

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

Matematika yo'nalishi talabasi
DO'SNAZAROV SARDOR BAXTIYOR
O'G'LINING

“Tekislikda chiziqlar orasidagi eng yaqin masofani topish”

mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISH

Ilmiy rahbar:

**fizika-matematika fanlari
nomzodi, dots. Norjigitov H.**

Guliston 2014

MUNDARIJA

	KIRISH	2
1-BOB.	FUNKSIONALLAR VA VARIATSION MASALA.....	8
1.1§	Funksionallar. Funksionallarning yaqinlik darajasi.....	8
1.2§	Eng sodda variatsion masala. Masalaning qo'yilishi.....	14
1.3§	Variatsion hisobning asosiy lemmasi. Eyler tenglamasi.....	20
2-BOB.	II BOB. TEKISLIKDA FUNKSIYALAR ORASIDAGI MASOFA.....	28
2.1§	To'g'ri chiziq va parabola orasidagi masofa.....	28
2.2§	Ikki parabola orasidagi masofa.....	30
	Xulosa.....	38
	Foydalanilgan dabiyyotlar.....	40

KIRISH

Variatsion hisob bizga asosan matematik analiz kursidan ma'lum bo'lib, bitta va bir nechta o'zgaruvchilarga bog'liq funksiyalarning ekstremum qiymatlarini o'rganish bilan shug'ullanadi. Ammo variatsion hisobda ekstremum qiymatlari o'rganiladigan funksiyalar oddiy argumentlarga emas, balki murakkab argumentlarga bog'liq deb qaraladi. To'g'rirog'i, bu yerda funksionallarning ekstremum qiymatlariga oid masalalar o'rganiladi. Bu turdagi masalalar 1696 yilda Iogann Bernulli tomonidan ta'riflangan braxistaxrona(eng qisqa vaqt) masalasi deb atalgan masala bilan boshlangan.

Bu masalani hal qilishda I. Nyuton, Y va D Bernullilar, G. Lopiatal, J. Logranj, A. Lejandr va L. Eyler salmoqli xissa qo'shganlar. Buning natijasida yangi-yangi masalalar va ularni yechish metodlari yaratilib, bu esa matematika fanining katta tatbiqiy ahamiyatga ega bo'lgan yangi va muhim sohasi-**variatsion hisob** sohasining paydo bo'lishiga sabab bo'ldi.

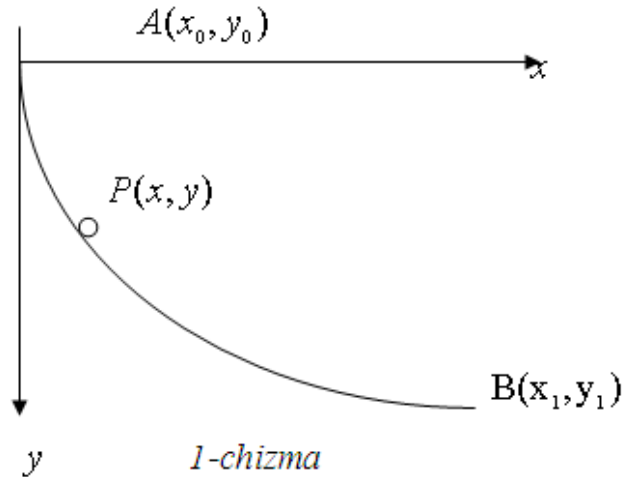
Bu fanning rivojlanishida L. Eylerning 1744 yilda chop etilgan "" nomli mashhur traktati alohida o'rin tutadi.

Bu yerda shuni ham eslatish zarurki, L. Eyler o'z ishlarida ekstremum masalalari yechilishining zaruriy shartlarini aniqlab berdi.

Yetarlilik shartlari bilan birinchi marta Veyershtrass, keyinchalik A. Lejandr shug'ullandi. Variatsion hisobning tobora rivojlanishiga o'zlarining yirik hissalarini qo'shib, uning muhim va zamonaviy masalalarini yechishda, ayniqsa ko'p argumentli funksionallarning ekstremumlarini tekshirishda rus olimlari (jumladan, M. V. Ostrogradskiy) o'z metodlarini yaratdilar. Funksional analiz masalalariga variatsion hisobni tatbiq etishda sovet olimlari M. A. Lavrentev, L. A. Lyusternik, I.G. Petrovskiy, N.M. Krilov va boshqalarning roli katta bo'ldi, ular ayni vaqtda variatsion hisobning ko'p sohalarida, ayniqsa maxanika masalalarini, shuningdek, ba'zi chegaraviy masalalarni yechishda tatbiq qilib, yangi-yangi metodlar yaratmoqdalar.

1. *Braxistaxrona masalasi.*

Berilgan $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq bo'ylab moddiy nuqta o'z og'irligi ta'sirida tushadi. Jismning traektoriasi qanday bo'lganda tushish vaqti eng qisqa bo'ladi?



Nuqtalarni *1-chizma* dagidek joylashtiraylik. Bunda $A(x_0, y_0)$ nuqta koordinatalar boshida, ordinatalar o'qi esa pasrga, absissalar o'qi gorizontal yo'nalgan. Bu yerda biz eng qisqa vaqt degan bilan eng qisqa yo'l tushunchasini chalkashtirmasligimiz kerak. Bizning masalamizda izlanayotgan chiziq to'g'ri chiziq bo'la olmaydi, chunki bu holda tushayotgan moddiy nuqtaning tezligi sekin ortadi, bunga vaqt ko'p ketadi, undan tikroq bo'lgan egri chiziqning qismida esa harakat tezligi tez ortib, yo'lning ko'proq qismini kattaroq tezlik bilan o'tadi. Bunda esa vaqt tejaladi. Harakatdagi nuqta t vaqtda $P(x, y)$ holatda va $v(x, y, t)$ tezlikka ega bo'lsin. Boshlang'ich tezlik $v = 0$ desak, ogirlik kuchining bajargan ishi mgy bo'lib, quyidagi harakat tenglamasini yozsak bo'ladi:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy$$

bunda $\frac{mv^2}{2}$ harakatlanuvchi kuchning $t = 0$ dan ixtiyoriy t vaqtgacha

bo'lgan orttirmasi. So'ngi tenglikdan

$$v = \sqrt{2gy} \quad \text{va} \quad dt = \frac{ds}{v}$$

bo'lgani uchun moddiy nuqta harakatidagi elementar vaqt

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{2gy}},$$

AB yoyni o'tishga ketgan vaqt esa

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

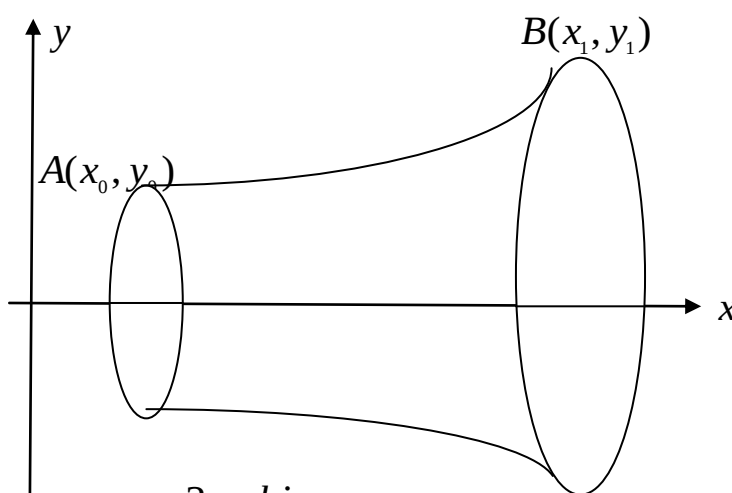
bu yerda o'zgarmas ko'paytuvchilarni hisobga olmasak, *braxistaxrona masalasini yechish ushbu*

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx \quad (1)$$

Integralga minimum qiymat beruvchi $y(x)$ funksiyani izlashimiz kerak ekan.

2. Eng kichik aylanish sirti masalasi.

$A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalardan o'tuvchi egri chiziqlar ichidan absissalar o'qi atrofida aylanishi natijasida eng kichik aylanish sirti hosil qiluvchisi topilsin(2-rasm).



2 – chizma

$A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalardan o'tuvchi izlanyotgan egri chiziq tenglamasini $f(x)$ deb faraz qilaylik, u holda aylanish sirtining yuzi

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

bo'ladi. Bu formulada ham o'zgarmas ko'paytuvchini etiborga olmasak, ushbu

$$\int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2)$$

ko'rinishdagi *integralga minimal qiymat beruvchi $y(x)$ funksiyani topish so'raladi.*

Yuqoridagi ta'riflardan ikkala masalani yechishda kelib to'xtalgan (1) va (2) integrallarga etibor bersak, bu integral belgilari ostida turgan funksiyalar y dan tashqari uning hosilasi y' ning ham funksiyasidir.

Mavzuning dolzarbligi. Ushbu bitiruv malakaviy ish variatsion hisob masalasida chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani topishga bag'ishlangan. Matematika yo'nalishida taxsil olayotgan talabalar, albatta bunday masalalarga duch kelishadi. Variatsion hisob va optimallashtirish fanida esa egri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani topish masalasi misol sifatida qaralgan. Shu sababli ushbu bitiruv malakaviy ishda bu masalani kengroq yoritishga xarakat qildik. Buning uchun avvalo, variatsion hisob tarixi, variatsion hisob masalalari, variatsion hisob masalalarini echish uchun zarur bo'lgan aksiomalar va teoremlar o'rganildi. Ushbu bitiruv malakaviy ishdan foydalanib talabalar variatsion hisob fanini yanada chuqurroq o'rganib ularni qo'llay biladi. Amaliy masalalarda to'g'ri chiziq va egri chiziq orasidagi eng qisqa masofa, egri chiziq va egri chiziq orasidagi masofalarni topish masalasi juda ko'p uchraydi. Shu sababli, bitiruv malakaviy ishda qo'yilgan masala dolzarb deb xisoblaymiz.

Bitiruv malakaviy ishning maqsadi. Talabalarga variatsion hisobning qadimiy masalalarini, boshlang'ich tushunchalarni, variatsion hisobning asosiy lemmasini, masalalarni echish uchun zarur teoremlarni va egri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani topish masalasini o'rgatadi.

Bitiruv malakaviy ishning muammosi. Variatsion hisobning eng sodda masalasi bo'lgan egri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani topish masalasida Eyler tenglamasi va transversallik shartidan foydalanish natijasida tenglamalar sistemasini echish jarayonida koeffitsientlar juda ko'p noma'lumlarga bog'liq bo'lib qoladi. Bu sistemani echishda muammo tug'diradi.

Bitiruv malakaviy ishning ob'ekti. Mazkur bitiruv malakaviy ishda braxistoxron masalasi, geodezik chiziqlar, funktsionallarning ekstremallarini topish, asosiy lemma, Eyler tenglamasi, transversallik sharti, tekislikda egri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa kabi masalalarni echishni o'rganadi.

Bitiruv malakaviy ishning predmeti. Variatsion xisobga oid masalalarni echishga oid o'quv materiallarni o'rganishdan iborat.

Bitiruv malakaviy vazifasi. Mazkur bitiruv malakaviy ishda funktsionallar, funktsionallarning yaqinlik darajasi, eng sodda variatsion masala. Masalaning qo'yilishi, variatsion hisobning asosiy lemmasi, Eyler tenglamasi, to'g'ri chiziq va parabola orasidagi masofa, ikki parabola orasidagi masofa kabi masalalar qaraladi.

Bitiruv malakaviy ishning yangiligi. Bitiruv malakaviy ishda to'g'ri chiziq va parabola orasidagi masofa, ikki parabola orasidagi eng qisqa masofa topish masalasi qo'yilgan va u masala echilgan.

Bitiruv malakaviy ishning tuzilishi va strukturasi. Mazkur bitiruv malakaviy ish kirish, ikkita bob, 5 paragraf, xulosa va adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

I BOB.FUNKSIONALLAR VA VARIATSION MASALA

1.1-§. Funksionallar. Funksionallarning yaqinlik darajasi.

Matematik analiz kursida ko'rgan funksiyalarimiz odatda bitta yoki bir nechta funksiyalarga bog'liq bo'lar edi. Lekin ko'p masalalarda bunday funksiyalar tushunchasi yetarli bo'lmay qoladi: masalan, o'tkazgich bo'ylab elektr oqimi o'tganda o'tkazgich atrofida hosil bo'lgan elektromagnit maydonning kuchlaninshi o'tkazgich ega bo'lgan egri chiziq shakliga bog'liqdir. Hozirgi zamonda uchiralayotgan raketalar, Yer suniy yo'ldoshlari va planetalararo kosmik kemalar sirtlarining formalari ham katta ahamiyatga ega, ayniqsa Yer atmosferasidan chiqishda va Yerga qaytib tushish vaqtida, Yer atmosferasiga kirganda mumkin qadar kamroq qizish, atmosfera qarshiligini mumkin qadar kamroq sezish uchun albatta bu kemalarning formalari katta ahamiyatga egadir.

Keltirilgan misollarda ko'rolayotgan kattaliklar, chunonchi kuchlanish, qarshilik va shunga o'xshash fizikaviy va maxanikaviy kattaliklar erkli argumentlarning qiymatlaridan tashqari yana funksiyalarga (egri chiziq, sirt formasi va x, k) ham bog'liq bo'ladi. Shu tushunchalar bilan biz funksional tushunchasini kiritamiz.

Bizga M to'plamda aniqlangan va uzluksiz $f(x)$ funksiyalar sinfi berilgan bo'lsin, ya'ni: $f(x) \in C(M)$.

Ta'rif. Qandaydir M uzluksiz funksiyalar $y = y(x)$ berilgan bo'lsin. Agar har bir M to'plamda yotuvchi funksiya uchun $y \in M$ birorta Y sonni mos qo'yish mumkin bo'lsa, u holda bu moslik funksional deyiladi va $J = J(y(x))$ kabi belgilanadi.

Demak, oddiy funksiyalarda biz chiziqdagi, tekislikdagi, fazodagi nuqtaga bog'lanishni ko'rsak, funksionalda chiziqqa, sirt formasiga va hokazolarga bog'lanishni ko'ramiz. Funksionalda bitta yoki bir nechta funksiyalarga funksionalning qiymati mos keltiriladi. Funksionalga ushbu

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (3)$$

integralni misol qilib keltirishimiz mumkin, chunki bu integralning qiymati $y = y(x)$ funksiyaga bog'liq.

Misol – 1.

$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx$ bo'lib, $M \in [0,1]$ va $y = x$ funksiya berilgan bo'lsin. U

holda (3)

$$J(y) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$$

bo'ladi.

Agar $M \in [0,1]$ va $y = e^x$ bo'lsa,

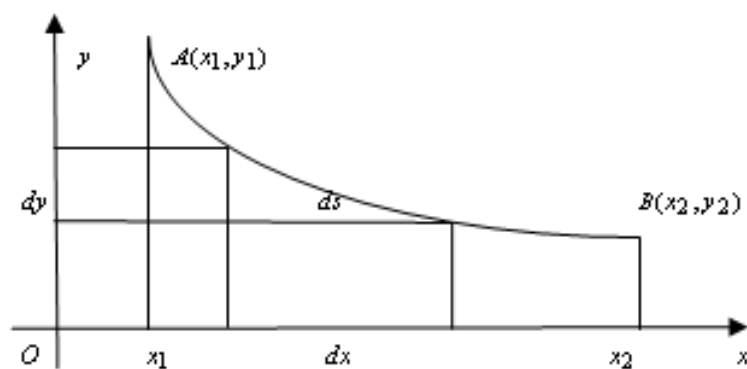
$$J(y) = \int_0^1 e^x dx = e^x = e - 1$$

bo'ladi.

Misol – 2.

$J(y) = y' \Big|_{x=0}$ bo'lib, $y = \sin x$ bo'lsin. U holda

$$y' = (\sin x)' \Big|_{x=0} = \cos x \Big|_{x=0} = 1.$$



Misol – 3.

$A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi yoy uzunligini aniqlovchi funksionalni yozing. ($x_1 \neq x_2$)

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ da $dy = y'dx$ ni etiborga

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + y'^2(dx)^2} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \Rightarrow$$

olsak

$$\Rightarrow l_{AB} = \int_{AB} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

yoki

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

bo'ladi.

Ta'rif: $\varphi_1(x) \in C(I)$ va $\varphi_2(x) \in C(I)$ funksiyalar orasidagi masofa deb $\max_{x \in I} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$ songa aytiladi.

Ta'rif: $\varphi_1(x) \in C(I)$ va $\varphi_2(x) \in C(I)$ funksiyalar uchun

$$\rho_0 = \max_{x \in I} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

$$\rho_1 = \max_{x \in I} |\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)|$$

$$\rho_2 = \max_{x \in I} |\varphi_1''(x) - \varphi_2''(x)|$$

.....

$$\rho_k = \max_{x \in I} |\varphi_1^{(k)}(x) - \varphi_2^{(k)}(x)|$$

sonlar oarsida eng kattasi $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ fuksiyalarning k -tartibli masofasi deyiladi va $\rho = \max_k \rho_k$ kabi belgilanadi.

Agar barcha k -lar uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ topilsaki $\rho_k < \varepsilon$ bajarilsa $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ funksiyalar k -tartibli yaqinlikka ega deyiladi.

Misol – 4. $y_1(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$ va $y_2(x) = 0$ funksiyalarni $x \in [0; \pi]$

oraliqda 0 – tartibli yaqinlikka ega ekanligini isbotlang.

Yechimi: Yuqoridagi ta'rifga asosan

$$\rho_0 = \max_{x \in I} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \max_{x \in [0; \pi]} \left| \frac{\sin n^2 x}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

demak $\rho_0 = 0$.

$$\rho_1 = \max_{x \in I} |\varphi'_1(x) - \varphi'_2(x)| = \max_{x \in [0; \pi]} \left| \frac{\cos n^2 x}{n} n^2 - 0 \right| \leq \max_{x \in [0; \pi]} |n \cos n^2 x| \leq n \rightarrow \infty$$

Misol – 5. $y_1(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ va $y_2(x) = 0$ funksiyalarni $x \in [0; \pi]$

oraliqda 1 – tartibli yaqinlikka ega ekanligini isbotlang.

Yechimi :

$$\rho_0 = \max_{x \in I} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \max_{x \in [0; \pi]} \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

$$\rho_1 = \max_{x \in I} |\varphi'_1(x) - \varphi'_2(x)| = \max_{x \in [0; \pi]} \left| \frac{\cos nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

$$\rho_2 = \max_{x \in I} |\varphi''_1(x) - \varphi''_2(x)| = \max_{x \in [0; \pi]} |-\sin nx| \leq 1$$

1.2-§. Eng sodda variatsion masala. Masalaning qo'yilishi.

Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya (x_0, x_1) oraliqda o'zi uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, bunday funksiya $C^{(1)}$ sinfga tegishli deyiladi. Umuman, $y = f(x)$ funksiya o'zi uzluksiz va n – tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, bunday funksiya $C^{(n)}$ sinfga tegishli deyiladi.

Ekstremumi izlanishi kerak bo'lgan ushbu

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (3)$$

Integral berilgan bo'lsin, bunda $F(x, y, y')$ – ma'lum funksiya. Masalan,

braxistaxrona masalasida $F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$, eng kichik aylanish sirtini

izlash masalasida esa $F(x, y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$. x_0, x_1 berilgan o'zgarmas sonlar.

Asosiy masalaning ta'rif. Integral belgisi ostidagi $F(x, y, y')$ funksiya $y = f(x)$ funksiyaga bog'liq va u bilan birgalikda integralning o'zi ham shu

$y = f(x)$ funksiyaga bog'liqdir. Integral ma'noga ega bo'lishi uchun $f(x)$ va $F(x, y, y')$ funksiyalarni ma'lum shartlar bilan chegaralalaylik, chunonchi:

1) Tekislikning biror R sohasidan olingan har bir x va y uchun $F(x, y, y')$ bir qiymatli, uzluksiz va ikkinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega;

2) $y = f(x)$ ga qo'yiladigan shartlar a) (x_0, x_1) oraliqda $C^{(1)}$ sinfga tegishli; b) $y = f(x)$ funksiyani tasvirlovchi chiziq R sohada to'liq yotadi; d) $y = f(x)$ funksiya $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalardan o'tadi.

a) , b) va d) shartlarga bo'ysinuvchi funksiyalar mumkin bo'lgan funksiyalar deyiladi.

Shunday qilib asosiy masala *mumkin bo'lgan egri chiziqlar ichidan (3) integralga minimum qiymat beruvchi chiziqni topishni talab qiladi.*

Ikkita mumkin bo'lgan $\tilde{y}$ va $y = f(x)$ egri chiziq

$$f(x) - \varepsilon < \tilde{y} < f(x) + \varepsilon$$

shartlarga bo'ysunadi, ularni R_ε sohada *qo'shni chiziqlar* deb ataylik, bunda ε –berilgan kichik musbat son. (3) integralga ekstremal qiymat beruvchi chiziq *ekstremal* deyiladi. Bu chiziq berilgan integralga qo'shni chiziqlarga nisbatan eng kichik yoki eng katta qiymat beradi. Shuning uchun ko'rilayotgan ekstremum *nisbiy ekstremum* ham deyiladi. Ta'rifga ko'ra ekstremal bilan qo'shni egri chiziqlar bir-biriga yaqin yotishi kerak. Bu yaqinlik

$$\tilde{y} - y = \delta y$$

ayirma bilan aniqlanadi, bu yerda δy belgi (Logranj belgisi) *funksionalning variatsiyasi* deyiladi. Shubhasiz, $x = x_0$ va $x = x_1$ nuqtalarda $\delta y = 0$ bo'ladi. Demak, barcha mumkin bo'lgan egri chiziqlar ekstremalga variatsiyani qo'shishdan iborat, ya'ni

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \delta y \quad (4)$$

$y(x)$ funksiya variatsiyaning o'zi ham funksiya bo'lgani sababli uning hosilasi haqida gapirish mumkin, chunonchi quyidagi hossa o'rinli:

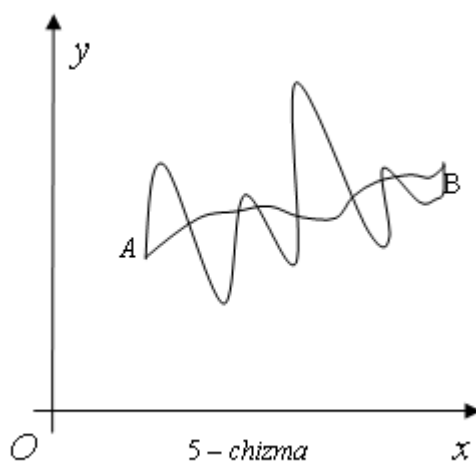
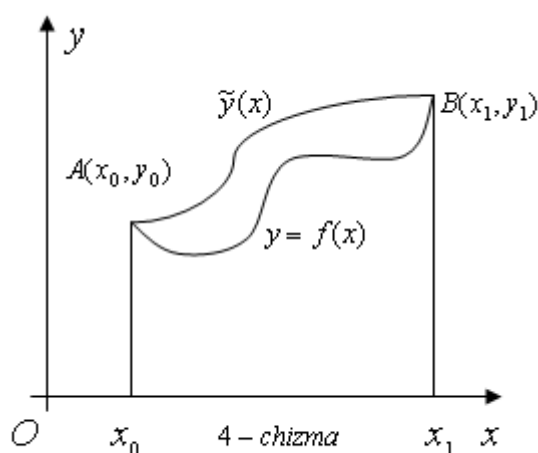
$$\frac{d}{dx}(\delta x) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \delta y'$$

Haqiqtan,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y(x + \Delta x) - \delta y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\tilde{y}(x + \Delta x) - y(x + \Delta x)] - [\tilde{y}(x) - y(x)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tilde{y}(x + \Delta x) - \tilde{y}(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{d}{dx} \tilde{y}(x) - \frac{d}{dx} y(x) = \delta \frac{dy}{dx}, \end{aligned}$$

ya'ni variatsiyaning hosilasi bir chiziqdan ikkinchi chiziqqa o'tishda bitta absissaga tegishli nuqtalardagi urinmalarni o'zgarishi degan so'zdir. Egri chiziqlarning yaqinlagi haqida so'z yuritish ekanmiz, quyidagi ikki holni ajratishimiz kerak:

- 1) agar $|\delta y|$ va $|\delta y'|$ ning ikkalasi ham bo'lsa, ya'ni egri chiziqlar ham vaziyati ham urinmalar yo'nalishi nuqtayi nazaridan bir-biriga yaqin bo'lsa (3-chizma), u holda ekstremum *kuchsiz ekstremum* deyiladi. Bu birinchi tartibli yaqinlashish.



2) agar $|\delta y|$ kichik, $|\delta y'|$ esa har qanday qiymat qabul qila olsa, u holda ekstremum *kuchli ekstremum* deyiladi (4–chizma).

Bu esa 0 – tartibli yaqinlashish.

Agar berilgan funksional biror egri chiziqda ekstremumga erishsa, u holda u uzluksiz ekstremumga ham albatta erishadi; lekin funksional kuchsiz ekstremumga erishadi, umuman aytganda, uning kuchli ekstremumga ham erishishi kelib chiqmaydi. Shuning uchun kuchli ekstremumga erishish shartlarini ikkala ekstremum uchun ham qabul qilish mumkin.

1.3-§. Variatsion hisobning asosiy lemmasi. Eyler tenglamasi.

1-lemma (Logranj lemmasi). (x_0, x_1) oraliqda uzluksiz bo'lgan $F(x)$ funksiya va shu oraliqda $C^{(1)}$ sinfga tegishli va $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ shartlarga bo'ysunuvchi har qanday $\eta(x)$ funksiya uchun ushbu

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\eta(x)dx$$

integral nolga teng bo'lsa, u holda (x_0, x_1) oraliqdan olingan har qanday x uchun $F(x) = 0$ bo'ladi.

Isbot: Isbotlash uchun teskaridan faraz qilaylik. (x_0, x_1) oraliqdan olingan biror ξ nuqtada $F(x) \neq 0$ bo'lib, $F(x) > 0$ bo'lsin, u holda $F(x)$ ning uzluksizligi sababli ξ ning kichik atrofida ham musbat bo'ladi. ξ ning kichik atrofini quyidagicha olaylik:

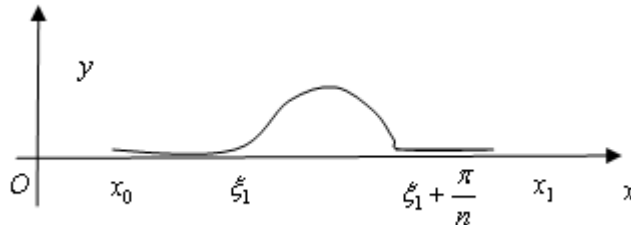
$$x_0 < \xi_0 < \xi < \xi_1 + \frac{\pi}{n} < x_1.$$

Shunday qilib farazimizga ko'ra $(\xi_1, \xi_1 + \frac{\pi}{n})$ oraliqda $F(x)$ musbat bo'lib biror

musbat m sonidan katta bo'ladi. Endi $\eta(x)$ ni (x_0, x_1) oraliqda quyidagicha olaylik:

$$\eta(x) = \begin{cases} (\xi_1, \xi_1 + \frac{\pi}{n}) \text{ da } \sin^2 n(x - \xi_1), \\ \text{boshqa nuqtalarda } 0. \end{cases}$$

Bunday aniqlangan funksiya lemma shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni o'zi uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega, undan tashqari $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$



5 – chizma

Shuning uchun lemma shartiga ko'ra

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\eta(x)dx = 0$$

bo'lishi kerak. Lekin

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\eta(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_1 + \frac{\pi}{n}} F(x)\sin^2 n(x - \xi_1)dx > m \int_{\xi_1}^{\xi_1 + \frac{\pi}{n}} \sin^2 n(x - \xi_1)dx = \frac{\pi m}{2n} > 0$$

$F(x) \neq 0$ deb zidlikka keldik. Demak $F(x) \equiv 0$ ekan.

Ikki argumentli uchun ham huddi shu lemma o'rinalidir.

2-lemma(Logranj lemmasi). *D sohada uzluksiz bo'lgan $F(x, y)$ funksiya va shu sohada o'zi uzluksiz, uzluksiz hususiy hosilalarga ega va soha konturi L da nolga teng bo'lgan ixtiyoriy $\eta(x, y)$ funksiya uchun ushbu*

$$\iint_D F(x, y)\eta(x, y)dxdy$$

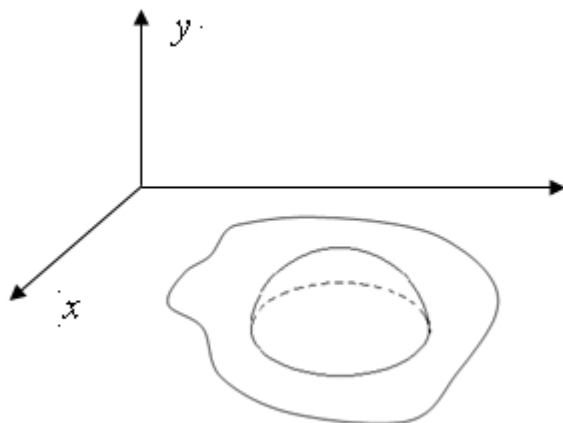
Integral nolga teng bo'lsa, u holda D sohada $F(x, y) \equiv 0$ bo'ladi.

Haqiqatan, sohaning birorta (x_1, y_1) nuqtasida lemmaga teskari holat o'rinli, ya'ni lemma sharti bajarilgan holda $F(x_1, y_1) \neq 0$ deb faraz qilamiz. (x_1, y_1) nuqtaning kichik atrofi ε_1 da K_{ε_1} doira bo'lsin. Bu doira aylanasida va

undan tashqarida $\eta(x, y)$ funksiya va uning hususiy hosilalari nolga teng bo'lib, doira ichida

$$\eta(x, y) = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \varepsilon^2]^2$$

bo'lsin (6-chizma).



6-чизма

Olingan kichik doira ichida farazimizga ko'ra $F(x, y)$ funksiya uzluksizligi tufayli noldan farqli bo'ladi, aniqrog'i $F(x, y) > M$ (M -musbat son) bo'lsin, u holda ushbu

$$\begin{aligned} \iint_D F(x, y) \eta(x, y) dx dy &= \iint_{K_{\varepsilon_1}} F(x, y) \eta(x, y) dx dy > \\ &> M \iint_{K_{\varepsilon_1}} [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \varepsilon^2]^2 dx dy, \end{aligned}$$

integral ostida musbat funksiya bo'lgani uchun integrallash natijasi musbat bo'lib,

$$\iint_D F(x, y) \eta(x, y) dx dy > 0$$

bo'ladi. Bu esa lemma shartiga ziddir. Demak, $F(x, y) \neq 0$ degan faraz noto'g'ri bo'lib $F(x, y) \equiv 0$ bo'lishi kerak ekan.

Eyler tenglamasi.

$A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalardan o'tuvchi mumkin bo'lgan egri chiziqlar ichidan ushbu

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (3)$$

integralga maksimal qiymat beruvchi $y = f(x)$ funksiyani izlash masalasiga o'taylik. Aniqrog'i, $y = f(x)$ funksiya qanoatlantirishi lozim bo'lgan zaruriy shartni aniqlaylik. (3) ko'rinishdagi

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

funksioanallar integrallanmaydigan ifodalar bo'lishi kerak, aks holda qo'yilgan shartga hech qanday chiziq bo'ysunmaydi. Qo'shni egri chiziqqa tegishli integralni

$$I(\tilde{y}) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx$$

ko'rinishida yozib, integrallar ayirmasini ΔI funksional orttirmasi desak,

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - F(x, y, y')] dx \end{aligned}$$

Funksionalning maksimum yoki minimumga erishishini orttirmalar tiliga ko'chirib, quyidagicha bo'ladi: ΔI funksionalning ΔI orttirmasi uchun

$$\Delta I = I(\tilde{y}) - I(y) \leq 0 \quad (4')$$

tengsizlik har qanday qo'shni $y(\tilde{x})$ chiziqqa nisbatan bajarilsa, u holda funksional $y = f(x)$ chiziqda maksimumga erishadi deyiladi. Shu bilan birga $y = f(x)$ ga $\Delta I = 0$ bo'ladi. Shunga o'xshash $y = f(x)$ chiziqqa qo'shni chiziqlar uchun $\Delta I \geq 0$ bo'lsa, $y = f(x)$ da funksional minimum qiymatga erishadi deyiladi. Bu ta'rifga ko'ra ekstremal chiziq atrofida funksional orttirmasi ΔI ning ishorasi bir xil saqlanishi kerak ekan.

(4) dagi integral belgisi ostidagi ayirmaga o'rta qiymat teoremasini so'ngi ikkita argumentga nisbatan qo'llaymiz:

$$\begin{aligned}
F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - F(x, y, y') &= F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y' + \delta y') + \\
&+ F(x, y, y' + \delta y') - F(x, y, y') = \frac{\delta F(x, y + \theta \delta y) y' + \delta y'}{\partial y} (\tilde{y} - y) + \\
&+ \frac{\delta F(x, y, y' + \theta_1 \delta y')}{\partial y'} (\tilde{y}' - y') = \frac{\partial F^*}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F^{**}}{\partial y'} \delta y',
\end{aligned}$$

bunda (*), (**) belgilar $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}$ ning y va $\tilde{y}$, y' va $\tilde{y}'$ lar orlig'idagi mos argumentlarga tegishli qiymatlarini qisqacha yozish maqsadida qo'yildi. $F(x, y, y')$ funksional barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz bo'lganligi uchun ΔI ni quyidagicha ko'rinishda yozsak bo'ladi:

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx + R \quad (5)$$

bunda, R qo'shiluvchi δy va $\delta y'$ ga nisbatan cheksiz kichik miqdordir.

(5) orttirmaning bosh qismi bo'lgan ushbu

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (6)$$

integral (3) *funksionalning variatsiyasi* deyiladi va δI kabi belgilanadi. (6)

integral belgisi ostidagi ikkinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallaymiz:

$\delta y' = (\delta y)'$ ekanligini nazarda tutsak,

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

bo'ladi, bunda $\frac{\partial F}{\partial y'}$ $x = x_0$ va $x = x_1$ nuqtalarda, umuman (x_0, x_1) oraliqda

tayin chekli qiymatlarga ega, δy esa chegaralarda nolga teng bo'lgani uchun integraldan tashqarida turgan ifoda nolga teng bo'lib, funksionalning variatsiyasi

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \quad (7)$$

ko'rinishni oladi. $\delta I \neq 0$ desak, δy va $\delta y'$ kichik bo'lganda (5) dagi ΔI ning ishorasi bosh qismaining ishorasi bilan bir xil bo'ladi, ya'ni ΔI ning ishorasi bilan δI birinchi variatsiyaning ishorasi bir xil bo'lishi kerak. Ekstremal chiziq atrofida ΔI ishorasini almashtirganligi sababli δI ham $y = f(x)$ chiziq atrofida ishorasini almashtirishi kerak. Lekin (7) dan ko'rinadiki, δy ning ishorasi o'zgarsa, δI ning ham ishorasi o'zgaradi. Shu sababli ΔI nih ham ishorasi o'zgarishi kerak. Bu $\delta I = 0$ qarama-qarshilikka kelmaslik uchun $\delta I = 0$ deyishimiz kerak ekan. Demak, $I(y)$ funksional ekstremal qiymatga ega bo'lishining zaruriy sharti

ya'ni birinchi variatsiyaning nolga teng bo'lishidir, demak,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (8)$$

tenglikning bajarilishi ushbu

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (3)$$

integral ekstremal qiymatga ega bo'lishining zaruriy shartidir. Bu shartni qulayroq ko'rinishga keltirish maqsadida 1–lemmani qo'llaylik. (8)da δy ixtiyoriy bo'lib, 1–lemma shartlariga bo'ysunadi, shuning uchun lemmaga asosan

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (9)$$

bo'ladi.

(9) tenglama Eyler tenglamasi deyilib, (3) integral ekstremumga ega bo'lishining zaruriy shartidir. Demak, $y = f(x)$ funksiya (3) integralga ekstremum qiymat berishi uchun u (9) tenglamani qanoatlantirishi lozim.

1.4-§. Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan funksionallar. Transversallik shartlari.

Biz yuqorida ko'rgan

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (3)$$

integralning chegaralari o'zgarmas edi, ya'ni berilgan qo'zg'almas $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalardan o'tuvchi egri chiziqlar ichidan bu integralga ekstremal qiymat beruvchi chiziqni izlagan edik. Endi mumkin bo'lgan egri chiziqlar ichidan ma'lum sohada yotadiyu, lekin hech qanday chegaraviy shartlarga bo'ysunmaydi. deb faraz qilaylik. Bunday egri chiziqlar to'plami bitta yoki bir nechta parametrga bog'liq bo'lib, parametrlarning o'zgarishi natijasida to'plamning bir chizig'idan ikkinchisiga o'tiladi. Shu sababli egri chiziqlarning uchlari ham parametrga bog'liq ravishda o'zgarib turadi. Bunda biz birgina parametrga bog'liq chiziqlar oilasi bilan ish ko'ramiz, ya'ni $y = f(x, \alpha)$ deymiz. Bunday o'zgarishda chiziqlarning ikki uchi tayin chiziqlar yoki sirtlar bo'yicha harakat qilishi mumkin yoki bir uchi birlashtirilgan, ikkinchi uchi yuqorida aytilgandek harakatda bo'lishi mumkin. Mana shunday egri chiziqlar ichidan

$$I(\alpha) = \int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)} F(x, f(x, \alpha), f'_x(x, \alpha)) dx \quad (10)$$

funksionalga ekstremal qiymat beruvchi chiziqni topish talab qilinadi. Eng avval biz integralning ikki uchi ham harakatda bo'lgan holda birinchi variatsiya ifodasini yozamiz, so'ngra qolgan hollarni ko'rib chiqamiz. Shuni aytib o'tish o'rinliki, qanday chiziqlar to'plami olinmasin, integralga ekstremal qiymat beruvchi chiziq albatta ekstremal bo'lishi, ya'ni Eyler tenglamasining yechimi bo'lishi lozim. Shubhasiz, egri chiziqlar to'plamida izlanayotgan ekstremalga yaqin yotgan qo'shni chiziqlarda funksionalning qiymatlarini ko'rishimiz kerak. Qo'shni chiziqlarni §1.1 da qabul qilganimizday

$$\tilde{y} = y + \delta y$$

deb belgilaylik. Integral chegaralari ham parametrga bog'liq ravishda variatsiyalanadi, ya'ni ekstremalning ikki uchi $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalarda bo'lsa, qo'shni chiziqlarning ikki uchi $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ va $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ nuqtalarda bo'ladi. Qo'shni chiziqlarga nisbatan yozilgan

$$\tilde{I} = \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx$$

funksionalda uchlaridagi siljishlar kichik bo'lgani sababli uchlarning variatsiyasi bo'lgan δx_i va δy_i belgilarni matematik anlizdagi $\Delta x_i = dx_i$ va $\Delta y_i = dy_i$ belgilar bilan bir narsa deb tushunishimiz kerak.

Funksional orttirmasi

$$\Delta I = \tilde{I} - I = \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (11)$$

bo'lib, shu orttirmaning δx , δy , δx_0 , δx_1 ga nisbatan bosh chiziqli qismi *funksionalning variatsiyasi* deyiladi. Mana shu variatsiya ifodasini hosil qilishimiz kerak. (11) ning birinchi integralini

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx + \\ & + \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx \end{aligned} \quad (12)$$

ko'rinishda yozib, bu ifodaning birinchi integrali bilan (11) ning ikkinchi integralini birlashtirib yozamiz:

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx - I_0 + I_1 \quad (13)$$

bunda

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{x_0}^{x_0 + \delta x_0} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx, \\ I_1 &= \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx. \end{aligned}$$

(13) dagi birinchi integralning bosh chiziqli qismi (6) asosan

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (14)$$

I_0 va I_1 ga o'rta qiymat teoremasini qo'llasak:

$$I_0 = F(x, y + \delta y, y' + \delta y') \Big|_{x=x_0+\theta_0\delta x_0} \delta x_0, \text{ bunda } 0 < \theta_0 < 1;$$

$$I_1 = F(x, y + \delta y, y' + \delta y') \Big|_{x=x_1+\theta_1\delta x_1} \delta x_1, \text{ bunda } 0 < \theta_1 < 1.$$

$F(x, y, y')$ funksiya barcha argumentlariga nisbatan uzluksiz bo'lgani uchun

$$I_0 = F(x, y, y') \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \varepsilon \delta x_0,$$

$$I_1 = F(x, y, y') \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \varepsilon \delta x_1$$

bo'ladi. (13) da

$$-I_0 + I_1 = -F(x, y, y')_{x=x_0} \delta x_0 + F(x, y, y')_{x=x_1} \delta x_1 + R$$

bo'lib, bunda $R = -\varepsilon_0 \delta x_0 + \varepsilon_1 \delta x_1$ ifoda δx_0 va δx_1 ga nisbatan yuqori tartibli chekiz kichik miqdordir. Demak, (15) ning bosh qismi

$$-F(x, y, y')_{x=x_0} \delta x_0 + F(x, y, y')_{x=x_1} \delta x_1 \quad (16)$$

bo'ladi. (14) va (16) ning yig'indisi funksional orttirmasi (13) ning *bosh chiziqli qismi yoki funksionalning variatsiyasi* bo'ladi, chunonchi

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx - F_{x=x_0} \delta x_0 + F_{x=x_1} \delta x_1 \quad (17)$$

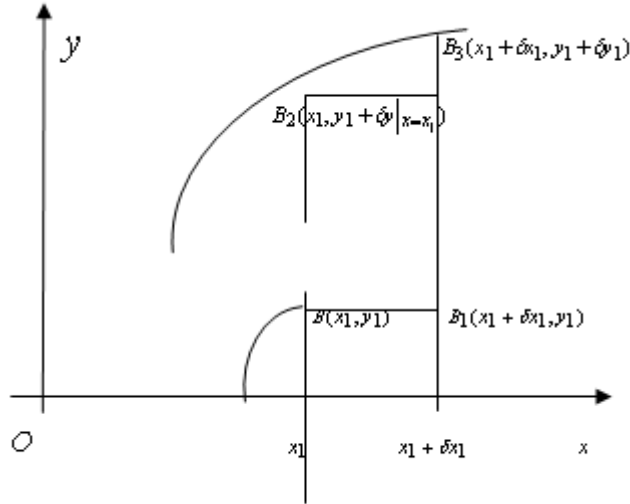
integraldagi ikkinchi qo'shiluvchiga bo'laklab integrallash formulasini qo'llab, (17) ni quyidagicha yozamiz:

$$\delta I = F_{x=x_1} \delta x_1 - F_{x=x_0} \delta x_0 + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x=x_0}^{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \quad (18)$$

Integrallash natijasida hosil bo'lgan

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x=x_0}^{x=x_1}$$

ifodadagi $\delta y \Big|_{x=x_0}$ va $\delta y \Big|_{x=x_1}$ ni ularning ma'nosiga ko'ra boshqacha ko'rinishda yozamiz.



7 – chizma

Shuni yodda tutish kerakki $\delta y|_{x=x_1}$ va δy_1 turlichadir, shuningdek $\delta y|_{x=x_0} \neq \delta y_0$.

Haqiqatan, 7 – chizmadan ko'rinadiki $\delta y|_{x=x_1}$ ifoda ordinataning $x = x_1$ absissaga nisbatan orttirmasi, ya'ni

$$\begin{aligned} BB_2 &= \delta y|_{x=x_1}, \quad B_2C = \delta x_1, \\ B_1B_3 &= \delta y_1 = B_1C + CB_3, \quad B_1C = BB_2 = \delta y|_{x=x_1}, \\ CB_3 &= y'_{x=x_1} \delta x_1, \quad \text{demak, } \delta y_1 = \delta y|_{x=x_1} + y'_{x=x_1} \delta x_1, \end{aligned}$$

bundan

$$\delta y|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1 \quad (18')$$

Xuddi shunday chizmani $A(x_0, y_0)$ uchda ham chizish mumkin va bu uchga nisbatan

$$\delta y|_{x=x_0} = \delta y_0 - y'(x_0) \delta x_0 \quad (18'')$$

bo'ladi. (18') va (18'') ni (18) ga qo'yib, hadlarni gruppalasak, *birinchi variatsiyaning umumiy ifodasiga* kelimiz:

$$\begin{aligned} \delta I &= \left[F(x_1, y_1, y'_1) - y'_1 \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_1 \right] \delta x_1 - \left[F(x_0, y_0, y'_0) - y'_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_0 \right] \delta x_0 + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_1 \delta y_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_0 \delta y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \end{aligned} \quad (19)$$

yoki buni ixcham ko'rinishda yozsak

$$\delta I = \left[(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}) \delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} (\frac{\partial F}{\partial y'}) \right] dx. \quad (20)$$

bu ifodaga asoslanib, ushbu

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx \quad (21)$$

Funksional variatsiyasining umumiy ifodasini yozish qiyin emas, chunonchi

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} - z' \frac{\partial F}{\partial z'}) \delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta z \right]_{x_0}^{x_1} + \\ & + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} (\frac{\partial F}{\partial y'}) \right] + \delta z \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} (\frac{\partial F}{\partial z'}) \right] \right\} dx \end{aligned} \quad (21')$$

bo'ladi, bunda (x_0, y_0, z_0) va (x_1, y_1, z_1) - integrallash yo'lining uchlari.

Qanday variatsion masala yechmaylik, har qanday masala uchun, birinchidan, birinchi variatsiya nolga teng bo'lishi zarur (α); ikkinchidan, har qanday funksionalga ekstremal qiymat beruvchi chiziq ekstremal bo'lishi, ya'ni Eyler tenglamasining yechimi bo'lishi lozim (β). Mana shu ikki holarni nazarda tutib, (20) umumiy variatsiyadan quyidagi to'rtta holda foydalanayli:

- I. Integrallash yo'lining ikki uchi qo'zg'almas;
- II. $A(x_0, y_0)$ qo'zg'almas, $B(x_1, y_1)$ qo'zg'aluvchan;
- III. $A(x_0, y_0)$ qo'zg'aluvchan, $B(x_1, y_1)$ qo'zg'almas;
- IV. $A(x_0, y_0)$ ham, $B(x_1, y_1)$ ham qo'zg'aluvchan;

Bu hollarda harakatchan nuqtalarning harakatlarini chegaralaylik, chunonchi nuqtalar tenglamalari malum bo'lgan G_0 va G_1 chiziqlar bo'yicha harakatlanadi deb faraz qilamiz. Bu chiziqlarning tenglamalari mos ravishda $y = \varphi_0(x)$, $y = \varphi_1(x)$ bo'lsin.

Biz I - holni yetarlicha tekshirdik.

II - holda $\delta x_0 = 0$ va $\delta y_0 = 0$ bo'lib, (α), (β) shartlarni hisobga olsak, (20) dan

$$[F(x_1, y_1, y'_1) - y'_1 F_{y'}(x_1, y_1, y'_1)]\delta x_1 + F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1)\delta y_1 = 0 \quad (22)$$

tenglikka kelamiz. Bu tenglik harakatchan uchda bajarilishi lozim bo'lgan shartdir.

III – holda $\delta x_1 = 0$ va $\delta y_1 = 0$ bo'lib, yana $(\alpha), (\beta)$ shartlarni hisobga olsak, (20) dan $A(x_0, y_0)$ uch uchun

$$[F(x_0, y_0, y'_0) - y'_0 F_{y'}(x_0, y_0, y'_0)]\delta x_0 + F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)\delta y_0 = 0 \quad (23)$$

tenglikka kelamiz.

(22) va (23) da ishtirok etayotgan harflarning ma'nolarini yana bir bor eslatib o'taylik: y'_0 va y'_1 lar AB chiziqning mos ravishda $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalariga o'tkazilgan urinmalarning burchak koefitsientlari; $\delta x_0, \delta y_0$ lar G_0 chiziq bo'yicha yoki unga urinma bo'yicha kichik siljishning koordinata o'qlariga bo'lgan proyeksiyalari; shunga o'xshash $\delta x_1, \delta y_1$ ham G_1 chiziq bo'yicha yoki unga urinma bo'yicha kichik siljishning koordinata o'qlariga bo'lgan proyeksiyalari (8 – *chizma*).

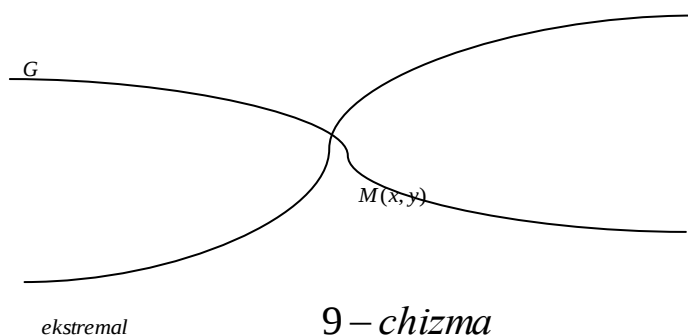
IV – holda $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalarning ikkalasi ham harakatchan bo'lgani uchun bu nuqtalarda (22) va (23) shartlar bir vaqtda bajariladi, ya'ni

$$\begin{cases} [F(x_1, y_1, y'_1) - y'_1 F_{y'}(x_1, y_1, y'_1)]\delta x_1 + F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1)\delta y_1 = 0 \\ [F(x_0, y_0, y'_0) - y'_0 F_{y'}(x_0, y_0, y'_0)]\delta x_0 + F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)\delta y_0 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

bo'lishi lozim.

Transversallar.

Endi tenglamasi $y = f(x)$ bo'lgan ekstremalda ixtoriy $M(x, y)$ nuqtani olaylik. Bu nuqtada egri chiziqning og'maligi yoki urinmaning burchak koefitsienti y' bilan aniqlanadi. $M(x, y)$ nuqtada ekstremalni kesib o'tuvchi G egri chiziq o'tkazamiz (9 – *chizma*). Bu egri chiziq yoki uning urinmasi bo'yicha kichik siljishlarning komponentalarini δx va δy orqali belgilaylik.



Agar M nuqtadagi $x, y, y', \delta x, \delta y$ kattaliklari orasida ushbu

$$[F(x, y, y') - y' F_y(x, y, y')] \delta x + F_y'(x, y, y') \delta y = 0 \quad (25)$$

bog'lanish mavjud bo'lsa, u holda L ekstremal G chiziqni transversal kesadi deyiladi; G chiziqning o'zi transversal deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, transversal chiziqni faqat ekstremalga bog'liq ravishda ko'rish mumkin. (24) tengliklarni (25) shart bilan taqqoslab ko'rsak, quyidagi natija kelib chiqadi: *ikki uchi egri chiziqlar bo'yicha harakatlanuvchi ekstremal funksionalga ekstremum qiymat berishi uchun shu egri chiziqlarni transversal kesishi zarur*. G chiziqqa M nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini $\bar{y}'$ deb belgilasak, u holda $\bar{y}' = \frac{\delta y}{\delta x}$ bo'lib, (25) shartni quyidagicha yozsak bo'ladi:

$$F(x, y, y') + (\bar{y}' - y') F_y'(x, y, y') = 0 \quad (26)$$

Demak, *transversallik sharti ekstremalga o'tkazilgan urinmaning y' burchak koeffitsienti bilan ekstremalni kesuvchi chiziq urinmasining $\bar{y}'$ burchak koeffitsienti orasidagi bog'lanishni ifodalar ekan*.

Yuqorida aytilganlarni yakunlaylik. G_0 va G_1 egri chiziqlar nuqtalarini tutashtiruvchi L chiziqlar ichidan

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (3)$$

integralga ekstremal qiymat beruvchi chiziq topilsin. G_0, G_1 chiziqlar ekstremalning kesishish nuqtalarida (26) shartning bajarilishi masalaga to'liq

javob beradi. Haqiqatan, G_0 va G_1 chiziqlarning tenglamalari mos ravishda $y = \varphi_0(x)$ va $y = \varphi_1(x)$ bo'lsin; (3) funksionalga mos Eyler tenglamasining yechimi ikkita parametrga bog'liq bo'lgan

$$y = f(x, C_1, C_2) \quad (27)$$

egri chiziqlar oilasidan iborat. $A(x_0, y_0)$ va $B(x_1, y_1)$ nuqtalarda ikkita transversallik sharti va bu nuqtalarning G_0 va G_1 chiziqlarda yotishidan yana ikkita

$$f(x_0, C_1, C_2) = \varphi_0(x_0), \quad f(x_1, C_1, C_2) = \varphi_1(x_1)$$

Shart bajarilishi ko'rinadi. Bu to'rtta shartdan to'rtta x_0, x_1, C_1, C_2 nomalumlari aniqlanadi. Bulardan topilgan C_1 va C_2 qiymatlarini (27) qo'ysak, masalning javobi bo'lgan ekstremalning tenglamasi hosil bo'ladi. Xususan,

$$F = g(x, y)\sqrt{1 + y'^2} \quad (g(x, y) \neq 0) \quad (28)$$

Bo'lganda (26) transversallik sharti

$$g(x, y)\sqrt{1 + y'^2} + (\bar{y}' - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

ko'rinishni oladi. Bundan

$$g(x, y)(1 + \bar{y}'y') = 0$$

bo'lib, $g(x, y) \neq 0$ ekanligini ko'zda tutsak, ushbu

$$(1 + \bar{y}'y') = 0$$

Ortoganallik shartiga kelamiz, ya'ni (28) funksional uchun ekstremalning qo'zg'aluvchan uchlarida egri chiziq va ekstremalga o'tkazilgan urinmalar o'zaro ortogonal bo'lar ekan; transversallik sharti ortoganallik shartini ifodalay ekan.

II BOB. TEKISLIKDA FUNKSIYALAR ORASIDAGI MASOFA.

2.1-§. To'g'ri chiziq va parabola orasidagi masofa.

Bizga $\varphi_1 = kx + p$ va $\varphi_2 = x^2 + bx + d$ to'g'ri chiziq va parabola berilgan bo'lsin. Bu funksiyalarda quyidagi shart bajarilsin, ya'ni:

$$D = (b - k)^2 - 4(d - p) < 0 \quad (29)$$

bo'lsin. Bu shart $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalarni kesishmasligini ta'minlaydi.

Masalani qo'yilishi: shunday $y = y(x)$ chiziqni topish kerakki, u chiziq

$$J(x) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

funksionalni ekstrimalga erishtirsin va

$$y(x_1) = \varphi_1(x_1) \quad y(x_2) = \varphi_2(x_2) \quad (30)$$

shartlarni qanoatlantirsin.

Bu masalada $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar orasidagi chiziqning, $y = y(x)$ funksiyaning ikki uchi ham qo'zg'aluvchan. Biz uchi to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlansa, ikkinchi uchi parabola bo'yicha harakatlanadi.

Biz oldinga bobda ko'rgan edikki, agar chiziqning ikki uchi ham harakatchan bo'lsa, (24) shart bajarilishi lozim edi. Endi biz izlayotgan chiziq eng qisqa bo'lishi uchun, funksional *Eyler tenglamasini* qanoatlantirishi kerak edi. Bizga matematik analiz kursidan ma'lumki $[x_1; x_2]$ oraliqdagi funksiyaning yoy uzunligini topish formulasi

$$l_{x_1 x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

formula orqali topilar edi.

Bizning masalamizda x_1 va x_2 lar to'g'ri chiziq va parabolada harakatlanadi. Funksional esa $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ ko'rinishda bo'ladi.

Funksional faqat y' ga bog'liq bo'lganligi uchun Eyler tenglamasi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 x + C_2 \quad (31)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Demak (31) ga asosan funksional $F = \sqrt{1+C_1^2}$ ko'rinishni oladi. Endi

(24) (30) ga, ya'ni

$$\begin{aligned} [F + (\varphi_1' - y')F_{y'}]_{x=x_1} &= 0 \\ [F + (\varphi_2' - y')F_{y'}]_{x=x_2} &= 0 \\ y(x_1) &= \varphi_1(x_1) & y(x_2) &= \varphi_2(x_2) \end{aligned}$$

larga asosan

$$\begin{cases} \sqrt{1+C_1^2} + (k-C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0 \\ \sqrt{1+C_1^2} + (2x_2+b-C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0 \\ C_1x_1 + C_2 = kx_1 + p \\ C_1x_2 + C_2 = x_2^2 + bx_2 + d \end{cases}$$

bo'ladi. Bu esa C_1, C_2, x_1, x_2 larga nisbatan to'rt nomalumli, to'rtta tenglamalar sistemasi. Sistemani yechib

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{k}, & C_2 &= \frac{k^2-b^2}{4} + \frac{k-b}{2k} + d, \\ x_1 &= \frac{4pk + k(k^2-b^2) + 2(k-b) + 4kd}{4(k^2+1)}, & x_2 &= \frac{k-b}{2} \end{aligned}$$

Topilgan C_1, C_2 ni (31) ga qo'ysak

$$y = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2-b^2}{4} + \frac{k-b}{2k} + d \quad (32)$$

ga ega bo'lamiz. (32) ga x_1 ni qo'ysak

$$y_1 = \frac{k^4 - b^2k^2 + 4dk^2 + 2k^2 - 2kb - 4p}{4(k^2+1)}$$

ga, x_2 ni qo'ysak

$$y_2 = \frac{k^2-b^2}{4} + d$$

ni topamiz. Topilgan $(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa biz izlayotgan $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar orasidagi masofani beradi.

Topilganlardan foydalanib

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - x_2)^2} \quad (33)$$

ni topamiz.

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \sqrt{\frac{[k(k-b)^2 - 4k(p+d)]^2 + [2kb + 4(p+d) - b^2 - k^2]^2}{4(k^2 + 1)}} \quad (34)$$

(34) - ifoda biz izlagan $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar ya'ni parabola va to'g'ri chiziq orasidagi masofani beradi.

2.2-§. Ikki parabola orasidagi masofa.

Bizga $\varphi_1 = x^2 + a_1x + b_1$ va $\varphi_2 = -x^2 + a_2x + b_2$ kvadrat funksiyalar berilgan bo'lsin. Bu funksiyalarda quyidagi shart bajarilsin:

$$\begin{aligned} x^2 + a_1x + b_1 &= -x^2 + a_2x + b_2 \Rightarrow \\ 2x^2 + (a_1 - a_2)x + b_1 - b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Kvadrat tenglama xaqiqiy yechimga ega bo'lmasin, ya'ni

$$D = (a_1 - a_2)^2 - 8(b_1 - b_2) < 0 \quad (35)$$

bo'lsin. Bu shart $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalarning kesishmasligini ta'minlaydi.

Masalani qo'yilishi: shunday $y = y(x)$ chiziqni topish kerakki, u chiziq

$$J(x) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

funksionalni ekstrimalga erishtirsin va

$$y(x_1) = \varphi_1(x_1) \quad y(x_2) = \varphi_2(x_2) \quad (36)$$

shartlarni qanoatlantirsin.

Endi tansversallik shartlari (24) va (30) shartlarga ya'ni

$$\begin{aligned} [F + (\varphi_1' - y')F_{y'}]_{x=x_1} &= 0 \\ [F + (\varphi_2' - y')F_{y'}]_{x=x_2} &= 0 \\ y(x_1) &= \varphi_1(x_1) \quad y(x_2) = \varphi_2(x_2) \end{aligned}$$

larga asosan

$$\begin{cases} \left[\sqrt{1+C_1^2} + (2x+a_1-C_1) \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+1}} \right] \Big|_{x=x_1} = 0 \\ \left[\sqrt{1+C_1^2} + (-2x+a_2-C_1) \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+1}} \right] \Big|_{x=x_2} = 0 \\ C_1x_1 + C_2 = x_1^2 + a_1x_1 + b_1 \\ C_1x_2 + C_2 = -x_2^2 + a_2x_2 + b_2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu sistema x_1, x_2, C_1, C_2 larga nisbatan 4 nomalumli 4 ta tenglamadan iborat. Sistemaning 1- va 2- tenglamalarini soddalashtirsak

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1+a_1C_1}{2C_1}, \\ x_2 &= \frac{1+a_2C_1}{2C_1} \end{aligned}$$

lar hosil bo'ladi. Sistemaning 3- va 4- tenglamalarini qo'shib, topilganlarni qo'ysak

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+a_1C_1}{2C_1} \right)^2 + \left(\frac{1+a_2C_1}{2C_1} \right)^2 - (a_1-C_1) \left(\frac{1+a_1C_1}{2C_1} \right) + \\ & + (C_2-a_2) \left(\frac{1+a_2C_1}{2C_1} \right) + b_1 - b_2 = 0 \end{aligned}$$

hosil bo'ladi. Bu tenglamani soddalashtirib

$$C_1^3 + \frac{4(b_1-b_2)-a_1^2-a_2^2+4}{2(a_1+a_2)} C_1^2 + \frac{1}{a_1+a_2} = 0$$

$$m = \frac{4(b_1-b_2)-a_1^2-a_2^2+4}{2(a_1+a_2)}, \quad n = \frac{1}{a_1+a_2} \quad \text{kabi o'zgartirishlar kiritsak}$$

$$C_1^3 + mC_1^2 + n = 0 \quad (37)$$

ko'rinishdagi uchinchi darajali tenglamaga kelimiz. Bu tenglamaning ildizlarni topishni biz algebra kursida o'rganganmiz. Unga ko'ra:

$$C_1 = \sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^3}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^3}{729}}}{2}} - \frac{m}{3}$$

bo'ladi. Topilgan C_1 ni (34) - formulaga qo'ysak

$$x_1 = \frac{1}{2(\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3})} - \frac{a_1}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{2(\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3})} + \frac{a_2}{3}$$

Larga ega bo'lamiz. Endi x_1 ni (33') ga va x_2 ni (33'') ga qo'yib y_1 va y_2 larni topamiz, ya'ni:

$$y_1 = (\frac{1}{2(\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3})} - \frac{a_1}{3})^2 +$$

$$+ a_1(\frac{1}{2(\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3})} - \frac{a_1}{3}) + b_1$$

$$y_2 = -(\frac{1}{2(\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3})} - \frac{a_2}{3})^2 +$$

$$+ a_2(\frac{1}{2(\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3})} - \frac{a_2}{3}) + b_2$$

Topilgan $(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topsak, biz izlagan masofa kelib chiqadi, aniqrog'i:

$$\rho(\varphi_1; \varphi_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3}} + \frac{a_1 + a_2}{2} \right. \\
& \left(\frac{1}{2\left(\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3}\right)} - \frac{a_1}{3} \right)^2 + a = \\
= & \left. 1 \left(\frac{1}{2\left(\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3}\right)} - \frac{a_1}{3} \right) + b_1 + \right. \\
& + \left(\frac{1}{2\left(\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3}\right)} - \frac{a_2}{3} \right)^2 - \\
& \left. - a_2 \left(\frac{1}{2\left(\sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4m^6}{729}}}{2}} - \frac{m}{3}\right)} - \frac{a_2}{3} \right) - b \right]^2 +
\end{aligned}$$

bo'ladi.

Masala yechish uchun namunalar:

1- masala.

$$\int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - (y'')^2 + x^2) dx$$

Integralga akstremal qiymat beruvchi funksiya topilsin.

Yechimi: Bu holda Eyler-Puasson tenglamasi

$$32y - \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$$

Yoki

$$y^{IV} - 16y = 0$$

Ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^4 - 16 = 0$$

Bo'lib uning yechimlari

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 2i, \quad k_4 = -2i$$

Ildizlarga ega. Shuning uchun differensial tenglamaning yechimi yoki ekstremallar ushbu

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$$

funksiyalar bo'ladi.

2-masala.

$$J(y) = \int_0^{\pi} (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi)$$

funksiyaning ekstremallarini toping.

Yechimi: Funksional

$$F = y'^2 + y^2 - 4y \sin x$$

ko'rinishda bo'ladi. Eyler tenglamasiga ko'ra

$$F_{y'} = 2y', \quad F_{y'y'} = 2, \quad F_{y'x} = 0,$$

$$F_{yy} = 0, \quad F_y = 2y - 4 \sin x$$

$$\begin{aligned} 2y'' + 0 \cdot y' + 0 - 2y + 4 \sin x &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2y'' - 2y + 4 \sin x = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad y'' - y &= -2 \sin x \quad (*) \end{aligned}$$

Hosil bo'lgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = y^* + \bar{y} \quad (**)$$

xarakteristik tenglamasi esa

$$\begin{aligned} \text{a) } y'' - y &= 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1 \\ \bar{y} &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} \end{aligned}$$

bo'ladi.

b) Uning xususiy yechimini

$$y^* = A \sin x + B \cos x$$

ko'rinishda izlaymiz. U holda

$$y' = A \cos x - B \sin x, \quad y'' = -A \sin x - B \cos x$$

ga ega bo'lamiz. Topilgan xosilalarni (*) ga qo'ysak

$$-A \sin x - B \cos x - A \sin x - B \cos x = -2 \sin x$$

$$\begin{cases} -2 \sin x = -2 \\ -2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow y^* = \sin x$$

(**) ga ko'ra umumiy yechimni topamiz, ya'ni

$$y = y^* + \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \sin x.$$

Endi

$$f = 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi)$$

ga ko'ra

$$1) \frac{\partial f}{\partial y(0)} = 4y(0) = 4(C_1 + C_2 + 0) = 4C_1 + 4C_2$$

$$2) \frac{\partial f}{\partial y(\pi)} = 2 - 2y(\pi) = 2 - 2(C_1 e^\pi + C_2 e^{-\pi})$$

$$F_{y'} = 2y'|_{x=0} = 2(C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \cos x)|_{x=0} = 2(C_1 - C_2 + 1)$$

$$F_{y'} = 2y'|_{x=\pi} = 2(C_1 e^\pi - C_2 e^{-\pi} - 1)$$

$$\begin{cases} 2C_1 - 2C_2 + 2 - 4C_1 - 4C_1 = 0 \\ 2C_1 e^\pi - 2C_2 e^{-\pi} - 2 - 2 + 2C_1 e^\pi + 2C_2 e^{-\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2C_1 - 6C_2 = -2 \\ 4C_1 e^\pi = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = e^{-\pi} \\ C_2 = \frac{e^\pi - 1}{3e^\pi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = e^{x-\pi} + \frac{e^\pi - 1}{3e^\pi} e^{-x} + \sin x.$$

3-masala.

Quyidagi chegaralari o'zgaruvchi masalada funksionalning ekstremalini toping.

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$y(x_1) = x_1^2 + 1, \quad y(x_2) = x_2.$$

Yechimi:

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2} \quad \Rightarrow \quad F_x = F_y = 0$$

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$F_{y''} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}}}{1 + y'^2} = (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

topilganlarni Eyler tenglamasiga qo'ysak

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 x + C_2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Transversallik shartlariga ko'ra, ya'ni

$$\left[F + (\varphi'_1 - y') F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0$$

$$\left[F + (\varphi'_2 - y') F_{y'} \right]_{x=x_2} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{1 + C_1^2} + (2x_1 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{1 + C_1^2} + (1 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$1 + C_1^2 + C_1 - C_1^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = -1$$

$$\begin{cases} C_1 x_1 + C_2 = x_1^2 + 2 \\ C_2 x_2 + C_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt{2} - (2x_1 + 1) \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{11}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{11}{8}.$$

Demak $A(\frac{1}{2}; \frac{9}{4})$, $B(\frac{11}{4}; \frac{11}{8})$ bo'ladi. A va B nuqtalar

orasidagi masofa

$$\rho(A; B) = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{81 \cdot 4 + 49}{64}} = \frac{\sqrt{373}}{8}$$

ga teng bo'ladi.

XULOSA

Bitiruv malakaviy ish ilmiy xarakterda bo'lib, variatsion hisobning transversallik shartiga bag'ishlangan. Bunda ikkita egri chiziq orasidagi eng qanaqa masofa, ayrim funktsiyalar uchun topilgan.

Bitiruv malakaviy ish kirish, ikkita bob, beshta paragrafdan iborat bo'lib, ishning kirish qismida tadqiqotning dolzarbligi, maqsadi, vazifasi, ob'ekti, yangiligi va strukturasi bayon qilingan.

Birinchi bobda asosan, variatsion hisobning boshlang'ich tushunchalari: funktsional, funktsiyalarning yaqinligi darajasi, variatsion hisobning asosiy lemmasi, Eyler tenglamasi va transversiallik sharti kabi tushunchalar o'rganilgan. Ikkinchi bobda esa, to'g'ri chiziq va parabola, parabola va parabola orasidagi eng qisqa masofani topish formulalar keltirib chiqarilgan.

Bitiruv malakaviy ishni bajarish jarayoni quyidagi xulosalarga olib keldi:

- funtsional, funktsiyalarning yaqinlik darajasi, funktsiyalar orasidagi eng qisqa masofa kabi tushunchalar o'rganildi;
- variatsion hisobning asosiy lemmasi, Eyler tenglamasi isbotlandi;
- chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan funktsional ekstremalini topish o'rganildi;
- transversallik sharti tadqiq etildi;
- to'g'ri chiziq va parabola orasidagi eng qisqa masofa uchun formula keltirib chiqarildi;
- parabola va parabola orasidagi eng qisqa masofani topish uchun formula keltirib chiqarildi;

Ushbu bitiruv malakaviy ishdan matematika yo'nalishining yuqori kurs talabalari va magistrarlari foydalanishlari mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989 г.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983 г.
3. Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998 г.
4. Габасов Р., Кириллова М.Ф., Оптимал бошқарув. Т.: ўқитувчи 2001 й.
5. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: Справочное руководство. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1970 г.
6. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Кисилев А.И. Вариационное исчисление (задачи и упражнения). М.: Наука, 1973 г.
7. Сборник задач по математике для вузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: Учеб. Пособие / Под ред. А.В. Ефимова. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1990 г.
9. Ракин Л. В. Введение в вариационное исчисление. – СПб., Изд-во СПбГУ, 2000.
10. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. – М., Физматгиз, 1961. – 228 с.
11. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. – Л.–М., Гостехиздат, 1941.
12. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. – М., Высш. шк., 2005. – 335 с.
13. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. – Л., Энергия, 1977.
14. Алексеев В. М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., Физматлит, 2005. – 384 с.
15. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М., Наука, 1975.
16. www.budylin@mph.phys.spbu.ru