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} = 0 \quad (2.1.26)$$

To'liq tenglamasining singulyar yechimi

$V(x - y, t - \tau)$ – funksiya

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} - \Delta_y V = \delta(x-y, t-\tau) \quad (2.1.27)$$

Tenglamani qanoatlantirishi zarur.

Agar $m = 2$ bo'lsa, singulyar yechim

$$V_0(x-y, t-\tau) = \begin{cases} \ln\left(\frac{t-\tau}{r} + \sqrt{\frac{(t-\tau)^2}{r^2} - 1}\right), & t-\tau > r \\ 0 & , \quad t-\tau \leq r \end{cases} \quad (2.1.28)$$

Agar $m = 3$ bo'lsa, singulyar yechim:

$$V(x-y, t-\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}}, & t-\tau > r \\ 0 & , \quad t-\tau \leq r \end{cases} \quad (2.1.29)$$

Ko'rinishda bo'ladi. Ixtiyoriy toq m uchun esa

$$V(x-y, t-\tau) = \frac{1}{(m-2)|\rho_1|r^{m-2}} \cdot \delta(t-\tau-r) \quad (2.1.30)$$

Ko'rinishda bo'ladi.

2.2.§ Noma'lum chegarali chegaraviy masalalar va ularning klassik yechimi haqida.

Yangi qazilgan kanallar va suv omborlarini suv bilan to'ldirilganda $h(x, t)$ -yer osti suvlarini dastlabki sathi h_e kritik chuqurlik y_0 dan pastda joylashgan bo'lsa, u holda vaqtning shunday t_0 momenti keladiki, yer osti suvlari sathi h_{kr} kritik sathga tenglashadi. Kanallardagi keyingi ko'tarilishda bug'lanish hisobga olinganda $x = l(t)$ chegarali ikkita harakat zonasi paydo bo'ladi. Shuningdek $\psi_1(t) = h(0, t) > h(x, t) > h(l, t) = h_{kr}$ bo'lganda bug'lanish mavjud, $h_e \leq h(x, t) \leq h_{kr}$ bo'lganda esa bug'lanish bo'lmaydi.

Yuqoridagi farazlarni hisobga olib yer osti suvlari sathi $h(x, t)$ – funksiyani va qo'zg'aluvchan chegara – noma'lum chegara $x = l(t)$ funksiyani topish uchun quyidagi chegaraviy masalaga ega bo'lamiz.

$h(x, t)$ va $l(t)$, $l(t_0) = 0$ funksiyalar quyidagi shartlar bajarilganda topilsin:

,

$$Mh \equiv \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad (x, t) \in \Omega_{t_0}^{\infty} \setminus \{x : x = l(t)\} \quad (2.2.1)$$

$$h(l(t) - 0) = h(l(t) + 0, t) = h_{kr}, \quad t > t_0 \quad (2.2.2)$$

$$h(x, t_0 + 0) = \varphi_n(x), \quad h(0, t) = \psi(t), h|_{x \rightarrow +\infty} = h_e \quad (2.2.3)$$

$$h(x, t) \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l(t)-0} = h(x, t) \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l(t)+0} \quad (2.2.4)$$

Bu yerda $\psi(t)$ - kanaldagi sathning ko'tarilish qonuniyati, $\varphi(x)$ vaqtning $t = t_0$ momentidagi depressiya chizig'i

$$\varepsilon = \varepsilon^- = \begin{cases} \tilde{h}_1 \frac{\partial h}{\partial x}, 0 < x < l(t), (h_{kr} < h < l_m) \\ \tilde{h}_2 \frac{\partial h}{\partial x}, l(t) < x < +\infty, (h_e < h < h_{kr}) \end{cases} \quad (2.2.6)$$

tengliklar bilan chiziqli holga keltiramiz.

Bu yerda $\tilde{h}_1 \in (h_{kr}, h_m)$ va $\tilde{h}_2 \in (h_e, h_{kr}) - h(x, t)$ sathning biror o'rta qiymatlari. (9.2.6) formuladan kelib chiqsak (2.2.1) tenglama bo'lak-bo'lak o'zgarmas koeffisiental kvazi chiziqli tenglamaga aylanadi.

$U(x, t) = h(x, t) - h_e$ almashtirish qilib va yuqoridagi chiziqli almashtirishdan foydalansak, masala quyidagicha qo'yiladi:

$U(x, t)$ va $l(t)$, $l(t_0)$ funksiyalarni quyidagi shartlardan kelib chiqib topilsin:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{\mu}, (x, t) \in \Omega_{t_0}^{\infty} \setminus \{x : x = l(t)\} \quad (2.2.7)$$

$$u|_{t=t_0} = \varphi(x); U|_{x=0} = \psi(t); U|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.2.8)$$

$$u|_{x=l(t)-0} = u|_{x=l(t)+0} = \psi_0 = const. (t > t_0), \quad (2.2.9)$$

$$\left. \tilde{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l(t)-0} = \left. \tilde{h}_2 \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l(t)+0} \quad (t > t_0), \quad (2.2.10)$$

Bu yerda $\psi_0 = h_{kr} - h_e; \varphi(x) = \varphi_1(x) - h_e; \psi(t) = \psi_1(t) - h_e; \varphi(0) = \psi(t_0) = \psi_0$.

$$\varepsilon = \begin{cases} f(u - \psi_0, t), u > \psi_0 (0 < x < l(t)), \\ 0, u < \psi_0 (l(t) < x < \infty) \end{cases} \quad (2.2.11)$$

$$a^2(x) = \begin{cases} a_1^2 = \frac{k\tilde{h}_1}{\mu}, 0 < x < l(t), (u > x_0) \\ a_2^2 = \frac{k\tilde{h}_2}{\mu}, l(t) < x < \infty, (u < x_0) \end{cases} \quad (2.2.12)$$

(2.2.7)–(2.2.10) qo'zg'aluvchan noma'lum chegarali chegaraviy masalalar sinfiga tegishlidir. Bu masalaning Stefan masalasidan farqi shundan iboratki, bu holda (2.2.10) shart nomalum chegarada sarf uzluksizligini anglatadi, Stefan masalasida esa sarf uzilishga ega bo'lib, sakrash qo'zg'aluvchan chegaraning hosilasiga proporsionaldir.

$l(t_0) = 0$ shart va (2.2.7)–(2.2.10) masalaning Stefan masalasidan farqi qo'yilgan masalani o'rganish qiyinchiliklar bilan olib borilishiga sabab bo'ladi. Shuning uchun ham alihid matematik qiziqish uyg'otishi tabiiydir. Vaqtning t_0 momentidagi sathni aniqlovchi $\varphi(x)$ funksiyani yarim to'g'ri chiziq ($x > 0$) da issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasiga qo'yilgan birinchi chegaraviy masalaning yechimi sifatida topish mumkin:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t \leq t_0$$

$$u|_{t=t_0} = 0, \quad U|_{x=0} = \psi(t), \quad U|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

t_0 momentni $\psi(t_0) = \psi_0 = h_{kp} - h_e$ shartdan aniqlasak bo'ladi.

(2.2.7)–(2.2.10) masalani kvazistatsionar yaqinlashishning o'zgartirilgan (modifikatsiya) variantini qo'llab yechamiz. Bu usulning ma'nosi shundan iboratki, qo'zg'aluvchan chegara “muzlatiladi” ya'ni $l(t) = l(s) = \text{const}$ deyilib odatdagi $x = l(s)$ vertikal chegerali qo'shma masala yechiladi. Shundan so'ng $l(s)$ o'rniga $l(t)$ qo'yiladi va $x = l(s)$ chegaradagi shartdan $l(t)$ ni aniqlash

mumkin bo'ladi. Л. Рубинштейн tomonidan «Проблема Стефана» nomli kitobida Laplas-Karson integral almashtirishi yordamida $x > 0$ yarim o'qda bo'lak-bo'lak koeffitsientli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasiga qo'yilgan chegaraviy masalaning $l(s) = 1$ bo'lgandagi Grin funksiyasi tuzilgan.

Ma'lumki chegaraviy masalning Grin funksiyasi qurilgandan so'ng, yechimni analitik ko'rinishda, aniqrog'i integral ko'rinishda ifodalash mumkin. Integral ostida $f(u - \varphi_0, t)$ funksiyaning ishtirok etgani va nomalum chegara $x = l(t)$ ham (2.2.9) shartga ko'ra izlanayitgani uchun $U(x, t)$ va $l(t)$ funksiyalarni aniqlash masalasi Volterra tipidagi integral tenglamalar sistemasini yechishga olib kelinadi. Integral tenglamalardan biri Volterranning birinchi tur tenglamasi bo'lgani uchun, uni yechish masalasi korrekt qo'yilmagan masala bo'ladi. Aniqrog'i masalani yechimi turg'un bo'lmaydi. Bunday noqulay vaziyatdan chiqish yo'li korrekt masalaga aylantiriladigan A.N. Tixonovning regularizatsiyasini amalga oshirish kerak bo'ladi. Buning uchun regularizatsiya parametrini masalaning berilganlaridagi xatolikga bog'liq qilib olish lozim bo'ladi.

K. Jamuratov tomonidan bunday bog'lanish topilgan va qo'yilgan masalaning taqribiy yechimi qurilgan.

Regularizatsiya parametriga bog'liq bo'lgan funksiyaning xarakteriga ko'ra berilganlardagi xatolik nolga intilsa, taqribiy yechim aniq yechimga intilishi isbotlangan. Yana shuni takidlash kerakki taqribiy yechimni operatorli tenglamalar sistemasiga Nyuton- Kantorovich metodi qo'llanilib topilgan.

2.3.8 Noma'lum chegarali chegaraviy masalaning umumlashgan yechimi va uning yagonaligi haqida .

Kanaldan chekli L masofada gorizontal ochiq drena joylashgan va bu drena o'zgarmas h_{gp} naporga ega bo'lsin, $H(x, t)$ esa yer osti suvlarining napordan yuqori qismini aniqlaydigan funksiya.

Ikkinchi paragrafda (2.2. punktda) yer osti suvlari joylashgan plast (qatlam), suvlar sathining dastlabki holati h_e va Bussineek tenglamasini chiziqlashtirish

haqidagi mulohazalar takrorlansa, $H(x, t)$ va $l(t)_0 = 0$, $l(t)$ funksiyalarni aniqlash uchun quyidagi qo'zg'aluvchan $x = l(t)$ chegarali chegaraviy masalaga kelimiz:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad (x, t) \in \Omega_{t_0}^L \setminus \{x : x = l(t)\} \quad (2.3.1)$$

$$H|_{t=t_0} = \varphi(x); \quad H|_{x=0} = \psi(t); \quad H|_{x=L} = 0 \quad (2.3.2)$$

$$H|_{x=l(t)-0} = H|_{x=l(t)+0} = \psi_0 = \text{const}, \quad t > t_0 \quad (2.3.3)$$

$$a_1 \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=l(t)-0} = a_2 \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=l(t)+0}, \quad t > t_0 \quad (2.3.4)$$

Bu yerda $a(H), \varepsilon, \varphi, \psi$ 2.2 bandda keltirilgan xossalarga ega, $\psi_0 = h_{kp} - h_{gp}$. Shuni takidlash kerakki, (2.3.1)–(2.3.4) masala (2.2.7)–(2.2.10) masaladagi oxirgi shart ($x \rightarrow \infty$) ni ($x = L$, $L < \infty$ *chekli chegaradagi*) (2.3.4) shartga almashtirishdan hosil bo'lgandir. (2.3.1)–(2.3.4) masalani o'rganish yana shuning uchun ham zarurki, masalani sonli metodlar bilan yechganda chekli oraliqda ishlashga to'g'ri keladi, shuningdek, har qanday masalani sonli usul bilan yechimini topganda, shu masala yechimining yagonalik xossasini bilish muhim.

(2.2.7)–(2.7.10) masalani chekli kesmada qaraganda yarim chegaralangan o'qdagi qo'llanilgan metodlar yordamida yechish ancha qiyin, shuning uchun ham bu bandda (paragrafda) noma'lum chegarali masalaning umumlashgan yechimi tushunchasini kiritamiz.

Va nihoyat umumlashgan yechimni kiritish yana shunisi bilan zarur deb o'ylaymizki, (2.2.7)–(2.7.10) masalaning berilganlari : $\varphi(x), \psi(t)$ va h.k.lar yuqori darajadagi silliq funksiyalar bo'lmasligi mumkin.

Ma'lumki bunday sillqlik bo'lmasa klassik yechimni (hatto taqribiy yechimni) topib bo'lmaydi. Shu bilan birga masala berilganlari yetarlicha “yomon” (sillqlik

ma'nosida) bo'lganda u yoki bu ma'nodagi yagona umumlashgan yechim mavjud bo'lishi mumkin.

(2.3.1)–(2.3.4) masalani noma'lum funksiyaga nisbatan uzilishga ega bo'lgan masalaning umumlashgan yechimini topishga keltirish mumkin. Bunda bir noma'lum chegaradagi birinchi shartni izlanayotgan funksiyaning u yoki bu ma'nodagi uzluksizligi bila “yashiramiz”, 2-shartni (2.3.4) esa integral ayniyat ichiga joylashtiramiz. Bunda noma'lum chegara integral ayniyatda bevosita ishtirok etmaydi.

Bu holat (2.3.1)–(2.3.4) masalani yechishda prinsipial ahamiyatga ega, chunki biz bu holda $x = l(t)$ noma'lum chegarani izlashdan qutilamiz.

$\Omega_{t_0}^L$ sohaning qaysi qismida $H(x, t)$ funksiya ψ_0 qiymatni qabul qilmasa (2.3.1) tenglamani qanoatlantirmaydi. $x = l(t)$ chegara ustida esa

$$[H(x, t)]_{x=l(t)} = 0 \quad (2.3.5)$$

$$\left[a(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right]_{x=l(t)} = 0 \quad (2.3.6)$$

Shartlarni qanoatlantiradi. Bu yerda

$[U]_{x=l(t)} - U$ funksiyaning $x = l(t)$ dagi sakrashni anglatadi. Masalaning klassik qo'yilishida $x = l(t)$ chiziqni silliq chiziq sifatida izlanadi. $\varepsilon(z, t)$ birinchi argumanti differensiallanuvchi va monoton o'suvchi, 2 – argumenti bo'yicha esa chegaralangan funksiya. $\psi(x)$ – klassik ma'noda differensiallanuvchi, $\varphi(x)$ esa $L_2(0, L)$ dan olingan chegaralangan funksiya qo'yilgan masalani osonlashtirishi uchun $H(x, t)$ o'rniga ya'ni $U(x, t)$ noma'lum funksiyaning quyidagicha kiritamiz:

$$U(x, t) = \int_0^{H(x, t)} a(\lambda) d\lambda = \begin{cases} a_2 H(x, t), & H < \psi_0 \\ a_2 \psi_0 + (H - \psi_0) a_1, & H > \psi_0 \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Bu yerda

$$H = b(U) = \begin{cases} \frac{1}{a_2} U & U < a_2 \psi_0 \\ \frac{1}{a_2} [U + \psi_0 (a_1 - a_2)], & U > a_2 \psi_0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Tabiiyki $b(u)$ funksiya uzluksiz, monoton o'suvchi va

$$b'(u) \begin{cases} \frac{1}{a_2}, & U < a_2 \psi_0 \\ \frac{1}{a_1}, & U > a_2 \psi_0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Hosilaga ega. (2.3.7) dan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (a(H) \frac{\partial H}{\partial x}), \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial b(u)}{\partial t} \quad (2.3.10)$$

(2.3.7), (2.3.8), (2.3.10) ga asosan (2.3.1), (2.3.2), (2.3.5), (2.3.6)

larni quyidagicha

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_1(U, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_{t_0}^L \quad (2.3.11)$$

$$U|_{t=t_0} = \varphi_1(x), \quad U|_{x=0} = \psi_1(t), \quad U|_{x=L} = 0 \quad (2.3.12)$$

$$[U(x, t)]_{x=l(t)} = 0 \quad (2.3.13)$$

$$[U_x(x, t)]_{x=l(t)} = 0 \quad (2.3.14)$$

Ko'rinishda qayta yozib ilamiz.

Bu yerda $\varphi_1(x) = a_2 \varphi(x)$; $\psi_1(t) = a_2 \psi_0 + (\psi(t) - \psi_0) a_1$;

$$\varepsilon_1(u, t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} f\left(\frac{1}{a_1} (U + (a_1 - a_2) \psi_0) - \psi_0, t\right), & U > a_2 \psi_0; \\ 0, & U < a_2 \psi_0 \end{cases}$$

$x = l(t)$ chiziq ma'lum sillqlikka va $\Omega_{t_0}^L$ sohani quyidagi ikkita

$$\Omega_{t_0}^{1,L} = \{(x, t) : 0 < x < l(t), \quad t_0 < t \leq T\},$$

$$\Omega_{t_0}^{2,L} = \{(x, t) : l(t) < x < L, \quad t_0 < t \leq T\}.$$

O.A. Олейник va O.A. Ладытенская larga [22] taqlid qilib (2.3.11) – (2.3.14) masalaning umumlashgan uechimi tushunchasini kiritamiz.

(2.3.11) tenglamani $\eta(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega_{t_0}^L)$ va $\Omega_{t_0}^L$ ning chegarasida nolga aylanadigan $\eta(x, t)$ funksiyaga ko'paytiramiz:

$\eta|_{x=0} = \eta|_{x=L} = \eta|_{t=t_0} = \eta|_{t=T} = 0$, so'ngra ikkala tomonini $\Omega_{t_0}^L$ soha bo'yicha integrallaymiz. Chap tomonining oxirgi qo'shiluvchisidan boshqa harlarida bir marta bo'laklab integrallash qilib, hamda

$$[b(u)]_{x=l(t)} = [U_x]_{x=l(t)} = 0$$

Munosabatni hisobga olsak quyidagi inetgral ayniyatni olamiz

$$\int_{\Omega_{t_0}^L} (-b(u)\eta'_t + u_x \eta_x + \varepsilon_1 \eta) dx dt = 0 \quad (2.3.15)$$

Bu yerda $W_2^{1,1}(\Omega_{t_0}^L) - \Omega_{t_0}^L$ sohada kvadrati bilan lamlandigan ikkala argumenti bilan ham umumlashgan hisilaga ega funksiyalar fazosi belgilangan.

Ta'tif 1. $W_2^{1,1}(\Omega_{t_0}^L)$ klassdan olingan, $t = t_0$ da $\varphi_1(x)$ ga, $x = 0$ da $\psi_1(t)$ ga, $x = 0$ da nolga teng $x = L$ da nolga teng bo'lgan va ixtiyoriy $\Omega_{t_0}^L$ sohaning chegarasida nolga aylanuvchi $\eta(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega_{t_0}^L)$ funksiya uchun (2.3.15) integral ayniyatni qanoatlantiruvchi chegaralangan $U(x, t)$ funksiyani (2.3.11) – (2.3.14) masalaning umumlashgan yechimi deb ataymiz. Bu ta'rif bo'yicha aytilgan umumlashgan yechimning yagonaligini ancha kengroq klassda isbotlaymiz.

Shuni ta'kidlash kerakki, biron bir teorema kengroq klassda o'rinli bo'lsa, shu klassda joylashgan klassda o'sha teorema albatta o'rinli bo'ladi. Xuddi shunday yagonalik teoremasi ham tor klassda ham o'rinli bo'ladi.

Ya'ni shuni ta'kidlash kerakki, (2.3.11) – (2.3.14) masalaning har qanday klassik yechimi (2.3.15) ayniyat ma'nosodagi umumlashgan yechimi ham bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

(2.3.11) tenglamani $\partial\Omega_{t_0}^L$ chegarada nolga aylanuvchi $\eta(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega_{t_0}^L)$ funksiyaga ko'paytirib so'ngra $\Omega_{t_0}^L$ soha bo'yicha integrallasak

$$\int_{\Omega_{t_0}^L} \{b(u)\eta'_t + U_x \eta_{xx} - \varepsilon_1 \eta\} dx dt + \int_0^L b(\varphi(x)) \eta(x, t_0) dx + \int_{t_0}^T \psi_1(t) \cdot \frac{d\eta}{dx} \Big|_{x=0} dt = 0 \quad (2.3.16)$$

Tenglikni olamiz. Bu yerda $\frac{\partial \eta}{\partial x} - x = 0$ to'g'ri chiziqning $(0, t)$ nuqtasiga o'tkazilgan normal bo'yicha olingan hosila. Tabiiyki bu holda ham (2.3.11)–(2.3.14) masalaning umumlashgan yechimi haqida ta'rif berish mumkin.

Ta'rif 2. (2.3.11)–(2.3.14) masalaning umumlashgan yechimi deb har qanday o'lchovli (jamlanuvchi) $L_2(\Omega_{t_0}^L)$ klassga tegishli $\partial\Omega_{t_0}^L|_{\{t=t_0\}}$ chegarada nolga aylanuvchi va ixtiyoriy $\eta(x, t) \in W_2^{2,1}(\Omega_{t_0}^L)$ funksiyalar uchun (2.3.16) ayniyatni qanoatlantiradigan $U(x, t)$ funksiyani tushunamiz.

Ko'rsatish mumkinki (2.3.11)–(2.3.14) masalaning (2.3.15) ayniyatni qanoatlantiruvchi yechimi (2.3.16) ayniyat ma'nosida ham yechim bo'ladi.

K. Jamuratov tomonidan (2.3.11)–(2.3.14) masalning (2.3.16) ayniyat ma'nosidagi umumlashgan yechimning mavjudligi va yagonaligi ko'rsatilgan [6].

XULOSA

1. Chegaraviy masalalarning klassik ma'nodagi yechimi va umumlashgan ma'nodagi yechimlarining farqi va hossalari konkret misollarda tushuntirib berilgan.
2. O'rta funksiyalar va ularning asosiy hossalari keltirilgan. Shuningdek umumlashgan funksiyalarning o'rta funksiyalar kabi xossalarga ega- finit va cheksiz ko'p hosilalari mavjud bo'lgan funksiyalar fazosida aniqlanganligi ko'rsatilgan.
3. Umumlashgan hosila tushunchasi ta'tiflangan. Chegarada nolga teng funksiyalar uchun n -karrali integralda bo'laklab integrallash formulasi keltirilgan.
4. Chegaraviy masalaning har qanday klassik ma'nodagi yechimi, umumlashgan ma'noda ham yechim bo'lishi ko'rsatilgan.
5. W_p^k fazolarda Sobolevning integral ayniyati so'ngra Fridriks va Puankare tengsizliklari isboti bilan keltirilgan.
6. Turli differensial tenglamalar-Laplas tenglamasi, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining umumlashgan yechimlari keltirilgan.
7. Qo'zg'aluvchan chegarali chegaraviy masalalarning umumlashgan yechimi mavjudligi va yagonaligi o'rganilgan.
8. Klassik ma'nodagi yechimlarning mavjudligi va yagonaligi ularni o'z ichiga oladigan kengroq fazoda o'rganilgan.
9. Noma'lum chegarali chegaraviy masalalar uchun muhim bo'lgan bir necha xossalari umumlashgan yechimda ham o'z aksini topishi isbotlab berilgan.
10. Taqsimotlar nazariyasi chuqur o'rganilgan hamda ularning umumlashgan funksiyalar klassiga tegishli ekanligi ko'rsatilgan.
11. Umumlashgan funksiyalar klassidagi singulyar yechimlarning xossalari o'rganilgan.
12. Chegaraviy masalalarning berilganlari yetarlicha silliq bo'lmasa klassik yechim bo'lmasligi, ammo umumlashgan yechim mavjud bo'lishi mumkinligi ko'rsatilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLARVA MANBA'LAR

- 1.** Азларов Т.А, Мансуров Х.Т Математик анализ. 1-қисм. Тошкент, “Ўқитувчи” , 1994.
- 2.** Азларов Т.А, Мирзаахмедов М.А., Отақўзиев Д.О, Собиров М.А., Тўлаганов С.Т., Математикадан қўлланма, II-қисм. Тошкент, “Ўқитувчи” 1992.
- 3.** Алимов Ш.О., Ашуров Р.Р Математик таҳлил. 1-қисм. Тошкент “камалак” 2012.
- 4.** Атаханов К.У Йерзин В.А., Ходжаев Б. Математик анализдан мисол ва масалалар тўплами, 1-қисм. Тошкент, 2004.
- 5.** Арсенин В.Я., Методи Математической физики и специальные функции. Москва “Наука” 1994.
- 6.** Абуталиев Ф.Б., Баклушин М.Б., Ёрбеков Я.С., Измайлов И.И., Умаров У.У., Ходжибеков Н., Анализ динамики подземных вод аналитическими и численными методами. Тошкент ФАН, 1994.
- 7.** Антонцев С.Н., Монахов В.Н., Пространственные задачи нестационарной двухфазной фильтрации в неоднородных анизотропных пористых средах. Москва 1994.
- 8.** Берман Г.Н., Сборник задач по курсу Математического анализа. М.: “Наука” 1997.
- 9.** Бруй И.Н., Гаврилюк А.В., и др. Лабораторный практикум по Математическому анализу. Минск. 1992.
- 10.** Владимиров В.С., Уравнения математической физики. М.: “Наука” 1996.
- 11.** Владимиров В.С., Михайлов В.П., и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: “Наука” 1998.
- 12.** Газиев А., Исроилов И., Яхшибоев М. Функциялар ва графиклар. Тошкент “Ворис” 2006.
- 13.** Демидович Б.П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: “Наука” 1994.
- 14.** Зорич В.А., Математический анализ. Ч.1 М.: “Наука” 1998.

15. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Ч.1 М.: “Наука” 1996.
16. Коровкин Н.П., Определенный интеграл и ряды. М.: “Наука” 1999.
17. Кудрявцев Л.Д., курс Математического анализа. Ч.1 М.: 1996.
18. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехов В.И., Шабунин М.И., Сборник задач по математическому анализу: функции нескольких переменных. Санкт-петербург, 1994.
19. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики М.: “Наука” 1994.
20. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Метода теории функций комплексного переменного. М.: “Наука” 1996.
21. Михлин С.Г., Линейные уравнения в частных производных М.: Высшие школа, 1998.
22. Михлин С.Г., Курс математической физики М.: “Наука” 1994.
23. Никифоров А.Ф., Умаров В.Б., Специальные функции математической физики М.: “Наука” 1997.
24. Нахушев А.М., Уравнения математической биологии. М.: Высшие школа, 1995.
25. Салохитдинов М.С., Математик физика тенгламалари. Тошкент, Ў. 2002.
26. Салохитдинов М.С., Исроилов Б.И., Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами. Т: мумтоз-сўз, 2010.
27. Соболев С.Л., Уравнения математической физики М.: “Наука” 1995.
28. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н., Введение в теорию гармонических функций. М.: “Наука” 1996.
29. Садуллаев А., Мансуров Х.Т, Худойберганов Г., Ворисов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 1,2-қисм 1993, 1995.
30. Finney, Wier, Giordano Tomas CALCULES. 10-th edition-Boston, San Fransisco, New York, London, Toronto, Sydney, Tokyo, Singapore, Madrid,- 2001.

31. Salas Hille Engen. Calculas one Varieble, 8-th edition. Wiley S Sons. New York, chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 1999.