

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

“УМУМИЙ МАТЕМАТИКА” КАФЕДРАСИ

**ҚУРБОНОВА НАРГИЗАНИНГ
“ШТУРМ – ЛИУВИЛЛ МАСАЛАСИНИ ЦИЛИНДРИК ВА
СФЕРИК КООРДИНАТАЛАРДА ЕЧИШ”
МАВЗУСИДАГИ**

КУРС ИШИ

ГУЛИСТОН – 2012

Режа

Кириш

1. Эгри чизиқли ортогонал координаталар системаси
2. Хос қийматлар ҳақида масаланинг қўйилиши
3. Штурм – Лиувилл масаласи

Хулоса ва таклифлар

Фойдаланилган адабиётлар ва манбалар

I. Кириш

Барча физик жараёнларнинг математик модели у ёки бу кўринишдаги дифференциал тенглама бўлади. Бундай тенгламалар аксарият ҳолда хусусий ҳосилали иккинчи тартибли чизикли ёки квази чизикли бўлади.

Иккинчи тартибли чизикли тенгламанинг умумий кўриниши

$$AU_{xx} + 2BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = G \quad (0.1)$$

бўлиб, бунда $A = A(x, y), \dots, G = G(x, y)$ лар тенгламанинг коэффициентлари дейилади ва улар бирор D соҳада берилган узлуксиз функциялардир. Шунингдек A, B, C лар бош коэффициентлар, G ўнг томон деб аталади. Агар $G(x, y) = 0$ бўлса (0. 1) тенглама биржинсли, акс ҳолда биржинслимас дейилади. Маълумки иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг умумий ечими умуман олганда иккита ихтиёрий функцияга боғлиқ бўлади. Бу дегани умумий ечим чексиз кўп бўлишини англатади. Физик жараёнлар эса детерминланган яъни ягона ечимга эга бўладилар. Ягона ечимни олиш учун физик жараённинг чегарадаги қийматлари ва бошланғич ҳолатини ифодаловчи қўшимча шартларни қаноатлантирувчи ечим қидирилади.

Мазкур Курс иши Штурм – Лиувилл масаласини турли эгри чизикли ортогонал координаталарда ечишга бағишланган.

Курс иши Кириш, Асосий қисм, Хулоса ва таклифлар ҳамда фойдаланилган адабиётлар ва манбалар деб номланувчи 4 та қисмдан иборат

Асосий қисм иккита бобдан, ҳар бир боб эса учтадан параграфлардан иборат.

Биринчи боб турли ортогонал координаталар системаси билан тўғри бурчакли Декарт координаталари орасидаги боғланишни, асосий хоссаларини ифодаловчи формулаларни ўз ичига олган. Шу бобнинг 2, 3 – параграфлари хос сонлар (қийматлар) ҳақидаги умумий масала, хусусий ҳолда Штурм – Лиувилл масаласини цилиндрик ва сферик координаталарда ечишга бағишланган.

Курс ишида чегаравий масалаларни ечишнинг яна бир методи (усули) – Фурье усулини тор тебраниш тенгламасига қўйилган чегаравий масалани, Дирихле масаласини ечишда яна хос қийматлар ҳақидаги масалага дуч келишимизни таъкидлаб ўтилади.

Асосий қисм баёнидан сўнг ўн иккита пунктдан иборат хулоса ясалган. Ишнинг охирида фойдаланилган адабиётлар рўйхати келтирилган бўлиб унда ишга бевосита алоқадор бўлган ўттиздан ортиқ адабиёт ўрин олган.

Мавзунинг долзарблиги: Математик физиканинг аксарият чегаравий масалаларни ечиш ўзгарувчиларни алмаштириш ёки тўғри бурчакли декарт координаталар системасидан эгри чизикли координаталарга ўтишни тақоза қилади. Мазкур ишнинг мавзуси ҳам шу жиҳати билан долзарб ҳисобланади.

Тадқиқот мавзуси: Эгри чизикли ортогонал координаталар системаси чегаравий масалаларни анчагина содда кўринишга келтиришнинг имконини беради, шунинг учун ҳам бу ҳолат алоҳида тадқиқот ўтказишга лоикдир.

Тадқиқот муаммоси: Штурм – Лиувилл масаласининг хос қийматлари тўпламини аниқлаш ва хос функциялари бўйича ихтиёрий функцияни қаторга ёйиш авваллари кам ўрганилган яъни маълум маънода муаммо ҳисобланар эди.

Тадқиқот объекти: Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига чекли соҳада (стерженда) қўйилган ва Лоплас тенгламасига қўйилган (шарда ва доирада) Дирихле масаласини цилиндрик ва сферик координаталарда ечиш асосий объект сифатида олинган.

Тадқиқот предмети: Штурм – Лиувилл масаласига келишдан олдин ўзгарувчиларни ажратиш усули (Фурье усули) қўлланилган, бунинг учун доира ва шар бўлган ҳолда кутб координаталар ёки сферик координаталарда кенг фойдаланиш афзал деб ҳисобланган.

Тадқиқот фарази (гипотезаси): Эгри чизикли ортогонал координаталар системаси ҳақида батасил маълумот берилади. Шунингдек хос қийматлар ва хос функциялар ҳақида Стеклов теоремаси биринчи марта келтирилган ҳамда

Дирихле масаласини ечишда Фурье усулини қўллаб хос қийматлар ва хос функциялар системаси топилган.

Тадқиқот вазифалари: Математик анализ, аналитик геометрия, дифференциал тенгламалар, функционал анализ ва математик физика тенгламалари каби фанларни чуқур ўзлаштириш ва тадбиқ қила олиш лозим бўлади.

Тадқиқот янгилиги: Хос қийматлар ва хос функциялар ҳақидаги масала декарт координаталарда яшаш балки цилиндрик ва сферик ҳамда кутб координаталарда қаралиши тадқиқотнинг янгилигидан дарак беради.

Фан учун аҳамияти: Турли хил физик жараёнлар хоҳ улар стационар хоҳ ностационар бўлсинлар, уларни моделлаштириш ҳам ҳосил бўлган чегаравий масалани ечиш амалий аҳамият касб этишини таъкидлаш лозим.

Адабиётлар таҳлили: Дастлабки 10 та адабиёт президентимиз И.А.Каримов асарлари бўлиб, уларда баркамол авлод олдиға қўйилган вазифалар юрт, эл равнақи учун аҳамиятли масалалар ўз аксини топган. Кейинги 20 дан ортиқ адабиётлар асосан чегаравий масалалар, уларнинг ечимини қидириш, усуллар ишлаб чиқишга бағишлангандир.

1. Эгри чизикли ортогонал координаталар системаси.

Текисликда, фазода турли эгри чизиклар, сиртлар тенгламасини каноник кўринишда тасвирлаш кўп жиҳатдан координаталар системасини танлашга боғлиқ. Худди шундай математик физиканинг асосий тенгламаларига кўйиладиган чегаравий масалалар ечимини қидириш ҳам тўғри чизикли Декарт координаталар системасидан бирор эгри чизикли координаталар системасига ўтишни тақоза этади. Масалан чегаравий масаланинг аниқланиш (берилиш) соҳаси доира, шар, ярим текислик, ярим фазо бўлганда тўғри бурчакли Декарт координаталар системасидан қийшиқ бурчакли эгри чизикли ёки ортогонал эгри чизикли координаталар системасига ўтиш мақсадга мувофиқ бўлади.

Қуйидаги бир энг кўп учрайдиган ва амалий жиҳатдан самарали бўлган айрим ортогонал эгри чизикли координаталар системасини ҳамда уларнинг муҳим хоссаларини келтирамыз.

Фазодаги бирор нуқтанинг декарт координаталари x, y, z ва шу нуқтанинг эгри чизикли ортогонал координаталари x_1, x_2, x_3 бўлсин. Бу системада элемент узунлигининг квадрати қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

бу ерда $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}$, $i=1, 2, 3$ лар метрик коэффициентлар ёки

Памэ коэффициентлари. Ҳар қандай ортогонал координаталар системаси учта h_1, h_2, h_3 метрик коэффициентлар билан тўла аниқланади, характерланади.

Эгри чизикли ортогонал координаталар системасида $grad$, div , zot ва Лаплас оператори Δ учун умумий ифодаларни келтирамыз:

$$gradU = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_j} \vec{i}_j,$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right],$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{i}_1 & h_2 \vec{i}_2 & h_3 \vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right],$$

бу ерда $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ - бирлик базис векторлар,

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ - ихтиёрый вектор, U - скаляр, $A_s = A_s(x_1, x_2, x_3)$, $s = 1, 2, 3$,

$U = U(x_1, x_2, x_3)$.

1. Тўғрибурчакли координаталар.

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}, \quad \Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz},$$

бу ерда $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - лар x, y, z ўқларнинг йўналтирувчи бирлик векторлари.

2. Цилиндрик координаталар

$x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z$ лар тўғрибурчакли координаталар билан

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

тенгламалар орқали боғланган.

Координата сиртлари: $r = \text{const}$ - цилиндрлар, $\varphi = \text{const}$ - текисликлар,

$z = \text{const}$ - текисликлар.

Метрик коэффициентлар:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1; \quad \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial z} \vec{i}_1 + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} \vec{i}_2 + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{i}_3,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}, \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial r} \right) \vec{i}_2 + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r A_2) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_3, \\ \Delta U &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

3. Сферик координаталар.

$x_1 = r$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \varphi$ лар тўғри бурчакли координаталар билан

$$x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

тенгламалар орқали боғланган.

Координат сиртлари: $r = \text{const}$ - концентрик сфералар, $\varphi = \text{const}$ - текисликлар, $\theta = \text{const}$ - конуслар.

Метрик коэффициентлар $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r \sin \theta$ бўлгани учун

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} U &= \frac{\partial U}{\partial z} \vec{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{i}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \vec{i}_3, \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_1) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_2) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_1 + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_3) \right] \vec{i}_2 + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right] \vec{i}_3. \\ \Delta U &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial^2} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

4. Эллиптик координаталар.

$x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = z$ координаталар қуйидаги формулалар ёрдамида алмаштирилади:

$$x = c \mu, \quad y = c \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z_3,$$

бу ерда c - масштаб кўпайтувчи.

Метрик коэффициентлар

$$h_1 = c \cdot \sqrt{\frac{x^2 - \mu^2}{x^2 - 1}}, \quad h_2 = c \cdot \sqrt{\frac{x^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = 1 \text{ га тенг.}$$

Координат сиртлари: $\lambda = \text{const}$ - фокуслари $x = \pm c$, $y = 0$ нукталарда бўлган эллиптик кесимли цилиндрлар; $\mu = \text{const}$ - конфокал гиперболик цилиндрлар оиласи, $z = \text{const}$ - текисликлар.

5. Параболик координаталар.

Агар r, θ -лар текисликдаги кутб координаталари бўлса у ҳолда параболик координаталар қуйидаги формулалар ёрдамида киритиш мумкин.

$$x_1 = \lambda = \sqrt{2r} \sin \frac{\theta}{2}, \quad x_2 = \mu = \sqrt{2r} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \lambda = z.$$

$\lambda = \text{const}$ ва $\mu = \text{const}$ - координат сиртлари эса ясовчилари z ўқиға паралел бўлган ўзаро кесишувчи параболик цилиндрларни ифодалайди

$$x = \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^2), \quad y = \lambda \cdot \mu, \quad z = z$$

формулар эса декарт координаталар билан боғланишни ифодалайди.

Метрик коэффицентлар:

$$h_1 = h_2 = \sqrt{x^2 + \mu^2}, \quad h_3 = 1.$$

6. Эллипсоидал координаталар

$a > b > c$ бўлган ҳолда бу координаталар қуйидаги формулалар ёрдамида киритилади:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad (\lambda > -c^2) \quad (\text{Эллипсоид тенгламаси}),$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1 \quad (-c^2 > \mu > -b^2) \quad (\text{бир паллали гиперболид}$$

тенгламаси)

$$\frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} = 1 \quad (-b^2 > \nu > -c^2) \quad (\text{Икки паллали гиперболоид}$$

тенгламаси).

Ҳар бир (x, y, z) нуктаға λ, μ, ν ларнинг фақат битта қийматлари системаси мос келади.

Декарт координаталари x, y, z лар λ, μ, ν лар орқали ошкор ҳолда

$$x = \pm \sqrt{\frac{(\lambda + a^2)(\mu + a^2)(\nu + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(\lambda + b^2)(\mu + b^2)(\nu + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)}},$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{(\lambda + c^2)(\mu + c^2)(\nu + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}.$$

формулалар ёрдамида ифодаланади.

Ламэ коэффициентлари

$$h_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{R^2(\lambda)}},$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu - \nu)(\nu - \lambda)}{R^2(\mu)}},$$

$$h_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}{R^2(\nu)}}.$$

бўлиб, бу ерда

$$R(s) = \sqrt{(s + a^2)(s + b^2)(s + c^2)} \quad (s = \lambda, \mu, \nu).$$

Лоплас операторини қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$\Delta U = \frac{4}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(\mu - \nu)} \left[(\mu - \nu)R(\nu) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(R(\lambda) \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + (\nu - \lambda)R(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \left(R(\mu) \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) + (\lambda - \mu)R(\nu) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(R(\nu) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right]$$

Лоплас тенгламасининг фақат λ дан боғлиқ $U = U(\lambda)$ хусусий ечими

$$U = A \int \frac{d\lambda}{R(\lambda)} + B$$

формула билан топилади. Бу ерда A ва B - ўзгармас сонлар.

7. Махсусликка эга эллипсоидал координаталар.

а) Чўзилган айланишдан ҳосил бўлган эллипс учун тузилган (α, β, φ) махсусликка эга эллипсоидал координаталар қуйидаги $x = c \sin \beta \cos \varphi$, $y = c \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi$, $z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta$ формулалар ёрдамида аниқланади, бу ерда c - масштаб кўпайтувчиси, $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Координат сиртлари:

$\alpha = const$ - айланишдан ҳосил бўлган чўзинчоқ эллипсоид; $\beta = const$ - айланишдан ҳосил бўлган икки паллали гиперболоидлар; $\varphi = const$ - текисликлар.

Чизикли операторнинг квадрати эса

$$ds^2 = c^2 (sh^2 \alpha + \sin^2 \beta) (d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2 sh^2 \alpha \sin^2 \beta d\varphi^2,$$

бу ердан метрик коэффицентлар учун

$$h_1 = h_2 = c \sqrt{sh^2 \alpha + \sin^2 \beta}, \quad h_3 = h_4 = c sh \alpha \cdot \sin \beta,$$

қийматлар олинади.

Лоплас тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\Delta U = \frac{1}{c^2 (sh^2 \alpha + \sin^2 \beta)} \left[\frac{1}{sh \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(sh \alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial U}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{sh^2} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

б) Айланишдан ҳосил бўлган шишинқириган эллипсоид учун махсусликка эга (α, β, φ) эллипсоидал координаталар системаси

$$x = c ch \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = c ch \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = c sh \alpha \cos \varphi$$

$$(0 \leq \alpha < \infty, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi)$$

тенгликлар ёрдамида аниқланади.

Координат сиртлари: $\alpha = const$ - айланишдан ҳосил бўлган шишинқираган эллипсоидлар; $\beta = const$ - айланишдан ҳосил бўлган бир паллали гиперболоидлар; $\varphi = const$ - z ўқидан ўтадиган текисликлар.

8. Тороидал координаталар

Тороидал координаталар системаси (α, β, φ) қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$x = \frac{c sh \alpha \cos \varphi}{ch \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{c sh \alpha \sin \varphi}{ch \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{c \sin \beta}{ch \alpha - \cos \beta}.$$

бу ерда c - масштаб кўпайтувчиси, $0 \leq \alpha < \infty, \quad -\pi < \beta \leq \pi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi$.

Координат сиртлари: $\alpha = const$ - торлар:

$$(\rho - c \operatorname{ctg} \alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{sh \alpha} \right)^2 \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

$\beta = const$ - сфералар:

$$(z - c \operatorname{ctg} \beta)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{\sin \beta} \right)^2,$$

Тороидал координаталар системасида чизили элементнинг квадрати куйидагича кўринишда

$$ds^2 = \frac{c^2}{(ch\alpha - \cos \beta)^2} [d\alpha^2 + d\beta^2 + sh^2 \alpha d\varphi^2]$$

бўлади, метрик коэффициентлар эса

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{ch\alpha - \cos \beta}, \quad h_\varphi = \frac{csh\alpha}{ch\alpha - \cos \beta}$$

га тенг.

Лоплас оператори куйидагича ифодаланади

$$\Delta U = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{sh\alpha}{ch\alpha - \cos \beta} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{sh\alpha}{ch\alpha - \cos \beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{(ch\alpha - \cos \beta)sh\alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

U функция ўрнига янги V функцияни куйидагича киритилса анча қулайлик туғдиради

$$U = \sqrt{2ch\alpha - 2\cos \beta} \cdot V$$

бунда $\Delta U = 0$ тенглама

$$V_{\alpha\alpha} + V_{\beta\beta} + V_\alpha \operatorname{cth} \alpha + \frac{1}{4} V + \frac{1}{sh^2 \alpha} V_{\varphi\varphi} = 0$$

кўринишни олади.

9. Биполяр координаталар.

а) Текисликдаги биполяр координаталар.

Агар $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = z$ ўзгарувчилар куйидаги формулалар ёрдамида топилса уларни биполяр координаталар деб атаймиз:

$$x = \frac{ash\alpha}{ch\alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{ch\alpha - \cos \beta}, \quad z = z.$$

Метрик коэффициентлар

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{ch\alpha - \cos \beta}, \quad h_3 = 1 \text{ га тенг.}$$

б) Биосферик координаталар $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \varphi$ лар қйидаги формулалар ёрдамида аниқланади

$$x = \frac{c \sin \alpha \cdot \cos \varphi}{ch\beta - \cos \alpha}, \quad y = \frac{c \sin \alpha \cdot \sin \varphi}{ch\beta - \cos \alpha}, \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \beta}{ch\beta - \cos \alpha},$$

бу ерда c - ўзгармас кўпайтувчи, $0 \leq \alpha < \beta$, $-\infty < \beta < \infty$, $-\pi < \varphi < \pi$.

Бу формулаларни компакт кўринишда қйидагича ёзиш мумкин

$$z + i\rho = c \operatorname{ctg} \frac{\alpha + i\rho}{2} \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Тенглама билан ифодаланади, $\beta = \operatorname{const}$ - сфералар

$$\rho^2 + (z - c \operatorname{ctg} \beta)^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \beta} \right)^2, \quad \rho = \operatorname{const} - \text{текисликлар.} \quad \text{Фазовий биполяр}$$

координаталар системасида чизиқли элементнинг квадрати қйидагича бўлади:

$$ds^2 = \frac{c^2}{(ch\beta - \cos \alpha)^2} [d\alpha^2 + d\beta^2 + \sin^2 \alpha d\varphi^2],$$

Бу ердан

$$h_1 = h_2 = \frac{c}{ch\beta - \cos \alpha}, \quad h_3 = \frac{c \cdot \sin \alpha}{ch\beta - \cos \alpha}$$

ва Лоплас тенгламаси қйидагича кўринишни олади

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{ch\beta - \cos \alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\sin \alpha}{ch\beta - \cos \alpha} \frac{\partial U}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin \alpha (ch\beta - \cos \alpha)} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Лоплас тенгламасини ечишда $U = \sqrt{2ch\beta - 2\cos \alpha} V$ алматирш қилингани маъқул. Шунда V функцияни аниқлаш учун ушбу

$$V_{\alpha\alpha} + V_{\beta\beta} + V_{\alpha} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{4} V + \frac{1}{\sin^2 \alpha} V_{\varphi\varphi} = 0$$

тенгламага келинади.

10. Сфероидал координаталар.

а) Ботик сфероидал координаталар

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi, \quad x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \cos \varphi, \quad z = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \sin \varphi,$$

$$\lambda \geq 1, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, h_3 = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}$$

б) қаварик сфероидал координаталар

$$x_1 = \lambda, x_2 = \mu, x_3 = \varphi, x = c\lambda\mu \sin \varphi, y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, z = c\lambda\mu \cos \varphi,$$

$\lambda = const$ - қаварик сфераидлар, $\mu = const$ - бир паллали гиперболоидлар.

Метрик коэффициентлар

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, h_3 = c\lambda\mu .$$

2. Хос қийматлар ҳақида масаланинг қўйилиши.

1. Ўз-ўзига қўшма талаблар. Агар иккинчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламани

$$\frac{d}{dx}[k(x) \cdot y'] - q(x)y = 0 \quad (1.2.1)$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда бу тенглама ўз-ўзига қўшма кўринишга келтирилган дейилади, бу ерда $k(x)$ ва $q(x)$ лар (a, b) да берилган улуксиз функциялар, бундан ташқари $k(x)$ функция бутун (a, b) да ҳосилага эга.

Ҳар қандай иккинчи тартибли чизикли бир жинсли дифференциал

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (1.2.2)$$

тенгламани ўз-ўзига қўшма, яъни (1.2.1) кўринишга келтириш мумкин, бу ерда a_0, a_1, a_2 лар (a, b) интервалда x нинг функцияси бўлиб, a_0 коэффициент (a, b) интервалнинг барча x нуқталарида нолдан фарқли.

(1.2.2) ни ўз-ўзига қўшма кўринишга келтириш учун уни $\mu(x) = \frac{1}{a_0} e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$

функцияга кўпайтириш кифоя.

2. Ўз-ўзига қўшма операторнинг хоссалари.

1) Фараз қилайлик $x \rightarrow a+0$ да $k(x) \rightarrow 0$ бўлсин, $k(x) = (x-a)\pi(x)$, $\pi(a) \neq 0$ ҳам бўлсин. У ҳолда (1.2.1) тенгламанинг ечимларидан бирини

2) $y_1 = (x-a)^n z(x)$, $z(x) \neq 0$, $n \geq 0$ кўринишда тасвирлаш мумкин, бошқа бир ечими, аниқроғи y_1 билан чизикли боғланмагани $x \rightarrow a+0$ да $+\infty$ ди. Шунда $x \rightarrow a+0$ да чекли бўладиган ҳар қандай $y(x)$ ечим учун

$$\lim_{x \rightarrow a+0} k(x) y'(x) = 0$$

бўлади.

3. Штурм – Лиувилл масаласи.

$$(ky')' - qy + \lambda \rho y = 0 \quad (1.2.3)$$

тенгламанинг коэффициентлари (a, b) да узлуксиз, бундан ташқари $k(x)$ функция (a, b) да узлуксиз ҳосилага эга, $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$

шартларни бажарса (λ - ўзгармас сон), (1.2.3)ни Штурм – Луивилл тенгламаси деймиз.

Фараз қилайлик (1.2.3) тенгламанинг ечими бўлган $y(x)$ функция (a, b) интервалнинг чап четида ($x=a$ да) қуйидаги 3 та шартлардан бирини қаноатлантирсин:

- 1) 1-тур чегаравий шарт: $y(a) = 0$;
- 2) 2-тур чегаравий шарт: $y'(a) = 0$;
- 3) 3-тур чегаравий шарт: $y'(a) + H \cdot y(a) = 0$ ($H > 0$);
- 4) 4-тур чегаравий шарт: $x \rightarrow a+0$ да $y(x)$ чегараланган; бу ҳолда $y(x)$ ечимнинг $(a, a+\delta)$ да чегараланган бўлиши назарда тутилади.

Бу ҳолда ечим $x=a$ нуқтада 1, 2, 3, 4 чегаравий шартлардан бирини қаноатлантиради деймиз. Чегаравий шартлардан дастлабки 3 та тури фақат $k(x), k'(x), q(x), p(x)$ функцияларнинг (a, b) интервалдагина узлуксиз бўлмасдан a нуқтанинг ўзида ҳам узлуксиз бўлгандагина маъно касб этади, шунингдек $k(a) \neq 0$

Чегаравий шартлардан 4) фақат $x \rightarrow a+0$ да $k(x) \rightarrow 0$ бўлган ҳолдагина қўйилади. Шунингдек $k(x) = (x-a)\pi(x)$, $\pi(a) > 0$, $q(x)$ функция эса $x \rightarrow a+0$ да ё чегараланган ёки $+\infty$ бўлиши керак. Худди юқоридагига ўхшаш (a, b) интервалнинг ўнг чегараси $x=b$ да ҳам 4 та чегаравий шартларни $k(x), k'(x), q(x), p(x)$ лар $x=b$ да мос талабларни бажарганда қўйилади.

- 1) 1-тур чегаравий шарт: $y(b) = 0$;
- 2) 2-тур чегаравий шарт: $y'(b) = 0$;
- 3) 3-тур чегаравий шарт: $y'(b) + H \cdot y(b) \neq 0$ ($H > 0$);
- 4) 4-тур чегаравий шарт: $x \rightarrow b-0$ да $y(x)$ ечим чегараланган бўлсин; бу шартнинг ечим функцининг $(b-\delta, b)$ интервалда чегараланган бўлиши тақоза қилади.

Табиийки бу ҳолда ўнг чегара $x=b$ даги шартлар чап чегара $x=a$ дагидек бўлиши шарт эмас.

Фараз қилайлик (1.2.3) тенглама ва $x=a$ ва $x=b$ нукталарда 1)- 4)- чегаравий шартлардан бири бажарилсин. Бу тенгламани ва 1)- 4)- чегаравий шартларни $U(x) \equiv 0$ (айнан нолга тенг бўлган функция) хар доим қаноатлантиради (“Тривиал ечим”).

λ параметрнинг (3) тенглама ва унга қўйилган чегаравий шартни қаноатлантирувчи нотривиал ечим мавжуд бўладиган қийматларини берилган (қаралаётган) чегаравий масаланинг хос қийматлари (хос сонлар) дейилади, a бу нотривиал ечимни эса хос ечимлари (хос функциялар)и дейилади.

Штурм – Лиувилл тенгламасининг 1), 2), 3), 4) шартларни қаноатлантирувчи барча хос сонларни ва барча хос функцияларни топиш масаласи Штурм – Лиувилл масаласи дейилади.

Штурм – Лиувилл масаласи хос сонлари ва хос функциялари ҳақида асосий теоремани келтирамиз:

Теорема. Фараз қилайлик

$$(ky')' - qy + \lambda py = 0$$

тенглама ва 1, 2, 3, 4- чегаравий шартлардан бири берилган бўлсин. Шунингдек $k(x)$, $k'(x)$, $q(x)$ ва $p(x)$ функциялар (a, b) да узлуксиз ҳамда $p(x)$ функция (a, b) да чегараланган, $p(x) > 0$, $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ бўлсин. Бндан ташқари бу функциялар (a, b) интервалнинг чегараларида қўшимча талабни ҳам бажарсинлар.

Бу ҳолда қўйилган чегаравий масаланинг хос сонлари ва хос функциялари қуйидаги хоссаларга эга бўлади:

- 1) Хос сонлар чексиз кўп; барча хос сонларни натурал сонлар билан номерлаб чиқиш ва уларни $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ ўсиш тартибида жойлаштириш мумкин;

- 2) Барча хос сонлар манфий эмас;
- 3) Ҳар бир λ_k хос сонга ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида битта $\varphi_k(x)$ хос функция мос келади;
- 4) Ҳар бир хос функцияга биттагина хос қиймат мос келади;
- 5) Турли k ва m номерларга мос келувчи хос функциялар $p(x)$ вазн билан ўзаро ортогоналдир, яъни

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_m(x) p(x) dx = 0 \quad (k \neq m)$$

бўлади.

Энди энг муҳим бўлган конкрет Штурм – Лиувилл масалаларини қараймиз.

1. $y'' + \lambda y = 0$ тенгламанинг $(0, b)$ интервалдаги $y(0) = 0$, $y(b) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи нотривиал ечимлари топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^2 + \lambda = 0$ $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ илдизларга эга бўлгани учун, унинг умумий ечими $y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ ва $y(l) = 0$, $y(0) = 0$, $c_1 = 0$ шартлардан: $y(l) = c_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0$, $c_2 \neq 0$ деб олсак $\sqrt{\lambda}l = k\pi$ ёки $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ бўлади. Шундай илиб хос сонлар $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$

ва уларга мос функциялар эса $\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x$, $k = 0, 1, 2, \dots$ бўлади. Бу барча хос функциялар $(0, b)$ да $p(x) \equiv 1$ вазн билан ўзаро ортогонал бўлиши табиий.

2. $y'' + \lambda y = 0$ тригонометрик тенгламанинг $(0, b)$ интервалдаги $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хос сонлари ва хос фнкцилари топилсин.

Олдинги 1-масаладагидек характеристик тенгламанинг илдизлари $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ бўлгани учун, унинг умумий ечими $y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ бўлади. У ҳолда $y'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x$

$$y'(0) = 0 \text{ шартдан } y'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \cdot 0 + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \cdot 0 = 0$$

$$\text{ёки } c_2 = 0, y'(l) \text{ шартдан эса } -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \cdot l = 0 \text{ ёки } \sqrt{\lambda}l = k\pi, \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}, \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ $\lambda_0 = 0$ хос сонга $\varphi_0 \equiv 0$ хос функци мос келади. $\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} (k > 0)$ - хос

сонларга эса $\varphi_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{l}$ хос функциялар мос келади. Бу барча хос

функциялар $(0, b)$ интервалда $p(x) \equiv 1$ вазн билан ўзаро ортогонал бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx &= \int \cos \frac{k\pi}{l} x \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos \frac{(k-m)\pi}{l} x + \cos \frac{(k+m)\pi}{l} x \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{l}{(k-m)\pi} \sin \frac{(k-m)\pi}{l} x \Big|_0^l + \frac{1}{2} \frac{l}{(k+m)\pi} \sin \frac{(k+m)\pi}{l} x \Big|_0^l = 0 \text{ агар } k \neq m \text{ бўлса.} \end{aligned}$$

3. $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ тригонометрик тенгламанинг $(-l, l)$ интервалдаги $y(l) = y(-l)$, $y'(l) = y'(-l)$ шартларни қаноатлантирувчи нотривиал ечимлари топилсин.

Аввало берилган тенгламанинг умумий ечими $y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ ифодадан ҳосила олиб, сўнгра $y'(l) = y'(-l)$ ва $y(l) = y(-l)$ шартлардан фойдаланамиз:

$y(l) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}l + c_2 \sin \sqrt{\lambda}l$, $y(-l) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}(-l) - c_2 \sin \sqrt{\lambda}l$ бўлгани учун $c_2 = 1$ ни $c_1 = p$ га тенглаб олсак бўлади. $\bar{y}(x) = \cos \sqrt{\lambda}x$.

$$y'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x.$$

$$y'(l) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}l + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l.$$

$$y'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \quad \bar{y}(x) = \sin \sqrt{\lambda}x.$$

$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ хос сонлар бўлади. $\lambda_0 = 0$ хос сонга $y_0 \equiv 1$ хос функция

мос келади. Ҳар бир $\lambda_k (\lambda_k > 0)$ хос сонга иккита

$$\bar{y}_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{l} \text{ ва } \bar{\bar{y}}_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$$

хос функциялар мос келади. Кўриниб турибдики бу ҳолда юқоридаги теорема ўринли эмас, бу ҳолат чегаравий шартнинг 1), 2), 3), 4) лардан бошқача эканлиги билан тушунтирилади.

Барча $y_0(x)$, $\bar{y}_1(x)$, $\bar{\bar{y}}_1(x)$, $\bar{y}_2(x)$, $\bar{\bar{y}}_2(x)$, ... хос функциялар бир-бири билан ўзаро ортогонал бўлиши $(-l, l)$ да осонгина исботланади.

4. p - тартибли Бессел тенгламасининг ($p \geq 0$ бутун сон), яъни

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - p^2)y = 0 \quad (\text{ёки ўз-ўзига кўшма кўринишда } (xy')' - \frac{p^2}{x}y + \lambda xy = 0)$$

$(0, l)$ даги $y(l) = 0$; $x \rightarrow 0+0$ да $y(x)$ чегараланган нотривиал ечими топилсин.

Бу масалани Бессел тенгламасининг конкрет чегаравий шартдаги хос сонлари ва хос функцияларини топишдан иборатлигини кўриш қийин эмас.

Бу масаланинг хос сонлари: $\lambda_k = \frac{\mu_k^2}{l^2}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ бўлади; ҳар бир λ_k хос

сонга ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида битта $y_k = J_p\left(\frac{\mu_k x}{l}\right)$ хос функция мос

келади. Бу ерда J_p – p тартибли Бессел функцияси, μ_k эса унинг мусбат илдизлари.

Бессел функцияси $x \rightarrow +0$ да чегараланган бўлиб

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

тенгламанинг $y^{(p)}(0) = \frac{1}{2p}$ шартни қаноатлантирувчи ечимидир.

Бессел функцияси (p - тартибли) юқоридаги тенгламалар билан бир қийматли аниқланиб, қуйидаги қатор йиғиндисига тенг бўлади;

$$J_p(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{p!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2!(p+2)!} - \dots + (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}}{k!(p+k)!} + \dots$$

Бессел функцияси $J_p(x)$ бутун сон ўқида аниқланган, ихтиёрий тартибли ҳосилага эга; бу функция мусбат ярим ўқда чексиз кўп илдизларга эга. Бу илдизларни ўсиш тартибида $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots$ номерлаб жойлаштириш мумкин.

Бессел функциялари учун қуйидаги ҳосила олиш (дифференциаллаш) қондасини ўрнатиш мумкин:

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x), \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x), \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Хусусан

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x);$$

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x \cdot J_0(x).$$

Юқорида келтирилган теоремага асосланиб қаралаётган Штурм – Лиувил масаласининг барча хос функциялари, яъни барча

$$y_1(x) = J_p\left(\frac{\mu_1 x}{l}\right); \quad y_2(x) = J_p\left(\frac{\mu_2 x}{l}\right); \quad \dots; \quad y_k(x) = J_p\left(\frac{\mu_k x}{l}\right); \quad \dots$$

функциялар $p(x) = x$ вазн билан ўзаро ортогонал бўладилар $((0, l)$ интервалда).

Ҳақиқатдан ҳам:

$$\int_0^l J_p\left(\frac{\mu_k x}{l}\right) \cdot J_p\left(\frac{\mu_i x}{l}\right) dx = 0, \quad i \neq k \text{ бўлганди.}$$

Бундан ташқари

$$\int_0^l \left[J_p\left(\frac{\mu_k x}{l}\right) \right]^2 x dx = \frac{l^2}{2} \left[J_p\left(\frac{\mu_k x}{l}\right) \right]^2;$$

бу ерда k - ихтиёрий мусбат сон, μ_k эса k - ичи $J_p(x)$ нинг мусбат илдизи.

5. Лежандрнинг нулинчи тартибли тенгламаси

$$y''(1-x^2) - 2xy' + \lambda y = 0$$

(ёки ўз-ўзига қўшма кўринишда $\left[(y'(1-x^2))' \right] + \lambda y = 0$) нинг $(-1, 1)$ интервалнинг иккала четида, яъни $x \rightarrow -1+0$ ва $x \rightarrow 1-0$ бўлганда $y(x)$ ечим чегараланган бўлсин. Бу тенглама $\lambda_m = m(m+1)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) хос сонларга эга. Ҳар бир λ_m хос сонга, ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида битта $y_m(x) = p_m(x)$ хос функция мос келади, бу ерда $p_m(x)$ - Лежандр кўпҳади (m - даражали). Бу кўпҳад

$$y''(1-x^2) - 2xy' + m(m+1)y = 0$$

тенгламанинг $(-1, 1)$ интервалдаги чегараланган ечими сифатида топилади ва $y(1)=1$ қўшимча шартга бўйсиндирилади. Лежандр кўпҳади шу шартлар билан бир ийматли аниқланади ва қуйидаги кўринишда бўлади:

$$p_m(x) = \frac{1}{m!2^m} \cdot \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m,$$

хусусан

$$p_0(x) \equiv 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad p_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}, \dots$$

Хос сонлар ва хос функциялар ҳақидаги умумий теоремага кўра иккита m - тартибли турли Лежандр кўпҳади $p(x)=1$ вазн билан ўзаро ортогонал бўлади. $(-1, 1)$ интервалда:

$$\int_{-1}^1 p_l(x) p_k(x) dx = 0, \quad l \neq k.$$

Бундан ташқари ҳар қандай бутун m сон учун

$$\int_{-1}^1 [p_m(x)]^2 dx = \frac{2}{2m+1}$$

тенглик ўринли бўлади.

6. Лежандрнинг n - тартибли тенгламаси

$$y''(1-x^2) - 2xy' + y \left(\lambda - \frac{n^2}{1-x^2} \right) = 0$$

ёки ўз-ўзига қўшма кўринишдаги

$$\left[y'(1-x^2) \right]' - \frac{n^2}{1-x^2} y + \lambda y = 0 \quad (n > 0, \text{ бутун})$$

тенгламанинг $x \rightarrow -1+0$ да ва $x \rightarrow 1-0$ чегараланган $y(x)$ нотривиал ечимини топиш $((-1, 1)$ интервалда) масаласи қаралади. Бу масаланинг хос сонлари $\lambda_m = m(m+1)$, бу ерда $m = n, n+1, n+2, \dots$

Ҳар бир λ_m хос сонга (ўзгармас кўпайтувчига аниқликда) ягона хос функция

$$y_m(x) = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \cdot [p_m(x)]^{(n)},$$

(бу ерда $p_m(x)$ – m – тартибли Лежандр кўпҳади) мос келади. Бу функцияни Лежандрнинг тиркалган функцияси деб аталиб, уни қуйидагича белгилашади: $p_m^n(x)$.

Хусусан, $n=1$:

$$p_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}; \quad p_2^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x; \quad p_3^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}\right) \text{ ва Ҳакоза.}$$

Тайинланган n учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\int_{-1}^1 p_l^n(x) \cdot p_k^n(x) dx = 0 \quad (l \neq k, l \geq n, k \geq n),$$

$$\int_{-1}^1 [p_1^n(x)]^2 dx = \frac{2(m+n)}{(2m+1)(m-n)!} \quad (k \geq n).$$

7. Лежандрнинг тенгламасига олиб келинадиган тенглама

$$T''_{\theta\theta} + T'_{\theta} \operatorname{ctg} \theta + \left(\lambda - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) T = 0 \quad (n \geq 0 \text{ бутун})$$

$T(\theta)$ $\theta \rightarrow +0$ да ва $\theta \rightarrow \pi-0$ да чегараланган.

Бу тенглама фақат $\lambda = m(m+1)$ (бу ерда m – бутун ва $m \geq n$) хос сонга мос бўлган хос функцияларга – нотривиал ечишга эга бўлади ва у $\lambda_m = m(m+1)$ сонга мос келган функция

$$T_m(x) = p_m^n(\cos \theta)$$

кўринишда бўлади. Бу ерда p_m^n – Лежандрнинг тиркалган функцияси (ёки $n=0$ бўлгандаги Лежандр кўпҳадидир).

$p_m^n(\cos \theta)$ (тайин n бўлганда) функциялар бир-бирига $(0, \pi)$ интервалда $\sin \theta$ вазн билан ортогоналдир:

$$\int_0^{\pi} p_l^n(\cos \theta) p_k^n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (i \neq k, l > n, k \geq n)$$

Бундан ташқари, қуйидаги тенгликлар ўринли

$$\int_0^{\pi} [p_m^n(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = \frac{2(m+n)!}{(2m+1)(m-n)} \quad (m \geq n).$$

Хусусан, $n=0$ бўлганда $T''_{\theta\theta} + T'_{\theta} \cot \theta + \lambda T = 0$ тенглама $\theta \rightarrow \pi+0$ бўлганда ва $\theta \rightarrow \pi-0$ да $T(\theta)$ - чегараланган чегаравий шартларда $\lambda_m = m(m+1)$ ($m \geq 0$, бутун) хос сонларга ва уларга мос бўлган $T_m(\theta) = p_m(\cos \theta)$, p_m - Лежандрнинг m - даражали кўпҳади, хос функцияларга эга. $P_n(\cos \theta)$ $(0, \pi)$ интервалда $\sin \theta$ га тенг вазн билан ўзаро ортогонал бўлади:

$$\int_0^{\pi} p_l(\cos \theta) p_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (i \neq k);$$

$$\int_0^{\pi} [p_m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = \frac{2}{(2m+1)} \quad (m \geq 0).$$

3. Штурм – Лиувилл масаласи.

Фурье ёки ўзгарувчиларни ажратиш усули хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишда кенг қўлланиладиган усулларида биридир. Бу усулнинг моҳиятини тор тебраниши тенгламаси учун бир қатор мисолларда текшириб кўрамиз.

1. Аралаш масалани чегараланган тор тебраниши тенгламаси учун ечиш.
Ушбу

$$\rho(x)U_{tt} = [p(x)U_x]_x - q(x)U, \quad 0 < x < b, \quad t > 0 \quad (1.3.1)$$

тенгламанинг $p = \{p(x, t); \quad 0 \leq x \leq b, \quad t \geq 0\}$ да аниқланган, узлуксиз ва

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad U_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.3.2)$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$\left. \begin{aligned} \alpha U(0, t) + \beta U_x(0, t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ \gamma U(l, t) + \delta U_x(l, t) &= 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.3)$$

Чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $U(x, t)$ ечими топилсин.

Бу ерда $\rho(x), p(x), q(x), \varphi(x), \psi(x)$ - берилган функциялар $l, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ - берилган сонлар бўлиб,
 $\rho(x) > 0, p(x) > 0, q(x) \geq 0, l > 0, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0, \rho(x) \equiv 1, p(x) \equiv a^2, \quad q(x) \equiv 0$
бўлганда (1.3.1) дан тор тебраниши тенгламаси, $\beta = \delta = 0, \alpha = \gamma = 0, \alpha\beta\gamma\delta \neq 0$
бўлганда (1.3.3) дан мос равишда I, II, III чегаравий шартлар келиб чиқади [1], [2].

Юқорида қўйилган (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) шартлар билан масалани аралаш масала деймиз.

Бу масалани Фурьенинг ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечиш мумкин.

Бу усулни асосан (1.3.1) тенгламанинг (1.3.3) шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими

$$U(x, t) = X(x)T(t) \quad (1.3.4)$$

кўринишда қидирилади. (1.3.4) ни (1.3.1) га қўйиш натижасида $T(t)$ ва $X(x)$ функцияларга нисбатан

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \quad (1.3.5)$$

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda p(x) - q(x)]X(x) = 0 \quad (1.3.6)$$

кўринишдаги оддий дифференциал тенгламаларга эга бўламиз, бу ерда λ - номаълум ўзгармас параметр.

(1.3.4) ни (1.3.3) га қўйиб, $T(t) \neq 0$ эканлигини эътиборга олсак, $X(x)$ функция

$$\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0, \quad \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0 \quad (1.3.7)$$

шартларни қаноатлантириши зарурлиги келиб чиқади.

Натижада $X(x)$ функцияга нисбатан қуйидаги масалага эга бўламиз: λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, бу қийматларда (1.3.6) тенгламанинг (1.3.7) шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимлари мавжуд бўлсин.

Одатда бу масалани Штрум – Лиувилл масаласи деб аталиб, λ нинг топиладиган қийматлари хос (махсус) қийматлар (сонлар), унга мос тривиал бўлмаган ечимлар эса хос (махсус) функциялар дейилади. Барча хос қийматлар тўплами масаланинг спектори дейилади.

(1.3.6), (1.3.7) масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари қуйидаги хоссаларга эга:

- 1) Масала хос қийматларнинг $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ чексиз тўплами мавжуд.
- 2) Ҳар бир хос қийматга ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида $X_k(x)$ хос функция мос келади. Ўзгармас кўпайтувчини шундай танлаш мумкинки,

$$\int_0^l p(x) X_k^2(x) dx = 1, \quad k \in N$$

тенглик ўринли бўлади, яъни хос функциялар $[0, l]$ кесмада $p(x)$ вазн билан нормаллашган дейилади.

- 3) Турли хос қийматларга мос келадиган хос функциялар $[0, l]$ кесмада $p(x)$ вазн билан ортогонал бўлади, яъни

$$\int_0^l p(x) X_k(x) X_m(x) dx = 0, \quad k \neq m$$

4) $q(x) \geq 0$ ва $[p(x)X_n(x)X'_n(x)]_{x=0}^{x=l} < 0$ бўлганда барча хос қийматлар мусбат бўлади, яъни $\lambda_k > 0, k \in N$.

5) Стеклов теоремаси. $f(x)$ биринчи тартибли узлуксиз, иккинчи тартибли бўлак-бўлак узлуксиз, ҳосилаларга эга ва (1.3.7) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи функция бўлсин. У ҳолда бу функция (1.3.6), (1.3.7) масаланинг хос функциялари бўйича абсолют ва текис яқинлашувчи қаторга ёйилади, яъни

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x), \quad c_k = \int_0^l p(x) X_k(x) f(x) dx, \quad k \in N \quad (1.3.8)$$

(1.3.6), (1.3.7) масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари топилгандан сўнг, $T(t)$ функцияни топишга ўтилади.

Ҳар бир λ_k ни (1.3.5) тенгламага қўйиб, унинг умумий ечими (уни $T_k(t)$ деб белгилаб),

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} \cdot t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} \cdot t$$

топилади, бу ерда a_k ва b_k ихтиёрий ўзгармаслар, (1.3.4) га асосан юқоридагилардан келиб чиқадики, ҳар бир

$$U_k(x, t) = X_k(x) T_k(t) = (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} \cdot t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} \cdot t) X_k(x) \quad k \in N$$

функция (3.1.1) тенгламанинг (1.3.3) шартни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимидан иборат экан.

(3.1.2) бошланғич шартларни қаноатлантириш мақсадида

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} \cdot t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} \cdot t) X_k(x) \quad (1.3.9)$$

қатор тузилади. Агар бу қатор текис яқинлашувчи бўлиб, уни x ва t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлса, унинг йиғиндиси ҳам (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) масаланинг ечими бўлади. У ҳолда (1.3.2) бошланғич шартлар бажарилиши учун

$$U|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x) = \varphi(x) \quad (1.3.9)$$

$$U_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} X_k(x) = \psi(x) \quad (1.3.10)$$

тенгликларнинг ўринли бўлишлиги зарурлиги келиб чиқади.

Агар $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар Стеклов теоремаси шартларини бажарувчи функциялар бўлса, (1.3.9) ва (1.3.10)- бу функцияларнинг $X_k(x)$ хос функциялар бўйича ёйилмасидан иборат бўлади ва (1.3.8) га асосан

$$a_k = \int_0^1 p(x)\varphi(x)X_k dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^l p(x)\psi(x)X_k(x)dx \quad k \in N$$

тенгликлар ўринли бўлади. a_k ва b_k ларнинг бу ифодаси (1.3.8) га қўйилса (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) аралаш масала ечими ҳосил бўлади.

1-мисол. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$

(1.3.11)

тенгламанинг

$$U|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad U_t|_{t=0} = \sin \frac{3\pi}{2l} x + \sin \frac{5\pi}{2l} x, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.3.12)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $U(x, t)$ ечими топилсин.

Ечиш. Ечимни $U(x, t) = X(x) \cdot T(t)^*$ кўринишда излаб уни (1.3.11) га қўйиш натижасида $T(t)$ ва $X(x)$ функцияларга нисбатан

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (1.3.14)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (1.3.15)$$

кўринишдаги оддий дифференциал тенгламаларга эга бўламиз, бу ерда λ - номаълум ўзгармас параметр. (*) ни (1.3.13) га қўйиб, $T(t) \neq 0$ эканлигини эътиборга олсак, $X(x)$ функция

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (1.3.16)$$

шартларни қаноатлантиради.

(1.3.4) кўринишдаги (1.3.12) шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимни топиш учун (1.3.15) тенгламанинг (1.3.16) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи айнан нолга тенг бўлмаган ечимни топиш зарурдир.

Агар $\lambda > 0$ бўлса, (1.3.15) тенгламанинг (1.3.16) чегаравий шартларни каноатлантирувчи айнан нолга тенг бўлмаган ечими мавжуд. Ҳақиқатдан (1.3.15) тенгламанинг умумий ечими

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

кўринишга эга бўлади. (3.1.16) чегаравий шартларга биноан $c_1 = 0$, $c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0$. Бунда $c_2 \neq 0$ деб олинса (акс ҳолда $X(x) = 0$ бўлиб қолади), $\cos \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow \lambda = \frac{\pi^2 (1+2n)^2}{4l^2}$, $n \in \mathbb{Z}$ ни ҳамда $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\sin \pi n$ ва $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi n\right) = \sin \pi n$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлгани учун $n = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ни ҳисобга олиб (1.3.15), (1.3.16) масаланинг ечими куйидаги кўринишда бўлади:

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.3.17)$$

энди ҳар бир $\lambda_n = \frac{\pi^2 (1+2n)^2}{4l^2}$ ни (1.3.14) тенгламага қўйиб унинг умумий ечими (уни $T_n(t)$ деб белгилаб),

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{\pi(1+2n)}{2l} t + b_n \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} t$$

кўринишда бўлади, бу ерда a_n ва b_n ихтиёрий ўзгармаслар.

(1.3.13) га асосан юқоридагилардан келиб чиқадики, ҳар бир

$$U_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \left(a_n \cos \frac{\pi(1+2n)}{2l} t + b_n \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} t \right) \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x \quad (1.3.18)$$

Функция (1.3.12) тенгламанинг (1.3.14) шартни каноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими бўлганлиги сабабли (1.3.18) ечимларнинг чексиз йиғиндиси ҳам ечим бўлади, яъни

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi(1+2n)}{2l} t + b_n \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} t \right) \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x \quad (1.3.19)$$

(1.3.19) ни t бўйича дифференциаллаймиз.

$$U_t(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(1+2n)}{2l} \left(b_n \cos \frac{\pi(1+2n)}{2l} t + a_n \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} t \right) \sin \frac{(1+2n)\pi x}{2l} \quad (1.3.20)$$

(1.3.19) ва (1.3.20) да $t = 0$ деб бошланғич шартларга асосан ушбу

$$U(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x = 0 \Rightarrow a_n = 0,$$

$$U_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi a(1+2n)b_n}{2l} \sin \frac{\pi(1+2n)x}{2l} = \sin \frac{3\pi x}{2l} + \sin \frac{5\pi x}{2l} \Rightarrow b_0 \frac{\pi a}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l} +$$

$$+ b_1 \frac{3\pi a}{2l} \sin \frac{3\pi x}{2l} + b_2 \frac{5\pi a}{2l} \sin \frac{5\pi x}{2l} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\pi a(1+2n)b_n}{2l} \sin \frac{\pi(1+2n)x}{2l} = 0 \Rightarrow b_0 = 0,$$

$$b_1 = \frac{2l}{3\pi a}, \quad b_2 = \frac{2l}{5\pi a}, \quad b_n = 0, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Буларни (1.3.19) га қўйиб (1.3.11), (1.3.12), (1.3.13) масаланинг ечимини ҳосил қиламиз:

$$U(x, t) = \frac{2l}{3a\pi} \sin \frac{3a\pi}{2l} t \cdot \sin \frac{3\pi}{2l} x + \frac{2l}{5a\pi} \sin \frac{5a\pi}{2l} t \cdot \sin \frac{5\pi}{2l} x.$$

2. Аралаш масалани бир жинсли бўлмаган тор тенгламаси учун ечиш.

Ушбу

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1.3.21)$$

тенгламанинг $\{(x, t): 0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$ да аниқланган, узлуксиз ва (1.3.2) бошланғич шартларни ҳамда

$$U(0, t) = 0, \quad U(l, t) = 0 \quad (1.3.22)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $U(x, t)$ ечими топилсин.

Бу масаланинг ечими куйидаги

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (1.3.23)$$

Кўринишда қидирилади ва $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ функциялар $X_n(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$

функциялар бўйича қаторга ёйилади:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx; \quad (1.3.24)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx; \quad (1.3.25)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx; \quad (1.3.26)$$

(1.3.23) ва (1.3.24) ни (1.3.21) га қўйилса, $U_k(t)$ га нисбатан

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ U_k''(t) + \left(\frac{1\pi a}{l} \right)^2 U_k(t) - f_k(t) \right\} \sin \frac{k\pi x}{l} = 0$$

ёки

$$U_k''(t) + W_k^2 U_k(t) = f_k(t), \quad W_k = \frac{k\pi a}{l} \quad (1.3.27)$$

тенглама ҳосил бўлади.

(1.3.23) ни (1.3.25) ва (1.3.26) га қўйилса, $U_k(t)$ функциялар учун

$$U_k(0) = \varphi_k, \quad U_k'(0) = \psi_k \quad (1.3.28)$$

бошланғич шартлар келиб чиқади.

Энди (1.3.27), (1.3.28) масаланинг ечимини

$$U_k(t) = v_k(t) + \rho_k(t) \quad (1.3.29)$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда $v_k(t)$ функция $v_k''(t) + W_k^2 v_k(t) = f_k(t)$ тенгламанинг $v_k(0) = 0, v_k'(0) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлиб, ушбу

$$v_k(t) = \frac{1}{W_k} \int_0^t f_k(\tau) \sin W_k(t - \tau) d\tau,$$

кўринишга эга бўлади ёки $f_k(t)$ ўрнига (1.3.24) ифодани қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$v_k(t) = \frac{2}{l W_k} \int_0^t f_k(\tau) \sin W_k(t - \tau) d\tau \int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi \quad (1.3.30)$$

$\rho_k(t)$ функция эса $\rho_k''(t) + W_k^2 \rho_k(t) = 0$ тенгламанинг $\rho_k(0) = \varphi_k, \rho_k'(0) = \psi_k$ шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлиб, ушбу

$$\rho_k(t) = \varphi_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + \frac{\psi_k}{W_k} \sin \frac{k\pi a t}{l}$$

ёки (1.3.25) ва (1.3.26) га кўра қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\rho_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left[\varphi(\xi) \cos \frac{k\pi a t}{l} + \frac{\psi(\xi)}{W_k} \sin \frac{k\pi a}{l} t \right] \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi \quad (1.3.31)$$

Шундай қилиб, (1.3.29), (1.3.30), (1.3.31), (1.3.23) га кўра (1.3.21), (1.3.32) (ҳамда бошланғич шартларни қаноатлантирувчи) масаланинг ечими ушбу кўринишда бўлади:

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{lw_k} \int_0^t \sin w_k(t-\tau) d\tau \int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi + \frac{2}{l} \int_0^t \varphi(\xi) \cos \frac{k\pi\tau}{l} + \frac{\psi(\xi)}{w_k} \sin \frac{k\pi\tau}{l} \right] \cdot \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (1.3.32)$$

2-мисол. $U_{tt} = U_{xx} + \frac{\pi^2 x}{2l^2}$, $0 < x < l$, $t > 0$ тенгламанинг $U|_{t=0} = \frac{\pi}{0}$, $0 \leq x \leq l$, $U_t|_{t=0} = 0$
 $0 \leq x \leq l$ бошланғич шартларни ҳамда $U(0, t) = 0$, $U(l, t) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $U(x, t)$ ечими топилсин.

Ечиш. Берилган тенглама, бошланғич шартлар ва чегаравий шартларга асосан (1.3.32) ечимдан фойдаланиб қуйидагини

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{lw_k} \int_0^t \sin w_k(t-\tau) d\tau \int_0^l \frac{\pi^2 \xi}{2l^2} \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi + \frac{2}{l} \cos \frac{k\pi\tau}{l} \int_0^l \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{k\pi\xi}{l} \right] \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$w_k = \frac{k\pi}{l}$ ни ҳосил қиламиз. Бундан, интегралларни ҳисоблаб, қуйидагича

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} [(-1)^k - 1] \left\{ 1 - (1 + k^2) \cos \frac{k\pi\tau}{l} \right\} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

эга бўламиз. Бундан, агар $k = 2n$ бўлса, $(-1)^k - 1 = 0$, агар $k = 2n + 1$ бўлса $(-1)^k - 1 = -2$ бўлганлиги учун топилган ечимни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$U(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} \left\{ 1 - (2n+1)^2 \cos \frac{(2n+1)\pi\tau}{l} \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

3-мисол. $U_{tt} = U_{xx} + t \sin x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$ тенгламанинг

$U|_{t=0} = \frac{\pi}{0}$, $0 \leq x \leq \pi$, $U_t|_{t=0} = 0$ $0 < x < \pi$ бошланғич шартларни ҳамда $U(0, t) = 0$, $U(\pi, t) = 0$, $t \geq 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $U(x, t)$ ечими топилсин.

Ечиш. Берилган тенглама, бошланғич шартлар ва чегаравий шартларга асосан масаланинг ечимини $U(x, t) = v(t) \cdot \sin x$ кўринишда излаймиз.

$U(x, t) = v(t) \cdot \sin x$ функцияни бир жинсли бўлмаган тенглама ва бошланғич шартларга қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$v''(t) + a^2 v(t) = t, \quad v(0) = v'(0) = 0$$

Бу Коши масаласининг ечими $v(t) = \frac{1}{a^2} \left[t - \frac{1}{a} \sin at \right]$ кўринишда бўлади.

Шундай қилиб, қўйилган масаланинг ечимини

$$U(x, t) = \frac{1}{a^2} \left[t - \frac{1}{a} \sin at \right] \cdot \sin x$$

кўринишда топамиз.

3. Агар (1.3.21) тенглама учун бир жинсли бўлмаган

$$\alpha U(0, t) + \beta U_x(0, t) = \mu(t), \quad t > 0,$$

$$\gamma U(l, t) + \delta U_x(l, t) = \partial(t), \quad t > 0,$$

чегаравий шартни аралаш масала берилган бўлса, бу масалани ечиш учун аввал масалани ечимини

$$U(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда

$$w(x, t) = (c_1 x^2 + c_2 x + c_3) \mu(t) + (c_4 x^2 + c_5 x + c_6) \partial(t).$$

Сўнгра C_j ($j = \overline{1, 6}$) ўзгармаслар шундай танланадики, натижада $v(x, t)$ номаълум функцияга нисбатан (1.3.21), (1.3.2), (1.3.3) га ўхшаш масала ҳосил бўлади.

4-мисол. $U_{tt} + 2U_t = U_{xx} + 8U + 2x(1 - 4t) + \cos 3x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $t > 0$ тенгламанинг

$$U_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad U_t|_{t=0} = x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$U_x(0, t) = t, \quad U\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \frac{\pi t}{2}, \quad t \geq 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $U(x, t)$ ечими топилсин.

Ечиш. $U(x, t)$ функцияни қуйидаги

$$U(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$$

Кўринишда излаймиз, бу ерда $v(x, t) = x \cdot t$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи функциядир $[\mu(t) = v(t) = t]$.

$$\left[\alpha = 0, \beta = 1, l = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{2}{\pi}, \delta = 0, c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, c_1 = c_3 = c_4 = c_6 = 0 \right].$$

$U(x, t)$ функцияни берилган тенглама, бошланғич шартлар ва чегаравий шартларга қўйиб, $W(x, t)$ функцияга нисбатан қуйидаги масалани

$$W_{tt} + 2W_t = W_{xx} + 8W + \cos 3x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$

$$W_x(0, t) = 0, \quad W\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$W|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad W_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

ҳосил қиламиз. Бу масаланинг ечими $W(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos(1+2n)x$ кўринишда кидирилади ва $T_n(t)$ функцияга нисбатан қуйидаги Коши масаласини

$$(k) \quad \begin{cases} T_n''(t) + 2T_n'(t) + (1+2n)^2 T_n(t) - 8T_n(t) = 1 \\ T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

оламиз.

- 1) Агар $n \neq 1$ бўлса, у ҳолда (k) масаласи фақат айнан нолга тенг ечимга эга бўлади, яъни $T_n(t) = 0$.
- 2) Агар $n = 1$ бўлса, у ҳолда (k) масаласи $T_n(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$ ечимга эга бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги масаланинг ечимини

$$U(x, t) = W(x, t) + xt = (1 - e^{-t} - te^{-t}) \cos 3x + x \cdot t$$

кўринишни топамиз.

4. Тўғри тўртбурчакли мембрананинг тебраниши.

Ушбу

$$U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < q, \quad t > 0 \quad (1.3.33)$$

тенгламанинг $\{(x, y, t): 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q, t \geq 0\}$ да аниқланган, узлуксиз ва

$$U(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad 0 \leq y \leq q \quad (1.3.34)$$

$$\left. \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < q \quad (1.3.35)$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$U(0, y, t) = 0, \quad U(p, y, t) = 0, \quad U(x, 0, t) = 0, \quad U(x, q, t) = 0 \quad (1.3.36)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $U(x, y, t)$ ечими топилсин.

Бу масаланинг ечимини

$$U(x, y, t) = T(t) \cdot v(x, y)$$

кўринишда излаб $T(t)$ учун

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (\lambda = \mu^2) \quad (1.3.37)$$

тенгламага, $v(x, y, t) = 0$ учун

$$v_{xx} + v_{yy} + \mu^2 v = 0$$

тенгламага ва

$$v(0, y) = 0, \quad v(p, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v(x, q) = 0$$

чегаравий шартларга эга бўламиз. Бу масаланинг 1-2 ҳолларга ўхшаш ечиб, унинг хос қийматлари ва хос функциялари қуйидаги кўринишда

$$\mu_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} \right), \quad v_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi}{p} x \cdot \cos \frac{n\pi}{q} y, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.3.38)$$

$v_{mn}(x, y)$ хос функциялар ортонормалланган функцияларнинг системасини ҳосил қилади.

Ҳақиқатдан,

$$\begin{aligned} \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \sin \frac{m\pi}{p} x \cdot \cos \frac{n\pi}{q} y \cdot \sin \frac{m'\pi}{p} x \cdot \cos \frac{n'\pi}{q} y \, dx \, dy = \\ = \begin{cases} 1, & \text{агар } m = n, \quad m' = n' \\ 0, & \text{агар } m \neq n \text{ ёки } m' \neq n' \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

Энди (1.3.37) тенгламадан

$$T_{n,m}(t) = A_{n,m} \cos a\mu_{n,m}t + B_{n,m} \sin \mu_{n,m}t$$

эга бўламиз.

Шундай қилиб, қўйилган (1.3.33), (1.3.34), (1.3.35) масалани ечимини

$$U(x, y, t) = T(t) \cdot v(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{m,n}(t) \cdot v_{m,n}(x, y) =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} [A_{m,n} \cos a\mu_{m,n}t + B_{m,n} a\mu_{m,n}t] \sin \frac{m\pi}{p} x \cdot \cos \frac{n\pi}{q} y \quad (1.3.40)$$

кўринишда излаймиз, бу ердаги A_{nm} ва B_{nm} коэффициентлар бошланғич шартлардан топилади:

$$A_{nm} = \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \sin \frac{m\pi}{p} x \cdot \cos \frac{n\pi}{q} y \cdot \varphi(x, y) dx dy \quad (1.3.41)$$

$$B_{nm} = \frac{4}{apq\mu_{m,n}} \int_0^p \int_0^q \sin \frac{m\pi}{p} x \cdot \cos \frac{n\pi}{q} y \cdot \psi(x, y) dx dy \quad (1.3.42)$$

5-мисол. $U_{tt} = U_{xx} + U_{yy}$, $0 < x < p$, $0 < y < q$, $t > 0$ тенгламанинг

$$U|_{t=0} = A \sin \frac{\pi}{p} x \cdot \cos \frac{\pi}{q} y, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq q,$$

$$U_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < q$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$U(0, y, t) = 0, \quad U(p, y, t) = 0, \quad U(x, 0, t) = 0, \quad U(x, q, t) = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $U(x, y, t)$ ечими топилсин.

Ечиш. (1.3.40) ечимга ва бошланғич шартларга кўра

$$A \sin \frac{\pi}{p} x \cdot \cos \frac{\pi}{q} y = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{nm} \cdot \sin \frac{m\pi}{p} x \cos \frac{n\pi}{q} y$$

$$0 = \sum_{m,n=1}^{\infty} a\mu_{nm} B_{nm} \cdot \sin \frac{m\pi}{p} x \cos \frac{n\pi}{q} y$$

га эга бўламиз. Бундан $A_{1,1} = A$, $B_{1,1} = 0$, $A_{n,m} = B_{n,m} = 0$ $m, n = 2, 3, \dots$. Демак,

кўйилган масаланинг ечими $U(x, y, t) = A \cos a\mu_{nm}t \cdot \sin \frac{\pi}{p} x \cdot \cos \frac{\pi}{q} y$, $\mu_{nm} = \frac{\pi\sqrt{2}}{p}$

кўринишга эга бўлади.

Хулоса ва таклифлар

1. Математик физиканинг чегаравий масалаларни ечишда тўғри бурчакли Декарт координаталар системасидан эгри чизикли координаталар системасига ўтиш энг кўп қўлланилади.
2. Аналитик геометрияда, математик анализда Декарт координаталаридан кутб координаталарига ўтиш билан эгри чизик тенгламаси анча соддалашганига гувоҳимиз бор.
3. Чегаравий масалаларни ечишда эса маълум физик жараён рўй бераётган соҳа аксарият ҳолда мураккаб конфигурацияга эга бўлгани учун масалани ечиш қийинлашади, бу ҳолда соҳани бирор алмаштириш ёрдамида модел соҳасига ўтказишга тўғри келади.
4. Эгри чизикли координаталардан энг қулай бўлгани бу цилиндрик ва сферик координаталар системасидир.
5. Мазкур битирув малакавий иида ўнга яқин ниҳоятда сермахсул эгри чизикли координаталарга ўтиш формулалари келтирилган. Шунингдек узунлик элементи квадрати учун ормула:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2 ;$$

ва

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

метрик коэффицентлар – Ламэ коэффицентлари учун формулалар келтирилган.

6. Цилиндрик координаталар деб $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = z$ ларни тушунамиз, уларнинг Декарт координаталар билан формулалари:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z .$$

кўринишда бўлади.

7. Сферик координаталар деб

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi,$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad \text{ларни тушунамиз.}$$

8. Шунингдек эллиптик, параболик, эллипсоидал, махсус эллипсоидал деб номланадиган эгри чизиқли ортогонал координаталар мавжудлиги таъкидланади.
9. Чегаравий масалаларнинг, хусусан Штурм – Лиувилл масаласининг хос қийматлари ва хос функцияларнинг топиш ҳам актуал масалалардан бири эканлиги ҳам таъкидланади.
10. Мазкур ишда хос функциялар системасининг ортогонал бўлиши ва бу система функциялари бўйича айрим ечим функцияларни қаторга ёиш масаласи ҳам ўрганилган.
11. Шунингдек чегаравий масалаларнинг Фурье усули (ўзгарувчиларни ажратиш усули) конкрет масалаларни ечишда намоёиш этилган.
12. Фурье усулининг моҳияти, унинг қўлланилиши ва хулосаси учун умумий счема келтирилган бўлиб, шу схемага амал қилган ҳолда Дирихле масаласи: тўғри тўртбурчак ва доира учун ечилишига тўхталиб ўтилган.

IV. Фойдаланилган адабиётлар ва манбалар

1. Каримов И.А. Тарихий хотирасиз келажак йўқ., Т.: 1998 й.
2. Каримов И.А. Миллий истиқлол ғояси: асосий тушунча ва тамойиллар. Т.: 2001 й.
3. Каримов И.А. Ўзбекистон XXI асрга интилоқда. Т.: “Ўзбекистон”, 1999 й.
4. Каримов И.А. Ўзбекистон XXI аср бўсағасида: ҳавфсизликка таҳдид, барқарорлик шартлари ва тараққиёт кафолатлари. Т.: “Ўзбекистон”, 1997 й.
5. Каримов И.А. “Юксак маънавият – енгилмас куч”. Т.: “Маънавият”, 2008 й.
6. Каримов И.А. Ўзбекистон – келажаги буюк давлат. Т.: 1992 й.
7. Каримов И.А. Биз келажакимизни ўз қўлимиз билан қурамыз. Т.: 1999 й.
8. Каримов И.А. “Маънавий юксалиш йўлида”. “Ўзбекистон” Т.: 1999 й.
9. Каримов И.А. “Биздан озод ва обод ватан қолсин”. Т.: “Ўзбекистон” 1996 й.
10. Каримов И.А. “Баркамол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори”, “Ўзбекистон”, 1997 й.
11. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974.
12. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ. 2-қисм. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1989.
13. Айзенберг Л.А., Даутов Ш.А. Голоморфные функции многих переменных с неотрицательной действительной частью. Среди голоморфных и полигармонических функций на границе шилова, Матем. сб., 99
14. Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.
15. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики М.: Наука 1982.

ХУЛОСАСИ

Фурье методи ёки ўзгарувчиларни ажратиш методи билан чегаравий масалалар ечилганда албатта хос қийматлар ва хос функциялар ҳақидаги масалага дуч келинади. Одатта сонли параметрнинг берилган дифференциал тенглама ва биржинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нотривиал ечимга эга бўладиган қийматларини (хос сонларини) топиш масаласи Штурм – Лиувилл масаласи дейилади.

Агар номаълум функцияда фазовий координаталар сони 2 та ёки 3 та бўлса Декарт координаталардан кутб координаталарга, сферик координаталарга ёки цилиндрик координаталарга, ўтилса тенгламанинг ечимини топиш осонлашади.

Курс иши мавзуси айнан шу муаммога қаратилган бўлиб, ишнинг таркибий қисми Кириш, асосий қисм, хулоса ва таклифлар ҳамда фойдаланилган адабиётлар деб номланвчи бўлимлардан иборат. Кириш қисмида мавзунинг долзарблиги, тадқиқот мавзуси, мақсади, муаммоси, объекти, предмети, фарази, вазифалари, янгилиги, фан ва амалиёт учун аҳамияти ҳақида шунингдек адабиётлар таҳлили келтирилган.

Асосий қисмда цилиндрик, сферик координаталардан ташқари яна ўнга яқин эгри чизиқли ортогонал системалар ҳақида, шунингдек, хос қийматлар ва хос функциялар ҳақида ва Штурм – Лиувилл масаласи, Фурье усулининг умумий схемаси ҳамда Дирихле масаласини эгри чизиқли координаталарда ифодалаш ҳақида гап кетган.

Хулоса ва таклифлар қисмида 10 га яқин бандни, адабиётлар эса 30 дан ошиқ илмий ва дарслик, қўлланма китобларни ўз ичига олган.

Курс иши, шу каби ишларга қўйилган, низомда кўрсатилган барча талабларга жавоб беради ва уни бажарувчи Бегалиев Ахрор юқори баҳога химоя қилади деб ўйлайман.