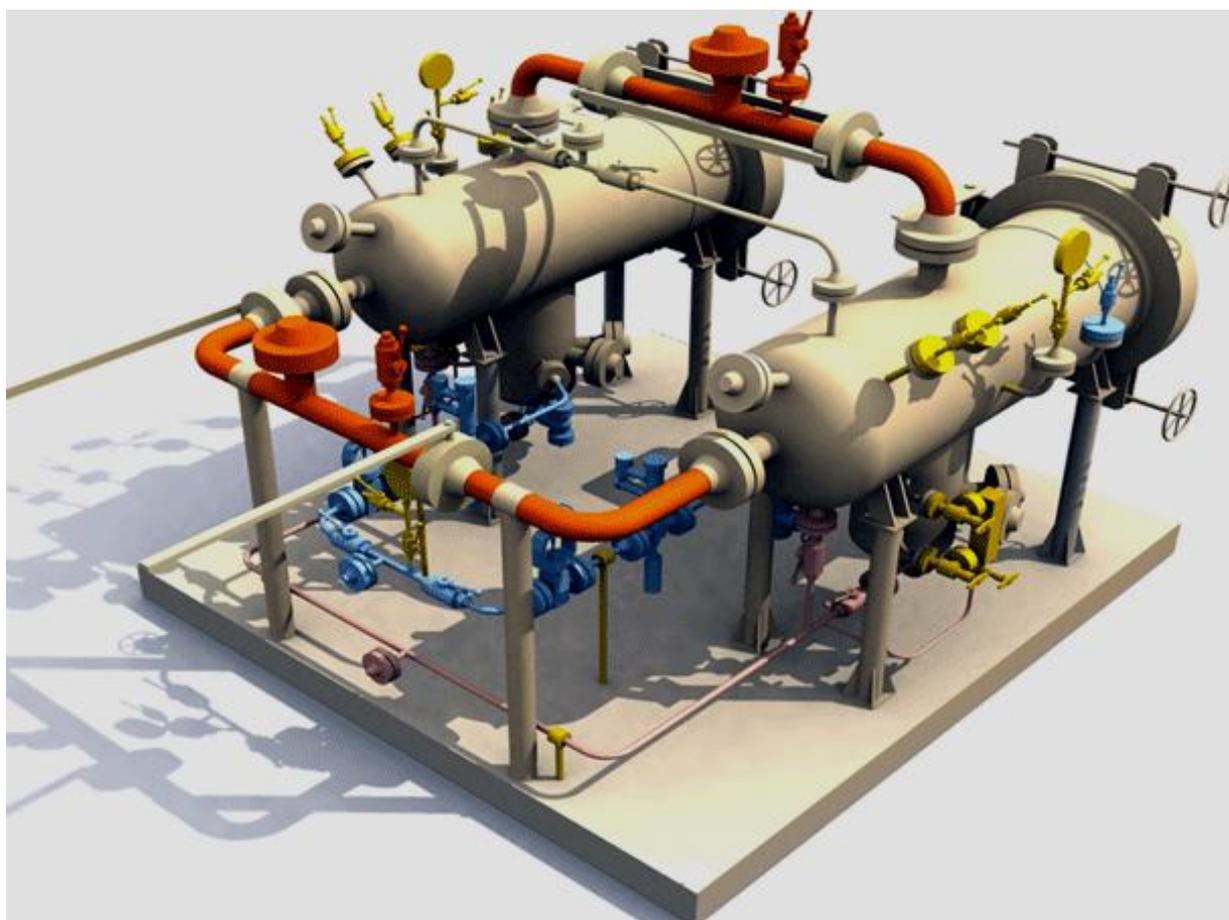


**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

МУКОЛЪЯНЦ А.А.

ГИДРАВЛИКА



ТАШКЕНТ 2013

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

МУКОЛЬЯНЦ АРСЕН АРТЁМОВИЧ

ГИДРАВЛИКА

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:

- 5310100-Энергетика (по отраслям);*
- 5640100-Безопасность жизнедеятельности;*
- 5311900-Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений;*
- 5312000-Проектирование, сооружение и эксплуатация объектов газонефтеперерабатывающей промышленности;*
- 5310500-Автомобилестроение и тракторостроение;*
- 5310600-Наземные транспортные системы и их эксплуатация (по видам транспорта);*
- 5320100-Материаловедение и технология новых материалов;*
- 5320200-Технология машиностроения, оборудование и автоматизация машиностроительных производств;*
- 5320300-Технологические машины и оборудование (по отраслям);*
- 5610600-Техника и технология оказания услуг (по отраслям услуг);*
- 5310900-Метрология, стандартизация и менеджмент качества продукции (по отраслям);*
- 5630100-Экология и охрана окружающей среды (промышленные предприятия);*
- 5311600-Горное дело;*
- 5311800-Гидрогеология и инженерная геология;*
- 5310700-Электротехника, электромеханика и электротехнологии (горные электромашины);*
- 5311700-Геология, поиск и разведка месторождений полезных ископаемых (твердые полезные ископаемые, нефть и газ).*

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ТАШКЕНТ 2013

УДК 62-822

Мукольянц А.А.

Гидравлика: Учебное пособие / Мукольянц А.А.— Ташкент, 2013.

Учебное пособие составлено в соответствии с учебными программами, едиными для различных технических направлений и содержит дидактический материал, необходимый студентам для освоения основных положений механики жидкости.

Рассмотрены физико-механические свойства жидкости, гидростатика, основы кинематики и гидродинамики жидкости. Приведены основы моделирования. Уделено внимание гидравлическим сопротивлениям и истечению жидкости из отверстий и через короткие трубы. Описано напорное движение жидкости в трубопроводах. Приведены расчеты простых и сложных трубопроводов.

Учебное пособие предназначено для студентов технических направлений высших учебных заведений.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит систематическое изложение курса "Гидравлика" и подготовлено на основе опыта многолетнего преподавания курса в вузе.

Материал учебного пособия базируется на предшествующих курсах математики, физики, теоретической механики и является фундаментом для последующих курсов: "Гидравлика и гидропневмоприводы", "Гидравлика и гидрометрия", «Гидравлика и гидромашин», «Гидрогазодинамика, насосы, вентиляторы и компрессоры»

При изложении материала учтены такие предпосылки, как логическая связь с другими дисциплинами; фундаментальность представления теоретических вопросов; практическая направленность рассматриваемых вопросов; использование математического аппарата в объеме, не превышающем доступности восприятия теоретического материала.

Основное внимание уделяется не строгости изложения, а основам методологии и практическим приложениям механики жидкости и газа (применительно к конструированию и эксплуатации гидросистем, транспортных и технологических машин и устройств.).

Целью учебного пособия является овладение выпускниками технических вузов основными методами решения задач и получение знаний, необходимых для постановки сложных задач перед специалистами в области механики жидкости и газа и их решения в результате совместной деятельности.

Основные формулы в учебном пособии выделены рамками. В конце каждого параграфа даны вопросы и приводятся примеры решения задач для самопроверки усвоения прочитанного материала.

Теоретический материал сопровождается иллюстрациями в виде рисунков, графиков, блок-схем и таблиц в объеме, требующем пояснения качественной или количественной связи параметров технологических процессов или физических явлений.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

p – давление	λ – гидравлический коэффициент трения
ρ – плотность	ξ – коэффициент местного сопротивления
T – температура	$F_{\text{тр}}$ – сила трения
V – объем	τ – удельная сила трения
ν – удельный объем	Ne – число Ньютона
S – площадь сечения	Re – число Рейнольдса
u – скорость потока	Fr – число Фруда
u_x, u_y, u_z – составляющие вектора скорости	Eu – число Эйлера
c – скорость ударной волны	M – число Маха
a – скорость звука	E – модуль упругости
ω – угловая скорость	l – длина тела, трубы
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции угловой скорости на координатные оси	d – внутренний диаметр трубопровода
X, Y, Z – проекции массовых сил на оси координат	D – внешний диаметр трубопровода
m – масса	d_3 – эквивалентный диаметр трубопровода
G – весовой расход	r – радиус
M – массовый расход	r_r – гидравлический радиус
Q – объемный расход	K – коэффициент шероховатости
s – путь	δ – толщина стенок трубы
t – время	I – гидравлический уклон
H – полный напор	k – показатель адиабаты
φ – коэффициент скорости истечения	c_v – теплоемкость при постоянном объеме
α – коэффициент Кориолиса,	c_p – теплоемкость при постоянном давлении
γ – удельный вес	ε – коэффициент сжатия струи
Φ – потенциал скорости	R – газовая постоянная данного газа
μ – динамическая вязкость	g – ускорение свободного падения
ν – кинематическая вязкость	
h_u – потери напора	

ГЛАВА 1.

ВВЕДЕНИЕ

Всякий раз, когда имеешь дело с водой, прежде всего, обратись к опыту, а потом уже рассуждай.

Леонардо да Винчи

§ 1.1. КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ ГИДРАВЛИКИ

Гидравликой называется прикладная наука, в которой изучаются законы движения и равновесия жидкости и даются способы приложения этих законов к решению конкретных технических задач.

Гидравлика - одна из самых древних наук в мире. Результаты археологических исследований показывают, что еще за 5000 лет до нашей эры в странах древнего мира уже существовали оросительные каналы и были известны простейшие устройства для подъема воды, сохранились остатки древнего водопровода.

Развитие гидравлики как науки исторически обусловлено и тесно связано с использованием человеческим обществом такого элемента природы, как вода. Зачаточные, несистематические знания некоторых вопросов гидравлики, по всей вероятности, возникли еще в доисторические времена, однако до нас дошли сведения лишь о более поздних открытиях.

Термин «гидравлика» впервые появился в Древней Греции и первоначально обозначал «искусство сооружения музыкальных инструментов типа органов, использующих вертикальные трубы, частично заполненные водой». Этимология термина связана с двумя греческими словами: *hydor* (хюдор) – вода и *aylos* (аулос) – труба, желоб, что свидетельствует о важности вопросов, относящихся к движению жидкостей по трубам. Вначале этот термин охватывал только учение о движении воды по трубам. Содержание современной гидравлики несравненно шире:

она изучает также движение жидкостей не только в трубах, но и в открытых руслах, сооружениях и движение грунтовых вод.

Зарождение отдельных представлений из области гидравлики следует отнести еще к глубокой древности, ко времени гидротехнических работ, проводившихся древними народами, населявшими Египет, Вавилон, Месопотамию, Индию, Китай и другие страны.

Однако прошло много веков и даже тысячелетий, прежде чем начали появляться отдельные, вначале не связанные друг с другом, попытки выполнить научные обобщения тех или других наблюдений, относящихся к гидравлическим явлениям. В далекой древности гидравлика являлась только ремеслом без каких-либо научных основ.

Период Древней Греции.

В истории развитая человека вода играла огромную роль и использовалась как для питьевого водоснабжения, так и для орошения полей, приведения в движение простейших механизмов и т. п.

Еще за 4 000 лет до н. э. в Египте и за 1 000 лет до н. э. в Китае и Сирии умели строить плотины и мельницы на реках, оросительные системы на полях, а также корабли для плавания по морям. Древние оросительные системы находят в Средней Азии и Закавказье.

В Греции еще за 250 лет до н. э. начали появляться трактаты, в которых уже выполнялись достаточно серьезные для того времени теоретические обобщения отдельных вопросов механики жидкости. Математик и механик того времени Архимед (ок. 287 - 212 гг. до н.э.) оставил после себя анализ вопросов гидростатики и плавания.

Первым сочинением по гидравлике следует считать трактат Архимеда «О плавающих телах», содержащий его известный закон о равновесии тела, погруженного в жидкость.

Им же была разработана конструкция механизма для подъема воды, названная «архимедовым винтом».

Представитель древнегреческой школы Ктезибий (II или I век до н.э.) изобрел пожарный насос, водяные часы и некоторые другие гидравлические устройства. Герону Александрийскому (вероятно, I век н.э.) принадлежит описание сифона, водяного органа, автомата для отпуска жидкости и т. п.

Период Древнего Рима.

Римляне заимствовали многое у греков. В Древнем Риме строились сложные для того времени гидротехнические сооружения: акведуки, системы водоснабжения и т.п.

В Риме сохранились остатки древнего водопровода, построенного за шесть веков до н. э., свидетельствующие о высокой для того времени технике.

В своих сочинениях римский инженер-строитель Фронтин (40-103 г. н.э.) указывает, что во времена Траяна в Риме было 9 водопроводов, причем общая длина водопроводных линий составляла 436 км. Можно предполагать, что римляне уже обращали внимание на наличие связи между площадью живого сечения и уклоном дна русла, на сопротивление движению воды в трубах, на неразрывность движения жидкости. Например, Фронтин писал, что количество воды, поступившей в трубу, должно равняться количеству воды, вытекающей из нее.

Период Средних веков.

Этот период, длившийся после падения Римской империи около тысячи лет, характеризуется, как принято считать, регрессом, в частности, и в области механики жидкости.

Гидравлика как наука не развивалась, что вполне закономерно, так как эпоха феодализма с ее натуральным хозяйством и отсутствием развитой промышленности не ставила перед гидравликой задач, требующих разрешения.

Однако именно в это время были созданы универсальные энергетические машины – водяные колеса различных типов и размеров, послуживших основой промышленной революции нового времени.

Эпоха Возрождения.

В течение второй половины XV века и в XVI веке начали развиваться экспериментальные исследования (см. ниже), постепенно опровергавшие схоластические воззрения, поддерживаемые католической церковью.

В этот период в Италии появилась гениальная личность - Леонардо да Винчи (1452-1519), который, как известно, вел свои научные (экспериментальные и теоретические) исследования в самых различных областях.

В частности, Леонардо изучал принцип работы гидравлического пресса, аэродинамику летательных аппаратов, образование водоворотных областей, отражение и интерференцию волн, истечение жидкости через отверстия и водосливы. Изобрел центробежный насос, парашют, анемометр.

Он написал труд «О движении воды в речных сооружениях», первый установил понятие сопротивления движению твердых тел в жидкостях и газах и положил начало экспериментальной гидравлике, поставив лабораторные опыты.

Различные работы Леонардо отражены в сохранившихся 7 тысячах страниц его рукописей, хранящихся в библиотеках Лондона, Виндзора, Парижа, Милана и Турина. По-видимому, справедливо будет признать, что Леонардо да Винчи является основоположником механики жидкости.

К периоду Возрождения относятся работы нидерландского математика - инженера Симона Стевина (1548 - 1620), определившего величину гидростатического давления на плоскую фигуру в 1586 г. в книге «Начала гидростатики» и объяснившего "гидростатический парадокс".

В этот период великий итальянский физик, механик и астроном Галилео Галилей (1564-1642) опубликовал в 1612 г. трактат по гидростатике

«Рассуждение о телах, пребывающих в воде, и о тех, которые в ней движутся» и показал, что гидравлические сопротивления возрастают с увеличением скорости и с возрастанием плотности жидкой среды; он разъяснял также вопрос о вакууме.

Период XVII века и начало XVIII века.

В это время механика жидкости все еще находилась в зачаточном состоянии. Вместе с тем здесь можно отметить имена следующих ученых, способствовавших ее развитию:

Бенедетто Кастелли (1577 -1644) - преподаватель математики в Пизе и Риме - в ясной форме изложивший принцип неразрывности (уравнение расхода).

Эванжелиста Торричелли (1608 - 1647) - выдающийся математик и физик - дал формулу расчета скорости истечения жидкости из отверстия и изобрел ртутный барометр.

Блез Паскаль (1623 -1662) - выдающийся французский математик и физик - установивший, что значение гидростатического давления не зависит от ориентировки площадки действия. Кроме того, он окончательно решил и обосновал вопрос о вакууме, показал возможность применения для измерения атмосферного давления различных жидкостей.

Ньютон (1642 -1727) - гениальный английский физик, механик, астроном и математик - установил квадратичный закон сопротивления при обтекании и дал описание закона вязкого трения в жидкости.

Середина и конец XVIII века.

Формируются теоретические основы современной механики жидкости. Анализируя соответствующий исторический материал, можно видеть, что вопрос о вакууме осознавался человечеством на протяжении 2 тысяч лет (от Аристотеля, неправильно осветившего этот вопрос, до Паскаля); вопрос о неразрывности движения жидкости - на протяжении 1,5 тысячи лет (от

Фронтиня до Кастелли). Такое положение объясняется тем, что прежде чем уяснить подобные вопросы (с современной точки зрения достаточно простые), следовало предварительно ясно себе представить основные положения физики и механики, которые в наше время люди усваивают с детского возраста: вопрос о силе тяжести и всемирном тяготении, вопрос о скорости и ускорении, о давлении атмосферы и т. п.

Только освоив такие представления, можно легко разобраться в "элементарных" положениях механики жидкости. Однако решение всех этих вопросов физики и механики являлось весьма трудной задачей: на пути раскрытия их стояла католическая церковь, различные предрассудки, а также существовавшие метафизические объяснения различных явлений. Например, говорили, что снаряд летит в воздухе потому, что тот, кто отлил его, ввел в него известную силу, которая и обуславливает движение снаряда; Аристотель учил, что летящую стрелу приводит в движение воздух и т. п.

И вот к середине XVIII века трудами ряда ученых (Галилея, Коперника, Кеплера, Паскаля, Декарта, Гука, Ньютона, Лейбница, Ломоносова, Клеро и многих других) указанные препятствия, наконец, были в значительной мере преодолены. После этого относительно быстро начали создаваться современные научные основы механики жидкости. Эти научные основы были заложены тремя учеными XVIII века: Даниилом Бернулли, Эйлером и Д'Аламбером.

Д. Бернулли (1700- 1782) - выдающийся физик и математик.- родился в Гронингене (Голландия). С 1725 по 1733 г. жил в Петербурге, являлся профессором и членом Петербургской Академии наук. В Петербурге он написал свой знаменитый труд "Гидродинамика", который был впоследствии опубликован (в 1738 г.) в г. Страсбурге.

В этом труде он осветил ряд основополагающих гидравлических вопросов и в частности объяснил физический смысл слагаемых, входящих в современное уравнение установившегося движения (идеальной жидкости), носящее его имя.

Его отец, Иоганн Бернулли (1667-1748) опубликовал в 1743 году трактат под названием «Гидравлика».

Л. Эйлер (1707-1783) - великий математик, механик и физик - родился в г. Базеле (Швейцария). Жил в Петербурге с 1727 до 1741 г. и с 1766 г. до конца жизни. Был членом Петербургской Академии наук. Эйлер не только подытожил и обобщил в безупречной математической форме работы предшествующих авторов, но составил известные дифференциальные уравнения движения и относительного равновесия жидкости, носящие его имя, а также опубликовал целый ряд оригинальных решений гидравлических задач, широко используя созданный к тому времени математический аппарат. основополагающая работа Эйлера с выводом системы уравнений движения идеальной жидкости увидела свет в 1735 году.

Наибольшие успехи в рамках модели идеальной жидкости были достигнуты Гельмгольцем и Кирхгофом, разработавшим методы теории функции комплексной переменной. Дальнейшее развитие эти методы получили в работах Н.Е. Жуковского, С.А. Чаплыгина и их учеников.

Ж. Д'Аламбер (1717-1783) - математик и философ; член Парижской, французской и других Академий наук, а также Петербургской Академии наук (с 1764 г.). Опубликовал ряд трактатов, относящихся к равновесию и движению жидкости.

Предполагают, что Д'Аламбер первый отметил возможность кавитации жидкости.

В указанный период существенный вклад в дело развития механики жидкости внесли также два выдающихся французских математика того времени: Ж. Лагранж (1736-1813), который ввел понятие потенциала скорости и исследовал волны малой высоты, и П. Лаплас (1749-1827), создавший, в частности, особую теорию волн на поверхности жидкости.

Середина и конец XVIII века.

Зарождается техническое (прикладное) направление механики жидкости. Наряду с учеными Л. Эйлером, Д. Бернулли, Д'Аламбером и др., сформулировавшими основы современной механики жидкости, в середине и в конце XVIII в. во Франции начала постепенно образовываться особая школа - школа ученых-инженеров, которые стали формировать механику, как прикладную (техническую) науку.

Рассматривая гидравлику, как отрасль техники, а не математики, представители этой школы ввели преподавание механики жидкости в технических учебных заведениях.

К концу XVIII в. французская школа стала основной гидравлической школой в области технических наук.

Яркими представителями этой школы явились: А. Пито (1695- 1771) - инженер-гидротехник, член Парижской Академии наук, изобретатель "прибора Пито"; А. Шези (1718-1798) - директор Французской школы мостов и дорог (Эколь де Пон э Шоссе), сформулировавший параметры подобия потоков и обосновавший формулу, носящую его имя; Ж. Борда (1733-1799) - военный инженер, который занимался вопросами истечения жидкостей из отверстий и нашел потери напора при резком расширении потока; П. Дюбуа (1734-1809) - инженер-гидротехник и военный инженер, составивший обобщающий труд "Принципы гидравлики".

Техническое направление механики жидкости развивалось и в других странах. Здесь можно отметить итальянского профессора Д. Вентури (1746-1822) и немецкого ученого-инженера Р. Вольтмана (1757 - 1837).

В результате деятельности ученых-инженеров техническая механика жидкости (гидравлика) обогатилась изобретением соответствующей измерительной аппаратуры (пьезометрами, трубками Пито, вертушками Вольтмана и т. п.); идеей использования материальных (вещественных) моделей тех или других гидравлических явлений для их изучения и для

проектирования соответствующих инженерных сооружений; идеей теоретического построения приближенных расчетных зависимостей с уточнением таких зависимостей при помощи введения в них эмпирических коэффициентов.

Вне зависимости от формирования технической механики жидкости в странах Западной Европы гениальный русский ученый М. В. Ломоносов (1711 - 1765) , учитывая рост промышленности и строительства в России, начал также развивать механику жидкости в техническом направлении.

Развитие технической механики жидкости (гидравлики) в XIX в.

Зародившееся во Франции техническое (гидравлическое) направление механики жидкости быстро начало развиваться как в самой Франции, так и в других странах. В этот период в той или другой мере были разработаны или решены следующие проблемы: основы теории плавно изменяющегося неравномерного движения жидкости в открытых руслах (Беланже, Кориолис, Сен-Венан, Дюпюи, Буден, Бресс, Буссинеск); вопрос о гидравлическом прыжке (Бидоне, Беланже, Бресс, Буссинеск); экспериментальное определение параметров, входящих в формулу Шези (Базен, Маннинг, Гангилье, Куттер); составление эмпирических и полуэмпирических формул для определения гидравлических сопротивлений в различных случаях (Кулон, Хаген, Сен-Венан, Пуазейль, Дарси, Вейсбах, Буссинеск); открытие двух режимов движения жидкости (Хаген, Рейнольдс); получение так называемых уравнений Навье-Стокса, а также уравнений Рейнольдса на основе использования модели осредненного турбулентного потока (Сен-Венан, Рейнольдс, Буссинеск); установление принципов гидродинамического подобия, а также критериев подобия (Коши, Ричч, Фруд, Гельмгольц, Рейнольдс); основы учения о движении грунтовых вод (Дарси, Дюпюи, Буссинеск); теория волн (Герстнер, Сен-Венан, Ричч, Фруд, Стокс, Гельмгольц, Базен, Буссинеск); вопросы истечения жидкости через водосливы и отверстия (Беланже, Кирхгоф, Базен, Буссинеск, Борда,

Вейсбах). В этот период изучались также взвесенесущие потоки (Фарг, Дюпюи), неустановившееся движение (Сен-Венан, Буссинеск, Дюпюи).

Основы учения о движении вязкой жидкости были заложены в 1821 г. французским ученым Луи Мари Анри Навье (1785-1830) и получили свое завершение в 1845 г. в работах Джорджа Габриеля Стокса (1819-1903). Стоксом был обобщен закон Ньютона о внутреннем трении в жидкости и выведены уравнения движения вязкой жидкости, получившие наименование уравнений Навье-Стокса.

Экспериментальные исследования в трубах очень малого диаметра проведены французским врачом и естествоиспытателем Пуазейлем в 1840-1842 гг. в связи с изучением движения крови по сосудам. До Пуазейля исследованием движения вязкой жидкости через трубки малого диаметра занимался Гагин (1710-1769). Стоксом были проинтегрированы уравнения движения вязкой жидкости для случая движения жидкости в круглой трубке и для равномерного движения шара в неограниченной жидкости.

Сопоставление этих решений с данными опыта показало, что решения совпадают с опытом лишь при малых скоростях движения жидкости и при малых диаметрах трубки и шара, редко встречающихся на практике. Причина столь ограниченных пределов, в которых верно решение Стокса, разъяснена опытами, поставленными Рейнольдсом в 1883 г. Опыты показали существование двух качественно различных режимов движения жидкости: ламинарного и турбулентного.

Слово «турбулентность», по всей вероятности, впервые ввел в 1887 году выдающийся английский физик Уильям Томсон, лорд Кельвин (1824-1907).

В ламинарном режиме жидкость движется как бы слоями, без перемешивания. Здесь поток частиц жидкости полностью «управляется» стенками канала. Например, в круглой трубке траектории отдельных частиц при таком режиме параллельны стенкам.

В турбулентном режиме частицы жидкости движутся по самым

замысловатым траекториям, так как имеет место значительное Перемешивание жидкости. Стенки потока при таком режиме не «управляют» уже полностью потоком жидкости, а обеспечивают лишь главное направление течения. Поэтому нельзя рассчитать турбулентный поток по истинным значениям скоростей и давлений; необходимо производить соответствующее осреднение в потоке. Расчет такого осредненного движения по уравнениям Навье - Стокса оказался неверным.

Уравнения для осредненного движения были выведены Рейнольдсом, но при этом оказалось, что в уравнениях появляются новые члены, имеющие смысл дополнительного сопротивления движению жидкости. Для их определения Тэйлором и Карманом в 20-30-х п. XX столетия созданы так называемые полуэмпирические теории турбулентности. Основным достижением этих теорий явилось установление логарифмических формул скоростей и сопротивлений в гладких трубах.

Немецкий механик Людвиг Прандтль в 1904 г. получил дифференциальные уравнения движения жидкости в пограничном слое и сформулировал основные понятия теории пограничного слоя, развитые в дальнейшем Теодором фон Карманом, Карлом Польгаузенем, Л.И. Седовым, Л.Г Лойцянским, В.А Авдуевским, В.М. Исаевым. Первые работы по расчету турбулентного пограничного слоя с привлечением полуэмпирических гипотез А.Н. Колмогорова были выполнены Г.П. Глушко. Дальнейшее развитие эти методы получили в работах Сполдинга и Патанкара.

Большой вклад внесли в развитие гидравлики следующие русские ученые и инженеры: Н. П. Петров (1836-1920) - выдающийся русский ученый-инженер, почетный член Петербургской Академии наук (инженер-генерал-лейтенант), который в своем труде "Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости" (1883 г.) впервые сформулировал законы трения при наличии смазки: Н. Е. Жуковский (1847-1921) - великий русский ученый, профессор Московского высшего технического училища и

Московского университета, член-корреспондент Петербургской Академии наук, создатель теории гидравлического удара, исследовавший также многие другие вопросы механики жидкости; И. С. Громека (1851-1889) - профессор Казанского университета, разрабатывавший теорию капиллярных явлений и заложивший основы теории, так называемых, винтовых потоков.

Развитие технической механики жидкости (гидравлики) в области инженерно-строительных специальностей в течение первых десятилетий XX века.

В начале XX в. в гидравлике наметилось много различных научных направлений, которые можно классифицировать по разным признакам:

а) по виду рассматриваемой текучей среды; здесь можно различать воду, воздух, нефть, разные двухфазные жидкости, так называемые, неньютоновские и аномальные жидкости, электропроводящую или магнитную среду, плазму;

б) в зависимости от отрасли техники или отрасли знаний, где используется аппарат гидромеханики, можно различать: авиацию, судостроение, гидромашиностроение, инженерно-строительное дело (в частности, гидротехнику), баллистику, гидроавтоматику, химическую технологию, метеорологию, океанологию и т. п.;

в) можно различать отдельные гидромеханические теории, которые иногда полагаются в основу решения задач, относящихся к различным областям техники (см. выше п. б): теорию турбулентности; задачи неустановившегося, в частности, волнового движения; теорию смазки и ламинарного движения; теорию движения жидкости (в частности, нефти и газа) в пористых средах и т. п.

В связи со сказанным в начале XX в. (да и в конце XIX в.) из технической механики жидкости начали выделяться отдельные иногда в значительной мере изолированные друг от друга направления, которые приходится рассматривать отдельно.

Ниже, касаясь только инженерно-строительного направления гидравлики, осветим главнейшие работы, относящиеся к этому направлению и выполненные в период до 20 -30-х годов прошлого столетия.

Ф. Форхгеймер (1852-1933) - немецкий профессор - рассмотрел гидравлические сопротивления, волны перемещения, колебания горизонтов воды в уравнильных резервуарах ГЭС, некоторые виды деформаций песчаных русел. Особенно важны исследования Форхгеймера в области вопросов фильтрации. М. Вебер (1871 - 1951) - немецкий профессор - придал принципам гидродинамического подобия современные формы.

Л. Прандтль (1875 -1953) - немецкий профессор, инженер - разработал (наряду с Тейлором и Карманом) полуэмпирическую теорию турбулентности; исследовал гидравлические сопротивления в трубах. С именем Прандтля связан ряд понятий из области механики жидкости. Работы Прандтля в области теории пограничного слоя явились основополагающими.

М.А. Великанов (1879-1964) - русский ученый, - разрабатывал теорию турбулентности, исследовал движение наносов и русловые деформации, предложил так называемую гравитационную теорию движения взвешенных наносов.

Б.А. Бахметев (1880-1951) - русский ученый, инженер путей сообщения - работая в Петербургском политехническом институте, заложил основы современной российской гидравлической школы, опубликовав ряд книг, в которых осветил различные разделы гидравлики. Б. А. Бахметев решил в достаточно общей форме задачу об интегрировании дифференциального уравнения неравномерного движения в призматических руслах.

Блазиус (р. 1883) - немецкий ученый - впервые показал, что для "гладких труб" коэффициент сопротивления зависит только от одного параметра - числа Рейнольдса.

Н. Н. Павловский (1886- 1937) - русский ученый, академик, инженер путей сообщения - в 1922 г. опубликовал основы математической теории

фильтрации воды в грунтах; предложил метод электро моделирования фильтрационных потоков (метод ЭГДА).

К 20 -30-м годам XX в. была создана обширная лабораторная база, на основе которой решались самые различные вопросы гидравлики. Равным образом были проведены также обширные натурные (полевые) наблюдения, позволившие составить соответствующие эмпирические формулы или откорректировать (применительно к реальным условиям) формулы, полученные для различных идеализированных схем теоретическим путем. Перечислим только некоторых ученых, принявших участие в этого рода деятельности: П. П. Мельников, Энгельс (1854-1945), Ребок (1864-1950), Кох (1852-1923), В. Е. Тимонов (1862-1936), И. Г. Есьман (1868-1955), Шаффернак (1881-1951), Феллениус (р. 1876), Мейер-Петер (р. 1883), Гибсон (р. 1878), Скобей (р. 1880), Кеннеди (1851-1920), Н. Н. Павловский.

Основоположником численного анализа дифференциальных уравнений в частных производных, которыми являются система уравнений законов сохранения для движения жидкости, следует считать Ричардсона (1910), первое численное решение уравнений в частных производных для задач гидродинамики дано Томом в 1933 году.

Очень важным этапом для дальнейшего развития вычислительной гидромеханики стала работа Алена и Саусвелла, выполненная вручную, по расчету обтекания цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. Развитие ЭВМ придало применению численных методов в механике жидкости и газа лавинообразный характер. Не претендуя на полноту описания этого направления изучения движения жидкости, можно отметить имена фон Неймана, Харлоу, Фромма, О.М Белоцерковского, А.А.Самарского, А.Н. Крайко, Сполдинга, Патанкара,

Приведенный выше краткий исторический обзор показывает, что современная гидравлика представляет собой органичный сплав науки и практики, опирающийся на теоретическую гидромеханику и поставленные на высоком уровне экспериментальные исследования.

§ 1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАУКИ «ГИДРАВЛИКА»

Общие закономерности, связывающие механические движения и взаимодействия тел, находящихся в твердом, жидком и газообразном состояниях, изучаются наукой, называемой механикой, являющейся частью физики.

Механика, как раздел физики, изучает законы равновесия и движения материальных тел различных видов.

Она разделяется на:

- *механику твёрдого тела*, которая изучает покой и движение тел как совокупности сильно связанных материальных точек;
- *механику сыпучих сред*, изучающую движение песчаных грунтов, зерна и других аналогичных тел;
- *механику жидких сред*, в которой изучают равновесие и движение жидкости (рис. 1.1).

Часть механики жидких сред, которая рассматривает движение жидкости, а также силовое взаимодействие между жидкостью и обтекаемыми ею телами или ограничивающими ее поверхностями, называется *гидромеханикой*.

Гидромеханика разделяется на гидростатику и гидродинамику, включающую кинематику жидкости.

Кинематика жидкости - раздел гидромеханики, в котором рассматривают виды и формы движения жидкостей, не выясняя причин этого движения (поступательное, деформационное и вихревое).

В гидростатике изучают условия равновесия жидкостей и газов. В гидродинамике - законы движения жидкостей и газов и устанавливают зависимости для основных факторов движения. Внешние силы, действующие на тело, считаются известными. Требуется определить давление и скорость движения среды. В гидромеханике в качестве основного метода исследования используется строгий математический анализ.



Рис. 1.1

Раздел механики, в котором изучают движение газов и жидкостей и обтекание ими тел, называют *аэромеханикой*.

Прикладную часть гидромеханики, для которой характерен определенный круг технических вопросов, задач и методов их решения, называют технической механикой жидкости, или гидравликой.

Она обладает сравнительно простыми методиками расчета по сравнению с теоретической механикой жидкости, где применяется сложный математический аппарат.

Однако гидравлика дает достаточную для технических приложений характеристику рассматриваемых явлений.

Обычно гидравлику определяют как науку о законах равновесия и движения жидкостей и о способах приложения этих законов к решению практических задач.

В гидравлике рассматриваются главным образом потоки жидкости, ограниченные и направленные твердыми стенками, т. е. течения в открытых и закрытых руслах (каналах). Можно сказать, таким образом, что в гидравлике изучают внутренние течения жидкостей и решают так называемую «внутреннюю» задачу в отличие от «внешней» задачи, связанной с внешним обтеканием тел сплошной средой, которое имеет место при движении твердого тела в жидкости или газе (воздухе). «Внешнюю» задачу рассматривают в собственно гидромеханике или аэрогидромеханике.

В гидравлике при решении различных практических задач широко используются те или иные допущения и предположения, упрощающие рассматриваемый вопрос. Достаточно часто гидравлические решения основываются на результатах экспериментов, и потому в гидравлике применяется относительно много различных эмпирических и полуэмпирических формул. При этом, как правило, оцениваются только главные характеристики изучаемого явления и часто используются те или иные интегральные и осредненные величины, которые дают достаточную для технических задач характеристику рассматриваемых явлений.

По своему характеру техническая механика (гидравлика) близка к известным дисциплинам — сопротивлению материалов и строительной механике, в которых под тем же углом зрения изучаются вопросы механики твердого тела. Следует учитывать, что гидравлика, являясь общетехнической дисциплиной, может рассматриваться как «профессиональная физика жидкого тела», в которой, в частности, даются основы соответствующих гидравлических расчетов. Эти расчёты используются при проектировании инженерных гидротехнических сооружений, конструкций, а также

гидросистем технологического оборудования, применяемых во многих областях техники.

Разумеется, что гидравлика разделяется на статику жидкости (гидростатику), кинематику потоков жидкости и динамику жидкости (гидродинамику).

Метод, применяемый в современной гидравлике при исследовании движения, заключается в следующем. Исследуемые явления сначала упрощают, и к ним применяют законы теоретической механики. Затем полученные результаты сравнивают с данными опытов, выясняют степень расхождения, уточняют и исправляют теоретические выводы и формулы для приспособления их к практическому использованию. Целый ряд явлений, крайне трудно поддающихся теоретическому анализу, ввиду своей сложности, исследуют экспериментальным путем, а результаты такого исследования представляют в виде эмпирических формул.

Гидравлика является практической базой для многих отраслей техники: авиации, энергомашиностроения, тепло- и гидроэнергетики, газо- и водоснабжения и др. Значительна роль гидравлики в нефтехимической технологии, легкой промышленности, физиологии, метеорологии. Для каждой из этих дисциплин характерен свой круг гидродинамических задач и соответствующих методов их решения, однако все они основываются на общих законах покоя и движения жидкостей и газов, а также на некоторых общих методах описания гидромеханических явлений.

Особенно велико значение гидравлики в машиностроении, где приходится иметь дело с закрытыми потоками в трубах и давлениями, многократно превышающими атмосферное. Гидросистемы, состоящие из насосов, трубопроводов, различных гидроагрегатов, широко используют в машиностроении в качестве устройств передачи и преобразования энергии, жидкостного охлаждения, топливоподачи, смазки и др.

В различных видах современных машин очень широкое применение находят гидропередачи (гидроприводы) и гидроавтоматика.

Гидропередачи представляют собой устройства для передачи механической энергии и преобразования движения посредством жидкости. По сравнению с передачами других видов (зубчатыми и т. п.) гидропередачи имеют ряд существенных преимуществ: простота преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное, возможность плавного (бесступенчатого) изменения соотношения скоростей входного и выходного звеньев, компактность конструкций и малая масса гидромашин при заданной мощности по сравнению, например, с электромашинами и др.

Гидропередачи, снабженные системами автоматического или ручного управления, образуют гидроприводы, которые благодаря перечисленным преимуществам широко используют в различных металлообрабатывающих станках, на летательных аппаратах, на сухопутных транспортных машинах, в строительно-дорожных и подъемно-транспортных машинах, в прокатных станах и т.п.

Гидроприводы, гидроавтоматика и различные гидравлические устройства являются неотъемлемой частью комплексной автоматизации и механизации производства.

Для расчета и проектирования гидросистем, гидроприводов, их систем автоматического регулирования и других устройств с гидромашинами, а также для правильной их эксплуатации и наладки нужно иметь соответствующую подготовку в области гидравлики.

Важнейшей частью почти любого технологического оборудования, станка, пресса, робота и т.д. является привод. Простейшим образом привод можно понимать как совокупность устройств, предназначенных для преобразования и передачи энергии, необходимой для осуществления технологического движения с заданными кинематическими и силовыми характеристиками. В технике широко применяются механический, электрический, пневматический (газовый, чаще всего воздушный) и гидравлический приводы и их комбинации. Важнейшей характеристикой любого привода является крутящий момент (или сила), который он может

обеспечивать при одних и тех же размерах или весе (рис. 1.2). Попытаемся сравнить по этому показателю электрический, пневматический и гидравлический приводы.

Для подобного анализа приводов рассмотрим основной, наиболее часто встречающийся элемент привода – двигатель вращения. Любой такой двигатель принципиально состоит из неподвижного статора и вращающегося внутри него ротора. При этом в любом двигателе можно считать, что ротор отталкивается от статора, в результате чего создаётся вращение.

Таким образом, можно считать, что между статором и ротором есть какая-то рабочая среда (рабочее тело), которая, упираясь в статор, толкает ротор. В электродвигателе это электромагнитное поле, в пневматическом двигателе это воздух, в гидродвигателе это жидкость.

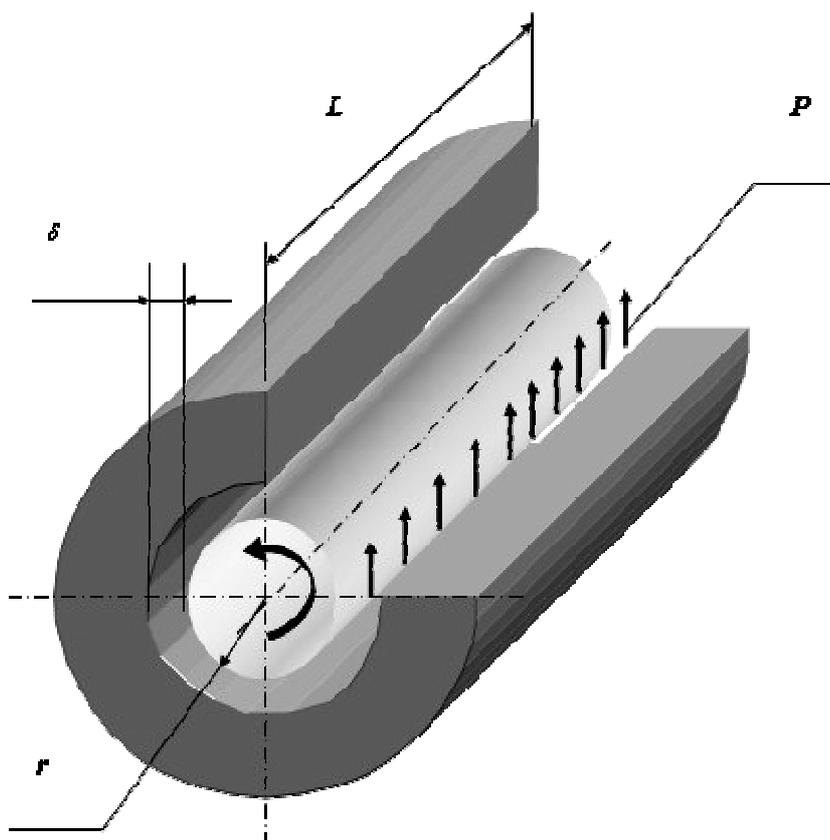


Рис. 1.2

Чем больше сила отталкивания, тем больший крутящий момент развивает двигатель. Величина силы отталкивания зависит от того, как сильно сжата рабочая среда, т.е. от того, каковы внутренние **напряжения рабочей среды**.

Для любого двигателя (с некоторыми, непринципиальными допущениями) можно считать, что крутящий момент описывается функцией вида

$$M_{kp} = F(L, r, \delta, Z, P),$$

где L – длина отталкивания ротора от статора,

r – радиус ротора,

δ – радиальный зазор между ротором и статором,

P – напряжённость рабочей среды,

Z – количество пар элементов, взаимодействующих в процессе

отталкивания ротора от статора (пары полюсов, пластины гидро- или пневмодвигателя и т.п.).

Опираясь на эту функцию, легко определить предельно возможные максимальные напряжения для любого двигателя как отношение развиваемого им крутящего момента к его геометрическим размерам. Это формула будет иметь вид:

$$P = \frac{M_{kp}}{Lr\delta Z}.$$

Величина P будет выражаться в единицах напряженности рабочей среды Н/м².

Если таким способом проанализировать двигатели всех трёх типов, разделив их максимальные крутящие моменты на соответствующие геометрические характеристики, то можно установить следующее:

- ✓ P электромагнитного поля - около **1 МПа**
- ✓ P газовой среды - около **1 МПа**
- ✓ P жидкостной среды - **5 - 40 МПа и выше.**

Следовательно, гидравлический привод во многие разы и даже десятки раз более эффективен. При этом гидравлический энергоёмкий, чем электрический и пневматический привод имеет еще одну, очень важную особенность, которую можно проиллюстрировать на следующем опыте. Возьмём три одинаковых цилиндра (рис. 1.3).

В первый цилиндр поместим два магнита одноимёнными полюсами навстречу друг к другу так, чтобы верхний магнит мог играть роль подвижного поршня. Во втором, заполненном воздухом, и третьем, заполненном жидкостью, установим плотно пригнанные поршни. Ко всем трём поршням приложим силы, сжимающие рабочие среды: электромагнитное поле, воздух и жидкость.

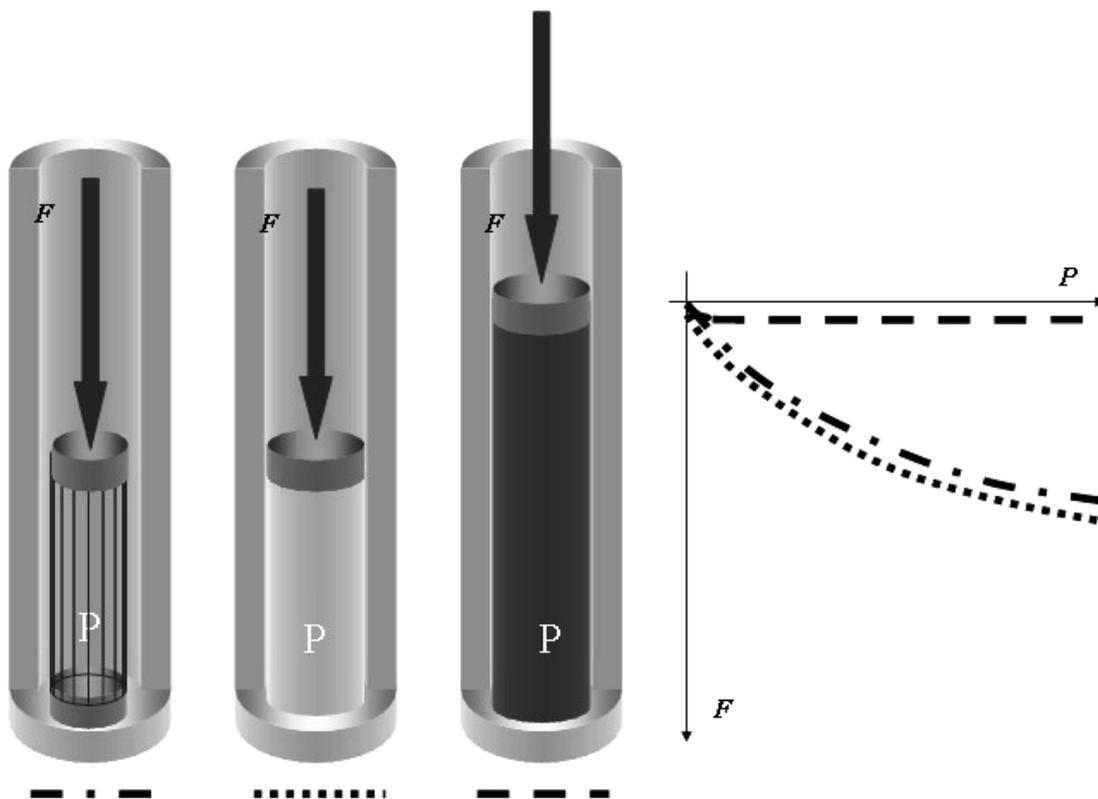


Рис. 1.3

При увеличении сил поршни начнут опускаться, а напряжение рабочих сред P будет расти. В цилиндре с жидкостью перемещение будет практически незаметным по сравнению с остальными цилиндрами, т.е.

жидкость по сравнению с газом и электромагнитным полем, практически несжимаема в большом диапазоне сил.

Последнее качество жидкости проиллюстрировано на графике (рис. 1.3), что обеспечивает высокую жёсткость гидропривода в большом диапазоне нагрузок.

Описанные особенности гидравлического привода определяют область его использования в технике. В большинстве случаев его применение обусловлено необходимостью в высоких энергетических показателях при малом весе или габаритах.

Можно также отметить, что имеет место и другой подход к классификации разделов механики жидких сред. В этом подходе говорят о двух разных методах исследования:

- ✓ метод «технической механики жидкости» («технической гидромеханики», «гидравлики»),

- ✓ метод «математической механики жидкости» («математической гидромеханики»).

В математической механике жидкости широко используется относительно сложный математический аппарат. Решения, получаемые в этом случае, оказываются более строгими в математическом отношении.

Как показал опыт, методы математической механики жидкости очень часто оказываются столь сложными, что громадное большинство практических задач, следуя этим методам, решить невозможно. Этим и объясняется возникновение и развитие технической, прикладной науки — технической механики жидкости, т. е. гидравлики, которая стремится дать приближенные ответы на все те вопросы, связанные с движущейся или покоящейся жидкостью, которые ставит перед нами практика.

Можно сказать, что в технической гидромеханике (в гидравлике) приближенно решаются сложные задачи при помощи простых методов. В математической же гидромеханике относительно точно решаются только некоторые простейшие задачи при помощи сложных методов.

§ 1.3. РАЗМЕРНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ГИДРАВЛИКЕ

Науку о точных измерениях называют метрологией. Метрология рассматривает единицы физических величин, эталоны, служащие для их воспроизведения, способы передачи правильных значений единиц от эталонов к образцовым рабочим мерам и измерительным приборам, методы и средства точных измерений и обработку результатов измерений.

Под физической величиной понимается количественная характеристика физического тела, явления или процесса. Измерением называют действие, выполняемое с помощью средств измерения и имеющее целью нахождение числового значения измеряемой величины в принятых единицах. Единицей измерения называют значение физической величины, принятое за основание сравнения для количественной оценки величин того же рода.

Единицы измерения бывают независимыми (исходными, основными) и производными. Основные - единицы, размер которых устанавливается произвольно, независимо от размеров других единиц. Совокупность единиц, охватывающих все или отдельные области измерения, представляет собой систему единиц. Различные системы единиц отличаются друг от друга тем, какие единицы приняты за основные.

При изучении свойств жидкости необходимо принять определенную систему единиц измерения ее характеристик.

В 1960 г. на XI Генеральной конференции по мерам и весам принята Международная система единиц измерения СИ (система интернациональная). В этой системе за единицу измерения длины, массы, времени и температуры соответственно приняты метр (м), килограмм (кг), секунда (с), Кельвин (К).

Ранее в гидравлике широко использовались физическая (СГС) и техническая (МКГСС) системы единиц измерения. Основными единицами измерения в физической системе приняты: сантиметр (см), грамм (г), секунда

(с); в технической - метр (м), килограмм-сила (кгс), секунда (с). Ввиду того, что многие учебники, а также значительная часть технической литературы построены на использовании единиц измерения СГС и МКГСС, необходимо иметь таблицу соответствия единиц измерения физических величин в различных системах (см. табл. 1.1).

Таблица 1.1

Физические величины	Единицы измерения		
	СГС	МКГСС	СИ
Площадь S, ω	см^2	м^2	м^2
Объем V	см^3	м^3	м^3
Скорость v	см/с	м/с	м/с
Ускорение a	см/с^2	м/с^2	м/с^2
Масса m	г	$\text{кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}$	кг
Сила F	$\text{г} \cdot \text{см/с}^2 =$ $= \text{дина (дин)}$	кгс	$\text{кг} \cdot \text{м/с}^2 =$ $= \text{ньютон (Н)}$
Удельный вес γ	$\text{г/см}^2 \cdot \text{с}^2 =$ $= \text{дин/см}^3$	кгс/м^3	$\text{кг/м}^2 \cdot \text{с}^2 =$ $= \text{Н/м}^3$
Плотность ρ	г/см^3	$\text{кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$	кг/м^3
Давление p	$\text{г/см} \cdot \text{с}^2$	кгс/см^2	$\text{кг/м} \cdot \text{с}^2 = \text{Н/м}^2$
Напряжение τ	$\text{г/см} \cdot \text{с}^2$	кгс/см^2	$\text{кг/м} \cdot \text{с}^2 = \text{Н/м}^2$
Динамический коэффициент вязкости μ	$\text{г/см} \cdot \text{с} =$ $= \text{пуаз (П)}$	$\text{кгс} \cdot \text{с/см}^2$	$\text{кг/м} \cdot \text{с}$
Кинематический коэффициент вязкости ν	$\text{см}^2/\text{с} =$ $= \text{стокс (Ст)}$	$\text{м}^2/\text{с}$	$\text{м}^2/\text{с}$



Вопросы для самопроверки

1. *Предмет гидравлики как науки.*
2. *Роль Леонардо да Винчи в развитии гидравлики.*
3. *Роль Г. Галилея и Э. Торричелли в развитии гидравлики.*
4. *Роль Б. Паскаля и И. Ньютона в развитии гидравлики.*
5. *Имена крупнейших ученых, внесших вклад в развитие гидравлики.*
6. *Основоположники гидравлики как науки.*
7. *Роль гидравлики в современном машиностроении.*
8. *Определение науки «Гидромеханика».*
9. *Классификации разделов механики жидких сред.*
10. *Методы современной гидравлики.*
11. *Особенности гидравлического привода.*
12. *Дать определение науки о точных измерениях.*
13. *Что понимается под понятием физическая величина?*
14. *Виды единиц измерения.*
15. *Международная система единиц измерения.*
16. *Физическая (СГС) и техническая (МКГСС) системы единиц измерения.*
17. *Соответствие единиц измерения физических величин в различных системах.*

ГЛАВА 2.

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

*Сначала это покажется
сложным, но сначала все сложно*

Мусаши

§ 2.1. МОДЕЛЬ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Система материальных точек, непрерывно заполняющая некоторую часть пространства, называется сплошной средой. Сплошная среда представляет собой модель реально существующих материалов, т.е. является определенной идеализацией, полезной для решения многих практических задач. Моделью сплошной среды пользуются для описания жидких тел (воды, нефти, нефтепродуктов и т.д.), твердых деформируемых тел (металлов, горных пород), а также газообразных веществ (воздуха, природного газа).

Жидкость в гидромеханике рассматривается как сплошная среда, что очень удобно при использовании математического аппарата непрерывных функций, обладающая способностью легко изменять свою форму под действием внешних сил.

Понятие «жидкость» определяется в зависимости от назначения такого определения.

В физике жидкость трактуется как физическое тело, обладающее свойством текучести.

В свою очередь **текучесть** - это способность какой-либо субстанции непрерывно и сколь угодно сильно деформироваться под действием сколь угодно малого срезывающего касательного напряжения.

Легкотекучесть частиц жидкости обусловлена неспособностью ее воспринимать касательные напряжения в состоянии покоя.

Жидкость по своим физическим свойствам занимает среднее положение между твердыми телами и газами. Она мало изменяет свой объем

при изменении температуры и давления, что свойственно твердым телам. Но обладает текучестью, что свойственно газам. В отличие от газов жидкость образует свободную поверхность. В малых объемах под действием сил поверхностного натяжения жидкость группируется в капли. Отсюда происходит применяемое понятие “капельная жидкость”.

По своим механическим свойствам жидкости разделяют на два класса:

1. Малосжимаемые (капельные).
2. Сжимаемые (газообразные).

В механике жидкости и газа законы, справедливые для капельных жидкостей, применимы и к газам, когда сжимаемостью газа можно пренебречь.

Для удобства введены термины «капельная жидкость» (малосжимаемая), «сжимаемая жидкость» (газ) и «жидкость» (охватывающая как капельную жидкость, так и газ).

Таким образом, под жидкостью в механике жидкости и газа подразумевается всякая среда, обладающая текучестью.

При изучении законов равновесия и движения жидкости в прикладной механике жидкостей и газов движение молекул не изучается, и жидкость рассматривается в виде сплошной среды, способной деформироваться под действием внешних сил.

Жидкость как всякое физическое тело имеет молекулярное строение. Расстояние между молекулами во много раз превосходит размеры самих молекул и соответствует от 10^{-7} до 10^{-8} см, а длина свободного пробега молекул газа при атмосферном давлении равна 10^{-5} см.

Поэтому жидкости и газы воспринимаются как сплошные среды, имея прерывистую структуру.

Это обстоятельство позволяет ввести гипотезу сплошности (постулат сплошности *Даламбера-Энглера*), то есть применить модель, обладающую свойством непрерывности. Гипотеза о непрерывности или сплошности среды

упрощает исследование, так как позволяет рассматривать механические характеристики жидкой среды (скорость, плотность, давление и т.д.) как функции координат точки в пространстве и во времени.

Поскольку жидкость все же состоит из движущихся молекул, считается, что выводы гидравлики справедливы лишь до определенных размеров объемов. Характерные размеры течения L должны быть значительно больше длины свободного пробега молекулы l .

Из теории подобия известен ряд критериев, характеризующих течение жидкости как, например, по *Критерию Кнудсена* $K=l/L$ должно быть $< 0,01$.

Следует отметить, для жидкостей, имеющих малые значения l (в отличие от газов) характерные размеры жидких объемов достаточно велики, чтобы не сказывалось молекулярное строение.

Другим важным постулатом является *гипотеза Прантля* о *прилипании* молекул жидкости к твердым поверхностям. Это позволяет считать слой жидкости у твердой поверхности неподвижным относительно этой поверхности.

§ 2.2. ЖИДКОСТЬ КАК ОБЪЕКТ ИЗУЧЕНИЯ ГИДРАВЛИКИ

Передачу энергии в гидравлических системах обеспечивают рабочие жидкости, поэтому чтобы эффективно их применять, надо знать какими свойствами они обладают.

Жидкости, как и все вещества, имеют молекулярное строение. Они занимают промежуточное положение между газами и твердыми телами (рис.2.1). Это определяется величинами межмолекулярных сил и характером движений составляющих их молекул.

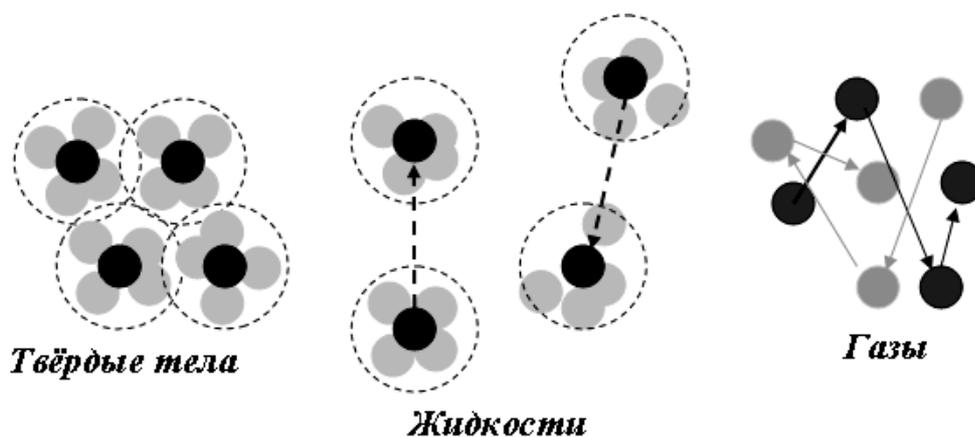


Рис. 2.1. Молекулярное строение веществ

В газах расстояния между молекулами больше, а силы межмолекулярного взаимодействия меньше, чем в жидкостях и твердых телах, поэтому газы отличаются от жидкостей и твердых тел большей сжимаемостью. По сравнению с газами жидкости и твердые тела малосжимаемы.

Молекулы жидкости находятся в непрерывном хаотическом тепловом движении, отличающемся от хаотического теплового движения газов и твердых тел. В жидкостях это движение осуществляется в виде колебаний (10^{13} колебаний в секунду) относительно мгновенных центров и скачкообразных переходов от одного центра к другому. Тепловое движение молекул твердых тел состоит в колебаниях относительно стабильных центров. Тепловое движение молекул газа выглядит, как непрерывные скачкообразные перемены мест.

При этом надо заметить, что изменение температуры и давления приводят к изменениям свойств жидкостей. Установлено, что при повышении температуры и уменьшении давления свойства жидкостей приближаются к свойствам газов, а при понижении температуры и увеличении давления – к свойствам твердых тел.

§ 2.3. ПЛОТНОСТЬ ЖИДКОСТИ

Система материальных точек, непрерывно заполняющая некоторую часть пространства, называется сплошной средой. Сплошная среда представляет собой модель реально существующих материалов, т.е. является определенной идеализацией, полезной для решения многих практических задач. Моделью сплошной среды пользуются для описания жидких тел (воды, нефти, нефтепродуктов и т.д.), твердых деформируемых тел (металлов, горных пород), а также газообразных веществ (воздуха, природного газа). Жидкость в гидравлике рассматривается как сплошная среда, что очень удобно при использовании математического аппарата непрерывных функций.

Плотность характеризует массу сплошной среды (в том числе и жидкости), содержащуюся в единице объема (рис.2.2).

Средняя плотность среды в достаточно малом объеме ΔW , содержащем точку $A(x, y, z)$, определяется по формуле:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W}, \quad (2.1)$$

где ΔM – масса, заключенная в малом объеме ΔW , включая точку A .

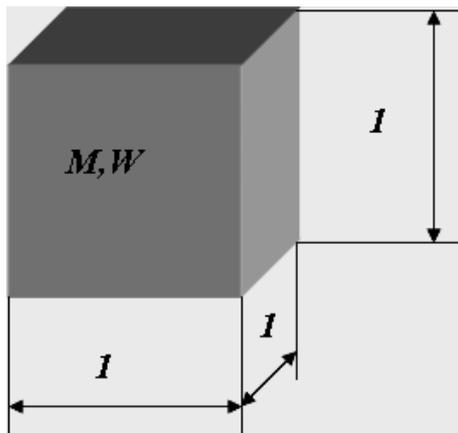


Рис.2.2

Размерность плотности

$$[\rho] = \frac{M}{L^3},$$

где M – размерность массы;

L – размерность длины.

Единицами измерения плотности

являются кг/м^3 в системе СИ и $\text{кгс}\cdot\text{с}^2/\text{м}^4$ в

технической системе.

Применяют еще относительную плотность жидкости δ , равную отношению плотности жидкости к плотности воды при 4°C :

$$\sigma = \frac{\rho_{ж}}{\rho_{вод}} \quad (2.2)$$

Наряду с плотностью в технических расчетах применяется удельный вес (рис.2.3).

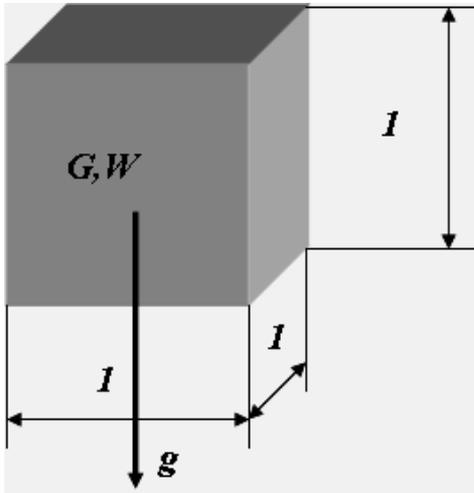


Рис.2.3

Вес жидкости G , приходящийся на единицу объема W , называется удельным весом:

$$\gamma = \frac{G}{W}. \quad (2.3)$$

Размерность удельного веса $[\gamma] = \frac{M}{L^2 T^2}$.

Единица измерения удельного веса в системе СИ Н/м^3 . Удельный вес – векторная величина. Он не является параметром вещества, его значение зависит от ускорения свободного падения в пункте определения.

Удельный вес и плотность жидкости связаны следующим соотношением:

$$\gamma = \frac{G}{W} = \frac{Mg}{W} = \rho g, \quad (2.4)$$

где g – ускорение свободного падения, принимаемое обычно равным $9,81 \text{ м/с}^2$.

Наряду с удельным весом в расчетах используется относительный удельный вес δ :

$$\delta = \frac{\gamma_{ж}}{\gamma_{в}}, \quad (2.5)$$

где $\gamma_{ж}$ – удельный вес жидкости;

$\gamma_{в}$ – удельный вес воды при $t = 4^\circ\text{C}$, равный 9810 Н/м^3 (1000 кгс/м^3).

Так, для пресной воды при температуре 4°C $\delta_B = 1$. Плотность и удельный вес жидкостей зависят от давления и температуры.

Все жидкости, кроме воды, характеризуются уменьшением плотности с ростом температуры. Плотность воды имеет максимум при $t = 4^{\circ}\text{C}$ и уменьшается при любых других температурах (рис.2.4).

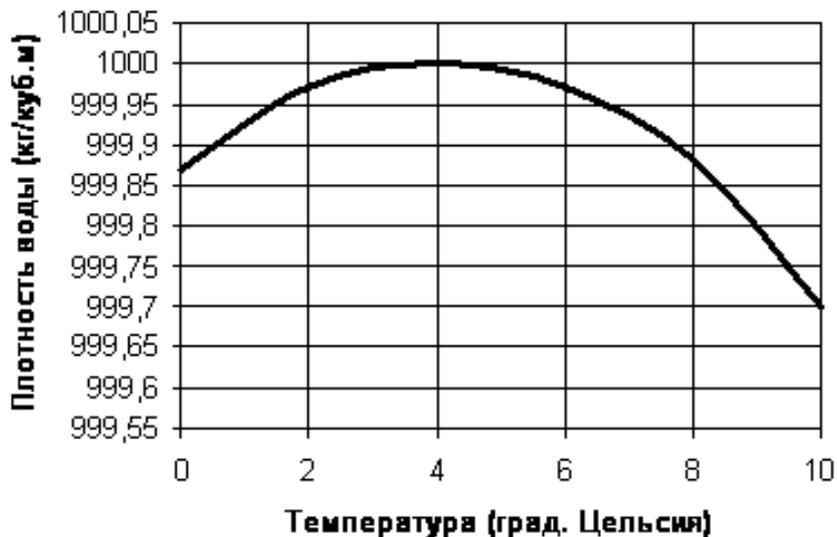


Рис.2.4

В этом проявляется одно из аномальных свойств воды. Температура, при которой плотность воды максимальная, с увеличением давления уменьшается. Так, при давлении 14 МПа вода имеет максимальную плотность при $0,6^{\circ}\text{C}$.

При изменении давления плотность жидкостей изменяется незначительно. В большинстве случаев плотность жидкости в расчётах можно принимать постоянной. Однако встречаются случаи, когда изменением плотности пренебрегать нельзя, т.к. это может привести к значительным ошибкам.

Численные значения ρ и γ для воды и некоторых других жидкостей (при различной температуре t в градусах $^{\circ}\text{C}$) приводятся в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Название жидкости	$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	γ	
			кН/м^3	кгс/м^3
Вода	0	997,87	9,80537	997,87
	4	1000,0	9,80665	1000,00
	10	999,73	9,80400	999,73
	20	998,23	9,78929	998,23
	30	995,67	9,76419	995,67
	40	992,24	9,73055	992,24
	50	988,07	9,68966	988,07
Морская вода	15	1030	10,1008	1030
Ацетон	15	790	7,74725	790
Бензин	15	680-740	6,668-7,256	680-740
Глицерин (безводный)	20	1260	12,2364	1260
Керосин	15	790-820	7,747-8,041	790-820
Масло веретённое	20	889	8,71811	889
Масло машинное	20	898	8,80637	898
Масло минеральное	15	890-960	8,727-9,414	890-960
Масло трансформаторное	20	887	8,69850	887
Нефть натуральная	15	700-900	6,864-8,825	700-900
Ртуть	0	13596	133,331	13596
Ртуть	20	13546	132,841	13546
Скипидар	18	870	8,53178	870
Спирт метиловый	15	810	7,94339	810
Спирт этиловый	15	790	7,74725	790
Чугун расплавленный	1200	7000	68,6465	7000
Эфир этиловый	15	740	7,25692	740

§ 2.4. СЖИМАЕМОСТЬ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Сжимаемость жидкости это свойство жидкостей изменять свой объём при изменении давления.

Сжимаемость характеризуется *коэффициентом объёмного сжатия* (сжимаемости) β_p , представляющим собой относительное изменение объёма жидкости W при изменении давления p на единицу.

$$\beta_p = - \frac{1}{W_0} \frac{dW}{dp}, \quad (2.6)$$

где W_0 – первоначальный объём жидкости;

dW – изменение этого объема (рис.2.5) при изменении давления на величину dp . Знак “минус” в формуле указывает, что при увеличении давления объём жидкости уменьшается.

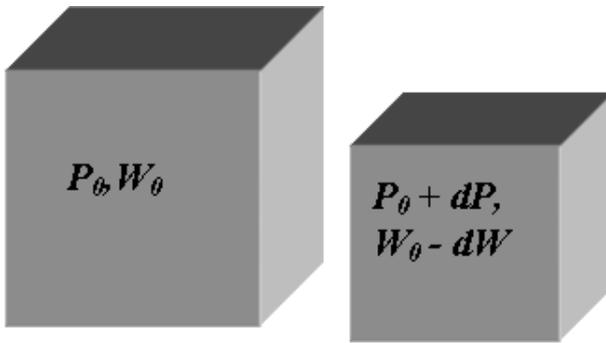


Рис.2.5

Единицы измерения: Па^{-1} (Паскаль. $1\text{Па} = 1\text{Н/м}^2$).

Перепишем определение β_P в виде

$$\beta_P = -\frac{dW}{W_0} \frac{1}{dp}.$$

Обе части умножим на знаменатель и перенесём в левую часть $\beta_P W_0 dp + dW = 0$.

Учтём, что $dW = W - W_0$, и подставим в предыдущее равенство

$$\beta_P W_0 dp + W - W_0 = 0.$$

Выразив отсюда W , можно получить формулу для вычисления нового значения объёма при известном увеличении давления

$$W = W_0 - \beta_P W_0 dp = W_0 (1 - \beta_P dp).$$

Если учесть, что все изменения объёма происходят при неизменной массе за счёт изменения плотности, можно получить формулу изменения плотности при изменении давления

$$\frac{M}{\rho} = \frac{M}{\rho_0} (1 - \beta_P dp) \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{(1 - \beta_P dp)}{\rho_0}.$$

Откуда выразив ρ , получим

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \beta_P dp}.$$

Изменение объёма dW , происходящее за счёт изменения плотности $d\rho$ при постоянной массе, можно записать в виде

$$dW = \frac{M}{d\rho}.$$

Подставив это в определение β_p , определим коэффициент сжимаемости жидкости через изменение плотности

$$\beta_p = \frac{\frac{M}{d\rho}}{\frac{M}{\rho}} \frac{1}{dP} = \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{dP}.$$

Отсутствие знака минус в этом выражении означает, что увеличение давления приводит к увеличению плотности.

Значение коэффициента объемного сжатия воды приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Коэффициент объемного сжатия воды

$t, ^\circ\text{C}$	$\beta_p \cdot 10^{10}, \text{Па}^{-1}$ при давлении, $\text{Па} \cdot 10^{-4}$				
	50	100	200	390	780
0	5.4	5.37	5.31	5.23	5.15
5	5.29	5.23	5.18	5.08	4.93
10	5.23	5.18	5.08	4.98	4.81
15	5.18	5.1	5.03	4.88	4.7
20	5.15	5.05	4.95	4.81	4.6

Величина, обратная коэффициенту сжимаемости, или, по-другому, коэффициенту объемного сжатия β_p , обозначается

$$K = \frac{1}{\beta_p} = - \frac{V \cdot dp}{dV} \quad (2.7)$$

и называется **объемным модулем упругости** жидкости.

Через модуль K и конечные разности, формулу

$$\delta = \frac{\rho_{жс}}{\rho_{вод}}$$

можно переписать в виде зависимости

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{K}, \quad (2.8)$$

которую называют обобщенным **законом Гука**.

Выразив объем через плотность, получим

$$K = -\frac{dp}{[\rho \cdot d(1/\rho)]} = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad \text{или} \quad \frac{K}{\rho} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} = c^2,$$

где c — скорость распространения продольных волн в упругой среде, равная скорости звука.

Единицы измерения: [Па], [МПа], [кГс/см²].

Для капельных жидкостей модуль K несколько уменьшается с увеличением температуры и, возрастает с повышением давления. Для воды он составляет при атмосферном давлении приблизительно 2000 МПа (табл.2.3).

Следовательно, при повышении давления на 0,1 МПа объем воды уменьшается всего лишь на 1/20 000 часть. Такого же порядка модуль упругости и для других капельных жидкостей, например для минеральных масел он равен приблизительно 1200 МПа.

Таблица 2.3

Модуль упругости воды

$t, ^\circ\text{C}$	$K, \text{Па} \cdot 10^4$ при давлении, $\text{Па} \cdot 10^4$				
	50	100	200	390	780
0	185 400	186 400	188 400	191 300	197 300
5	189 300	191 300	193 300	197 200	203 100
10	191 300	193 300	197 200	201 100	208 000
15	193 300	196 200	199 100	205 000	212 900
20	194 200	198 200	202 100	208 000	217 800

Как следует из формулы $\beta_P = -\frac{dW}{W_0} \frac{1}{dp}$, при повышении давления

воды, например, до 40 МПа ее плотность повышается лишь на 2 %, а масла — на 3 %. Поэтому в большинстве случаев капельные жидкости можно считать практически несжимаемыми, т. е. принимать их плотность не зависящей от давления.

Различают адиабатный и изотермический модуль упругости. Первый больше второго приблизительно в 1,5 раза и проявляется при быстротечных процессах сжатия жидкости без теплообмена. Приведенные выше значения K являются значениями изотермического модуля.

Модуль упругости $K_{ж}$ зависит от температуры и давления. Поэтому различают два модуля упругости: адиабатический и изотермический. Первый имеет место при быстротекущих процессах без теплообмена. Процессы, происходящие в большинстве гидросистем, происходят с теплообменом, поэтому чаще используется изотермический модуль упругости. Примерная форма зависимостей $K_{ж}$ от P и t° представлена на графиках (рис.2.6). Всё это говорит о том, что жидкости не вполне точно следуют закону Гука.

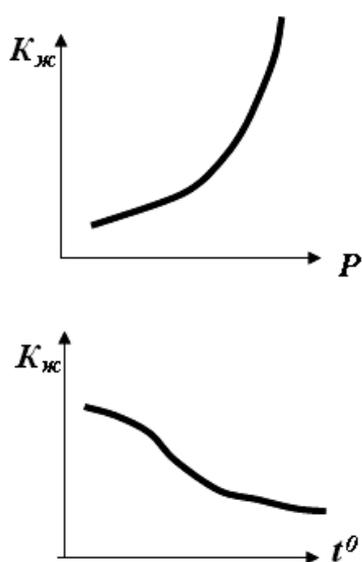


Рис.2.6

Приведём несколько примеров значений модулей упругости. Минеральные масла, используемые в технологических машинах с гидравлическим приводом, при $t^\circ = 20^\circ\text{C}$ имеют объёмные модули упругости $1,35 \cdot 10^3 \div 1,75 \cdot 10^3$ МПа (меньшее значение относится к более легкому маслу), бензин и керосин – приблизительно $1,3 \cdot 10^3$ МПа, глицерин - $4,4 \cdot 10^3$ МПа, ртуть – в среднем $3,2 \cdot 10^3$ МПа. В практике эксплуатации гидравлических систем имеются случаи, когда вследствие действия того или иного возмущения в жидкости

может значительно изменяться давление.

В таких случаях пренебрежение сжимаемостью приводит к существенным погрешностям.

Известно, что скорость распространения звука c в однородной жидкости можно определить по формуле

$$c = \sqrt{\frac{E_{жс}}{\rho}}.$$

Если вспомнить, что

$$E_{жс} = \rho \frac{dP}{d\rho},$$

и подставить это значение в формулу скорости распространения звука, получим

$$c = \sqrt{\frac{\rho \frac{dP}{d\rho}}{\rho}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}.$$

В этом случае изменение плотности жидкости, вызванное изменением давления, будет

$$d\rho = \frac{dP}{c^2}. \quad (2.9)$$

Если считать, что жидкость несжимаемая, т.е. $d\rho = 0$, то окажется, что скорость распространения звука в жидкости по приведённой формуле окажется бесконечной ($c = \infty$).

При использовании такого значения c в случае достаточно больших объёмов жидкости (водохранилище перед плотиной, нефтепровод и т.п.) или быстрого изменения давления, например, при резком закрытии или открытия запорного устройства в трубопроводе, результаты расчётов окажутся неточными. По этой причине в описанных условиях принимать жидкость несжимаемой недопустимо.

§ 2.5. ТЕМПЕРАТУРНОЕ РАСШИРЕНИЕ КАПЕЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Температурное расширение жидкости состоит в том, что она может изменять свой объем при изменении температуры. Это свойство характеризуется *температурным коэффициентом объемного расширения*, представляющим относительное изменение объема жидкости при изменении температуры на единицу (на 1°С) и при постоянном давлении:

$$\beta_t = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}, \quad (2.10)$$

где dW – изменение этого объема при повышении температуры на величину dt . По аналогии со свойством сжимаемости жидкости можно записать

$$W = W_0 (1 + \beta_t dt) \quad \text{или через плотность} \quad \rho_t = \rho_0 \frac{1}{1 + \beta_t (t - t_0)},$$

где t_0 – температура жидкости при нормальных условиях.

Изменение объёма при изменении температуры происходит за счёт изменения плотности.

Для воды при нормальных условиях коэффициент температурного расширения $\beta_t = 14 \cdot 10^{-6}$ (табл.2.4), для минеральных масел имеет порядок $800 \cdot 10^{-6}$.

Таблица 2. 4

Коэффициент температурного расширения воды

$t, ^\circ\text{C}$	$\beta_t \cdot 10^6, ^\circ\text{C}^{-1}$ при давлении, Па $\cdot 10^{-4}$				
	1	100	200	500	900
1-10	14	43	72	149	229
10-20	150	165	183	236	289
40-50	422	422	426	429	437
60-70	556	548	539	523	514
90-100	719	704	-	661	621

§ 2.6. ВЯЗКОСТЬ ЖИДКОСТИ. ЗАКОН ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ – ЗАКОН НЬЮТОНА

Вязкость – свойство жидкости оказывать сопротивление относительному сдвигу ее слоев. Вязкость проявляется в том, что при относительном перемещении слоев жидкости на поверхностях их соприкосновения возникают силы сопротивления сдвигу, называемые силами внутреннего трения, или силами вязкости.

Если рассмотреть то, как распределяются скорости различных слоёв жидкости по сечению потока, то можно легко заметить, что чем дальше от стенок потока, тем скорость движения частиц больше. У стенок потока скорость движения жидкости равна нулю.

Иллюстрацией этого является (рис.2.7), так называемая, струйная модель потока. На рисунке применены следующие обозначения:

u - скорость слоя жидкости,

dy - расстояние между соседними слоями жидкости.

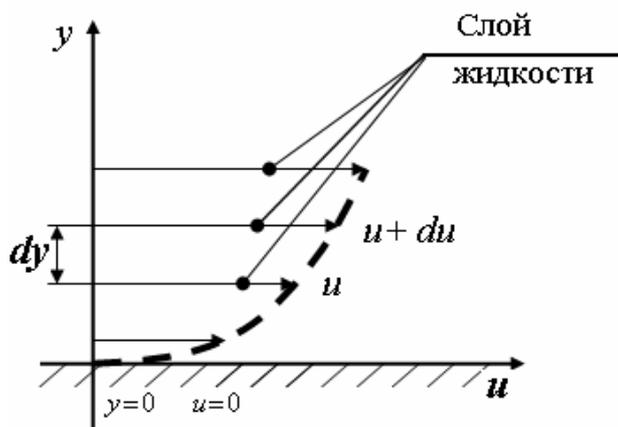


Рис.2.7

Медленно движущийся слой жидкости «тормозит» соседний слой жидкости, движущийся быстрее, и наоборот, слой, движущийся с большей скоростью, увлекает (тянет) за собой слой, движущийся с меньшей скоростью. Силы внутреннего трения появляются вследствие наличия межмолекулярных связей между движущимися слоями.

Если в равномерно движущемся потоке жидкости рассмотреть два соседних слоя с ординатами y_1 и y_2 , расположенных на расстоянии dy друг от друга (рис.2.8), и скорость первого из них обозначить u_1 , а скорость второго u_2 , то разница между ними составит du . Тогда можно записать

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_2} \frac{u_2 - u_1}{y_2 - y_1} = \frac{du}{dy}.$$

Эта величина называется градиентом скорости по сечению потока или поперечным градиентом скорости. Он показывает, как меняются скорости слоёв жидкости по сечению потока.

Если между соседними слоями жидкости выделить некоторую площадку S , то согласно гипотезе Ньютона

$$T = \mu S \frac{du}{dy}, \quad (2.11)$$

где T – силы вязкого трения;

S – площадь соприкасающихся слоев;

μ – коэффициент вязкого трения.

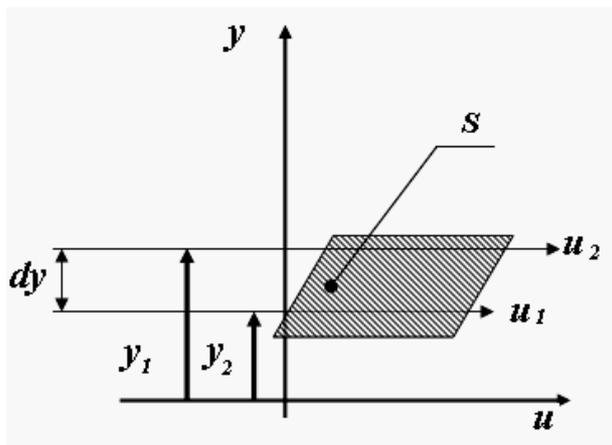


Рис.2.8

Величина μ в этом выражении является **динамическим коэффициентом вязкости**, равным

$$\mu = \frac{T}{S} = \pm \frac{1}{\frac{du}{dy}}$$

или

$$\mu = \pm \tau \frac{1}{\frac{du}{dy}},$$

где τ – касательное напряжение в жидкости (зависит от рода жидкости).

Физический смысл коэффициента вязкого трения - число, равное силе трения, развивающейся на единичной поверхности при единичном градиенте скорости.

Знак минус в правой части уравнения указывает на то, что касательное напряжение тормозит слой, движущийся с относительно большой скоростью.

Между слоями жидкости, движущимися со скоростями, отличающимися друг от друга на величину dU , возникает касательное напряжение τ .

$$\boxed{\frac{T\mu}{S} = \tau = \pm\mu \frac{du}{dy}} \quad (2.12)$$

В такой форме уравнение выражает *закон внутреннего трения Ньютона*, согласно которому *напряжение внутреннего трения, возникающее между слоями жидкости при ее течении, прямо пропорционально градиенту скорости.*

	<p>Английский математик, механик, астроном и физик, создатель классической механики. Один из основоположников современной физики, сформулировал основные законы механики. Закон вязкости (внутреннего трения) Ньютона – математическое выражение, связывающее касательное напряжение внутреннего трения (вязкость) и изменение скорости среды в пространстве (скорость деформации) для текучих тел (жидкостей и газов). Предложен И. Ньютоном в 1687 году. Жидкости (газы), подчиняющиеся этому закону называются нормальными или ньютоновскими, а все остальные, для которых закон не выполняется, – аномальными или неньютоновскими жидкостями.</p>
<p>НЬЮТОН (1643 -1727)</p>	

Размерность динамического коэффициента вязкости (динамической вязкости) равна:

$$[\mu] = \text{Па} \cdot \text{с} = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2.$$

$$[\mu] = \text{Па} \cdot \text{с} = \text{Н} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}^2}.$$

В технической системе мер единица вязкости имеет размерность $\text{кгс} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}^2}$; в физической – $\text{дин} \cdot \frac{\text{с}}{\text{см}^2}$; физическую единицу вязкости называют *пуазом*. Часто пользуются более мелкой единицей – сантипуазом (0,01 пуаза). Эти единицы вязкости связаны между собой соотношением: $1 \text{Па} \cdot \text{с} = 10 \text{Пуаз} = 1000 \text{сантипуаз} = 1/9,81 \text{кгс} \cdot \text{с} / \text{м}^2$.

Динамическая вязкость воды при нормальных условиях равна $10^{-3} \text{Па} \cdot \text{с}$, вязкость моторных масел на порядок больше, вязкость газов на два порядка меньше.

Величина обратная динамическому коэффициенту вязкости ($1/\mu$) называется **текучестью** жидкости.

На практике чаще используется **кинематический коэффициент вязкости**, названный так потому, что в его размерности отсутствует обозначение силы. Этот коэффициент представляет собой отношение динамического коэффициента вязкости жидкости к её плотности:

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.13)$$

Размерность $[\nu] = \frac{L^2}{T}$.

Единица измерения $[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

В размерности кинематической вязкости $[\nu] = \text{м}^2/\text{с}$ отсутствует размерность силы. До введения Международной системы единиц кинематическая вязкость измерялась в **стоксах** (Ст)

$$\left[\frac{\text{см}^2}{\text{с}} \right] = \text{Стокс (Ст)}$$

и сантисксах (Сст); $1 \text{ Ст} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$; $1 \text{ Сст} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Связь кинематической и динамической вязкости с плотностью и температурой воды находится из выражения:

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho_t} = \frac{\mu_t [1 + \beta_t (t - t_0)]}{\rho_0}. \quad (2.14)$$

Так, для чистой пресной воды зависимость вязкости от температуры определяется по формуле Пуазейля:

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.01775}{1 + 0.0337 t + 0.000221 t^2}}, \quad (2.15)$$

где ν - кинематический коэффициент вязкости;
 μ - динамический коэффициент вязкости;
 ρ - плотность воды при данной температуре;
 t - температура воды.

Процесс определения вязкости называется вискозиметрией, а приборы, которыми она определяется вискозиметрами. Помимо оценки вязкости с помощью динамического и кинематического коэффициентов пользуются условной вязкостью - градусы *Энглера* (°Э). Вязкостью, выраженной в градусах Энглера, называется отношение времени истечения 200 см³ испытуемой жидкости через капилляр $d = 2,8$ мм к времени истечения такого же объема воды при $t = 20$ °С.

$$1^{\circ}\text{Э} = \frac{t}{t_{\text{воды}}}, \quad (2.16)$$

где $t_{\text{воды}} = 51,6$ сек.

Для перехода от условной вязкости в градусах Энглера, к кинематической вязкости в м²/с, применяется несколько эмпирических формул, например формула *Убеллоде*:

$$\nu = \left(0,0731^{\circ}\text{Э} - \frac{0,0631}{^{\circ}\text{Э}} \right) \cdot 10^{-4}, \text{ м}^2/\text{с}. \quad (2.17)$$

а также теоретическая формула А.Д. Альтшуля:

$$^{\circ}\text{Э} = 24 \left[2,31 \lg \frac{\sqrt{\nu^2 + 0,0294} - \nu}{\sqrt{\nu^2 + 0,0166} - \nu} + \frac{1}{\nu} \cdot \left(\sqrt{\nu^2 + 0,0294} - \sqrt{\nu^2 + 0,0166} \right) \right], \quad (2.18)$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости, см²/с.

Таким образом, для оценки вязкости жидкости можно использовать три величины, которые связаны между собой (рис.2.9).



Рис.2.9

Вязкость повышается с увеличением давления P и уменьшается с увеличением температуры t (рис. 2.10).

Кинематическая вязкость газов зависит как от давления, так и от температуры, возрастая с увеличением температуры и уменьшаясь с увеличением давления.

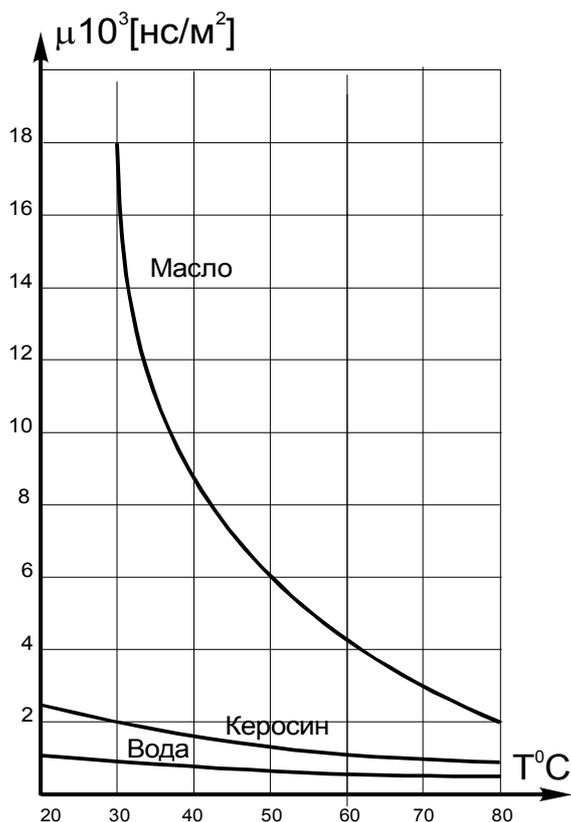


Рис. 2.10

Именно с вязкостью жидкости связана неоднородность распределения скорости при обтекании жидкостями твердой поверхности, так как молекулы жидкости, непосредственно прилегающие к поверхности твердого тела, прилипают к этой поверхности под действием сил притяжения их к молекулам твердого тела.

Прилипшие молекулы из-за вязкости жидкости взаимодействуют с близтекущими слоями, притормаживая их.

Теоретически такое тормозящее действие слоев друг на друга простирается по направлению к нормали к поверхности в бесконечность, т.е. скорость вдоль нормали должна изменяться в таких пределах: $y=0, u_w=0$; $y=\infty, u=u_0$ (индексами 0 и w отмечаются параметры невозмущенного потока и на твердой поверхности). Однако в большинстве технических случаев (маловязкие жидкости и достаточно большие скорости) значительное влияние прилипших молекул и, следовательно, существенное изменение скорости наблюдается лишь в относительно тонком пристеночном слое,

толщиной δ . Этот тонкий слой, в котором проявляется трение жидкости о твердую стенку (вязкое взаимодействие жидкости с твердой стенкой) называют **пограничным слоем**. Толщина пограничного слоя возрастает вдоль обтекаемой поверхности (подтормаживаются все новые слои жидкости). Вследствие асимптотичности влияния вязкости, за толщину пограничного слоя принимают расстояние от обтекаемой поверхности, на котором скорость жидкости в пограничном слое равна $u=0,99u_0$.

Одними из первых представления о пограничном слое высказали Д.И. Менделеев в монографии «О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании» (1880) и Н.Е. Жуковский в работе «О форме судов» (1890) и в более поздних лекциях. Немецкий ученый Людвиг Прандтль в 1904 г. получил дифференциальные уравнения движения жидкости в пограничном слое, которые лежат в основе теории пограничного слоя.

Кроме обычных (ньютоновских) жидкостей, в которых касательные напряжения отсутствуют в покоящейся жидкости, а вязкость не зависит от градиента скорости, существуют аномальные (неньютоновские) жидкости, вязкость которых зависит не только от давления и температуры, но и от градиента скорости; также имеются жидкости, в которых касательные напряжения существуют и в состоянии покоя, к которым относятся коллоидные растворы, смазочные масла, нефтепродукты.

§ 2.7. НЕНЬЮТОНОВСКИЕ ЖИДКОСТИ

Особенностью ньютоновских жидкостей является полное отсутствие трения покоя. Однако существуют жидкости (растворы полимеров, коллоидные суспензии, строительные растворы, пищевые и кормовые смеси и т. п.), для которых связь между касательным напряжением τ и поперечным градиентом скорости не подчиняется закону Ньютона.

Жидкости, не подчиняющиеся закону трения Ньютона, называются **неньютоновскими** или **реологическими**, отличаются от ньютоновских

наличием касательного напряжения в состоянии покоя τ_0 и изучаются в курсах реологии.

Для таких жидкостей закон внутреннего трения выражается в виде

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \frac{dU}{dy}, \quad (2.19)$$

где τ_0 – касательное напряжение в покоящейся жидкости, после преодоления, которой жидкость приходит в движение.

Физическое объяснение особых свойств реологических жидкостей основывается на представлении в них в неподвижном состоянии некоторой пространственной жесткой структуры, которая в состоянии сопротивляться внешнему воздействию до тех пор, пока вызванное им напряжение сдвига не превзойдет соответствующее этой структуре предельное напряжение. После этого структура полностью разрушается, и жидкость начинает вести себя как обычная ньютоновская жидкость при кажущемся напряжении, равном избытку действительного напряжения над предельным $(\tau - \tau_0)$. При уменьшении этого кажущегося напряжения до нуля, пространственная жесткая структура восстанавливается.

К классу неньютоновских жидкостей относятся: **вязкопластические, псевдопластические, дилатантные и вязкоупругие жидкости.**

Вязкопластические жидкости характеризуются наличием некоторого предельного напряжения сдвига, после достижения которого жидкость становится текучей. Реологические законы вязкопластических жидкостей установлены Бингамом (1916 г.) и Ф.Н.Шведовым (1889 г.). Вязкие напряжения в жидкостях Бингама-Шведова вычисляются по следующей формуле:

$$\tau = \tau_0 + \mu' \frac{du}{dy}, \text{ при } \tau > \tau_0. \quad (2.20)$$

Здесь τ_0 – предельное напряжение сдвига (предельное напряжение внутреннего трения); μ' - динамический коэффициент структурной вязкости. При $\tau < \tau_0$ текучесть отсутствует, т.е. жидкость ведет себя как твердое тело. Примерами вязкопластических жидкостей являются: глинистые и цементные растворы, масляные краски, сточные грязи, некоторые пасты.

Псевдопластические жидкости отличаются от вязкопластических тем, что лишены предельного напряжения текучести, но их вязкость определяется коэффициентом, зависящим от скорости сдвига (поперечного градиента скорости):

$$\tau = K \left(\frac{du}{dy} \right)^n, \quad (2.21)$$

где K и $n < 1$ – постоянные. Примеры псевдопластических жидкостей: суспензии ассимметричных частиц, растворы высокополимеров.

Дилатантные жидкости описываются таким же уравнением для вязких напряжений как для псевдопластических жидкостей. Но в отличие от них $n > 1$. К дилатантным жидкостям относятся суспензии твердых частиц при высоких их концентрациях, например, пульпа – высококонцентрированная смесь песка и воды, транспортируемая по трубам от земснаряда при углублении рек и водоемов, а также крахмальные клейстеры и клеи.

Вязкоупругие жидкости обладают как вязкостью, так и упругостью. К числу таких жидкостей относятся очень вязкие синтетические материалы, а также слабые растворы полимеров в ньютоновских жидкостях. Замечено, что иногда даже небольшие по весу добавки полимеров превращают ньютоновские жидкости в неньютоновские, сообщая им специфические вязкоупругие свойства. Одной из моделей вязкоупругой среды является модель Фойхта:

$$\tau = G \varepsilon + \mu \frac{du}{dy}, \quad (2.22)$$

где G – модуль сдвига;

ε - деформация сдвига;

μ - динамический коэффициент вязкости.

Перечисленные виды реологических жидкостей не исчерпывают всего разнообразия их специфических свойств. Механические свойства многих жидкостей существенно зависят не только от скорости деформации, но и от продолжительности деформирования, а также от предистории потока. Такие жидкости называются *тиксотропными*. Некоторые из них, *реопектические жидкости*, увеличивают жесткость своей структуры при наличии сдвигового напряжения, другие, наоборот, уменьшают ее. К первому типу относятся, например, цементные растворы в режиме «цепенения», расплавленные металлы, которые в жидком состоянии представляют собой чисто ньютоновские жидкости, а на начальной стадии затвердевания заполняются мельчайшими кристаллическими образованиями, приближающими их к дилатантными жидкостям. Ко второму типу относится, например, кефир. При встряхивании кефир, представляющий желеобразное тело, свободно выливается из бутылки, а после некоторого времени покоя вновь восстанавливает свою структуру.

С ростом температуры вязкость капельных жидкостей очень сильно падает (по экспоненте), а газов – растет по линейному закону.

Например, при нагревании пресной воды от 0 до 100°C коэффициент кинематической вязкости падает от $1,79 \cdot 10^{-6}$ до $0,29 \cdot 10^{-6}$ м²/с, то есть в 6 с лишним раз. В этом же диапазоне температур вязкость минеральных масел изменяется в десятки и сотни раз. При отрицательных температурах вязкость масел резко возрастает.

Причины разных зависимостей от температуры для газов и жидкостей в том, что вязкость газов имеет молекулярно-кинетическую природу, а капельных жидкостей зависит от сил сцепления между молекулами.

§ 2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ

Вязкость жидкости определяется экспериментально с помощью приборов, которые называются вискозиметрами. Примером такого прибора может служить вискозиметр Стокса. Его работа основана на следующем. В прозрачную трубку с жидкостью помещается шарик (рис.2.11), плотность которого выше плотности жидкости. Шарик медленно опускается в вязкой жидкости с постоянной скоростью V .

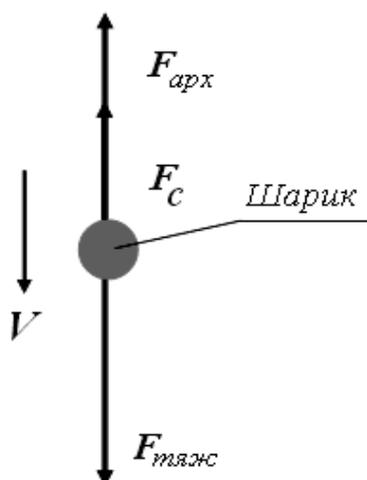


Рис.2.11

На шарик будут действовать: во-первых, сила тяжести

$$F_{тяжс} = \rho_{ш} W g,$$

во-вторых, выталкивающая (архимедова) сила

$$F_{арх} = \rho_{ж} W g,$$

в-третьих, сила Стокса, порождаемая вязким трением на поверхности шарика

$$F_c = 3 \pi d V \mu .$$

В приведённых выражениях применены следующие обозначения:

$\rho_{ш}$ - плотность материала шарика,

$\rho_{ж}$ - плотность жидкости

W - объём шарика,

V - скорость опускания шарика,

g - ускорение свободного падения,

μ - динамический коэффициент вязкости,

d - диаметр шарика.

Так как скорость тела постоянна, по второму закону Ньютона можно записать

$$F_{тяжс} = F_c + F_{арх} .$$

Объём шарика W

$$W = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение сил, действующих на шарик, получим:

$$3 \pi d \mu \frac{1}{V} = \frac{1}{6} \pi g d^3 (\rho_{ш} - \rho_{ж}).$$

Выразив из последней формулы μ , будем иметь выражение для определения динамического коэффициента вязкости:

$$\mu = \frac{1}{18} g d^2 \frac{1}{V} (\rho_{ш} - \rho_{ж}). \quad (2.23)$$

Если измерить время опускания шарика на определённую, заранее измеренную глубину, то нетрудно определить вязкость любой жидкости.

§ 2.9. ИСПАРЕНИЕ, КИПЕНИЕ, КАВИТАЦИЯ

Кипение – способность жидкости переходить в газообразное состояние (рис.2.12). Иначе это свойство жидкостей называют *испаряемостью*.

Испаряемость присуща всем жидкостям, но в различной степени, причем она сильно зависит от условий, в которых находится жидкость. Одной из характеристик испаряемости является *температура кипения при нормальном атмосферном давлении*.

Чем выше температура кипения жидкости при рабочем давлении, тем меньше ее испаряется.

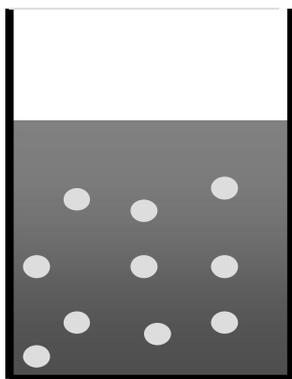


Рис.2.12

Но атмосферное давление – это лишь частный случай давления в гидросистеме, поэтому более полной характеристикой испаряемости является давление (упругость) насыщенных паров $p_{н.п.}$. С ростом температуры оно возрастает, но для разных жидкостей в различной степени. Для простых жидкостей эта зависимость является вполне определенной.

Для многокомпонентных смесей, к которым относятся большинство жидкостей, в том числе и бензин, давление насыщенных паров может зависеть от соотношения объемов паровой и газовой фаз.

Для многокомпонентных жидкостей (смесей) давление насыщенных паров зависит еще и от соотношения объемов паровой и жидкой фаз. Для них давление насыщенных паров тем больше, чем большая доля объема занята жидкостью. В справочниках для них приводятся значения $p_{н.п.}$ при соотношении объемов паровой и жидкой фаз 4:1.

В гидравлических системах иногда происходит интенсивное испарение и кипение рабочих жидкостей в замкнутых объемах при различных значениях давления и температуры.

Нарушение сплошности движущейся капельной жидкости, ее разрыва под действием растягивающих напряжений, возникающих при разрежении в рассматриваемой точке жидкости, называется **кавитацией**. При разрыве капельной жидкости образуются полости – кавитационные пузыри или каверны, заполненные паром, газом или их смесью. Кавитационные каверны образуются в тех местах, где давление в жидкости становится ниже некоторого критического. Критическое давление, при котором происходит разрыв жидкости, зависит от многих факторов: чистоты жидкости, содержания растворенного газа, состояния поверхности, на которой возникает кавитация.

Если давление в жидкости снижается вследствие возрастания местных скоростей потока жидкости, то кавитация называется **гидродинамической**; если снижение давления вызвано прохождением акустических волн, то кавитация называется **акустической**.

Впервые с явлением динамической кавитации встретились в судостроении в 1894 году при испытании английского миноносца «Дэринг». На режимах полного хода винт резко изменял свои характеристики, что приводило к падению скорости корабля. Тогда же Фрудом был введен

термин «кавитация». Примерно в то же время Рейнольдс исследовал возможность разрыва жидкости в трубках с горловиной.

В жидкости, свободной от примесей, при давлении, равном давлению ее насыщенных паров, происходит вскипание жидкости. Это явление называется *паровой кавитацией*. Образовавшиеся пузырьки пара переносятся потоком в область повышенного давления, где пар конденсируется, пузырьки схлопываются. Однако в потоке жидкости, как правило, содержится некоторое количество газа, мельчайшие пузырьки которого имеют радиус порядка 10^{-9} м и невидимы невооруженным глазом. Эти пузырьки воздуха – нуклеоны (зародыши) – переносятся потоком жидкости и, попадая в область низкого давления, начинают расти. Через поверхность пузырька происходит диффузия газа: внутрь пузырька или из него в зависимости от концентрации газа в пузырьке и окружающей его жидкости. Это явление называется *газовой кавитацией*. Практически почти всегда наблюдается парогазовая кавитация.

При попадании в область повышенного давления кавитационный пузырек уменьшается в размерах, а может схлопываться. Схлопывание сопровождается звуковыми импульсами и гидравлическими ударами, способными разрушить обтекаемую поверхность (кавитационная эрозия).

Кавитация вызывает:

а) снижение рабочих показателей у гидравлических машин: напора и подачи у насосов, мощности у турбин, упора у гребных винтов, подъемной силы у гидрокрыльев и, как следствие этого, уменьшение к.п.д.;

б) увеличение коэффициентов местных потерь ζ у трубок Вентури, диафрагм, клапанов, кранов и т.п.;

в) разрушение (эрозию) поверхности обтекаемых или направляющих стенок в районе исчезновения кавитационных пузырьков (на участке повышения давления жидкости);

г) появление шума и вибрации в гидравлических устройствах. Как правило, кавитация ухудшает характеристики гидравлических устройств и машин. Однако существуют и вновь разрабатываются технологии, использующие явление кавитации для получения положительного эффекта.

§ 2.10. СОПРОТИВЛЕНИЕ РАСТЯЖЕНИЮ ЖИДКОСТЕЙ

Сопротивление растяжению жидкостей заключается в способности жидкости противостоять растягивающим силам (рис.2.13).

Сопротивление растяжению жидкостей может возникать только в дегазированных жидкостях. В опытах удавалось при центрифугировании дегазированной дистиллированной воды получить на очень короткое время напряжения растяжения в воде, доходившие приблизительно до 25 МПа.

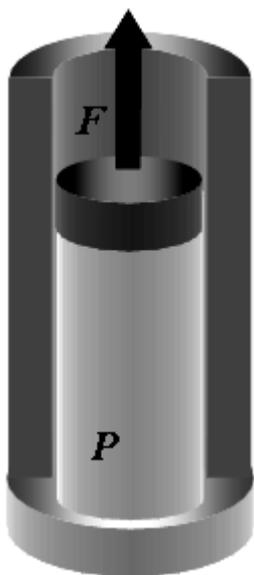


Рис.2.13

Технические жидкости не сопротивляются растягивающим усилиям.

Газы могут находиться в жидкости в растворенном и нерастворенном виде. Присутствие в жидкости нерастворенного газа в виде пузырьков существенно уменьшает модуль упругости жидкости, причем это уменьшение не зависит от размеров пузырьков воздуха.

Динамическая вязкость жидкости с увеличением содержания в ней воздуха растет. Содержание нерастворенного воздуха в рабочих жидкостях гидросистем машин и механизмов, так же как и в трубопроводах, подающих жидкость, может сильно повлиять на параметры работы трубопроводов и гидросистем.

§ 2.11. ОБЛИТЕРАЦИЯ

Заращивание узких щелей и зазоров вследствие адсорбции (отложения) полярноактивных молекул жидкости на их стенках называется *облитерацией*. Примыкающий к стенкам слой жидкости приобретает

свойства квазитвердого тела, вязкость которого отличается по величине от вязкости жидкости. Поэтому часть пограничного слоя прилипает к поверхности щели. Толщина этого слоя для масел равна 4...5 мкм, что может существенно уменьшить поперечное сечение щелевых каналов и зазоров или даже полностью их зарастить.

§ 2.12. РАСТВОРЯЕМОСТЬ ГАЗОВ В ЖИДКОСТЯХ

Растворение газов - способность жидкости поглощать (растворять) газы, находящиеся в соприкосновении с ней. Все жидкости в той или иной степени поглощают и растворяют газы. Это свойство характеризуется *коэффициентом растворимости k_p* .

Если в закрытом сосуде (рис.2.14) жидкость находится в контакте с газом при давлении P_1 , то газ начнёт растворяться в жидкости. Через какое-то время

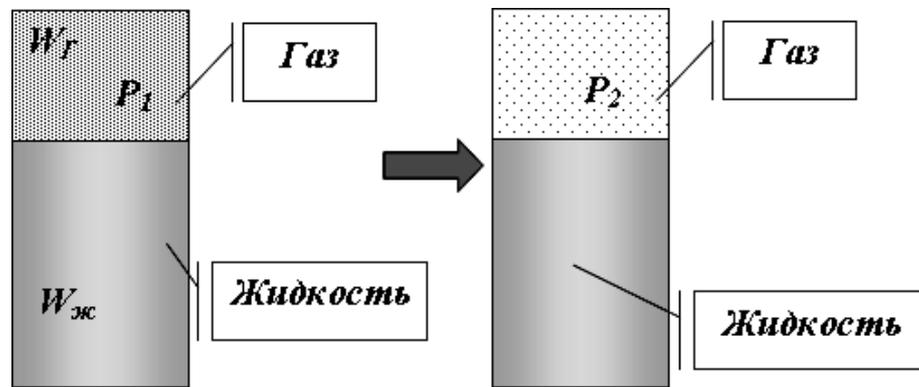


Рис. 2.14

произойдёт насыщение жидкости газом и давление в сосуде изменится. Коэффициент растворимости связывает изменение давления в сосуде с объёмом растворённого газа и объёмом жидкости следующим соотношением

$$\frac{W_{Г'}}{W_{ж}} = K_p \frac{p_2}{p_1}; \quad (2.24)$$

где W_G – объём растворённого газа при нормальных условиях,

$W_{Ж}$ – объём жидкости,

p_1 и p_2 – начальное и конечное давление газа.

Коэффициент растворимости зависит от типа жидкости, газа и температуры.

При температуре 20°C и атмосферном давлении в воде содержится около 1,6% растворенного воздуха по объему ($k_p = 0,016$). С увеличением температуры от 0 до 30 °С коэффициент растворимости воздуха в воде уменьшается. Коэффициент растворимости воздуха в маслах при температуре 20 °С равен примерно 0,08 – 0,1.

При увеличении плотности и вязкости минерального масла растворимость газов немного снижается. С увеличением температуры коэффициент растворимости почти не меняется, но учитывать это малое влияние надо, когда жидкость работает в широком температурном диапазоне: насыщенная газом жидкость при одной температуре может начать выделять растворенный газ при другой температуре, что приведет к образованию пены, которая нарушает сплошность среды и может вызвать отказ гидросистемы.

В обычном состоянии минеральное масло насыщается воздухом в течение нескольких часов, но если масло взбалтывается в баке, образуется пена. Площадь соприкосновения жидкости и воздуха возрастает во много раз. Это может вызвать насыщение жидкости газом в течение нескольких минут.

Кислород отличается более высокой растворимостью, чем воздух, поэтому содержание кислорода в воздухе, растворенном в жидкости, примерно на 50% выше, чем в атмосферном. При уменьшении давления газ из жидкости выделяется. Процесс выделения газа протекает интенсивнее, чем растворение.

§ 2.13. КАПИЛЛЯРНОСТЬ

На поверхности раздела жидкости и газа действуют силы поверхностного натяжения, которые стремятся придать объему жидкости сферическую форму, но сила тяжести не позволяет сделать это, если жидкость находится в значительном объеме. Это явление заметно только, когда жидкость рассматривается в объеме капли или находится в тонком капилляре или зазоре. Силы поверхностного натяжения создают в жидкости дополнительное давление

$$p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости [Н/м];

r_1, r_2 – радиусы кривизны.

В капиллярах и зазорах это давление вызывает подъем или опускание жидкости относительно нормального уровня. Это явление называется капиллярностью. Дополнительное давление направлено всегда к центру кривизны мениска. Если жидкость не смачивает поверхность капилляра, то мениск имеет выпуклую форму, и давление от сил поверхностного натяжения совпадает по направлению с атмосферным давлением – уровень жидкости в капилляре снижается. Если жидкость смачивает поверхность капилляра, то мениск имеет вогнутую форму, и дополнительное давление будет направлено вверх, навстречу атмосферному давлению. Как следствие этого – подъем жидкости по капилляру. Высота подъема (опускания) жидкости в стеклянной трубке вычисляется по формуле:

$$h = \frac{k}{d},$$

где d – диаметр капилляра [мм];

k – коэффициент, индивидуальный для каждой жидкости [мм²].

Например, для воды $k = 30$ мм²; для спирта $k = 11,5$ мм²; для ртути $k = -10,1$ мм².

В жидкостных приборах для измерения давления применяют трубки диаметром 10 – 12 мм. В этом случае эффект капиллярности мало ощутим. В зазоре один из радиусов кривизны стремится к бесконечности, поэтому и дополнительное давление, и высота отклонения уровня получаются в 2 раза меньше, чем в капилляре.

Особые свойства воды

Известно, что в понятие “вода” следует включать вещества, состоящие не только из молекул H_2O^{16} . Различные комбинации изотопов водорода и кислорода обуславливают существование 36 разновидностей воды. В природной воде 99,7% молекул H_2O^{16} , на долю остальных разновидностей молекул воды приходится лишь 0,3%. Это не означает, что влияние других разновидностей молекул на свойства воды пропорционально их доле в общем объеме воды.

Вода – аномальное вещество. Прежде всего, при различных температурах и давлениях вода может находиться в одном из трех агрегатных состояний: твердом (лед), жидком и газообразном (пар).

При уменьшении температуры от 4 до 0°C объем воды не уменьшается (как у всех других веществ, кроме висмута), а увеличивается. Плотность воды, имеющая максимальное значение при 4°C, при этом уменьшается. При замерзании объем воды увеличивается примерно на 10%. Температура замерзания воды с увеличением давления (до 19,6 МПа) понижается, а затем повышается.

Известно, что конвекция в водоемах (с пресной водой)! прекращается при 4°C. При этой температуре в нижних слоях находится вода с большей плотностью, чем в верхних слоях.

Морская вода замерзает при температуре -1,9°C. Вода в капиллярах в почве иногда может замерзнуть и при температуре +4,4°C.

Вода обладает чрезвычайно большой ***теплоемкостью***, например в 10 раз большей, чем железа, в 33 раза большей, чем ртуть, в 3,3 раза большей,

чем спирт и глицерин, и т. д. При этом обычно теплоемкость других жидкостей с увеличением температуры увеличивается. Вода характеризуется минимальным значением теплоемкости при 35°C, а с ростом температуры теплоемкость вновь растет. Появление этого минимума объясняется разрушением ассоциаций (групп) молекул воды примерно при этой температуре.

Вода обладает очень высокой *теплотой испарения* и *скрытой теплотой плавления*. Например, теплота испарения воды в 8 раз, а скрытая теплота плавления в 27 раз больше, чем спирта. При атмосферном давлении для перехода воды в пар из окружающей среды требуется в 6,75 раза больше теплоты, чем при плавлении льда при том же давлении.

При конденсации влаги (образовании тумана) выделяется значительное количество теплоты. Это используется в установках, создающих искусственный туман; такие установки помимо орошения могут использоваться для предохранения растений от заморозков.

Электропроводность сухого льда и снега гораздо меньше электропроводности воды, причем электропроводность воды сильно зависит от наличия примесей, а на электропроводность льда они влияют очень мало. Электропроводность воды, естественно, зависит от количества растворенных в ней солей. Поэтому электропроводность морской воды на 2-3 порядка больше, чем электропроводность пресной речной воды, а по сравнению с химически чистой водой при 18°C - примерно в 12000 раз.

Вода является сильным растворителем. Эта способность воды характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью, которая довольно высока и при 0°C равна около 87, а с ростом температуры уменьшается до 55,7 при 100°C. Таким образом, по сравнению с воздухом и водяным паром, диэлектрическая проницаемость которых равна 1, эта характеристика воды гораздо больше (для льда она равна 3,2).

В связи с наличием в воде растворенного воздуха, богатого кислородом, и ряда агрессивных компонентов вода воздействует на материалы, из

которых возведены сооружения. При этом может происходить коррозия. Растворенные в воде соли и взвешенные в ней твердые частицы могут привести к “зарастанию” стенок, например трубопровода, вследствие чего пропускная способность таких труб может существенно уменьшиться.

§ 2.14. РАБОЧИЕ ЖИДКОСТИ ГИДРОСИСТЕМ. ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

Кроме рассмотренных физических свойств жидкостей при их использовании в технологических машинах нужно учитывать и другие характеристики. Они не влияют на математическое описание гидравлических явлений, но оказываются существенными при эксплуатации гидросистем. Требования к таким свойствам определяются, прежде всего, целью, с которой жидкость применяется в технологической машине. В гидроприводе жидкость выполняет несколько различных функций. Во-первых, это функция рабочего тела, обеспечивающего перенос энергии в гидросистеме, поэтому её называют рабочей жидкостью, в гидроприводах тормозов – тормозными жидкостями. Во-вторых, рабочая жидкость является смазочным и охлаждающим веществом. В системах смазки их называют маслами, в системах охлаждения – охлаждающими или смазочно-охлаждающими жидкостями (СОЖ). В этом случае они обеспечивают уменьшение сил трения в парах трения. В-третьих, жидкость является средой, удаляющей из гидросистемы продукты износа. В-четвёртых, смазочно-охлаждающие жидкости обеспечивают защиту деталей от коррозии. Комплекс физико-химических свойств рабочих жидкостей должен наилучшим образом обеспечивать их основную и дополнительные функции. Рабочие жидкости гидросистем должны обладать следующими дополнительными свойствами:

Хорошие смазывающие свойства. Рабочая жидкость должна создавать на поверхности трущихся пар поверхностную пленку, предотвращающую сухое трение.

Антифрикционные (смазывающие) свойства заключаются в способности жидкости уменьшать силы трения между движущимися деталями. Данное свойство обеспечивается посредством добавления различных модификаторов и присадок.

Стабильность вязкости состоит в минимальной зависимости вязкости от температуры в требуемом температурном диапазоне. Вязкость жидкости должна быть оптимальна, т.е. должна обеспечивать хорошие смазывающие свойства при минимальных утечках через неплотности и зазоры в гидросистеме. Это свойство существенным образом зависит от относительных скоростей движения подвижных частей.

Температура кипения должна быть высокой, что обеспечивает работоспособность и стойкость жидкости в большом температурном диапазоне.

Устойчивость к механической и химической деструкции и к окислению должна быть высокой в условиях применяемого температурного режима, а также в течение максимально длительного срока службы.

Модуль объемной упругости должен максимально высоким.

Температурой застывания называется наибольшая температура, при которой поверхность жидкости, залитой в стандартную пробирку, не перемещается при наклоне пробирки на 45° в течение 5 минут. Эта температура характеризует жидкость с точки зрения сохранения ее текучести, а следовательно, возможности ее транспортировки и слива при низких температурах. Температура застывания рабочей жидкости должна быть на $10 - 17^\circ\text{C}$ ниже наименьшей температуры окружающей среды, в условиях которой будет работать гидросистема.

Температурой замерзания называют температуру начала кристаллизации, т.е. температуру, при которой в жидкости образуется облачко из мельчайших кристаллов. При этом не должно быть расслаивания жидкости и выделения из нее составных компонентов.

Жидкость не должна содержать легкоиспаряющиеся компоненты, испарение которых может привести при продолжительной эксплуатации к загустению жидкости.

Огнестойкость. Жидкость не должна быть причиной возникновения или распространения пожара. С этой точки зрения ее характеризуют температурами вспышки, воспламенения и самовоспламенения.

Температура вспышки – это минимальная температура, при которой над поверхностью жидкости образуется количество пара, достаточное для кратковременной вспышки при появлении источника огня (искры).

Температура воспламенения – это минимальная температура, при которой количество выделяемого пара над поверхностью жидкости достаточно для продолжительного горения при появлении источника огня.

Температура самовоспламенения – это минимальная температура, при которой над поверхностью жидкости выделяется такое количество паров, что их становится достаточно для самопроизвольного воспламенения без постороннего источника огня.

Всегда температура вспышки ниже температуры воспламенения, а температура самовоспламенения – выше, но величина интервалов между этими температурами может быть самой разной.

Масла на нефтяной основе имеют температуры воспламенения примерно 180–230°C, а самовоспламенения – 260–370°C и выше. Синтетические рабочие жидкости менее опасны в пожарном отношении, чем минеральные масла. В условиях эксплуатации они не распространяют огня, хотя в принципе они могут гореть. Минеральные масла при температурах выше 70°C следует отделять от воздуха химически неактивным газом (азотом, гелием, аргоном и т.п.) или механическими способами.

Низкая испаряемость и растворимость газов. Не желательно, чтобы в состав рабочей жидкости входили легко испаряющиеся компоненты, испарение которых может привести к загустеванию жидкости, а также способствовать возникновению кавитации насоса.

Высокий объемный модуль упругости, то есть жидкость должна быть жесткой.

Нейтральность к применяемым материалам. Минеральные масла оказывают благотворное воздействие на металлические изделия. Масляная пленка защищает металл от коррозии и возникновения механических повреждений при трении. На резиновые изделия, в частности уплотнения, минеральное масло оказывает разрушающее воздействие. Изменение их свойств, происходящее под воздействием жидкости, сопровождается нарушением герметичности и другими ошибками в работе гидросистем.

В резине под действием масла протекают сложные физико-химические процессы (вымывание отдельных компонентов резины и замещение их жидкостью). При этом изменяются как физико-механические свойства резины, так и объем уплотнения. Резина может набухать, может дать усадку. Это зависит от марки резины и марки масла.

Ни одна рабочая жидкость не обладает абсолютной инертностью. Поэтому важно, чтобы она не критично ухудшала основные качества материала уплотнительных устройств. В результате длительного контакта рабочей жидкости с резиновыми деталями могут изменяться их объем, вес, прочность и другие механические свойства деталей. Особо следует отметить влияние на резину синтетических жидкостей, одни из которых вызывают либо чрезмерное набухание уплотнительного материала, либо, наоборот, значительную его усадку.

По техническим условиям допускается набухание резины до 5 – 6 %, или усадка до 3 % от первоначального объема.

Механическая и химическая стойкость. Физическая стабильность жидкости нарушается при длительной работе в условиях высоких давлений, вибраций или при высоких касательных напряжениях (при дросселировании). В результате этого в жидкости происходят молекулярно-структурные изменения в жидкости (механическая деструкция),

сопровождающаяся понижением ее вязкости и ухудшением ее смазывающих свойств.

При указанных механических воздействиях разрушаются длинные углеводородные цепочки, они “перемалываются” при длительном “мятии”. Особенно заметен этот эффект в масляных смесях с вязкостными добавками.

Под химической стойкостью понимают устойчивость жидкости против “старения” (химической деструкции), происходящего в результате ее окисления кислородом воздуха. В процессе окисления из жидкости выпадает осадок в виде смол. С ростом температуры процесс окисления ускоряется (повышение температуры на 8 – 10°C приводит к удвоению скорости окисления масла).

Большинство минеральных масел при повышении температуры даже до сравнительно невысоких значений изменяют свой состав. Происходит либо крекинг-процесс, сопровождающийся уменьшением среднего молекулярного веса и выделением легко летучих фракций, либо процесс полимеризации, при котором образуются смолы, осадки, коксоподобные вещества. Иногда протекают оба эти процесса. С повышением температуры эти процессы ускоряются, при высокой температуре масло может стать негодным уже через несколько десятков часов, так как необратимо падает его вязкость.

Высокие теплофизические характеристики. Как можно выше должна быть **удельная теплоемкость жидкости**. Это количество тепла, необходимое для повышения температуры 1 кг жидкости на 1°C. У большинства реальных жидкостей и газов удельная теплоемкость с ростом температуры растет: у жидкостей незначительно, а у газов – существенно.

Как можно больше должен быть **коэффициент теплопроводности** рабочей жидкости, который равен количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единичную площадку сквозь слой вещества единичной толщины при перепаде температур на его границах в 1°C, то есть характеризует способность вещества пропускать, рассеивать тепло.

Коэффициент теплопроводности с ростом температуры растет по следующей зависимости:

$$\lambda = a \cdot (1 + 0,012 \cdot t),$$

где a – коэффициент, зависящий от природы жидкости.

Высокие теплоемкость и теплопроводность рабочей жидкости позволяют избегать значительного нагрева жидкости в местах гидросистемы, где происходит значительное выделение теплоты.

Минеральные масла плохо проводят тепло, они уступают в этом отношении жидкостям на водной основе примерно в 5 раз, а теплоемкость минеральных масел примерно в 1,5 раза ниже. Поэтому при работе в одинаковых условиях температура минерального масла в гидросистеме примерно на 25 – 30°C выше, чем у жидкости на водной основе.

Высокие изолирующие и диэлектрические качества. Минеральные масла, не содержащие примесей, обладают хорошими диэлектрическими свойствами. Это позволяет помещать в них электроагрегаты (соленоиды, обмотки электродвигателей и пр.) без дополнительной изоляции проводников. Однако многие осадки, которые выделяются из масел при неправильной эксплуатации, обладают относительно высокой электропроводностью. Поэтому накопление таких осадков на токопроводящих частях может вызвать искрение и пожар. Кроме того, следует предотвращать попадание в минеральное масло воды, которая, как известно, электропроводна.

Жидкость и продукты ее распада не должны быть токсичны.

Дешевизна и доступность, так как рабочие жидкости используются очень широко, и в больших количествах.

Перечисленные свойства гидравлических рабочих жидкостей, к сожалению, не носят постоянный характер, и в процессе работы гидросистем происходит изменение их характеристик. Наиболее

существенным фактором, влияющим на свойства рабочих жидкостей, является количество и состав частиц загрязняющих эту жидкость.

Загрязнение рабочих жидкостей гидросистемы может происходить

- во время поставки жидкостей, хранения и заправки их в гидросистему,
- в процессе изготовления, сборки и испытания элементов гидросистемы,
- в процессе эксплуатации,
- за счёт распада самой жидкости под действием различных факторов.



Контрольные вопросы

1. Перечислите основные физические свойства жидкостей.
2. Что подразумевается под жидкостью в механике жидкости и газа?
3. Что подразумевается под сплошностью среды?
4. Какая связь существует между плотностью и удельным весом жидкостей?
5. Какова размерность плотности и удельного веса?
6. В каких единицах измеряется плотность и удельный вес в системе СИ?
7. Что такое относительный удельный вес?
8. Что такое коэффициент объемного сжатия жидкости? Какова его размерность?
9. Если $\beta_{p1} > \beta_{p2}$, то какая из жидкостей (1 или 2) более сжимаема?
10. Какая связь коэффициента объемного сжатия с модулем объемной упругости? Какова его размерность?
11. Что такое коэффициент температурного расширения? Какова его размерность?
12. Какая связь коэффициента температурного расширения с плотностью жидкости?
13. Если $K_1 > K_2$, то какая из жидкостей более сжимаема?
14. Что называется вязкостью жидкости?
15. Что такое коэффициент динамической вязкости? Какова его размерность?
16. Какая связь существует между коэффициентами динамической и кинематической вязкости?
17. В каких единицах измеряется динамическая и кинематическая вязкость в системе СИ?
18. Какая связь существует между кинематической и динамической вязкостью с плотностью и температурой воды?
19. Какими приборами измеряется вязкость?

20. Какие жидкости относятся к аномальным?
21. В чем отличие аномальных жидкостей от ньютоновских?
22. Что характеризует испаряемость жидкости?
23. Какое из действий (увеличение или снижение давления над поверхностью жидкости) приведет к прекращению начавшегося кипения?
24. Каковы особенности капиллярного поднятия или опускания жидкости? Зависит ли их количественная характеристика от параметров жидкости и рода материала стенок капилляра?
25. От чего зависит растворимость газов в жидкости?
26. Что такое коэффициент растворимости?
27. При каких условиях происходит выделение газа из жидкости?
28. Какими свойствами должны обладать рабочие жидкости гидросистем?



Примеры решения задач

Задача 1. При гидравлическом испытании трубопровода диаметром $d = 200$ мм и длиной 250 м давление в трубе было повышено до 3 МПа. Через час давление снизилось до 2 МПа. Сколько воды вытекло через неплотности?

Решение:

1. Определим объем воды в трубопроводе:

$$W = \frac{\pi \cdot d^2 l}{4} = \frac{\pi \cdot 0,2^2 \cdot 250}{4} = 7,85 \text{ м}^3.$$

2. Найдем изменение давления за время испытания:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 3 - 2 = 1 \text{ МПа.}$$

3. Принимая коэффициент объемного сжатия воды $\beta_p = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{кПа}}$,

находим количество воды, вытекающей через неплотности, по формуле

$$\Delta W = -\beta_p W \Delta p = 5 \cdot 10^{-10} \cdot 7,85 \cdot 1 \cdot 10^6 = 3,925 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \approx 3,93 \text{ л.}$$

Задача 2. Сколько кубометров воды будет выходить из котла, если в течение часа в отопительный котел поступило 50 м^3 воды при температуре 70°C , а затем температура воды повысилась до 90°C .

Решение:

1. Принимая коэффициент температурного расширения $\beta_t = 0,00064 \frac{1}{\text{град}}$, находим увеличение расхода воды:

$$\Delta Q = \beta_t Q_H \Delta t = 0,00064 \cdot 50 \cdot 20 = 0,64 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

2. Расход воды из котла при $t = 90^\circ\text{C}$:

$$Q_K = Q_H - \Delta Q = 50 + 0,64 = 50,64 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Задача 3. Определить изменение плотности воды при увеличении ее температуры от 20 до 40°C .

Решение. Изменение плотности можно найти по следующей приближенной формуле:

$$\rho = \frac{\rho_t}{1 + \beta_t (T - T_0)},$$

где $\rho_t = 998 \text{ кг/м}^3$ - плотность при температуре 20°C ; $\beta_t = 0,00029$

Отсюда

$$\rho = \frac{998}{1 + 0,00029 \cdot (313 - 293)} = 992,25 \text{ кг/м}^3$$

Задача 4. Определить кинематическую и динамическую вязкость воды при температуре 50°C (давление $p = 100\,000 \text{ Па}$).

Решение. Для определения кинематической вязкости используем формулу

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{0,01775}{1 + 0,0337t + 0,000221t^2} = \\ &= \frac{0,01775}{1 + 0,0337 \cdot 50 + 0,000221 \cdot 50^2} = 0,0054 \text{ Стокс(Ст)} \end{aligned}$$

Формула для определения динамической вязкости воды имеет вид

$$\mu = \frac{0,0179}{1 + 0,0368t + 0.000221t^2} = \frac{0.0179}{1 + 0.0368 \cdot 50 + 0.000221 \cdot 50^2} =$$

$$= 0,0053 \text{ Пуаз(П)} = 0,00053 \text{ Па} \cdot \text{с} \left(\frac{\text{КГ}}{\text{М}} \cdot \text{с} \right)$$

Сделаем проверку, определив кинематическую вязкость по формуле

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

где $\rho = 988 \text{ кг/м}^3$ - плотность воды при температуре 50°C .

Отсюда

$$\nu = \frac{0.00053}{988} = 0.54 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Задача 5. Определить кинематическую и динамическую вязкость нефти при температуре 20°C . Вязкость, определенная по вискозиметру Энглера, составляет $8,9^\circ\text{Э}$.

Решение. Плотность нефти при температуре 20°C составляет $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$.

Кинематическую вязкость найдем по формуле Убеллоде:

$$\nu = 0,731 \text{ }^\circ\text{Э} - 0,0631/\text{ }^\circ\text{Э} = 0,731 \cdot 8,9 - 0,0631/8,9 = 0,64350011 \text{ Ст}$$

$$= 0,0643 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Динамическая вязкость будет:

$$\mu = \nu \cdot \rho = 0,643 \cdot 10^{-4} \cdot 900 = 0,578 \text{ Па} \cdot \text{с} = 0,578 \text{ П}.$$

Задача 6. Определить изменение плотности нефти при сжатии ее от $p_1 = 1 \cdot 10^5$ до $p_2 = 1 \cdot 10^6$ Па, если коэффициент объемного сжатия нефти $\beta_v = 7,4 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

Решение. Коэффициент объемного сжатия определяется по формуле

$$\beta_v = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \text{ или } \frac{\Delta V}{V} = \beta_v \Delta p,$$

где V - объем жидкости при давлении p_1 ;

ΔV - изменение объема жидкости при ее сжатии.

Разность давлений находится по формуле

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 1 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^6 = -0,9 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Плотность нефти определяется соотношением

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (2.25)$$

где M - масса нефти.

Так как масса нефти в процессе сжатия остается неизменной, то

$$\frac{\rho_{p_2}}{\rho_{p_1}} = \frac{V_1}{V_2}, \quad (2.26)$$

где

$$V_2 = V_1 + \Delta V = \left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right) V_1. \quad (2.27)$$

Формула (2.27) с учетом (2.25) будет

$$V_2 = (1 + \beta_v \Delta p) \cdot V_1. \quad (2.28)$$

Подставляя (2.28) в (2.26), получим

$$\frac{\rho_{p_2}}{\rho_{p_1}} = \frac{1}{1 + \beta_v \Delta p} = \frac{1}{1 - 7,4 \cdot 10^{-10} \cdot 0,90 \cdot 10^{-6}} = 1,00006.$$

Отсюда следует, что плотность нефти с изменением давления от 10^5 до 10^6 Па изменяется незначительно.

Задача 7. Определить коэффициент динамической и кинематической вязкости воды, если шарик $d = 2$ мм из эбонита с $\rho = 1,2 \cdot 10^3$ кг/м³ падает в воде с постоянной скоростью $v = 0,33$ м/с. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

Решение. При движении шарика в жидкости с постоянной скоростью сила сопротивления равняется весу шарика. Сила сопротивления определяется по формуле Стокса:

$$F = 3 \cdot \pi \cdot \mu \cdot v \cdot d.$$

Вес шарика определяется по формуле

$$G = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot d^3 / 6.$$

Так как $G = F$, то

$$\rho \cdot g \cdot \pi \cdot d/6 = 3 \cdot \pi \cdot \mu \cdot v \cdot d.$$

Следовательно, коэффициент динамической вязкости определится

$$\mu = \frac{\rho \cdot g \cdot d^2}{18 \cdot v};$$

$$\mu = 1,2 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2 / (18 \cdot 0,33) = 0,008 \text{ Па}\cdot\text{с}.$$

Коэффициент кинематической вязкости

$$v = \frac{\mu}{\rho};$$

$$v = 0,008/10^3 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить плотность жидкости и ее удельный объем, если жидкость находится в емкости массой $m_{\text{емк}} = 5,5$ кг. Масса заполненной жидкостью емкости $m_{\text{общ}} = 18,9$ кг, а ее объем $V = 15$ л.

Задача 2. Вычислить массу нефти в цистерне, если к $V_1 = 7 \text{ м}^3$ нефти с плотностью $\rho_1 = 820 \text{ кг/м}^3$ добавлено $V_2 = 2,6 \text{ м}^3$ нефти с плотностью $\rho_2 = 795 \text{ кг/м}^3$. Определить, как и на сколько изменятся плотность и объем нефти после повышения ее температуры с $t_n = 15^\circ \text{ С}$ до $t_k = 35^\circ \text{ С}$ (коэффициент температурного расширения нефти принять равным $\beta_t = 0,00072 \text{ 1/К}$).

Задача 3. Вычислить кинематическую вязкость воды при $t_1 = 20^\circ \text{ С}$, если значение динамической вязкости составляет $\mu = 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ (плотность воды при данной температуре принять равной $\rho = 998 \text{ кг/м}^3$). Чему будет равна кинематическая вязкость воды после повышения ее температуры на $\Delta t = 2^\circ \text{ С}$?

Задача 4. Определить вес G_r труб общей длиной $L = 2,9$ км, опущенных в скважину, заполненную глинистым раствором плотностью $\rho_2 = 1630 \text{ кг/м}^3$,

если известно, что 1 м таких труб с муфтами в воздухе весит $G_{п.м.} = 300$ Н. Плотность материала труб $\rho_T = 7500$ кг/м³.

Задача 5. Определить объем, занимаемый $m = 15$ тоннами воды с температурой 10° С. Как и на сколько изменится занимаемый водой объем после ее нагрева до 22° С?

Задача 6. После сжатия воды в цилиндре под поршнем давление в ней увеличилось на 3 кПа. Необходимо определить конечный объем воды в цилиндре, если ее первоначальный объем составлял $W_1 = 2,55$ л, коэффициент объемного сжатия воды $\beta_w = 4,75 \cdot 10^{-10}$ 1/Па.

Задача 7. Вязкость нефти, определенная по вискозиметру Энглера, составляет $8,5^\circ$ Э. Вычислить динамическую вязкость нефти, если ее плотность $\rho = 850$ кг/м³.

Задача 8. Бочка, заполненная бензином и не содержащая воздуха, нагрелась на солнце до $t = 50^\circ$ С. На сколько повысилось бы давление бензина внутри бочки, если бы она была абсолютно жесткой? Начальная температура бензина $t = 20^\circ$ С. Модуль упругости принять $E = 1300$ МПа, коэффициент температурного расширения $\beta_t = 8 \cdot 10^{-4} \text{C}^{-1}$.

Задача 9. Определить избыточное давление на дне океана, глубина которого $H = 10$ км, приняв плотность морской воды $\rho = 1030$ кг/м³ и считая ее несжимаемой. Определить плотность воды на той же глубине с учетом сжимаемости и приняв модуль объемной упругости $E_{ж} = 2000$ МПа.

Задача 10. Кинематическая вязкость нефти при $t_{20} = 20^\circ$ С и $t_{50} = 50^\circ$ С составляет: $\nu_{20} = 0,758$ см²/с и $\nu_{50} = 0,176$ см²/с. Определить кинематическую вязкость при $t = 105^\circ$ С.

Задача 11. Определить высоту капиллярного поднятия воды и опускания ртути в стеклянной капиллярной трубке диаметром $d=0,001$ м при температуре 20° С.

ГЛАВА 3.

ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ

*Идите, идите вперед, уверенность
придет к вам позже.*

Д'Аламбер

§ 3.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Гидростатика является разделом прикладной механики жидкости и газа, в котором изучаются законы равновесия жидкости.

Согласно закону внутреннего трения Ньютона, в неподвижной жидкости касательные напряжения τ равны 0, так как $dV = 0$.

Растягивающие нормальные напряжения, даже самые незначительные, приводят жидкость в движение, поэтому в неподвижной жидкости они тоже отсутствуют.

Вследствие текучести жидкости в ней не могут действовать сосредоточенные силы, а возможно лишь действие сил, непрерывно распределенных по ее объему (массе) или по поверхности. Поэтому внешние силы, действующие на рассматриваемый объем жидкости, разделяют на массовые (объемные) и поверхностные.

Массовые силы пропорциональны массе жидкого тела или (для однородных жидкостей) его объему.

К ним относятся **сила тяжести** и **силы инерции** переносного движения, действующие на жидкость при относительном ее покое в ускоренно движущихся сосудах или при относительном движении жидкости в руслах.

Поверхностные силы проявляются на граничных поверхностях рассматриваемого жидкого тела.

Вследствие действия этих сил внутри жидкости возникают напряжения сжатия, которые в гидравлике называются **давлением** и обозначаются буквой

P . В гидростатике силы, действующие на жидкость, принимаются не зависящими от времени. С учётом этого положения можно считать, что напряжения, возникающие в жидкости под действием внешних сил, зависят только от координат точки X, Y, Z в жидкости. Таким образом, основными задачами гидростатики являются определение давления в жидкости как функции координат

$$P = f_P(X, Y, Z),$$

а также определение сил, действующих со стороны жидкости на твёрдые стенки.

Поверхностную силу, действующую нормально к какой-либо площадке, называют *силой давления*.

Поверхностная сила, действующая по касательной к площадке, является *силой сопротивления*.

Сила сопротивления проявляется только при движении жидкости, а сила давления – как при движении, так и при покое жидкости.

§ 3.2. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ЖИДКОСТИ

§ 3.2. 1. МАССОВЫЕ СИЛЫ

Массовые силы – это силы, пропорциональные массе жидкости. В случае однородной жидкости эти силы пропорциональны объёму. Прежде всего, к ним относится *вес* жидкости (рис. 3.1)

$$G = mg = W \rho g = W \gamma,$$

где G – вес жидкости, W – объём жидкости, m – масса жидкости,

g – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости,

γ – удельный вес жидкости.

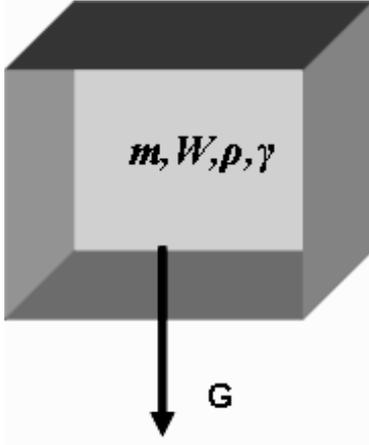


Рис. 3.1

Напряжением массовых сил называют отношение вектора массовой силы $\Delta \vec{G}$, действующей на рассматриваемую массу жидкости Δm :

$$\vec{g} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta m}, \text{ м/с}^2.$$

Как известно, масса является мерой инертности тела. Это свойство присуще и жидкостям, поэтому к массовым силам относятся и **силы инерции**:

$$F_{ин} = m \frac{dV}{dt} = \rho W \frac{dV}{dt} = ma,$$

где $F_{ин}$ – инерционная сила,

V – скорость жидкости,

t – время движения,

a – ускорение движения.

Силы инерции, действующие в жидкости, так же как и для твёрдого тела, могут проецироваться на оси (рис.3.2).

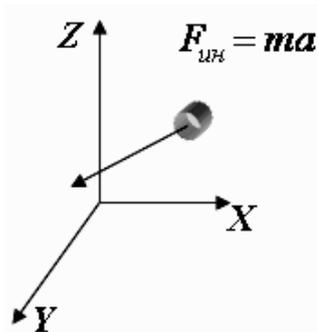


Рис.3.2

$$F_{ин}^x = m \frac{dV_x}{dt} = ma_x. \quad (3.1)$$

$$F_{ин}^y = m \frac{dV_y}{dt} = ma_y. \quad (3.2)$$

$$F_{ин}^z = m \frac{dV_z}{dt} = ma_z, \quad (3.3)$$

где $F_{ин}^x, F_{ин}^y, F_{ин}^z$ - проекции сил инерции на соответствующие оси.

§ 3.2.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ СИЛЫ

Поверхностные силы – силы, величины которых пропорциональны площади. К ним относят два вида сил. Силы *поверхностного натяжения* и силы *вязкого трения*. Последние проявляются только при движении жидкости и не играют никакой роли, когда жидкость находится в покое.

§ 3.2.3. СИЛЫ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Молекулы жидкости притягиваются друг к другу с определённой силой. Причём внутри жидкости силы, действующие на любую молекулу, уравниваются, т.к. со всех сторон от неё находятся одинаковые молекулы, расположенные на одинаковом расстоянии.

Однако молекулы жидкости, находящиеся на границе (с газом, твердым телом или на границе двух несмешивающихся жидкостей) оказываются в неуравновешенном состоянии т.к. со стороны другого вещества действует притяжение других молекул (рис.3.3), расположенных на других расстояниях.

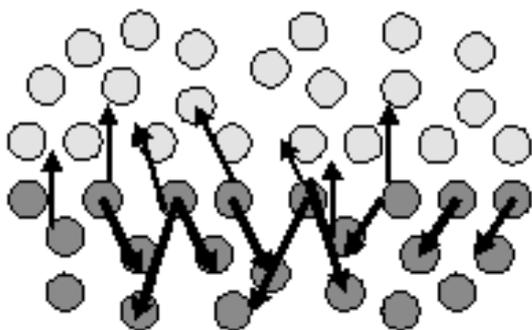


Рис.3.3

Возникает преобладание какой-то силы. Под влиянием этого воздействия поверхность жидкости стремится принять форму, соответствующую наименьшей площади. Если силы внутри жидкости больше наружных сил, то поверхность жидкости стремится к сферической форме.

Например, малые массы жидкости в воздухе стремятся к шарообразной форме, образуя капли.

Может иметь место и обратное явление, которое наблюдается как явление *капиллярности*. В трубах малого диаметра (капиллярах) наблюдается искривление свободной поверхности, граничащей с газом или с

парами этой же жидкости. Если поверхность трубки смачивается, свободная поверхность жидкости в капилляре вогнутая. Если нет смачивания, свободная поверхность выпуклая, как при каплеобразовании. Во всех этих случаях силы поверхностного натяжения обуславливают дополнительные напряжения $p_{нов}$ в жидкости. Величина этих напряжений определяется формулой

$$p_{нов} = \frac{2\sigma}{r}, \quad (3.4)$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения,

r - радиус сферической поверхности, которую принимает жидкость.

Эти дополнительные напряжения легко наблюдать, если в сосуд с жидкостью погрузить капилляр. В этом опыте возможны два варианта (рис.3.4).

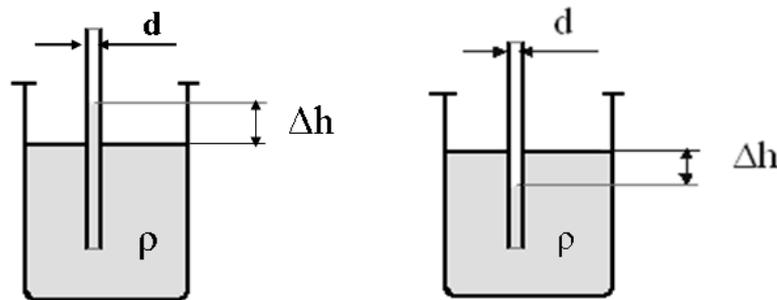


Рис.3.4

В первом случае жидкость, за счёт поверхностных сил, поднимется по капилляру на некоторую высоту. Тогда говорят о **капиллярном поднятии**, и наблюдается явление **смачивания**. Во втором варианте жидкость опускается в капилляре ниже уровня жидкости в сосуде. Такое явление называют **капиллярным опусканием**, которое происходит при **несмачивании**.

В обоих случаях величина Δh пропорциональна дополнительному напряжению, вызванному в жидкости поверхностными силами. Она равна

$$\Delta h = \frac{k}{d};$$

где d – диаметр капилляра,

k – коэффициент пропорциональности, который выражается следующей формулой

$$k = \frac{4\sigma}{g\rho},$$

σ - коэффициент поверхностного натяжения, и зависит от жидкости.

Например, при $t = 20^\circ\text{C}$, k спирта составляет 11,5, ртути –10,15, воды - 30.

Поднятие жидкости в капиллярах почвы и грунтов (вода, нефть и т.п.) является важным фактором в распространении жидкости. Высота капиллярного поднятия в грунтах изменяется от нуля (галечники) почти до 5 м (глины). При этом с увеличением минерализации воды высота капиллярного поднятия увеличивается.

Поверхностное натяжение и капиллярные эффекты определяют закономерности движения жидкости в условиях невесомости.

К поверхностным силам относятся и силы давления, т.к. они действуют на поверхности жидкости.

§ 3.2.4. СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ

Давление – напряжение, возникающее в жидкости под действием сжимающих сил. В общем случае поверхностная сила ΔR , действующая на площадке ΔS под некоторым углом к ней, может быть разложена на нормальную ΔF_n и тангенциальную ΔT составляющие (рис.3.5).

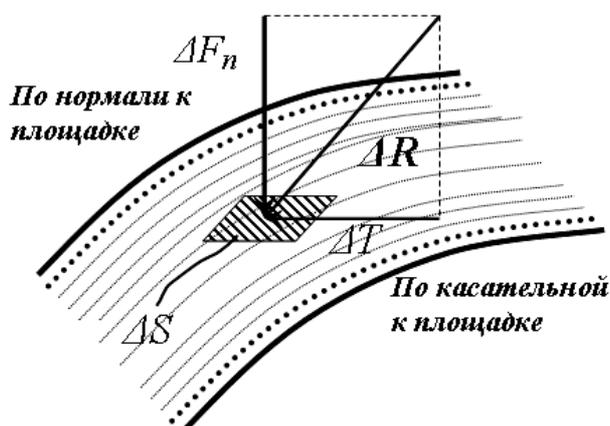


Рис. 3.5

Первая, направленная внутрь объема, называется силой давления, вторая – силой трения. Нормальная составляющая вызывает в жидкости нормальные напряжения или *гидромеханическое давление*, которое в покое жидкости называется *гидростатическим*. Если сила ΔF_n равномерно распределена по площадке ΔS , то

$$\Delta P = \frac{\Delta F_n}{\Delta S},$$

или переходя, к пределу

$$dP = \frac{dF}{dS}.$$

В любом случае причиной возникновения давления является внешняя сила, приложенная к жидкости. Часто в гидроприводе такой силой является нагрузка F , приложенная к исполнительному органу. Эта нагрузка воздействует на жидкость через какую-то жёсткую поверхность и, следовательно, распределена равномерно, например площадь поршня гидроцилиндра S . В таком случае давление P определяется по формуле

$$\boxed{P = \frac{F}{S}}. \quad (3.5)$$

Если давление p отсчитывается от нуля, то оно называется *абсолютным*. Существуют приборы, позволяющие измерять величину абсолютного давления, однако они громоздки и неудобны в пользовании.

Поэтому на практике измеряют не абсолютную величину давления, а разность двух давлений: искомого и атмосферного (барометрического).

Атмосферное давление измеряется барометром того или иного типа. *Атмосферное* давление обозначается $p_{\text{атм}}$. Если определяемая величина давления больше атмосферного, то положительная величина разности давлений называется *избыточным давлением*, которое измеряется различного типа манометрами и потому называется еще и

манометрическим. Если же измеряемая величина давления меньше атмосферного, то избыточное давление является отрицательной величиной, и его абсолютное значение называют **вакуумметрическим давлением** или **вакуумом.**

Если измеряемое давление больше атмосферного, то

$$p_{\text{абс}} = p_{\text{атм}} + p_{\text{изб}} = B + \Delta p;$$

если измеряемое давление меньше атмосферного, то

$$p_{\text{абс}} = p'_{\text{абс}} = p_{\text{атм}} - p_{\text{вак}} = B - \Delta p$$

и
$$p_{\text{вак}} = -p_{\text{изб}}$$

Соотношение между указанными выше давлениями можно представить в виде схемы (рис. 3.6).

Буквой B часто обозначают барометрическое давление, а Δp – разницу между абсолютным и атмосферным давлением.

В системе СИ единица измерения давления называется **паскаль** (Па).
 $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$.

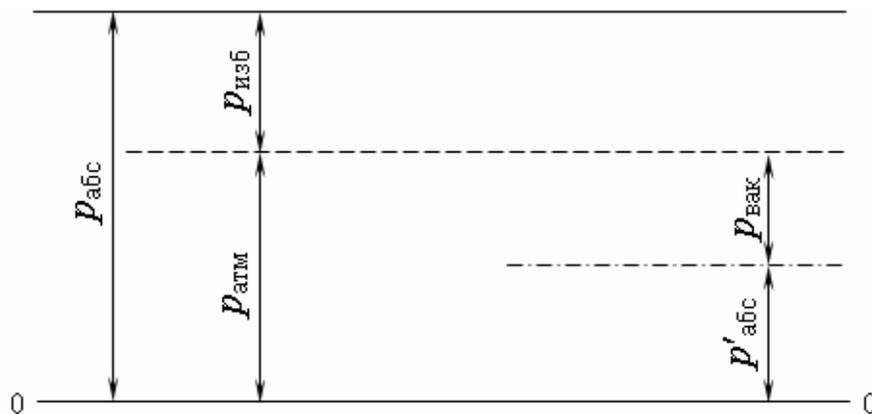


Рис. 3.6

В инженерной практике еще используются такие единицы измерения давления:

1 *техническая атмосфера*, $1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па}$;

1 *физическая атмосфера*, $1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$;

1 *бар* = 10^5 Па ;

1 *миллиметр ртутного столба* – $1 \text{ мм рт.ст.} = 133,3 \text{ Па}$;

1 миллиметр водяного столба – 1 мм вод.ст. = 9,81 Па.

Кроме того, различают давление *гидродинамическое* и *гидростатическое*. Гидродинамическое давление возникает в движущейся жидкости. Гидростатическое давление – давление в покоящейся жидкости.

Соответствие единиц измерения давления в различных системах представлено в табл.3.1

Таблица 3.1

Единицы измерения давления

Единицы давления	Па	бар	кгс/м ²	кгс/см ²	мм рт.ст.	м вод.ст.	Атмосфера техн., ат	Атмосфера физич., атм
Па	1	0,00001	0,102	1,02·10 ⁻⁵	0,0075	1,02·10 ⁻⁴	1,02·10 ⁻⁵	0,987·10 ⁻⁵
бар	100000	1	10200	1,02	750	10,2	1,02	0,987
кгс/м ²	9,81	0,0000981	1	0,0001	0,0735	0,001	0,0001	0,968·10 ⁻⁴
кгс/см ²	98100	0,981	100000	1	735,6	10	1	0,968
мм рт.ст.	133,3	0,00133	13,6	0,00136	1	0,0136	0,00136	0,001316
м вод.ст.	9810	0,0981	1000	0,100	73,556	1	0,1	0,0968
Атмосфера технич., ат	98100	0,981	10000	1	735,6	10	1	0,968
Атмосфера физич., атм	101325	1,01325	10332	1,0332	760	10,332	1,0332	1

§ 3.3. СВОЙСТВА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Первое свойство формулируется следующим образом: в любой точке жидкости гидростатическое давление перпендикулярно площадке касательной к выделенному объему и действует внутрь рассматриваемого объема жидкости.

Доказывается первое свойство путём рассуждений методом «от противного». Рассмотрим покоящуюся жидкость. Известно, что жидкость плохо сопротивляется касательным усилиям. Если бы сила, от давления R

действовала бы не по нормали к площадке (рис.3.7), то её можно было бы представить в виде двух составляющих – нормальной F_n и касательной F_τ .

Тогда касательная составляющая смещала бы слои жидкости друг относительно друга. Это означало бы, что жидкость не находилась бы в покое. Это противоречит начальному утверждению.

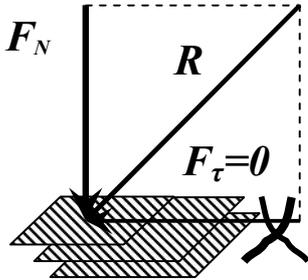


Рис.3.7

Из первого свойства следует, что напряжение сжатия - единственный вид напряжений в покоящейся жидкости.

Второе свойство состоит в том, что в любой точке внутри жидкости давление по всем направлениям одинаково.

Иначе это свойство давления звучит так: на любую площадку внутри объёма жидкости, независимо от её угла наклона, действует одинаковое давление.

Докажем второе свойство. Для этого рассмотрим произвольный объём в неподвижной жидкости (рис.3.8.) в виде прямоугольного тетраэдра с размерами dx, dy, dz . Будем рассматривать этот объём в некоторой произвольной системе координат X, Y, Z .

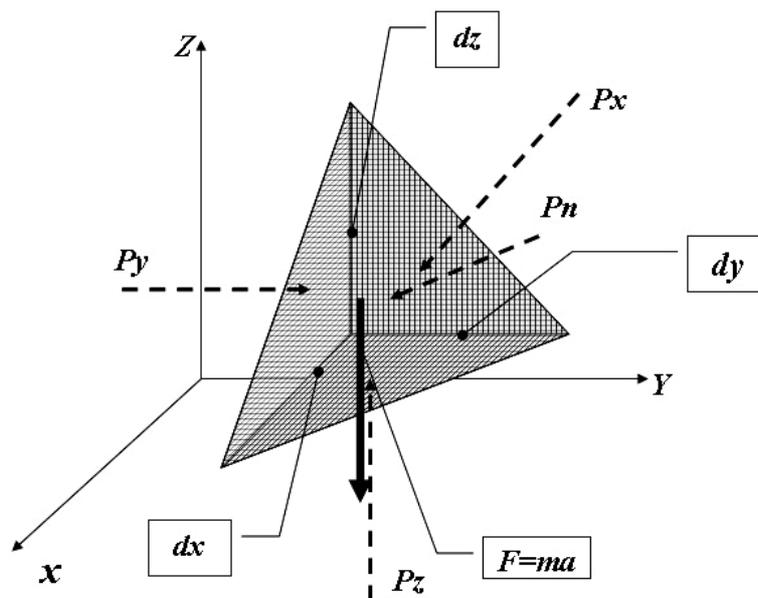


Рис.3.8

На рисунке приведены следующие буквенные обозначения:

P_x, P_y, P_z - гидростатическое давление, действующее на грань, перпендикулярную соответствующей оси,

P_n - гидростатическое давление, действующее на наклонную грань dS ,

F - инерционные силы (или силы веса).

Тетраэдр dx, dy, dz по определению находится в покое, следовательно, сумма сил, действующих на него равна 0, т.е.

$$\sum_{x,y,z} F_{x,y,z} = 0.$$

Подробно рассмотрим эти силы. Прежде всего, на выделенный тетраэдр действуют силы давления. В проекциях на оси системы координат по направлению каждой из осей действует сила от давления на грань, перпендикулярную этой оси. Этой силе противодействует проекция на соответствующую ось силы давления на наклонную (большую) грань тетраэдра. Получаются три пары сил, соответственно осям:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} P_x d_z d_y - P_n dS \cos(\hat{x}, n) \\ \frac{1}{2} P_y d_x d_z - P_n dS \cos(\hat{y}, n) \\ \frac{1}{2} P_z d_x d_y - P_n dS \cos(\hat{z}, n). \end{cases} \quad (3.6)$$

Вместе с силами давления, в общем случае, на тетраэдр действуют инерционные силы (или в простейшем случае сила веса), которые равны произведению массы на проекцию ускорения на соответствующую ось. Массу определим как произведение плотности жидкости и объёма тетраэдра.

Объём для прямоугольного тетраэдра равен $\frac{1}{6} dx dy dz$. В этом случае инерционные силы примут вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_x \\ \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_y \\ \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_z \end{cases}.$$

Сложив обе полученные системы уравнений, и, приравняв их 0 по причине равновесия тетраэдра, получим общую систему уравнений сил, действующих в покоящейся жидкости: ^

$$\begin{cases} \frac{1}{2} P_x d_z d_y - P_n dS \cos(x, n) + \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_x = 0 \\ \frac{1}{2} P_y d_x d_z - P_n dS \cos(y, n) + \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_y = 0 \\ \frac{1}{2} P_z d_x d_y - P_n dS \cos(z, n) + \frac{1}{6} dx dy dz \rho a_z = 0. \end{cases}$$

Если учесть, что площадь каждой грани тетраэдра, параллельной плоскостям координат, равна площади проекции наклонной грани на соответствующую координатную плоскость, получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} d_z d_y = dS \cos(x, n) = \frac{1}{2} d_x d_z = dS \cos(y, n) = \frac{1}{2} d_x d_y = dS \cos(z, n).$$

Разделив уравнения сил на соответствующие одинаковые площади, получим:

$$\begin{cases} P_x - P_n + \frac{1}{3} dx \rho a_x = 0 \\ P_y - P_n + \frac{1}{3} dy \rho a_y = 0 \\ P_z - P_n + \frac{1}{3} dz \rho a_z = 0 \end{cases}.$$

Устремив размеры тетраэдра к 0, т.е. $d_x, d_y, d_z \rightarrow 0$ и $dS \rightarrow 0$ последняя система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} P_x - P_n = 0 \\ P_y - P_n = 0 \\ P_z - P_n = 0 \end{cases}.$$

Приравняв все три уравнения, получим следующее равенство:

$$\boxed{P_x = P_y = P_z = P_n}. \quad (3.7)$$

В результате можно сделать следующий вывод: давление не зависит от направления, от ориентации элементарной площадки или другими словами:

давление - величина скалярная.

Этот закон **изотропии давления** в точках сплошной среды, находящейся в равновесии, был открыт в середине XVII в. Б. Паскалем.

Однако возникает вопрос, каким образом получается, что давление и площадь величины скалярные, а их произведение сила – величина векторная.

$$\vec{F} = P \times S - ?.$$

Ответ на этот вопрос заключается в следующем. Направление **вектора силы** задаёт площадка, на которую действует давление. Это направление всегда **перпендикулярно площадке действия** и направлено внутрь рассматриваемого объёма.

Третье свойство определяет, что гидростатическое давление в точке зависит от ее координат в пространстве.

Это положение не требует специального доказательства, так как ясно, что по мере увеличения погружения точки давление в ней будет возрастать, а по мере уменьшения погружения уменьшаться. Третье свойство гидростатического давления может быть записано в виде $P=f(x, y, z)$.

§ 3.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ

Выделим в жидкости, находящейся в равновесии, элементарный параллелепипед с ребрами dx , dy , dz , параллельными осям координат x , y , z (рис. 3.9). Выберем в центре параллелепипеда точку A . Давление в этой точке

будет $p = f(x, y, z)$.

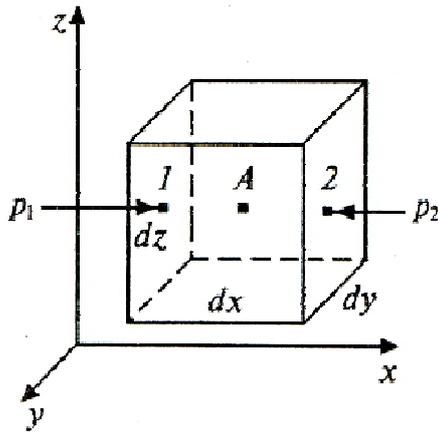


Рис.3.9

Так как это давление является непрерывной функцией координат, то, разлагая функцию $p = f(x, y, z)$ в ряд Тэйлора в окрестности точки A с точностью до бесконечно малых первого порядка, получим следующие соотношения для давлений p_1 и p_2 . В точках 1 и 2 на гранях параллелепипеда, перпендикулярных оси x :

$$\begin{aligned} p_1 &= p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx; \\ p_2 &= p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Давления в точках 1 и 2 можно также записать в виде отношения силы к площади:

$$p_1 = \frac{F_1}{dzdy} = \frac{F_1}{d\omega_x}; \quad p_2 = \frac{F_2}{dzdy} = \frac{F_2}{d\omega_x}, \quad (3.9)$$

где F_1 и F_2 - силы, действующие в точках 1 и 2.

Запишем условие равновесия сил, действующих на элементарный параллелепипед, в проекции на ось x :

$$F_1 - F_2 + F_m = 0, \quad (3.10)$$

где F_m - массовая сила, определяемая по формуле

$$\begin{aligned} F_m &= Xdm = X\rho dV = X\rho dx dy dz, \\ F_m &= Xdm = X\rho dV = X\rho dx dy dz, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где dm - масса элементарного параллелепипеда.

Подставляя формулы (3.9), (3.11) в формулу (3.10), получим

$$\begin{aligned} p_1 dz dy - p_2 dz dy + X\rho dx dy dz &= 0. \\ p_1 dz dy - p_2 dz dy + X\rho dx dy dz &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя формулы для p_1 и p_2 , найдем

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) + X \rho dx = 0.$$

Отсюда

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Аналогичные уравнения можно получить, если спроектировать действующие на параллелепипед силы на оси y и z . В итоге будем иметь систему трех дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}, \quad (3.12)$$

где X, Y, Z - проекции ускорений массовых сил, приходящихся на единицу массы.

Эти уравнения впервые были выведены Эйлером в 1755 г. и называются **уравнениями равновесия жидкости Эйлера**. Они показывают, что при равновесии жидкости массовые силы уравновешиваются соответствующими поверхностными силами.



Леонард Эйлер
(1707-1783)

Швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Множество работ Эйлера посвящены математической физике: механике, гидродинамике, акустике и др.

В 1755 году публикуются «Общие принципы движения жидкостей», в которых положено начало теоретической гидродинамике. Выведены основные уравнения гидродинамики (уравнение Эйлера) для жидкости без вязкости. Разобраны решения системы для разных частных случаев. Опубликовал целый ряд оригинальных решений гидравлических задач, широко используя созданный к тому времени математический аппарат.

§ 3.5. ПОТЕНЦИАЛ МАССОВЫХ СИЛ

Умножая уравнения Эйлера (3.12) соответственно на dx , dy , dz и почленно складывая, получим

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz. \quad (3.13)$$

Так как $p = f(x, y, z)$, то полный дифференциал этой функции будет

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz. \quad (3.14)$$

Следовательно, правая часть уравнения (3.13) есть полный дифференциал

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = d\rho. \quad (3.15)$$

Равенство (3.15) имеет смысл лишь в том случае, если левая его часть есть также полный дифференциал какой-то функции. Обозначим эту функцию через $u = u(x, y, z)$. Тогда полный дифференциал ее будет

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (3.16)$$

Примем

$$d\rho = -\rho du. \quad (3.17)$$

Из сопоставления равенств (3.15), (3.17) получим

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Функцию $u = u(x, y, z)$ называют **потенциальной функцией**, а силы, для которых эта функция существует, - силами, имеющими потенциал.

Отсюда вывод: жидкость может находиться в равновесии только под действием массовых сил, имеющих потенциал, так как только такие силы удовлетворяют уравнениям равновесия Эйлера.

§ 3.6. ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Проинтегрируем уравнение (3.17) при $\rho = \text{const}$:

$$\int dp = -\rho \int du.$$

Отсюда

$$p = -\rho u + c, \quad (3.18)$$

где c - постоянная интегрирования. Полагая, что при $p = p_0$ потенциальная функция $u = u_0$, будем иметь

$$p_0 = -\rho u_0 + c,$$

Отсюда

$$c = p_0 + \rho u_0. \quad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в (3.18), получим

$$p = -\rho u + p_0 + \rho u_0$$

или

$$p = p_0 - \rho(u - u_0).$$

Последнее соотношение является *интегралом уравнений Эйлера* для несжимаемой капельной жидкости.

Так как величина $\rho(u - u_0)$ не зависит от давления p_0 и определяется лишь системой массовых (но не поверхностных) сил, то отсюда следует, что насколько изменится давление p_0 , настолько же изменится и давление p в любой точке жидкости. Отсюда можно сформулировать закон Паскаля: давление, производимое на поверхность капельной жидкости, находящейся в равновесии, передается всем ее частицам без изменения его величины.

§ 3.7. УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ РАВНОГО ДАВЛЕНИЯ

Поверхностью равного давления называют такую выделенную в жидкости поверхность, гидростатическое давление во всех точках которой одно и то же. Для такой поверхности, очевидно, $dp = 0$. Так как $p = f(x, y, z)$,

то уравнение поверхности равного давления $p = \text{const}$ будет

$$f(x, y, z) = \text{const} = C.$$

$$f(x, y, z) = \text{const} = C.$$

Придавая C различные значения, будем переходить от одной поверхности равного давления к другой. Это уравнение является уравнением семейства поверхностей равного давления. Поверхности равного давления и равного потенциала совпадают. Так как $-\rho du = dp$, то при $dp = 0$, $du = 0$ и $u = \text{const}$.

Определение уравнения поверхности равного давления по заданным массовым силам производится по уравнению

$$p(Xdx + Ydy + Zdz) = dp = 0. \quad (3.20)$$

Ввиду отсутствия массовых сил по осям x , y и с учетом того, что массовая сила по оси z $Z = -g$, уравнение (3.20) примет вид $-\rho g dz = 0$ или $dz = 0$. Отсюда $z = \text{const}$.

Следовательно, поверхности равного давления, в том числе и свободная поверхность - горизонтальные плоскости.

§ 3.8. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

Пусть на неподвижную жидкость действует только одна массовая сила – сила тяжести. Свободная поверхность жидкости представляет собой плоскость (размеры рассматриваемого объема жидкости не соизмеримы с размерами Земли). На свободную поверхность действует давление p_0 . Найдем давление в произвольной точке M , расположенной на глубине h (рис.3.10). Выделим около этой точки горизонтальную элементарную площадку dS и построим на ней вертикальный цилиндрический объем высотой h .

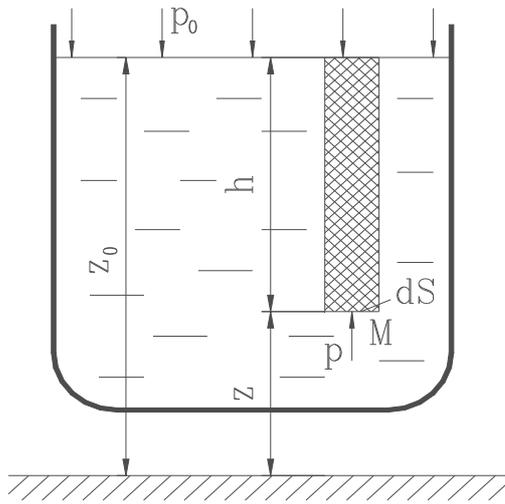


Рис. 3.10

Уравнение равновесия для единицы объема жидкости на свободной поверхности $z = z_0$,

$$p_0 = -\rho g z_0 + \text{const.} \quad (3.21)$$

Для единицы объема жидкости на высоте z основное уравнение гидростатики:

$$p = -\rho g z + \text{const} \quad (3.22)$$

или

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.} \quad (3.23)$$

Из уравнения (3.21) находим

$$\text{const} = p_0 + \rho g z_0$$

и подставляем ее в уравнение (3.22):

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z).$$

Если ввести переменную $h = z_0 - z$, которую назовем глубиной погружения, то основной закон гидростатики для несжимаемой жидкости будет выглядеть таким образом:

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}, \quad (3.24)$$

которое можно прочитать так: **давление в любой точке покоящейся жидкости складывается из давления на свободную поверхность жидкости p_0 и веса столба жидкости $\rho g h$, или избыточного давления.**

По этому уравнению можно вычислить давление в неподвижной жидкости на любой глубине. Мы видим, что давление в жидкости складывается из давления на внешнюю поверхность и давления, создаваемого весом вышележащих слоев жидкости.

Величина p_0 одинакова для всех точек объема жидкости, поэтому, учитывая свойство гидростатического давления, можно сформулировать закон Паскаля: **давление, приложенное к внешней поверхности жидкости,**

передается всем точкам этой жидкости и по всем направлениям одинаково.

Как мы видим, с увеличением глубины погружения давление возрастает по линейному закону и на данной глубине есть величина постоянная. Поверхность, во всех точках которой давление одинаково называется **поверхностью уровня**. Как мы видим, эта поверхность – плоскость, параллельная свободной поверхности.

Если от произвольного уровня отложить вертикальные координаты точки $M(z)$ и свободной поверхности (z_0) и заменить $h = z_0 - z$, то получим другую форму записи основного уравнения гидростатики:

$$p + \rho g z = p_0 + \rho g z_0 = \text{const} \quad \text{или}$$

$$\boxed{z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}}, \quad (3.25)$$

где z – геометрический напор (высота);

$\frac{p}{\rho g}$ – пьезометрический напор (высота).

Сумма геометрического и пьезометрического напоров – **это гидростатический напор**. Таким образом, гидростатический напор для всего объема неподвижной жидкости есть величина постоянная.

§ 3.9. ЭПЮРЫ ДАВЛЕНИЯ

Закон распределения в жидкости гидростатического давления легко изобразить графически в виде **эпюр давления**. Для этого нужно представить давление вектором, направление которого совпадает с направлением давления, а значение пропорционально значению давления.

Эпюры всегда следует строить со стороны жидкости, помня о направлении действия нормальных напряжений в покоящейся жидкости (по внутренней нормали). Так, для плоской наклонной стенки, восстановив в каждой ее точке перпендикуляры, равные $p_i = p_0 + \rho g h_i$ для давления и $p_{изб}$

$= \rho g h_i$. для избыточного давления (при $p_0 = p_{ат}$), и объединив концы этих отрезков, получим соответствующие эпюры давления (рис.3.11); h_i - глубина погружения рассматриваемой i -й точки под свободной поверхностью.

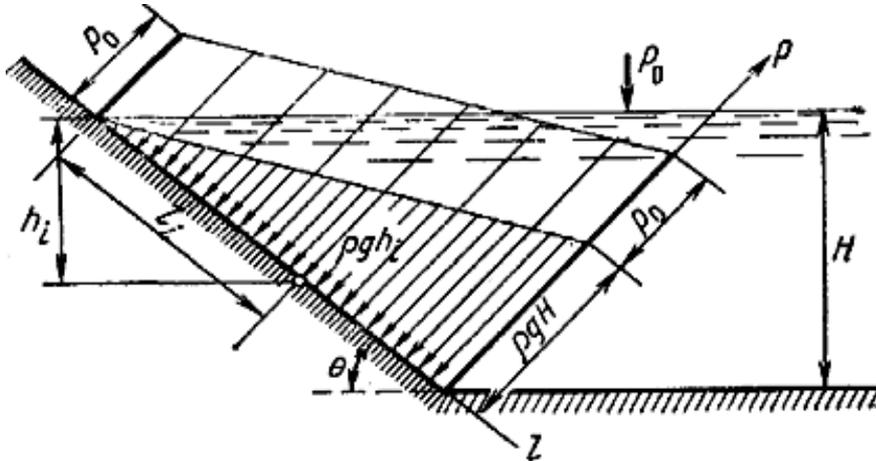


Рис.3.11

§ 3.10. АНАЛИЗ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ГИДРОСТАТИКИ

Как уже отмечалось, основное уравнение гидростатики служит для определения величины гидростатического давления в любой точке покоящейся жидкости

$$p = p_0 + \rho g h . \quad (3.26)$$

Анализируя основное уравнение гидростатики, можно сделать следующие выводы:

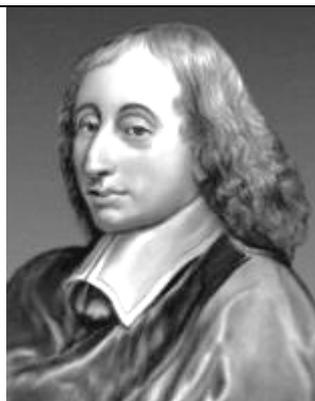
1. Гидростатическое давление есть сумма внешнего p_0 давления, действующего на свободной поверхности и весового $\rho g h$ давления, создаваемого весом столба жидкости высотой h ;
2. Внешнее давление p_0 не зависит от координат рассматриваемых точек, то есть оно передается во все точки покоящейся жидкости без изменения, поэтому жидкость используется как среда для передачи давления.

Поэтому из основного уравнения гидростатики следует **закон Паскаля**, который гласит: *давление, приложенное к граничной поверхности*

покоящейся жидкости, передаётся всем точкам этой жидкости по всем направлениям одинаково.

На этом свойстве жидкости основано действие гидравлических машин (гидропрессы, силовые цилиндры, гидродомкраты);

3. Весовое давление ρgh является функцией координат точки. С увеличением заглубления точки под свободную поверхность, давление возрастает;
4. Внешнее давление P_0 может быть больше атмосферного, меньше атмосферного и равно атмосферному. Если численное значение P_0 определено с учетом атмосферного, то давление P по формуле (3.26) будет абсолютным; если P_0 определено без учета атмосферного, то P будет избыточным.



Блез Паскаль
(1623 – 1662)

Вместе с Г. Галилеем и С. Стевином Паскаль считается основоположником классической гидростатики: он установил её основной закон (о полной передаче жидкостью производимого на неё давления – закон Паскаля), принцип действия гидравлического пресса, указал на общность основных законов равновесия жидкостей и газов. Опыт, проведённый под руководством Паскаля (1648), подтвердил предположение Э. Торричелли о существовании атмосферного давления. Паскаль высказал также идею о зависимости атмосферного давления от высоты, открыл зависимость давления от температуры и влажности воздуха и предложил использовать барометр для предсказания погоды. В его честь названа единица давления – паскаль.

Следствием основного уравнения гидростатики является тот факт, что на равной глубине в покоящейся жидкости давление одинаково. В результате можно говорить о поверхностях равного давления. Для жидкости, находящейся в абсолютном покое или равномерно движущейся, эти поверхности – горизонтальные плоскости. В других случаях относительного покоя, которые будут рассмотрены ниже, поверхности равного давления могут иметь другую форму или не быть горизонтальными. Существование

поверхностей равного давления позволяет измерять давление в любой точке жидкости.

§ 3.11. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ В СООБЩАЮЩИХСЯ СОСУДАХ

Рассмотрим два сообщающихся сосуда, наполненных различными, не смачивающимися между собой жидкостями (рис. 3.12).

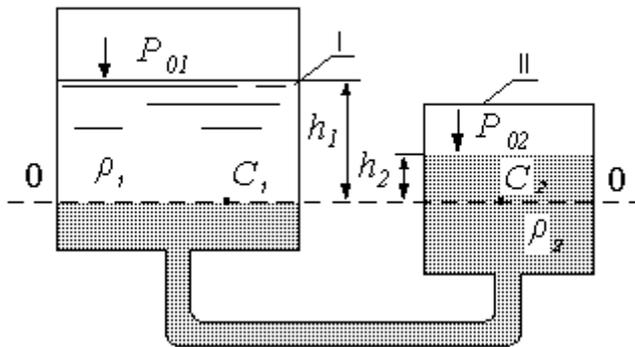


Рис.3.12

Сосуды закрыты, давления p_{01} и p_{02} – на поверхности жидкостей в сосудах I и II различны. Линия 0-0 – линия раздела разнородных жидкостей. Горизонтальная плоскость, проходящая через линию 0-0, является плоскостью равного давления.

Определим величину гидростатического давления в точках C_1 и C_2 , лежащих на плоскости равного давления.

Согласно основному уравнению гидростатики:

$$p_{C_1} = p_{01} + \rho_1 g h_1, \quad (3.27)$$

$$p_{C_2} = p_{02} + \rho_2 g h_2, \quad (3.28)$$

где h_1 и h_2 – возвышение поверхности жидкостей в сосудах I и II над плоскостью 0-0; ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкостей.

Очевидно, что:

$$p_{C_1} = p_{C_2},$$

$$p_{01} + \rho_1 g h_1 = p_{02} + \rho_2 g h_2, \quad (3.29)$$

$$\boxed{p_{01} - p_{02} = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1}, \quad (3.30)$$

Зависимость (3.30) характеризует условия равновесия жидкостей в сообщающихся сосудах. Она позволяет решать частные задачи.

Случай I. В сосудах налита одинаковая жидкость, но давления p_{O_1} и p_{O_2} различны, тогда при условии, что $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ получим:

$$p_{O_1} - p_{O_2} = \rho \cdot g (h_2 - h_1) \quad (3.31)$$

Случай II. Жидкость одинакова, т.е. $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ и $p_{O_1} = p_{O_2}$.

Тогда:

$$h_1 = h_2, \quad (3.32)$$

жидкость в сосудах будет на одном уровне.

Случай III. Жидкость одинакова $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, но один сосуд открыт $p_{O_1} = p_{\text{атм}}$, а другой закрыт $p_{O_2} > p_{\text{атм}}$.

Тогда:

$$p_{C_1} = p_{\text{атм}} + \rho \cdot g \cdot h_1, \quad (3.33)$$

$$p_{C_2} = p_{O_2} + \rho \cdot g \cdot h_2, \quad (3.34)$$

так как $p_{C_1} = p_{C_2}$, значит

$$p_{\text{атм}} + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_{O_2} + \rho \cdot g \cdot h_2, \quad (3.35)$$

$$h_1 = h_2 + \frac{p_{O_2} - p_{\text{атм}}}{\rho \cdot g}. \quad (3.36)$$

Выражение $\frac{p_{O_2} - p_{\text{атм}}}{\rho \cdot g}$ есть пьезометрическая высота для точек, лежащих на поверхности жидкости в закрытом сосуде.

Случай IV. Жидкости разнородные, несмешивающиеся, а $p_{O_1} = p_{O_2}$.

Тогда:

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2 \quad (3.37)$$

или
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (3.38)$$

§ 3.12. КРУГЛАЯ ТРУБА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

В гидравлических системах технологического назначения жидкость в основном передаётся по трубам круглого сечения. В водопроводах, канализационных и многих других трубопроводных системах, гидротехнических сооружениях широко используются трубы и различные резервуары круглого сечения. По этой причине задача определения нагрузки на трубу является весьма распространённой. В таких расчётах используется полученная ранее формула горизонтальной составляющей силы, действующей со стороны жидкости на криволинейную поверхность

$$F_{\Gamma} = S_{\sigma} \rho g h_c + P_0 S_{\sigma} = S_{\sigma} (\rho g h_c + P_0).$$

Для труб небольшого диаметра, которые применяются в машиностроительном гидроприводе, давлением столба жидкости можно пренебречь ввиду его малости.

Тогда уравнение примет вид $F_{\Gamma} = S_{\sigma} P_0$, где P_0 – внешнее давление.

Рассмотрим трубу (рис.3.13) длиной l с внутренним диаметром D и толщиной стенок δ , находящуюся под действием гидростатического давления P . Это давление порождает разрывающие силы F_x .

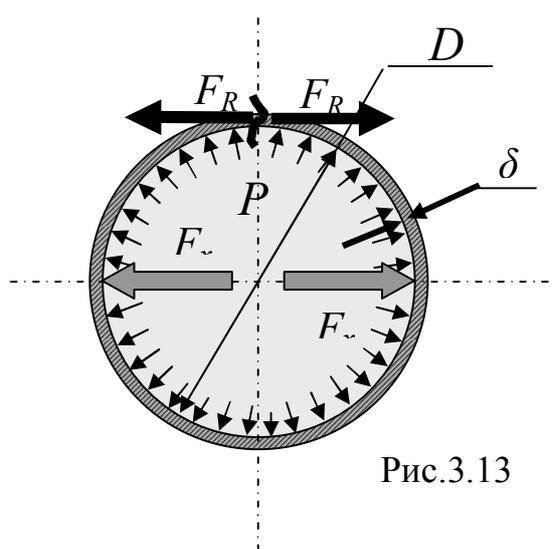


Рис.3.13

Из-за симметричности трубы такие разрывающие силы будут действовать одинаково во всех направлениях. Для вертикальной плоскости эта сила будет равна:

$$F_x = P D l,$$

где произведение Dl – есть вертикальная проекция площади стенки трубы.

Разрывающей силе будут противодействовать силы реакции F_R , возникающие в стенках трубы. Площадь стенок трубы S_δ в любом осевом сечении составит:

$$S_\delta = 2l\delta.$$

Под действием разрывающих сил в стенках трубы будет возникать суммарная сила реакция F_R , равная по величине разрывающей силе, но направленная в противоположную сторону:

$$F_R = F_x.$$

Отсюда находится напряжение σ в стенках трубы, вызываемое давлением внутри трубы. Оно равняется

$$\sigma = \frac{F_R}{S_\delta} = \frac{PDI}{2l\sigma} = \frac{PD}{2\sigma}. \quad (3.39)$$

§ 3.13. ПРОСТЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ МАШИНЫ. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЕСС

На законе Паскаля основан принцип действия различных гидравлических устройств, с помощью которых давление передается на расстояние.

К таким устройствам относятся: гидравлические прессы, гидроподъемники, гидродомкраты, гидравлические аккумуляторы, гидравлические тормозные системы, гидромультпликаторы и др.

В качестве примера рассмотрим работу гидравлического прессы.

Гидравлический пресс применяют для получения больших сжимающих усилий, что необходимо, например, для деформации металлов при обработке давлением (прессование, ковка, штамповка), при испытании различных материалов, уплотнении рыхлых материалов, в технологических процессах по обезвоживанию осадков и т.д.

Принципиальная схема прессы представлена на рис 3.14.

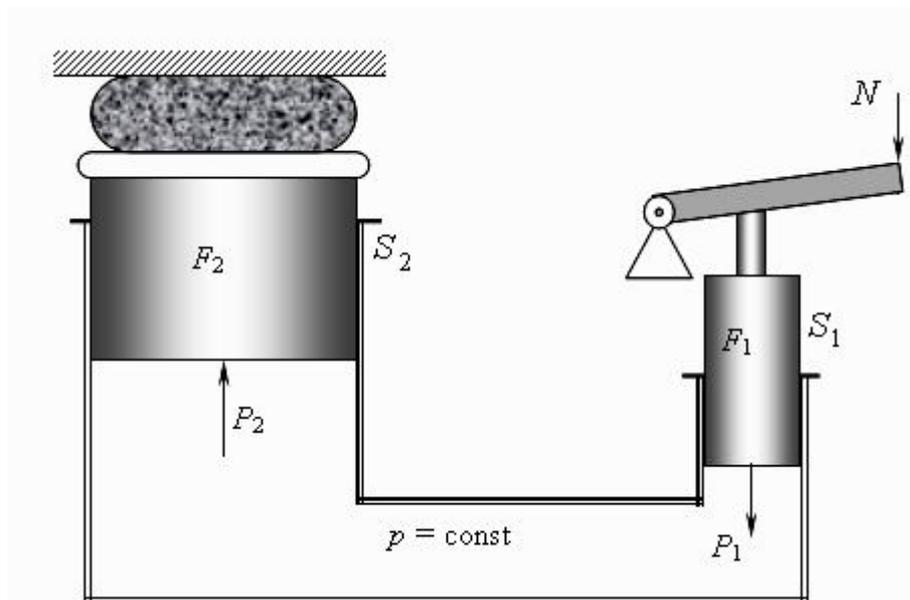


Рис. 3.14

К поршню площадью S_1 приложена сила F_1 , которая передается жидкости, создавая давление p_1 :

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1}.$$

По закону Паскаля давление передается на поршень площадью S_2 , создавая полезную силу, под действием которой прессуется материал:

$$p_2 = p_1 = \frac{F_2}{S_2}.$$

Следовательно

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}} \quad (3.40)$$

или

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}} \quad (3.41)$$

Из формулы (3.41) видно, что отношение усилий на малом и большом поршнях пропорционально квадрату отношения диаметров поршней.

Например, если диаметр большого поршня в десять раз больше диаметра малого поршня, то полезное усилие на большом поршне будет в 100 раз больше, чем на малом.

§ 3.14. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ АККУМУЛЯТОР

Гидравлический аккумулятор служит для накопления - аккумуляции энергии и применяется в случаях, когда необходимо произвести кратковременную большую работу, например, при открывании и закрывании ворот шлюзов, при работе гидравлического пресса, гидроподъемника и т. п.

Принципиальная схема гидравлического аккумулятора приведена на рис. 3.15. Он состоит из цилиндра *A*, в котором помещен поршень *B*, соединенный с нагруженной рамой *C*, к которой подвешены грузы *D*.

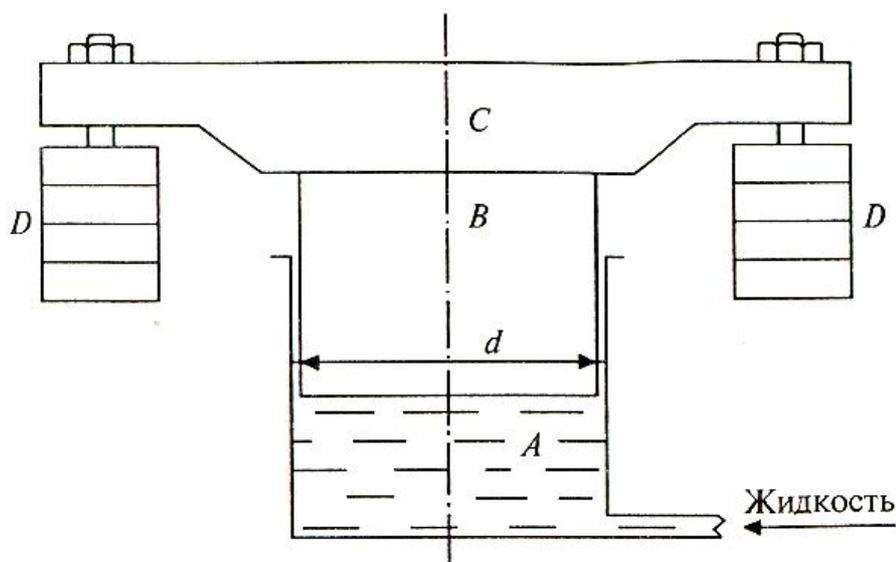


Рис.3.15

При помощи насоса в цилиндр нагнетается жидкость до полного его заполнения, при этом грузы поднимаются и тем самым происходит накопление энергии. Чтобы поднять поршень на высоту *H*, необходимо закачать в цилиндр объем жидкости:

$$V = SH = \frac{\pi d^2}{4} H,$$

где *S* - площадь сечения поршня.

Отсюда

$$H = \frac{4V}{\pi d^2}.$$

Если величина грузов равна G , то давление поршня на жидкость определится отношением силы веса G на площадь сечения поршня, т. е.

$$p = \frac{G}{S} = \frac{G}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

Выражая отсюда G , получим

$$G = p \frac{\pi d^2}{4}.$$

Работа L , затрачиваемая на подъем груза, будет равна произведению силы G на длину пути H :

$$L = GH = p \frac{\pi d^2}{4} \frac{4V}{\pi d^2} = pV.$$

По этой формуле можно рассчитать не только работу L , но и по известной работе найти необходимые для ее выполнения параметры аккумулятора.

§ 3.15. МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ. АБСОЛЮТНОЕ, ИЗБЫТОЧНОЕ И ВАКУУММЕТРИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ

Приборы, применяемые для измерения давления, можно разделить на две основные группы: жидкостные и металлические.

Принцип действия жидкостных приборов основан на уравнивании измеряемого давления высотой столба жидкости (рис. 3.16).

Простейший прибор жидкостного типа - пьезометр, представляющий собой стеклянную трубку небольшого диаметра (около 8-10 мм), один конец которой открыт и сообщается с атмосферой.

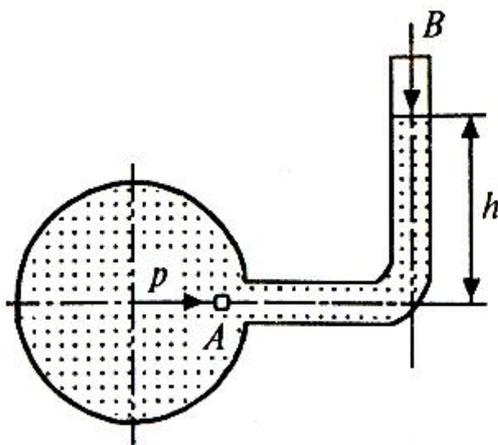


Рис.3.16

Второй конец присоединяется к сосуду, в котором измеряется давление. Пусть давление p больше атмосферного (барометрического) B ($p > B$).

Тогда жидкость в трубке пьезометра поднимается на определенную высоту, так что вес столба жидкости будет уравнивать разницу в давлениях p и B .

Давление в точке A у основания пьезометрической трубки определяется по формуле гидростатического давления (3.23):

$$p_a = B + \rho g h$$

Отсюда

$$h = \frac{p_a - B}{\rho g}$$

Таким образом, высота жидкости в пьезометре характеризует не истинное давление в точке A , а избыток этого давления над атмосферным или барометрическим.

Давление в сосуде p_a принято называть **абсолютным давлением**. Разницу $p_a - B$ называют **избыточным давлением**. Следовательно, абсолютным давлением называют давление в сосуде, отсчитанное от не условного нуля. Абсолютное давление обозначают «ата», что означает «атмосфера абсолютная».

Избыточным давлением называют разницу между абсолютным давлением и атмосферным в том случае, когда абсолютное давление больше атмосферного. Оно обозначается «ати», что означает «атмосфера избыточная».

Очевидно, что

$$p_{изб} = p_{абс} - B$$

или

$$p_{абс} = p_{изб} + B.$$

Так как барометрическое давление близко к 1 кг/см^2 , то обычно считают

$$p_{ата} = p_{ату} + 1.$$

Для точных измерений абсолютного давления нужно знать показание барометра. При измерении пьезометром $h = p/\rho g$, где под p следует понимать избыточное давление. Отсюда $p = \rho gh$.

Измерение давления высотой столба жидкости весьма удобно и часто применяется в технике. Полезно напомнить, что давлению в 1 кгс/см^2 (техническая атмосфера) соответствует вес столба воды:

$h = 1 \text{ кг/см}^2 / 0,001 \text{ кгс/см}^3 = 1000 \text{ см} = 10 \text{ м}$ водяного столба (м вод. ст.) или же вес столба ртути высотой $h = 1/0,0136 \text{ кгс/см}^3 = 73,5 \text{ см} = 735 \text{ мм}$ ртутного столба (мм рт. ст.).

Может случиться так, что абсолютное давление меньше атмосферного, например, под поршнем в цилиндре (рис. 3.17). В этих случаях говорят не об избыточном давлении, а о **разрежении, вакууме** или **вакуумметрическом давлении**.

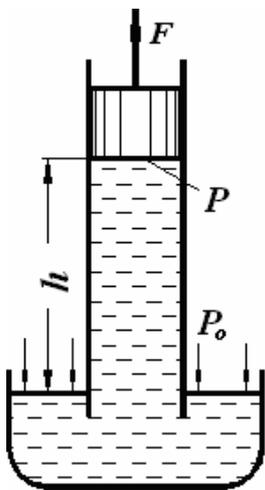


Рис. 3.17.

Всасывание жидкости поршнем

Если абсолютное давление в сосуде меньше атмосферного, то для измерения его применяются вакуумметры. Если для измерения вакуума применяют жидкостные приборы, то последние обычно выполняют в виде так называемого U-образного манометра (рис. 3.18). В точках С и В давление одинаково и равно барометрическому B .

Тогда по формуле гидростатического давления будем иметь

$$p_в = p + \rho gh.$$

Учитывая, что $p_e = p_c = B$, получим

$$B = p + \rho g h.$$

Отсюда

$$h = \frac{B - p}{\rho g}.$$

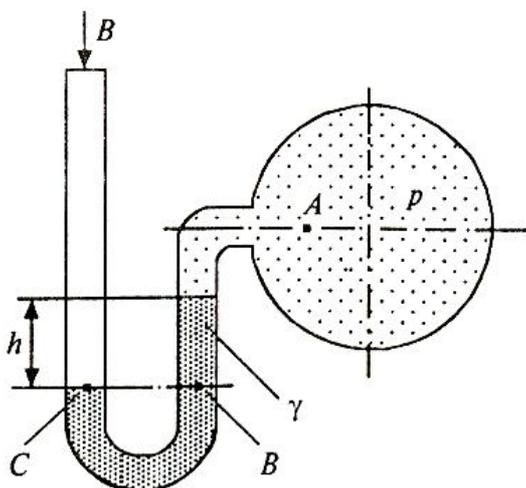


рис. 3.18

Разность $B - p$ называют вакуумом, т. е. *вакуумом называют разность между атмосферным давлением и абсолютным в том случае, когда абсолютное давление меньше атмосферного.*

Например, абсолютное давление в сосуде 0,35 атм, тогда вакуумом будет разница $1,0 - 0,35 = 0,65$ атм.

Вакуумметрической высотой $h_{\text{вак}}$ называют высоту, на которую жидкость поднимается вследствие разрежения:

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{вак}}}{g\rho}.$$

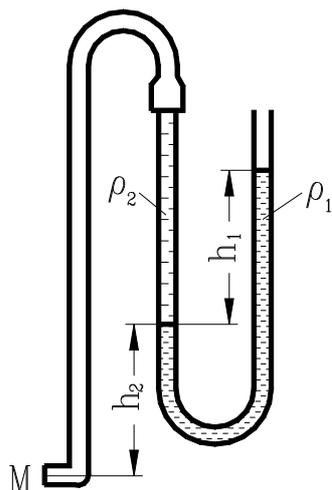


Рис. 3.19.
U-образный манометр

Так как максимальное $p_{\text{вак}} = p_{\text{атм}}$, то максимальные высоты, на которые могут подниматься жидкости за счет всасывания при атмосферном давлении, равном 1 ат., для ртути – 760 мм, а для воды – 10,33 м.

Для измерения небольших давлений можно использовать U-образный манометр (рис.3.19). Если соединительная трубка заполнена жидкостью с плотностью ρ_2 , то

$$p_M = g\rho_1 h_1 + g\rho_2 h_2.$$

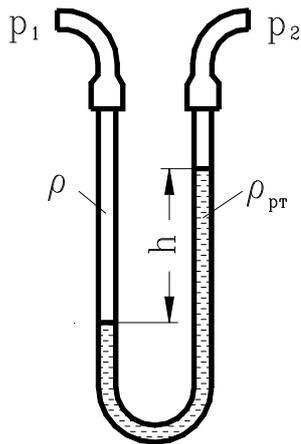


Рис.3.20. Дифференциальный манометр

Для измерения разности давлений в двух точках используют дифференциальные манометры, простейший из которых U-образный (рис. 3.20). Если манометр заполнен ртутью, а соединительные шланги – жидкостью с плотностью ρ , то

$$p_1 - p_2 = g(\rho_{рт} - \rho)h.$$

Жидкостные приборы имеют очень высокую точность измерения давления, но применимы только в стационарных, лабораторных условиях, для ограниченного диапазона измеряемых давлений. Эти приборы хрупки и громоздки. Кроме того, ртутные приборы еще и токсичны, а ртуть – жидкость уникальная, другой жидкости с подобной плотностью в природе не существует.

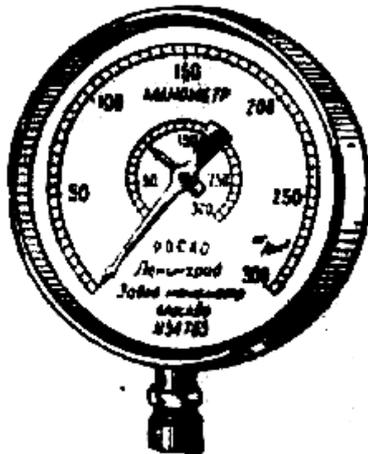


Рис.3.20.а

По этим причинам в технике широко используются механические (рис. 3.20.а) и электрические приборы для измерения давлений. Во всех этих приборах есть либо полая пружина, либо мембрана, которая деформируется под действием давления. Деформация упругого элемента механического прибора передается через механически передачи на стрелку, которая показывает величину давления на шкале.

В электрических приборах эта деформация упругого элемента приводит к смещению движка потенциометра, установленного в мостовой

схеме. Стрелочный электроприбор (вольтметр или амперметр) устанавливается в этой схеме и имеет градуировку в единицах давления.

Благодаря своей прочности и возможности измерения очень больших давлений (от 0,25 до 5 000 кг/см²) и использования в любых условиях пружинные манометры получили очень широкое распространение. Этот тип манометра был изобретен в 1848 г. французским ученым Э.Бурдоном.

Следует отметить, что манометрами Бурдона измеряется так называемое манометрическое давление (или избыточное), т. е. разность между абсолютным (полным) давлением и атмосферным. Для получения полного давления к давлению манометрическому необходимо прибавить давление атмосферное (барометрическое).

(Единицей измерения давления является Н/м². Она называется Паскаль. Соотношение между старыми единицами измерения давления таковы:

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па};$$

$$1 \text{ мм рт. ст.} = 133,322 \text{ Па};$$

$$1 \text{ мм вод. ст.} = 9,80665 \text{ Па};$$

$$1 \text{ ат (техническая атмосфера)} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 10 \text{ м вод. ст.} = 735,6 \text{ мм рт.ст} = 9,80665 \cdot 10^4 \text{ Па};$$

$$1 \text{ атм (физическая атмосфера)} = 760 \text{ мм рт. ст.} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

§ 3.16. ГИДРОСТАТИЧЕСКИЙ НАПОР И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ЗАКОН ДЛЯ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В РАВНОВЕСИИ

При выводе основного уравнения гидростатики выше (см. § 3.7) было получено дифференциальное уравнение вида

$$dp = -\gamma dz,$$

где $\gamma = \rho g$.

Прежде чем интегрировать это уравнение, представим его в следующем виде:

$$\frac{dp}{\gamma} + dz = 0$$

или

$$d\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = 0.$$

Проинтегрировав, получим

$$\frac{p}{\gamma} + z = C = \text{const.}$$

Величина $\frac{p}{\gamma} = h$ представляет ту высоту, на которую поднялась бы жидкость в пьезометре, если бы верхний конец его находился под нулевым давлением $p = 0$ (рис. 3.21).

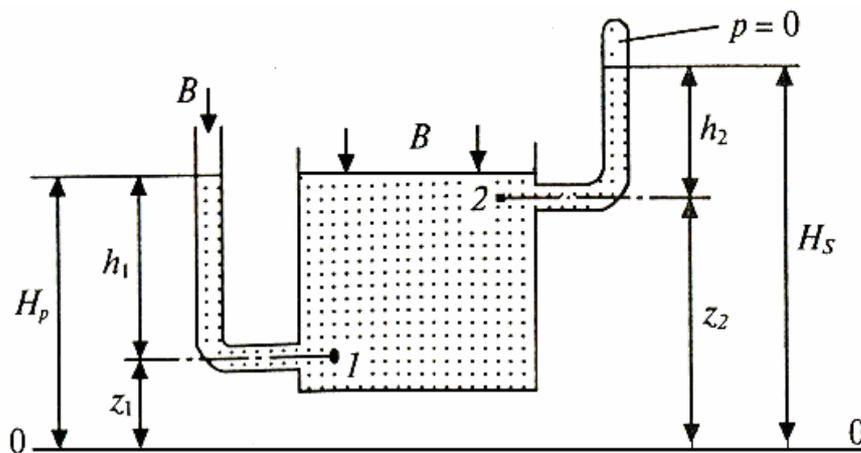


Рис.3.21

Таким образом, это есть высота, соответствующая абсолютному давлению в жидкости. Она называется **приведенной** (высота h_2).

$z = z_2$ - геометрическая высота выбранной точки над условной плоскостью сравнения 0 - 0. Отсюда

$$z_2 + \frac{p}{\gamma} = H_s = \text{const.} \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) показывает, что сумма двух высот Z_2 и $\frac{p}{\gamma}$ для любой точки жидкости остается постоянной. Эта сумма называется **абсолютным**

(полным) гидростатическим напором.

Если конец пьезометра соединить с атмосферой при давлении B , то уравнение (3.24) примет вид

$$z_1 + \frac{p - B}{\gamma} = H_p = \text{const.} \quad (3.25)$$

Сумма Z_1 и $(p - B)/\gamma$ называется гидростатическим напором, а величина $(p - B)/\gamma = p_{\text{изб}}/\gamma$ - **пьезометрическим напором.**

Горизонтальная плоскость, проведенная на высоте H_p , называется плоскостью гидростатического или пьезометрического напора, а H_s -плоскостью абсолютного (полного) напора. Очевидно, что $H_p < H_s$.

Выражениям (3.24) и (3.25) можно придать простой энергетический смысл. Рассмотрим частицу жидкости массой m . Ее потенциальная энергия относительно плоскости 0 - 0 будет mgz . Кроме того, под действием давления p частица может подняться на высоту $h = p/\gamma$ т. е. обладает потенциальной энергией давления, равной

$$mgh = mg \frac{p}{\gamma}.$$

Таким образом, полный запас потенциальной энергии частицы будет

$$E_n = mgz + mg \frac{p}{\gamma}.$$

Разделив последнее соотношение на mg , получим

$$e_n = z + \frac{p}{\gamma},$$

где $e_n = E_n/mg$.

Отсюда следует, что высота z есть удельная потенциальная энергия положения частицы, p/γ - удельная потенциальная энергия давления.

Величина

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} = H_s = \text{const}}$$

является полной удельной потенциальной энергией частицы.

Последнее соотношение называется энергетическим законом для жидкости, находящейся в равновесии.

Для всех точек данного объема покоящейся жидкости удельная потенциальная энергия одинакова. Эти утверждения справедливы как для полного (H_s), так и для пьезометрического (H_p) напоров.

§ 3.17. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА ДЛЯ СЛУЧАЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОКОЯ ЖИДКОСТИ

Пусть жидкость находится в емкости, которая движется прямолинейно и равноускоренно по горизонтальной плоскости с ускорением a (рис. 3.22).

Масса жидкости при движении находится под действием массовой силы тяжести и силы инерции от горизонтального перемещения.

Соответствующие проекции массовых сил будут равны:

$$X = -a;$$

$$Y = 0;$$

$$Z = -g.$$

Уравнение (3.15), учитывая массовые силы, примет вид

$$dp = -\rho a dx - \rho g dz.$$

Переменные в уравнении разделены. Интегрируя его, получим

$$p = -\rho ax - \rho gz + C, \quad (3.26)$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая из граничных условий, которые в данном случае имеют вид $p = p_0$ при $x = 0$ и $z = 0$.

Отсюда

$$p_0 = C. \quad (3.27)$$

Подставляя (3.27) в уравнение (3.26), найдем

$$p = p_0 - \rho ax - \rho gz. \quad (3.28)$$

Уравнение (3.28) для свободной поверхности, где $p = p_0$, примет вид

$$-\rho ax - \rho gz = 0.$$

Отсюда

$$\boxed{z = -\frac{a}{g}x}. \quad (3.29)$$

Так как a/g является константой, уравнение (3.29) будет уравнением прямой линии. Это означает, что плоскость, проведенная через оси x и z , будет пересекать наружную поверхность жидкости по линии AB .

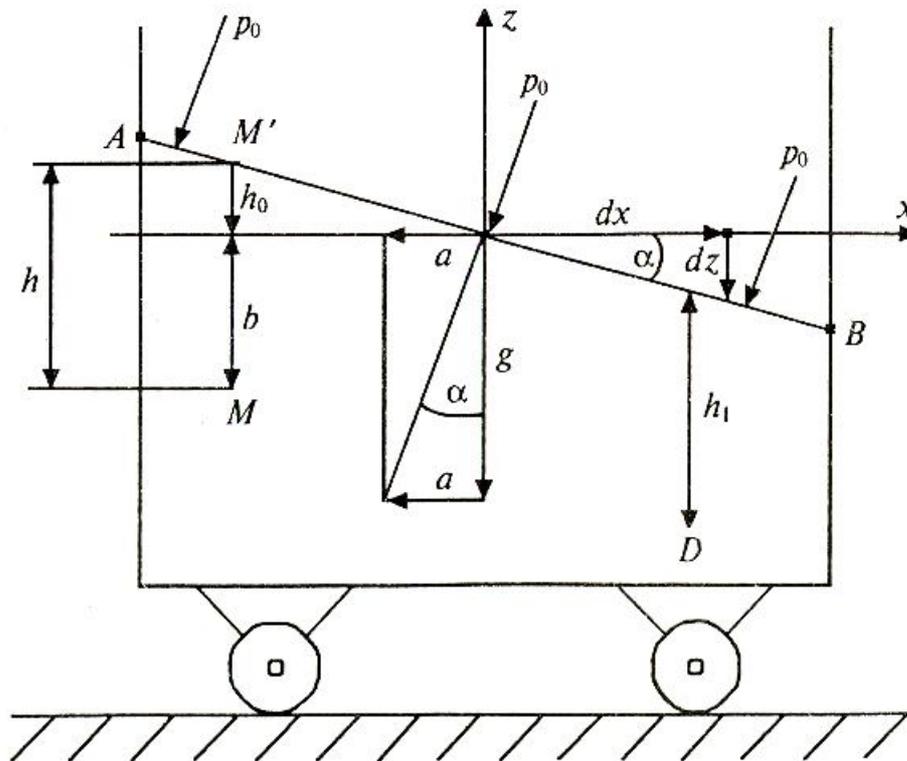


Рис.3.22

Отношение a/g представляет тангенс угла наклона прямой AB к горизонтальной плоскости $\operatorname{tg}\alpha = -a/g$.

Отсюда

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{g}\right)}.$$

Запишем уравнение (3.28) для некоторой точки M в виде

$$p - p_0 = -\frac{\rho g a x}{g} - \rho g z_M = \frac{\gamma a x}{g} - \gamma z_M$$

или

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = -\frac{ax}{g} - \gamma z_{M'}. \quad (3.30)$$

Согласно уравнению (3.29) первый член в правой части уравнения (3.30) будет $-ax/g z_{M'}$, так как точка M' находится на поверхности.

Отсюда, учитывая, что $z_{M'} = h_0$, а $z_M = -b$, получим

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = -\frac{ax}{g} - \gamma z_{M'} - z_M = h_0 + b = h$$

или

$$p = p_0 + \gamma h \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) представляет формулу гидростатического давления (3.23).

Таким образом, давление в любой точке жидкости, движущейся вместе с емкостью прямолинейно и равноускоренно, определяется по формуле гидростатического давления, где h глубина погружения точки под поверхностью жидкости. Например, давление в точке D будет

$$p_D = p_0 + \gamma h_1.$$

Рассмотрим жидкость, находящуюся в цилиндрической емкости, которая вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 3.23).

Центробежная сила на единицу массы

$$F_r = \frac{mV^2}{r} \frac{1}{m} = \frac{V^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r,$$

где V - окружная скорость.

Проекции массовых сил на соответствующие оси координат будут

$$X = \omega^2 r \cos(r, x) = \omega^2 x;$$

$$Y = \omega^2 r \cos(r, y) = \omega^2 y;$$

$$Z = -g.$$

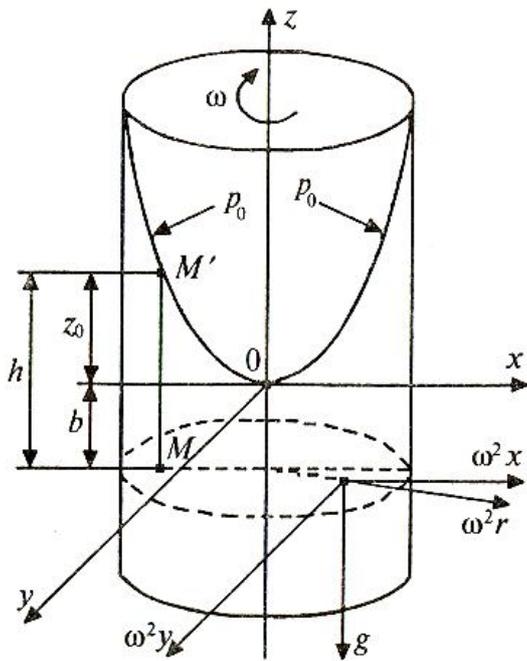


Рис.3.23

Подставляя их значения в соотношение

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz),$$

получим

$$dp = \rho (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz).$$

Интегрируя, найдем

$$p = \rho \omega^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) - \gamma z + C,$$

где C - постоянная интегрирования.

Так как при $x=0, y=0, Z=0, p = p_0$, то

$C = p_0$. Учитывая, что $x^2 + y^2 = r^2$,

находим

$$p = p_0 + \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 - \gamma z. \quad (3.32)$$

По формуле (3.32) можно найти давление в любой точке M жидкости по глубине емкости. Для нахождения поверхностей равного давления положим $dp = 0$, тогда будем иметь

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{\omega^2}{2g} r^2 - z = C.$$

Отсюда

$$\boxed{z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 - C.}$$

Следовательно, поверхности равного давления представляют собой параболоиды вращения.

При $r=0, z=0$ получаем $C=0$ для уравнения свободной поверхности.

Тогда уравнение свободной поверхности

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

Найдем давление в некоторой точке M , расположенной на глубине h от поверхности. Обозначив аппликату свободной поверхности через z_0 (точка M'), получим

$$z_0 = \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

Подставляя это выражение в формулу (3.32), находим

$$p = p_0 + \gamma z_0 - \gamma z = p_0 + \gamma z_0 + \gamma b = p_0 + \gamma(z_0 + b)$$

или

$$p = p_0 + \gamma h,$$

где $h = z_0 + b$. Таким образом, вновь получили формулу гидростатического давления.

§ 3.18. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

Пусть имеется фигура произвольной формы площадью ω в плоскости Ol , наклоненной к горизонту под углом α (рис. 3.24).

Для удобства вывода формулы для силы давления жидкости на рассматриваемую фигуру повернем плоскость стенки на 90° вокруг оси Ol и совместим ее с плоскостью чертежа.

Как известно, сила характеризуется тремя параметрами:

- направлением;
- величиной;
- точкой приложения.

Давление в каждой точке стенки направлено по нормали к ней, следовательно, и равнодействующая сила давления будет перпендикулярна плоской стенке.

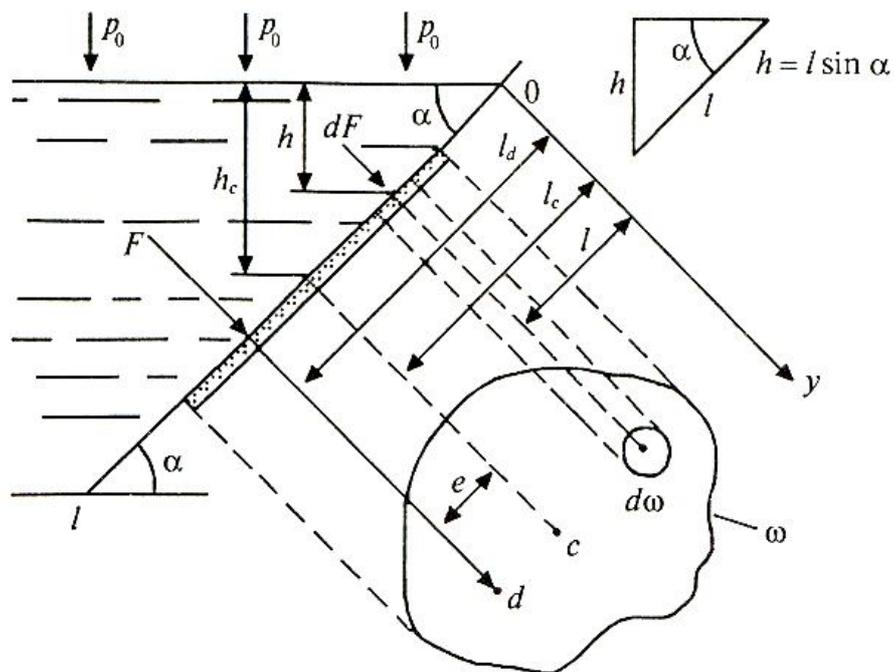


Рис. 3.24. Схема для определения силы давления жидкости на плоскую стенку

Выделим на рассматриваемой плоской фигуре, на глубине h от свободной поверхности жидкости элементарную площадку $d\omega$. Тогда элементарная сила, действующая на площадку $d\omega$, будет

$$dF = p \cdot d\omega = (p_0 + \gamma h) d\omega = p_0 d\omega + \gamma h d\omega,$$

где p_0 – давление на свободную поверхность;

h – глубина расположения площадки $d\omega$.

Интегрируя последнее соотношение, получим суммарную силу давления жидкости на плоскую фигуру:

$$F = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h) d\omega.$$

Учитывая, что $h = l \sin \alpha$, получим

$$F = \int_{\omega} (p_0 + \gamma l \sin \alpha) d\omega$$

или

$$F = p_0 \omega + \gamma \alpha \int_{\omega} l d\omega.$$

Последний интеграл равен статическому моменту площадки ω относительно оси Oy , т. е.

$$\int_{\omega} l d\omega = l_c \omega.$$

где l_c - расстояние от оси Oy до центра тяжести фигуры. Тогда

$$F = p_0 \omega + \gamma l_c \sin \alpha \omega$$

Так как $l_c \sin \alpha = h_c$,

$$\boxed{F = (p_0 + \gamma h_c) \omega},$$

где h_c, p_c - глубина расположения центра масс площадки и давление в этой точке.

Таким образом, **полная сила давления жидкости на плоскую стенку равна произведению площади стенки на гидростатическое давление p_c в центре масс этой площади.**

Это второе главное уравнение гидростатики.

Точку приложения суммарной силы давления (точка d , см. рис. 3.27) называют **центром давления**. Центр давления находится ниже центра тяжести плоской фигуры на величину эксцентриситета e .

Последовательность определения координат центра давления и величины эксцентриситета изложена в § 3.18.

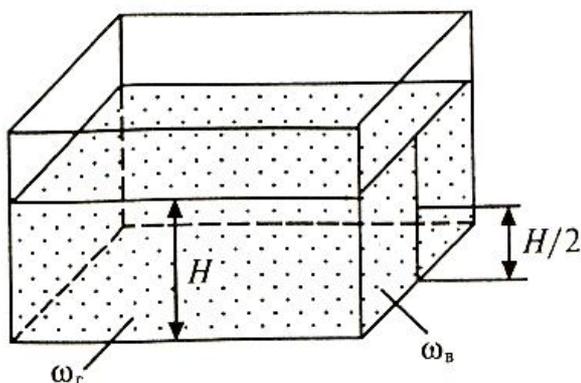


Рис.3.25

В частном случае вертикальной прямоугольной стенки получим (рис. 3.25)

$$F = (p_0 + \gamma H/2) \omega_в.$$

В частном случае горизонтальной прямоугольной стенки будем иметь

$$F = (p_0 + \gamma H) \omega_г.$$

§ 3.19. ГИДРОСТАТИЧЕСКИЙ ПАРАДОКС

Формула для силы давления на горизонтальную стенку

$$F = (p_0 + \gamma H) \omega_r$$

показывает, что суммарное давление на плоскую фигуру определяется лишь глубиной погружения центра тяжести и площадью самой фигуры, но не зависит от формы того сосуда, в который налита жидкость. Поэтому, если взять ряд сосудов, различных по форме, но имеющих одинаковую площадь дна ω_r и равные уровни жидкости H , то во всех этих сосудах суммарное давление на дно будет одинаковым (рис. 3.26). Гидростатическое давление обусловлено в данном случае силой тяжести, но вес жидкости в сосудах разный.

Возникает вопрос: как же различный вес может создать одинаковое давление на дно? В этом кажущемся противоречии и состоит так называемый гидростатический парадокс. Раскрытие парадокса заключается в том, что сила веса жидкости действует в действительности не только на дно, но еще и на другие стенки сосуда.

В случае расширяющегося вверх сосуда, очевидно, что вес жидкости больше силы, действующей на дно.

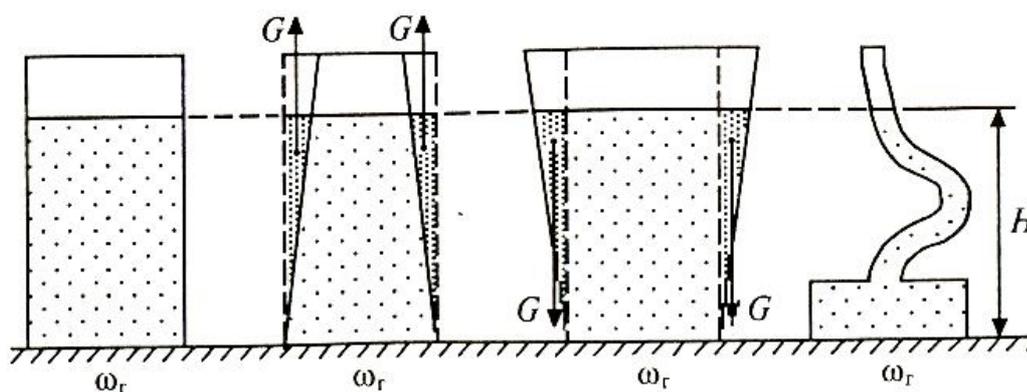


Рис. 3.26

Однако в данном случае часть силы веса действует на наклонные стенки. Эта часть есть вес тела давления.

В случае сужающегося вверх сосуда достаточно вспомнить, что вес

тела давления G в этом случае отрицателен и действует на сосуд вверх.

§ 3.20. ЦЕНТР ДАВЛЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕГО КООРДИНАТ

Точку приложения суммарной силы давления называют **центром давления**. Определим координаты центра давления l_d и y_d (рис. 3.27).

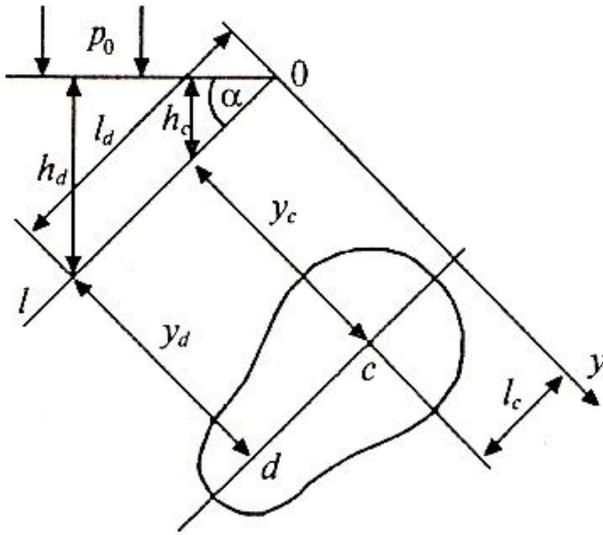


Рис.3.27

Как известно из теоретической механики, при равновесии момент равнодействующей F относительно некоторой оси равен сумме моментов составляющих сил dF относительно той же оси.

Составим уравнение моментов сил F и dF относительно оси Oy .

$$Fl_d = \int_{\omega} dFl.$$

Силы F и dF определим по формулам

$$F = \gamma h_c \omega = \gamma l_c \sin \alpha \omega;$$

$$dF = \gamma h d \omega = \gamma l \sin \alpha d \omega.$$

Тогда

$$\gamma l_c \sin \alpha \omega l_d = \int_{\omega} \gamma l \sin \alpha d \omega l.$$

Сокращая выражение на γ и $\sin \alpha$, получим

$$l_c l_d \omega = \int_{\omega} l^2 d \omega,$$

где $\int_{\omega} l^2 d \omega = J_y$ - момент инерции площади фигуры относительно оси Oy .

Отсюда

$$l_d = \frac{J_y}{l_c \omega}.$$

Заменяя $J_y = J_c + l_c^2 \omega$ по известной из теоретической механики формуле, где J_c - момент инерции площади фигуры относительно оси, параллельной Oy и проходящей через центр тяжести, получим

$$l_d = l_c + \frac{J_c}{l_c \omega}.$$

Из этой формулы следует, что центр давления всегда расположен ниже центра тяжести фигуры на расстоянии $\frac{J_c}{l_c \omega}$. Это расстояние называется эксцентриситетом и обозначается буквой e .

Координата y_d находится из аналогичных соображений:

$$y_d = \frac{\int y l d\omega}{l_c \omega} = \frac{J_{yl}}{l_c \omega},$$

где J_{yl} - центробежный момент инерции той же площади относительно осей y и l . Если фигура симметрична относительно оси, параллельной оси Ol (см. рис. 3.27), то, очевидно, $y_d = y_c$, где y_c координата центра тяжести фигуры.

§ 3.21. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СТЕНКИ. ПЛАВАНИЕ ТЕЛ

Чаще рассматривают цилиндрические и сферические поверхности, имеющие вертикальную плоскость симметрии. Определим силу давления на криволинейную поверхность AB (рис.3.28 *a*) при следующих условиях. На свободную поверхность жидкости действует давление p_0 , которое больше атмосферного p_a , а на поверхность AB с одной стороны действует полное гидростатическое давление $p = p_0 + \rho gh$, а с другой стороны - атмосферное

давление. Определить силу избыточного давления на цилиндрическую поверхность.

Проекция силы давления на горизонтальную ось равна интегралу

$$P_{\Gamma} = \int_S dP_{\Gamma},$$

где dP_{Γ} — проекция на горизонтальную ось элементарной силы dP , приложенной к выделенной на криволинейной стенке площадке dS и равной:

$$dP = (p_0 + \rho gh)dS.$$

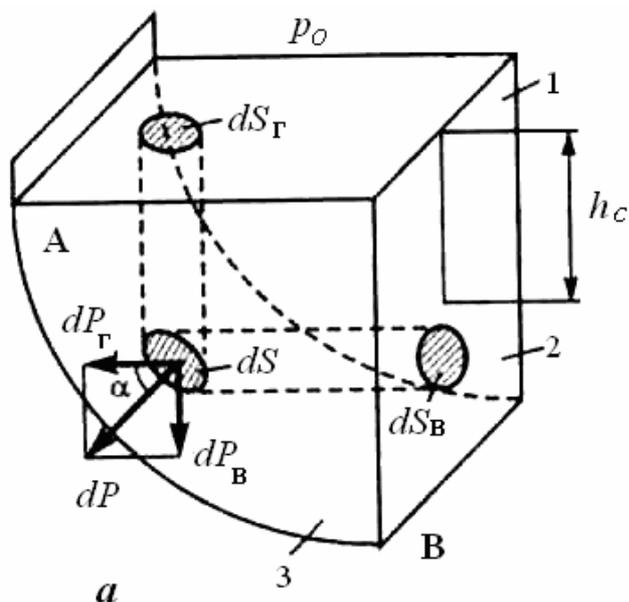


Рис.3.28 а

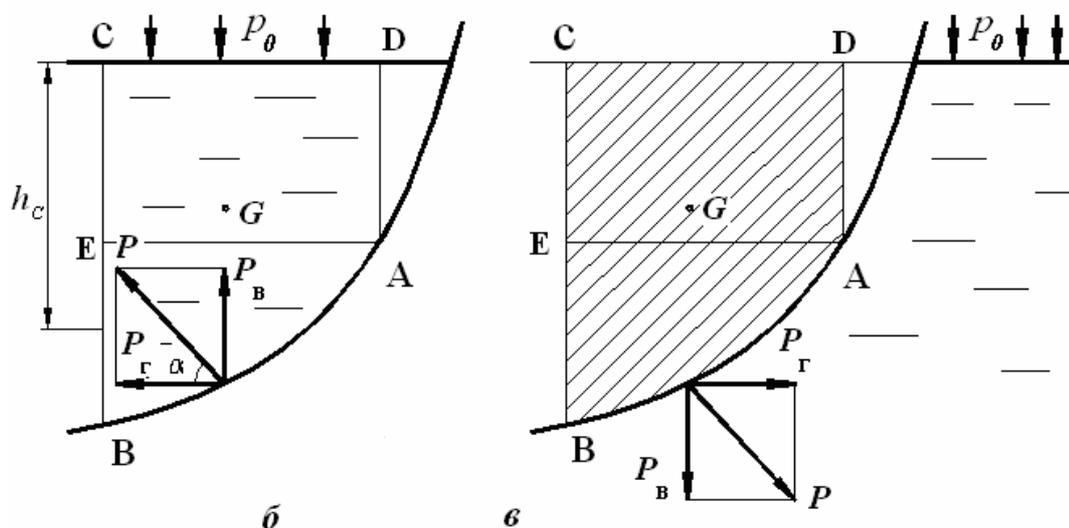


Рис. 3.28 б,в. Схема для определения силы давления жидкости на цилиндрическую поверхность

Здесь h — глубина погружения центра площадки, измеренная от свободной поверхности жидкости; p_0 — давление на этой поверхности. Обозначив через α угол наклона dP к горизонту, можно найти:

$$dP_\Gamma = (p_0 + \rho gh) \cos \alpha dS.$$

Произведение $\cos \alpha dS$ соответствует проекции dS_B элементарной площадки на вертикальную плоскость:

$$\cos \alpha dS = dS_B.$$

Поэтому

$$dP_\Gamma = (p_0 + \rho gh) dS_B.$$

Интегрируя, получаем:

$$P_\Gamma = (p_0 + \rho gh_c) S_B,$$

где h_c — измеренная от свободной поверхности жидкости глубина погружения центра тяжести проекции криволинейной стенки на вертикальную плоскость; S_B — площадь этой проекции.

Чтобы вычислить проекцию P_B на вертикальную ось, следует аналогичные операции выполнить с проекцией dP_B элементарной силы давления. В этом случае:

$$dP_B = (p_0 + \rho gh) dS_\Gamma,$$

где S_Γ - площадь проекции элементарной площадки на горизонтальную плоскость.

При интегрировании правой части этого уравнения получается два члена, первый из которых равен $p_0 S_\Gamma$, второй весу $\rho g V$ жидкости, занимающей

объем $V = \int_S h dS_\Gamma$ между криволинейной поверхностью, свободным уровнем жидкости и вертикальными стенками 1,2,3:

$$P_B = p_0 S_\Gamma + \rho g V.$$

Объем V называют *телом давления*.

Полная сила гидростатического давления на криволинейную стенку составит

$$P = \sqrt{P_G^2 + P_B^2}.$$

У стенок постоянной кривизны (цилиндрических, сферических) линия действия силы давления P проходит через центр или ось кривизны. Точку приложения равнодействующей силы P необходимо определять с помощью уравнения моментов.

Приведем другой вариант определения силы давления жидкости на криволинейную стенку.

Возьмем цилиндрическую поверхность AB с образующей, перпендикулярной плоскости чертежа (рис.3.28а), и рассмотрим определение силы давления жидкости на эту поверхность в двух случаях:

- а) жидкость расположена сверху (рис.3.28б) и
- б) жидкость расположена снизу (рис.3.28в).

В случае «б» выделим объем жидкости, ограниченный рассматриваемой поверхностью AB , вертикальными поверхностями, проведенными через границы этого участка, и свободной поверхностью жидкости, т. е. объем $ABCD$, и рассмотрим условия его равновесия в вертикальном и горизонтальном направлениях. Если жидкость действует на поверхность AB с силой P , то поверхность AB оказывает на жидкость такое же усилие P , но направленное в обратную сторону. На рис.3.28б показана эта **сила реакции, разложенная на две составляющие: горизонтальную P_G , и вертикальную P_B .**

Условие равновесия объема $ABCD$ жидкости в вертикальном направлении имеет вид:

$$P_B = p_0 S_G + G,$$

где p_0 —давление на свободной поверхности жидкости;

S_G — площадь горизонтальной проекции поверхности AB ;

G — вес выделенного объема жидкости, вес тела давления.

Условие равновесия того же объема жидкости в горизонтальном направлении запишем с учетом того, что силы давления жидкости на поверхности EC и AD взаимно уравновешиваются и остается лишь сила давления на площадь BE , т. е. на вертикальную проекцию поверхности AB — S_B . Будем иметь:

$$P_{\Gamma} = S_B \rho g h_c + p_a S_b.$$

Определив вертикальную и горизонтальную составляющие полной силы давления P , найдем эту последнюю:

$$P = \sqrt{P_B^2 + P_{\Gamma}^2}.$$

В том случае, когда жидкость расположена снизу (случай «в», см. рис.3.28в), величина гидростатического давления во всех точках поверхности AB будет иметь те же значения, что и в случае «б», но направление его будет противоположным, и суммарные силы P_B и P_{Γ} будут определяться теми же формулами, но с обратным знаком. При этом под величиной G следует понимать, так же как и в случае «б», вес жидкости в объеме $ABCD$, хотя этот объем и не заполнен жидкостью - вертикальная составляющая силы давления жидкости на твердую стенку направлена вверх.

Направление силы давления на стенку определяет угол α

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{P_B}{P_{\Gamma}}.$$

Положение центра давления на цилиндрической стенке легко может быть найдено, если силы P_B и P_{Γ} известны не только по величине, но и по направлению, т.е. если определены центр давления на вертикальной проекции стенки и центр тяжести выделенного объема $ABCD$. Задача значительно облегчается в том случае, когда рассматриваемая цилиндрическая поверхность является круговой, так как равнодействующая сила при этом пересекает ось поверхности. Это следует из того, что любая элементарная сила давления dP нормальна к поверхности, т. е. направлена по радиусу.

Изложенный способ определения силы давления на цилиндрические поверхности применим также и к сферическим поверхностям, причем равнодействующая сила в этом случае также проходит через центр поверхности и лежит в вертикальной плоскости симметрии.

§ 3.22. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ РАСЧЕТА СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ЗАКОНОМЕРНЫХ ФОРМ

Рассмотрим здесь только цилиндрические поверхности с образующей параллельной оси y (рис. 3.29).

Задача в данном случае по существу сводится к нахождению тела давления и к определению направления веса тела давления.

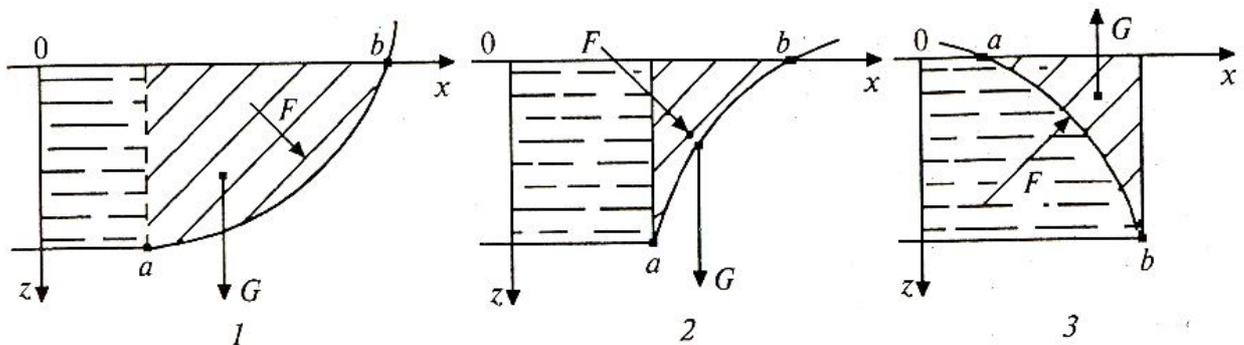


Рис.3.29

Вес тела давления может быть как положительный, направленный по оси Oz , так и отрицательный, направленный в сторону отрицательных z , т. е. вертикально вверх.

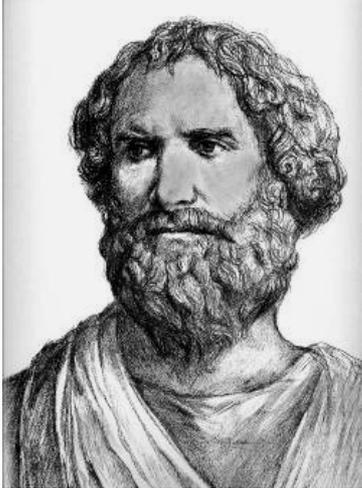
Когда силы давления действуют на поверхность вниз, то и вес тела давления получается направленным вниз, т. е. положительным. Когда силы давления действуют на поверхность вверх (случай 3), то и вес тела давления направлен вверх, т. е. отрицателен. После нахождения G расчет ведется так же, как было указано выше.

§ 3.23. ЗАКОН АРХИМЕДА

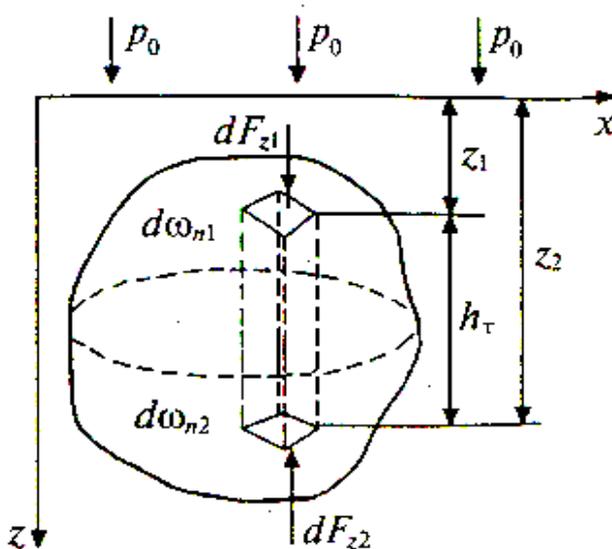
Закон Архимеда формулируется в виде следующего утверждения: *на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила,*

направленная вверх и равная весу вытесненной им жидкости.

Эту силу называют поддерживающей. Она является равнодействующей сил давления, с которыми жидкость, находящаяся в покое, действует на покоящееся в нем тело.

	<p>Древнегреческий математик и механик, основоположник теоретической механики и гидростатики. Архимеду принадлежит множество технических изобретений, завоевавших ему необычайную популярность среди современников. Знаменитый закон гидростатики, вошедший в науку с его именем, сформулирован в трактате "О плавающих телах".</p>
<p>АРХИМЕД (287 до н. э. – 212 до н.э.)</p>	<p>Еще в юности, во время пребывания в Александрии, изобрел водоподъемный механизм - водоподъемная машина, вал с винтовой поверхностью, установленный в наклонной трубе, нижний конец которой погружен в воду. При вращении (напр., от ветряного или другого двигателя) винтовая поверхность вала перемещает воду по трубе на высоте до 4 м), сыгравший большую роль в ирригационных работах на засушливых землях египетского государства.</p>

Для доказательства закона выделим в теле элементарную вертикальную призму с основаниями $d\omega_{n1}$ и $d\omega_{n2}$ (рис. 3.30).



Вертикальная проекция элементарной силы, действующей на верхнее основание призмы, будет:

$$dF_{z1} = p_1 d\omega_{n1} \cos(n_1, z),$$

где p_1 - давление на основание призмы $d\omega_{n1}$; n_1 - нормаль к поверхности $d\omega_{n1}$.

Рис.3.30

Так как $d\omega_{n1} \cos(n_1, z) = d\omega_z$,

где $d\omega_z$ - площадь призмы в сечении, перпендикулярном оси z , то:

$$dF_{z_1} = p_1 d\omega_z.$$

Отсюда, учитывая, что по формуле гидростатического давления $p_1 = p_0 + \gamma z$, получим:

$$dF_{z_1} = (p_0 + \gamma z_1) d\omega_z.$$

Аналогично вертикальная проекция элементарной силы, действующей на нижнее основание призмы, находится по формуле:

$$dF_{z_2} = (p_0 + \gamma z_2) d\omega_z.$$

Суммарная вертикальная элементарная сила, действующая на призму, будет:

$$dF_{z_1} = dF_{z_1} - dF_{z_2} = \gamma(z_1 - z_2) d\omega_z = -\gamma(z_2 - z_1) d\omega_z$$

или

$$dF_z = -\gamma h_T d\omega_z.$$

Интегрируя это выражение при $\gamma = \text{const}$, получим

$$F_z = -\gamma \int_{\omega} h_T d\omega_z,$$

где $\int_{\omega} h_T d\omega_z = V$ - объем тела, погруженного в жидкость;

h_T - высота погруженной части тела на данной вертикали.

Отсюда для выталкивающей силы F_z получим формулу:

$$F_z = -\gamma V.$$

Выделяя в теле элементарные горизонтальные призмы и производя аналогичные выкладки, получим $F_x = 0, F_y = 0$.

Тогда

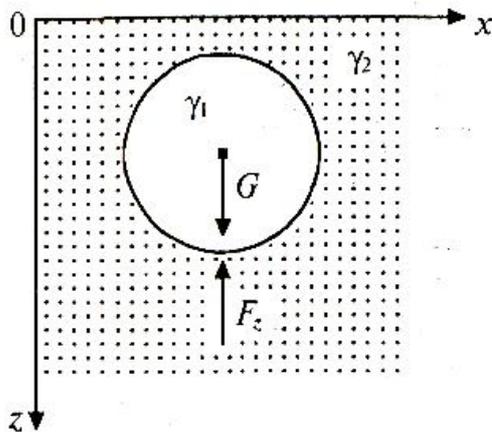
$$F = F_z = -\gamma V = -G,$$

где G - вес жидкости, вытесненной телом, или

$$\boxed{F = \rho_{ж} g V_{тела}}.$$

Таким образом, выталкивающая сила, действующая на тело, погруженное в жидкость, равна весу жидкости, вытесненной телом, что и требовалось доказать.

Из закона Архимеда следует, что на тело, погруженное в жидкость, в конечном счете, действуют две силы (рис. 3.31):



1 - сила тяжести - вес тела $G = \gamma_1 V$;

2 - поддерживающая (выталкивающая) сила $F_z = \gamma_2 V$;

где γ_1 - удельный вес тела;

γ_2 - удельный вес жидкости.

При этом могут иметь место следующие основные случаи:

Рис.3.31

— Удельный вес тела и жидкости одинаковы $\gamma_1 = \gamma_2$.

В этом случае $G = -F_z$, равнодействующая $G - F_z = 0$, и тело будет находиться в состоянии безразличного равновесия, т. е. будучи погружено на любую глубину, оно не будет ни всплывать, ни тонуть.

— При $\gamma_1 > \gamma_2$, $G > -F_z$ равнодействующая направлена вниз, и тело будет тонуть.

— При $\gamma_1 < \gamma_2$, $G < -F_z$ равнодействующая направлена вверх, и тело будет всплывать. Всплытие тела будет продолжаться до тех пор, пока выталкивающая сила не уменьшится настолько, что сделается равной силе веса, т. е. пока не будет $G = -F_z$. После этого тело будет плавать на поверхности.

§ 3.24. УСЛОВИЯ ПЛАВУЧЕСТИ И ОСТОЙЧИВОСТИ ТЕЛ, ЧАСТИЧНО ПОГРУЖЕННЫХ В ЖИДКОСТЬ

Наличие условия $G = F_z$ необходимо для равновесия тела, по-

груженого в жидкость, но еще недостаточно. Для равновесия тела, кроме равенства $G = F_z$, необходимо также, чтобы линии этих сил были направлены по одной прямой, т. е. совпадали (рис. 3.32, *a*).

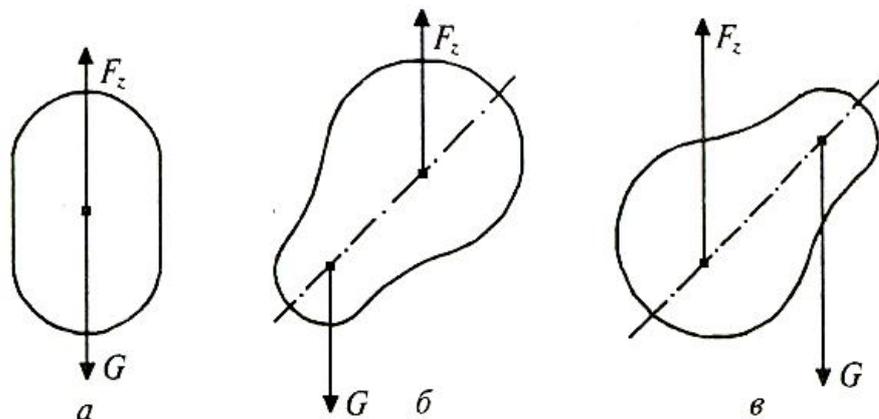


Рис.3.32

Если тело однородно, то точки приложения указанных сил всегда совпадают и направлены по одной прямой. Если тело неоднородно - точки приложения этих сил не совпадут, и силы G и F_z образуют пару сил (см. рис. 3.32, *б*, *в*). Под действием этой пары сил тело будет вращаться в жидкости до тех пор, пока точки приложения сил G и F_z не окажутся на одной вертикали, т. е. момент пары сил будет равен нулю (рис. 3.33).

Наибольший практический интерес представляет исследование условий равновесия тел, частично погруженных в жидкость, т. е. при плавании тел.

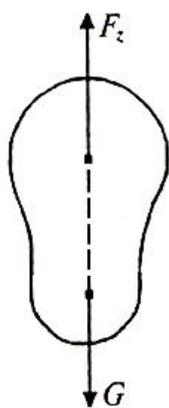


Рис.3.33

Способность плавающего тела, выведенного из состояния равновесия вновь возвращаться в это состояние, называют устойчивостью.

Рассмотрим условия, при которых плавающее на поверхности жидкости тело устойчиво.

Вес жидкости, вытесненной погруженным в нее телом, называют **водоизмещением**.

Точку приложения равнодействующей выталкивающих сил называют **центром водоизмещения** (точка D).

Расстояние MC между метацентром и центром тяжести называют **метацентрическим радиусом**.

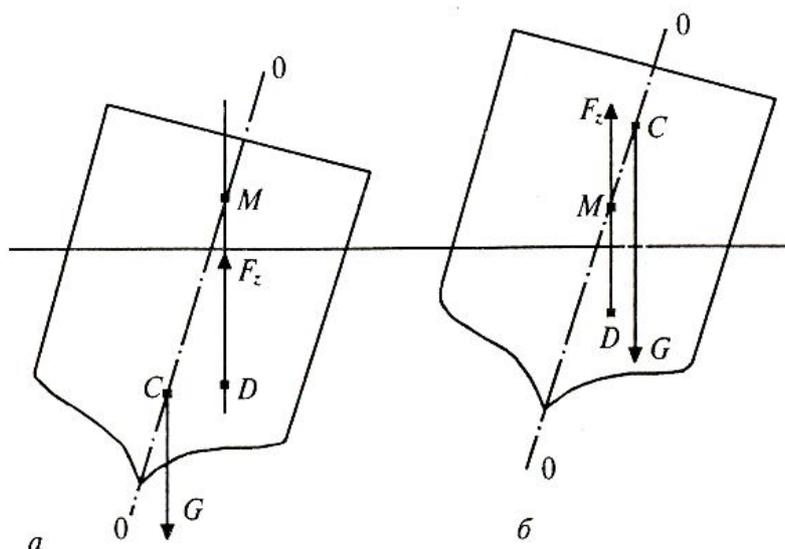


Рис.3.34

Таким образом, плавающее тело имеет три характерные точки:

1. Центр тяжести C , не меняющий своего положения при крене.
2. Центр водоизмещения D , перемещающийся при крене тела, так как очертания объема, вытесняемого в жидкости, при этом меняются.

3. Метацентр M , также изменяющий свое положение при крене. При плавании тела могут, представится следующие три основных случая в зависимости от относительного расположения центра тяжести C и метацентра M :

1-й - устойчивого равновесия - метацентр лежит выше центра тяжести (рис. 3.34, a), и при крене пара сил G и F_z стремится возвратить тело в первоначальное состояние (тело вращается против часовой стрелки);

2-й - безразличного равновесия - метацентр и центр тяжести совпадают;

3-й - нестойчивого равновесия - метацентр лежит ниже центра тяжести (рис. 3.34, б), и образовавшаяся при крене пара сил вызывает вращение тела по часовой стрелке, что может привести к опрокидыванию плавающего средства.



Вопросы для самопроверки

1. *Дайте определение гидростатики как научной части дисциплины «Гидравлика».*
2. *Перечислите силы, действующие на рассматриваемый объем жидкости.*
3. *Дайте определение гидростатического давления.*
4. *Какова размерность давления?*
5. *В каких единицах измеряется давление?*
6. *Сформулируйте основную теорему гидростатики.*
7. *Сформулируйте основное условие равновесия жидкости*
8. *Раскройте физический смысл проекций X , Y , Z .*
9. *Раскройте физический смысл потенциала сил.*
10. *Что называется поверхностью равного давления?*
11. *Перечислите свойства поверхности уровня.*
12. *Что представляет собой поверхность уровня в поле сил тяготения?*
13. *Каковы особенности напряженного состояния покоящейся жидкости?*
14. *Каковы основные отличительные свойства нормального напряжения поверхностных сил в покоящейся жидкости?*
15. *Раскрыть физический смысл членов, входящих в основное дифференциальное уравнение гидростатики.*
16. *Раскрыть физический смысл членов, входящих в основное интегральное уравнение равновесия.*
17. *Что называется полным (абсолютным) давлением?*
18. *Что называется избыточным давлением и вакуумом?*
19. *Что называется пьезометрическим и гидростатическим напором?*
20. *Раскрыть энергетическую сущность основного уравнения гидростатики.*
21. *Сформулируйте закон Паскаля.*
22. *Какие гидравлические устройства основаны на законе Паскаля?*
23. *По каким формулам определяется сила давления и центр давления на цилиндрические поверхности?*
24. *Что такое тело давления? Как определяется тело давления при отсутствии свободной поверхности?*
25. *Как определяется давление жидкости в круглой трубе?*

26. Может ли движущаяся жидкость находиться в равновесии? Если может, при каких условиях?
27. По какой формуле определяется сила гидростатического давления жидкости на колено трубы?
28. Как формулируется закон Архимеда?
29. Что такое остойчивость плавающего тела?
30. Что называется метацентром и метацентрическим радиусом?



Примеры решения задач

Задача 1. Определить полное гидростатическое (абсолютное) и избыточное давления на дно наполненного водой сосуда высотой $h = 10$ м. Сосуд сверху открыт, давление на свободной поверхности атмосферное.

Решение:

Гидростатическое давление в точке равно

$$p = p_0 + \rho_B g h,$$

где $p_0 = p_{\text{ат}}$.

Примем: $\rho_B = 1000 \text{ кг/м}^3$; $g = 9,80665 \text{ м/с}^2$; $p_{\text{ат}} = 101325 \text{ Па}$.

Абсолютное давление

$$p = 101325 + 1000 \cdot 9,80665 \cdot 10 = 19,93915 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Избыточное давление

$$p_u = \rho_B \cdot g \cdot h = 1000 \cdot 9,80665 \cdot 10 = 9,80665 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

В технической системе давление измеряется в кгс/см^2 . $1 \text{ кгс/см}^2 = 1 \text{ ат}$ (техническая атмосфера). При этом $1 \text{ кгс/см}^2 = 9,80665 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

Таким образом, столб воды высотой 10 м создает в своем основании избыточное давление, равное 1 ат.

Задача 2. Определить силу, точку приложения и направление ее действия, если вода действует на затвор диаметром $D = 2$ м, шириной $B = 3$ м (рис. 3.35).

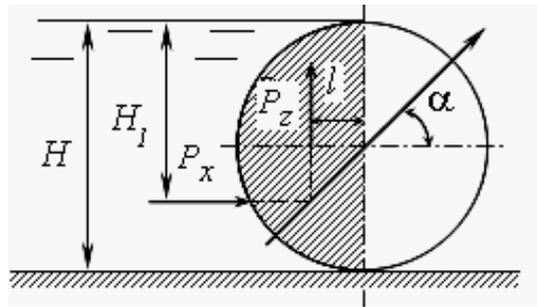


рис. 3.35

Решение:

1. Сила, действующая на вертикальную проекцию P_x :

$$P_x = \rho g h_c \omega = \rho g \frac{D}{2} DB = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{2}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 58,86 \text{ кН}.$$

2. Вертикальная составляющая силы

$$P_z = \rho g v = \rho g \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4} B = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi 2^2}{4} \cdot 3 = 4623 \text{ кН}.$$

3. Полная сила гидростатического давления

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{(58,86)^2 + (46,23)^2} = 74,84 \text{ кН}.$$

4. Угол наклона результирующей силы с горизонтальной осью

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{P_z}{P_x} = \operatorname{arctg} \frac{46,23}{58,86} = 30^\circ 15'.$$

Сила P проходит через центр окружности и приложена в точке D .

Задача 3. Определить равнодействующую F сил давления, действующих на плоскую прямоугольную стенку шириной $b=2,0$ м, наклоненную под углом $\alpha=45^\circ$ к горизонту (рис. 3.36), если глубина жидкости в открытом сосуде $H=1,5$ м. Найти точку приложения равнодействующей.

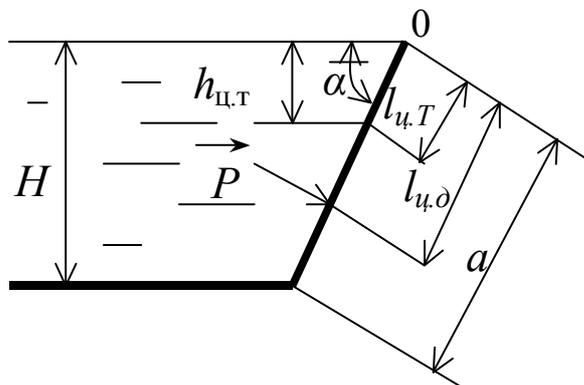


Рис.3.36

Решение: Площадь стенки

$$S = a \cdot b = \frac{H}{\sin \alpha} \cdot b = \frac{1,5}{0,7071} \cdot 2,0 = 4,243 \text{ м}^2.$$

Равнодействующая сил давления на плоскую стенку

$$F = (p_0 + \rho \cdot g \cdot h_{\text{ц.т}}) \cdot S, \quad h_{\text{ц.т}} = \frac{H}{2}.$$

Для открытого сосуда $p_0 = p_{\text{ат}}$

$$F = P = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{1,5}{2} \cdot 4,243 = 31218 \text{ Н} = 3182 \text{ кГс}$$

Точка приложения равнодействующей сил давления определяется расстоянием $l_{\text{ц.д.}}$:

$$l_{\text{ц.д.}} = l_{\text{ц.т}} + \frac{J_{\text{ц.т}}}{S \cdot l_{\text{ц.т}}}, \quad l_{\text{ц.т}} = \frac{a}{2} = \frac{2,12}{2} = 1,06 \text{ м}.$$

Здесь $J_{\text{ц.т}}$ – момент инерции стенки относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести. Для прямоугольника

$$J_{\text{ц.т}} = b \cdot a^3 / 12 = 2 \cdot 2,12^3 / 12 = 1,588 \text{ м}^4;$$

$$l_{\text{ц.д.}} = 1,06 + \frac{1,588}{4,243 \cdot 1,06} = 1,413 \text{ м}.$$

Задача 4. Поршень 1 гидравлического пресса имеет диаметр $d=0,08$ м (рис. 3.37). Сила $P_1=30$ кГс=294,2 Н, действующая на поршень 1, создает усилие на поршне 2 $P_2= 750$ кГс=7355 Н. Определить диаметр поршня 2. Коэффициент полезного действия η пресса принять равным 0,85.

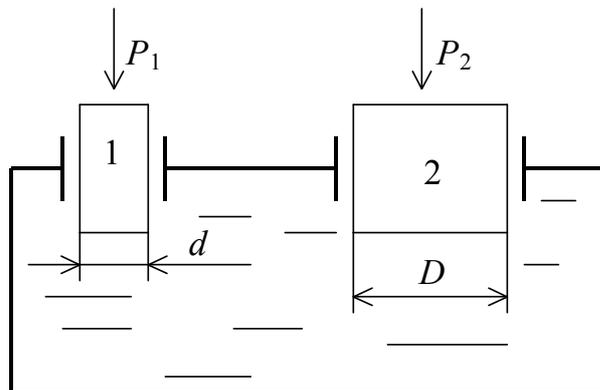


Рис.3.37

Решение: Гидростатическое давление под поршнем насоса

$$p = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_1 \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{294,2 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,08^2} = 58558,92 \text{ Н/м}^2 = 0,5971 \text{ кгс/см}^2.$$

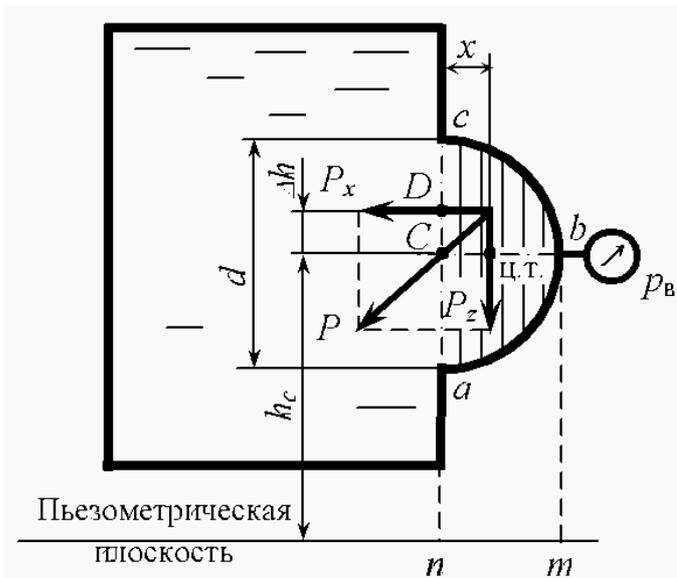
Так как по закону Паскаля внешнее давление p передается в жидкости по всем направлениям одинаково, то

$$P_2 = \eta \cdot p \cdot S_2 = \eta \cdot p \cdot \frac{\pi D^2}{4}.$$

$$D = \sqrt{\frac{4P_2}{\eta \cdot p \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7355}{0,85 \cdot 58558,92 \cdot 3,14}} = 0,434 \text{ м.}$$

Задача 5. На боковой поверхности резервуара, заполненного водой, имеется полусферическая крышка диаметром $d = 0,8$ м (рис.3.38). Определить горизонтальную и вертикальную составляющие сил давления жидкости на крышку при показании вакуумметра $p_B = 10$ кПа.

Решение. Находим положение пьезометрической плоскости, вертикальное расстояние от которой до центра тяжести (точка C) вертикальной проекции полусферической крышки h_C равно вакуумметрической высоте.



В технике избыточное давление и соответствующая ему пьезометрическая высота, измеряемая от пьезометрической плоскости, приняты положительными, а вакуумметрическое давление и вакуумметрическая высота — отрицательными.

Рис.3.38

Тогда
$$h_C = h_B = \frac{p_B}{\rho g} = \frac{-10 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 10} = -1 \text{ м.}$$

Горизонтальная составляющая давления жидкости на полусферическую крышку

$$P_x = \rho g h_C \omega_z \text{ или } P_x = p_B \omega_z.$$

Так как площадь вертикальной проекции крышки есть круг диаметром $d = 0.8$ м, то

$$P_x = -10 \cdot 10^3 \frac{3,14 \cdot 0,8^2}{4} = -5,02 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Знак «минус» показывает, что на крышку действует сила внешнего давления, которая направлена внутрь жидкости.

Центр давления силы P_x (точка D на вертикальной проекции крышки) смещен вверх на

$$\Delta h = \frac{I_C}{\omega_z h_C} = \frac{\pi d^4 4}{64 \pi d^2 h_C} = \frac{d^2}{16 h_C} = \frac{0,8^2}{16(-1)} = -0,04 \text{ м.}$$

Вертикальная составляющая силы гидростатического давления на верхнюю четверть сферической крышки направлена вниз

$$P_{bc} = \rho g V_{bcnm}.$$

Вертикальная составляющая давления на нижнюю четверть сферической крышки направлена вверх

$$P_{ab} = \rho g V_{abmn}.$$

Следовательно, вертикальная составляющая на всю полусферическую крышку

$$P_z = P_{bc} - P_{ab} = \rho g \frac{1}{2} \frac{\pi d^3}{6} = 10^3 \cdot 10 \frac{3,14 \cdot 0,8^3}{12} = 1,34 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

и направлена вниз.

Линия действия силы P_z проходит через центр тяжести объёма тела давления (объёма полусферы), т.е. на расстоянии x от центра кривизны полусферы. Равнодействующая сила P проходит через центр кривизны.

Следовательно, расстояние x от центра кривизны полусферы до линии действия силы P_z можно найти из соотношения

$$\frac{P_z}{P_x} = \frac{\Delta h}{x}.$$

Отсюда
$$x = \Delta h \frac{P_z}{P_x} = -0,04 \frac{-5,02 \cdot 10^3}{1,34 \cdot 10^3} = 0,15 \text{ м.}$$

Задача 6. Определить плотность плавающего в воде деревянного бруса, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, высота которого $h=0,4$ м, если брус выступает над водой на расстоянии $y=0,15$ м (рис. 3.39).

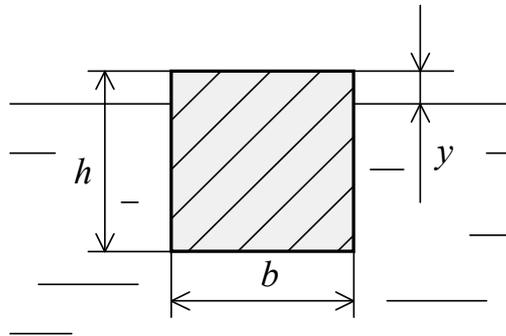


Рис.3.39

Решение: Составляем условие равновесия бруса

$$G_{\text{бр}} = G_{\text{ж}}.$$

Вес бруса

$$G_{\text{бр}} = \rho_{\text{бр}} \cdot g \cdot W_{\text{бр}} = \rho_{\text{бр}} \cdot g \cdot b \cdot l \cdot h.$$

Здесь b и l – ширина и длина бруса соответственно.

Гидростатическая подъемная сила (сила Архимеда)

$$G_{\text{ж}} = \rho_{\text{в}} \cdot g \cdot W_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} \cdot g \cdot b \cdot l \cdot (h-y);$$

$$\rho_{\text{бр}} \cdot g \cdot b \cdot l \cdot h = \rho_{\text{в}} \cdot g \cdot b \cdot l \cdot (h-y);$$

$$\rho_{\text{бр}} = \frac{\rho_{\text{в}} \cdot g \cdot b \cdot l \cdot (h-y)}{g \cdot b \cdot l \cdot h} = \frac{1000 \cdot (0,4 - 0,15)}{0,4} = 600 \text{ кг/м}^3.$$



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить избыточное давление в забое скважины глубиной $h = 85$ м, которая заполнена глинистым раствором плотностью $\rho = 1250$ кг/м³.

Задача 2.

Определить манометрическое и абсолютное давление в точке А сосуда, (рис.3.40) заполненного водой, если $h_1 = 30$ см, показание ртутного манометра $h_2 = 60$ см.

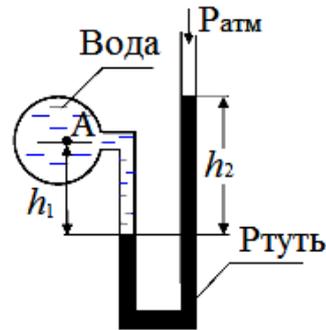


Рис. 3.40

Задача 3.

Два открытых сообщающихся резервуара заполнены жидкостью разного удельного веса $\gamma_1 = 8500$ Н/м³ и $\gamma_2 = 10000$ Н/м³. Разность уровней жидкостей в резервуарах $h = 1,9$ м. Определить величину h_2 , на которой находится граница раздела жидкостей а-а (рис.3.41).

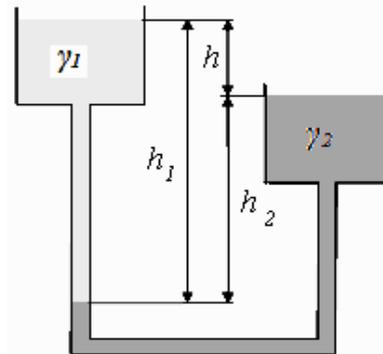


Рис. 3.41

Задача 4.

Паровой прямодействующий насос подает жидкость Ж (масло турбинное) на высоту $H = 45$ м. Каково рабочее давление пара, если диаметр парового цилиндра $D = 180$ мм, а насосного цилиндра $d = 100$ мм? Потерями на трения пренебречь (рис. 3.42).

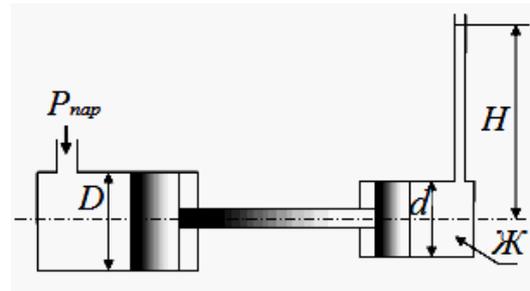


Рис. 3.42

Задача 5.

Плоский щит перекрывает канал шириной $b = 1,8$ м. Глубина воды перед щитом $h = 2,5$ м. Определить силу давления воды на щит и точку приложения этой силы аналитическим и графоаналитическим методом.

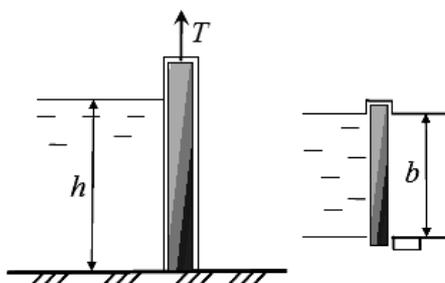


Рис. 3.43

Определить минимальное подъемное усилие щита T , если его вес $G = 20$ кН (рис.3.43).

Коэффициент трения щита по опорам при подъеме $f = 0,25$.

Задача 6.

Для заливки центробежного насоса 1 используется вакуумный насос 2. Какой следует создать вакуум, если верх корпуса центробежного насоса находится над уровнем воды в резервуаре на расстоянии $H = 7$ м (рис. 3.44).

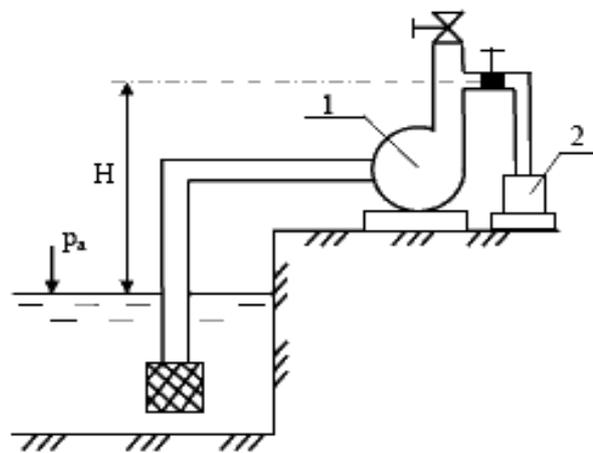


Рис. 3.44

Задача 7.

Определить силу R , на которую должно быть рассчитано запорное устройство квадратной крышки размерами $a \times a$ ($a = 0,5$ м), вращающего вокруг оси O , если показания манометра $P_M = 7,848$ кПа, глубина погружения уровня оси $b = 0,8$ м, жидкость – вода. Построить эпюру давления (рис. 3.45)

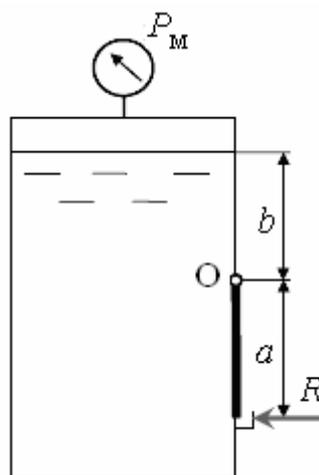


Рис. 3.45

Задача 8.

Горизонтальный цилиндрический резервуар (рис. 3.46), днища которого представляют собой полусферы радиусом $R = 0,6$ м, заполнен водой под давлением. Манометр показывает избыточное давление $P_m = 0,2$ атм = 19620 Па, длина $L = 2,4$ м. Вычислить усилия, разрывающие резервуар по сечению А-А, и усилия, отрывающие днище резервуара (сечения Б-Б).

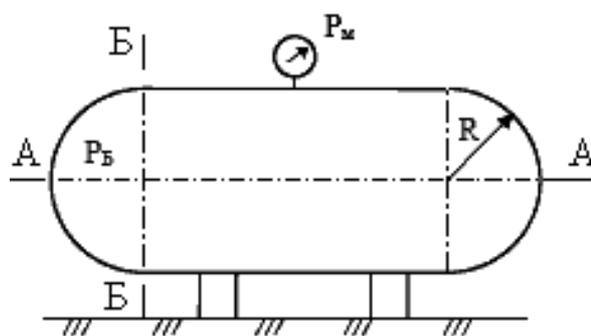


рис. 3.46

Задача 9.

Для переправы грузов через реку (рис. 3.47) построен плот из 25 штук пустых железных бочек. Размеры бочек: диаметр $d = 0,8$ м, высота $h = 1,3$ м. Масса одной бочки $m = 50$ кг. Определить грузоподъемность плота при условии его полного погружения.



рис. 3.47

Задача 10.

Кубик, сделанный из материала (рис. 3.48), плотность которого вдвое меньше плотности воды, плавает в воде. Какое из двух показанных положений кубика - будет устойчивым?

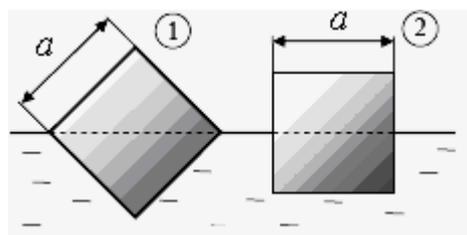


рис. 3.48

Задача 11.

На рисунке 3.49 представлена система сообщающихся сосудов. В левом сосуде налит спирт этиловый ($\rho_1 = 790$ кг/м³), а в правом - глицерин ($\rho_2 = 1250$ кг/м³). Определить на какой высоте h_2 установится уровень в сосуде с глицерином, если в левом сосуде уровень спирта

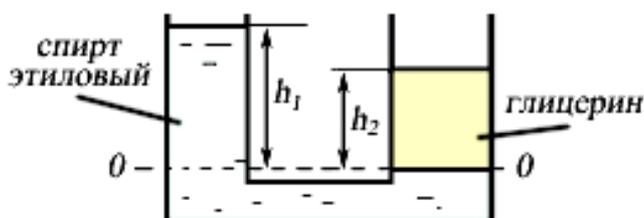


Рис. 3.49

выше линии раздела на $h_1 = 85$ см.

Задача 12.

Определить высоту, на которую поднимается масло в вакуумметре (рис.3.50), если абсолютное давление внутри баллона $p_{\text{вак}} = 90\,252$ Н/м²

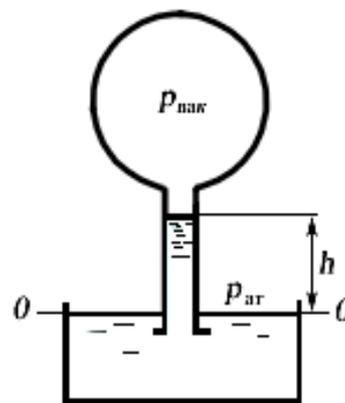


Рис. 3.50

ГЛАВА 4.

ГИДРОДИНАМИКА

*Приобретение любого познания
всегда полезно для ума, ибо он сможет
впоследствии отвергнуть бесполезное и
сохранить хорошее.*

Леонардо да Винчи.

Раздел гидравлики, в котором изучаются законы движения жидкости, называют гидродинамикой. При изучении движения жидкостей рассматриваются две основные задачи:

1. При заданных гидродинамических характеристиках потока (скорость и давление) требуется определить силы, действующие на жидкость.
2. При заданных силах, действующих на жидкость требуется определить гидродинамические характеристики потока.

Применительно к идеальной жидкости гидродинамическое давление имеет те же свойства и тот же смысл, что и гидростатическое давление.

При анализе движения вязкой жидкости оказывается, что

$$p_x \neq p_y \neq p_z,$$

где p_x , p_y , p_z - действительные нормальные напряжения в рассматриваемой точке, относящиеся к трем произвольно намеченным в этой точке взаимно ортогональным площадкам. Гидродинамическим давлением в точке считают величину:

$$p = \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z).$$

При этом считается, что величина P не зависит от ориентировки взаимно ортогональных площадок.

В дальнейшем будет рассматриваться задача определения скорости и давления при известных силах, действующих на жидкость. Следует отметить, что скорость и давление для разных точек жидкости будут иметь различные

величины u , кроме того, для данной точки пространства они могут изменяться во времени.

Для определения составляющих скорости по координатным осям u_x, u_y, u_z давления p в гидравлике рассматриваются следующие уравнения.

1. Уравнение несжимаемости и неразрывности движущейся жидкости (уравнение баланса расхода жидкости).
2. Дифференциальные уравнения движения (уравнения Эйлера).
3. Уравнение баланса удельной энергии потока (уравнение Бернулли).

Ниже приведены эти уравнения, составляющие теоретическую базу гидродинамики, с предварительными пояснениями некоторых исходных положений из области кинематики жидкости.

§ 4.1. ОСНОВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ДВА МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

При изучении движения жидкости можно пользоваться двумя методами исследования. Первый, развитый Лагранжем и названный субстанциональным, заключается в том, что движение всей жидкости изучается путем исследования движения ее отдельных индивидуальных частиц.

Второй, развитый Эйлером и названный локальным, состоит в том, что движение всей жидкости изучается путем исследования движения в отдельных неподвижных точках, через которые протекает жидкость.

В гидродинамике применяются оба метода. Однако благодаря простоте более распространен метод Эйлера. По методу Лагранжа в начальный момент времени t_0 отмечают в жидкости определенные частицы и далее следят во времени за движением каждой отмеченной частицы и за ее кинематическими характеристиками. Положение каждой частицы жидкости в момент времени t_0 определяется тремя координатами в неподвижной системе координат, т. е. тремя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \right\}, \quad (4.1)$$

где x, y, z - координаты частицы; t - время.

Для составления уравнений, характеризующих движение различных частиц потока, необходимо учитывать положение частиц в начальный момент времени, т. е. начальные координаты частиц.

Например, точка M (рис. 4.1) в момент времени $t = 0$ имеет координаты a, b, c . Соотношения (4.1) с учетом a, b, c примут вид

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t) \\ y &= f_2(a, b, c, t) \\ z &= f_3(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

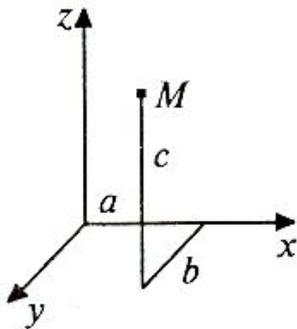


Рис.4.1

В соотношениях (4.2) начальные координаты a, b, c , могут рассматриваться как независимые переменные (параметры). Следовательно, текущие координаты x, y, z , некоторой движущейся частицы являются функциями переменных a, b, c, t , которые называются переменными Лагранжа. При известных соотношениях (4.2) движение жидкости вполне определено.

Действительно, проекции скорости на координатные оси определяются соотношениями (как первые производные от координат по времени):

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t}; \\ v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t}; \\ v_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Проекции ускорений находятся как вторые производные от координат (первые производные от скорости) по времени (соотношения 4.5).

Траектория любой частицы определяется непосредственно из уравнений (4.1) путем нахождения координат x, y, z выбранной частицы жидкости для ряда моментов времени.

По методу Эйлера изучение движения жидкости состоит:

- а) в исследовании изменений во времени векторных и скалярных величин в некоторой фиксированной точке пространства;
- б) в исследовании изменений этих величин при переходе от одной точки пространства к другой.

Таким образом, в методе Эйлера предметом изучения являются поля тех или иных векторных или скалярных величин. Полем какой-либо величины, как известно, называется часть пространства, в каждой точке которого, имеется определенное значение этой величины.

Математически поле, например скоростное, описывается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t); \\ v_y &= v_y(x, y, z, t); \\ v_z &= v_z(x, y, z, t); \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

т. е. скорость:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

является функцией координат и времени.

Переменные x, y, z, t называются переменными Эйлера.

Таким образом, в методе Эйлера движение жидкости характеризуется построением поля скоростей, т. е. картины движения в различных точках пространства в каждый данный момент времени. При этом скорости во всех точках определяются в виде функций (4.4).

Методы Эйлера и Лагранжа математически связаны между собой. Например, в методе Эйлера, частично используя метод Лагранжа, можно следить за движением частицы не в течение времени t (как это следует по Лагранжу), а в продолжение элементарного отрезка времени dt в течение

которого данная частица жидкости проходит через рассматриваемую точку пространства. При этом для определения проекций скорости на координатные оси можно будет пользоваться соотношениями (4.3).

Из соотношений (4.2) следует, что координаты x , y , z являются функциями времени. Тогда v_x , v_y , v_z будут сложными функциями времени. По правилу дифференцирования сложных функций будем иметь

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}; \\ W_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{dz}{dt}; \\ W_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

где W_x , W_y , W_z - проекции ускорения движущейся частицы на соответствующие координатные оси.

Так как для движущейся частицы

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

то

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ W_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ W_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Частные производные

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

называются проекциями локального (местного) ускорения.

Суммы вида

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

называют проекциями конвективного ускорения.

Локальное ускорение определяет изменение во времени скорости в данной точке пространства. Конвективное ускорение определяет изменение скорости по координатам, т. е. при переходе из одной точки пространства в другую.

§ 4.2. ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ И ЛИНИИ ТОКА

Траекторией движущейся частицы жидкости называют путь одной и той же частицы, прослеженной во времени. Изучение траекторий частиц лежит в основе метода Лагранжа. При исследовании движения жидкости по методу Эйлера общее представление о движении жидкости можно составить при помощи построения линий тока (рис. 4.2, 4.3). Линией тока называют такую линию, в каждой точке которой в данный момент времени t векторы скорости являются касательными к этой линии.

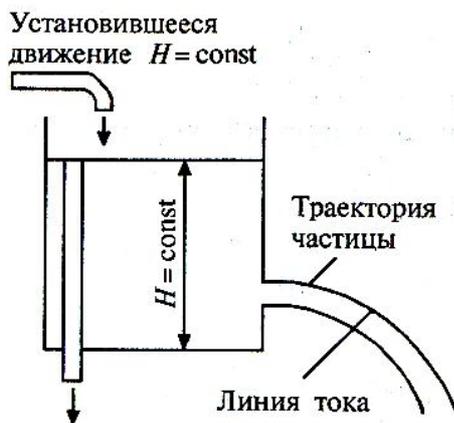


Рис.4.2

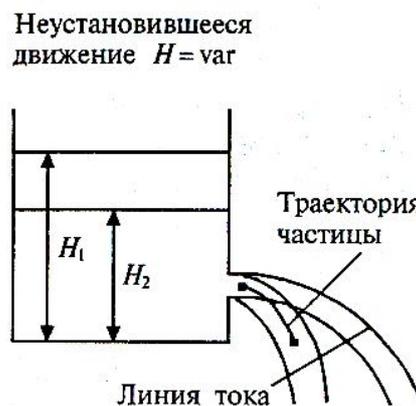


Рис.4.3

При установившемся движении, когда уровень жидкости в емкости не изменяется (рис. 4.2), траектории частиц и линии тока совпадают. В случае неустановившегося движения (рис. 4.3) траектории частиц и линии тока не совпадают.

Следует подчеркнуть разницу между траекторией частицы и линией тока. Траектория относится лишь к одной определенной частице, изучаемой в течение определенного отрезка времени. Линия тока относится к определенной совокупности различных частиц, рассматриваемых в одно мгновение (в данный момент времени).

§ 4.3. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ

Понятие установившегося движения вводится только при исследовании движения жидкости в переменных Эйлера.

Установившимся называют движение жидкости, при котором все элементы, характеризующие движение, в любой точке пространства не меняются во времени (см. рис. 4.2). Например, для составляющих скорости будем иметь

$$v_x = v_x(x, y, z);$$

$$v_y = v_y(x, y, z);$$

$$v_z = v_z(x, y, z);$$

Отсюда

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0.$$

Тогда

$$W_x = \frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z};$$

$$W_y = \frac{dv_y}{dt} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z};$$

$$W_z = \frac{dv_z}{dt} = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Так как величина и направление скорости движения в любой точке пространства при установившемся движении не меняются, то и линии тока не будут меняться во времени. Отсюда следует, что при установившемся

движении траектории частиц и линии тока совпадают.

Движение, при котором все элементы, характеризующие движение жидкости, в любой точке пространства меняются во времени, называют неустановившимся ($H = \text{var.}$).

§ 4.4. СТРУЙЧАТАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ТРУБКА ТОКА. РАСХОД ЖИДКОСТИ

Рассмотрим линию тока 1-2 (рис. 4.4). Проведем в точке 1 плоскость, перпендикулярную вектору скорости V_1 . Возьмем в этой плоскости элементарный замкнутый контур l , охватывающий площадку $d\omega$. Через все точки этого контура проведем линии тока. Совокупность линий тока, проведенных через какой-либо контур в жидкости, образует поверхность, называемую *трубкой тока*.

Совокупность линий тока, проведенных через все точки элементарной площадки $d\omega$, составляет *элементарную струйку*. В гидравлике применяется так называемая струйчатая модель движения жидкости. Поток жидкости рассматривается как состоящий из отдельных элементарных струек.

Рассмотрим поток жидкости, изображенный на рис. 4.5. Объемным расходом жидкости через какую-либо поверхность называют объем жидкости, протекающий в единицу времени через данную поверхность.

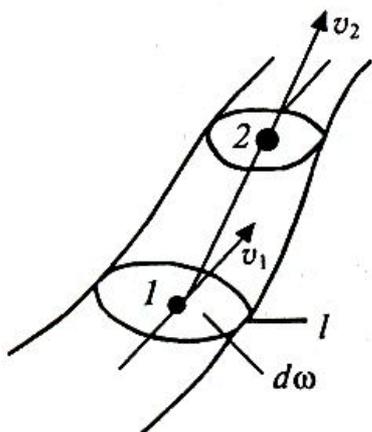


Рис. 4.4

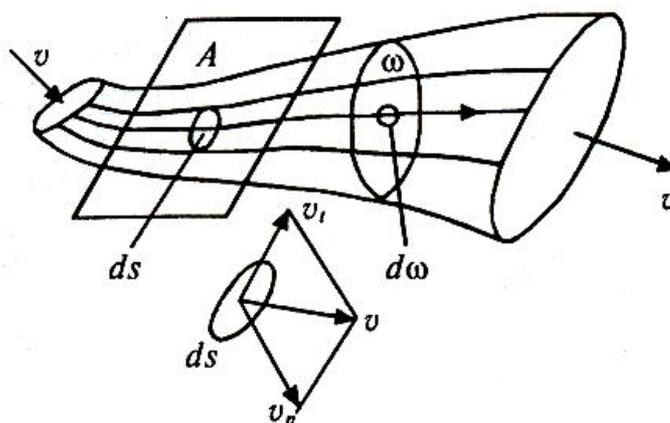


Рис. 4.5

Очевидно, элементарный расход будет

$$dQ = v_n ds,$$

где n - направление нормали к поверхности.

Полный расход

$$Q = \int_S v_n ds$$

или

$$Q = \int_S v \cdot \cos(v, n) ds.$$

Если провести через любую точку потока ортогональную линиям тока поверхность A , то $\cos(v, n) = 1$. Поверхность, являющаяся геометрическим местом частиц жидкости, скорости которых перпендикулярны соответствующим элементам этой поверхности, называют живым сечением потока и обозначают ω . Тогда для элементарной струйки будем иметь

$$dQ = v d\omega$$

и для потока

$$Q = \int_{\omega} v d\omega.$$

Это выражение называют **объемным расходом** жидкости через живое сечение потока.

Примеры.

1. Живое сечение потока при напорном движении показано на рис. 4.6.
2. Живое сечение потока при безнапорном движении дано на рис. 4.7, 4.8.

Отношение площади живого сечения потока к смоченному периметру ложа называют **гидравлическим радиусом** R :

$$R = \frac{\omega}{\chi}.$$

для круглой трубы

$$R = \frac{\pi d^2}{4 \pi d} = \frac{r}{2}.$$

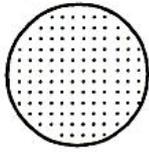


Рис. 4.6

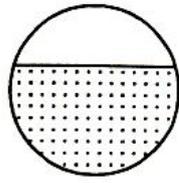


Рис. 4.7

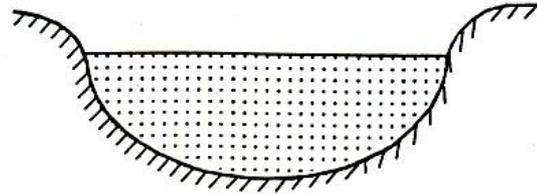


Рис. 4.8

§ 4.5. СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ

Если расход жидкости Q поделить на живое сечение потока, получим среднюю скорость движения жидкости:

$$\bar{v} = \frac{Q}{\omega}.$$

Так как

$$Q = \int_{\omega} v d\omega, \quad \text{то} \quad \bar{v} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} v d\omega.$$

Средняя скорость в сечении потока - это такая, одинаковая для всех точек сечения скорость, при которой происходит тот же расход, какой фактически имеет место при действительных скоростях, различных для разных точек сечения.

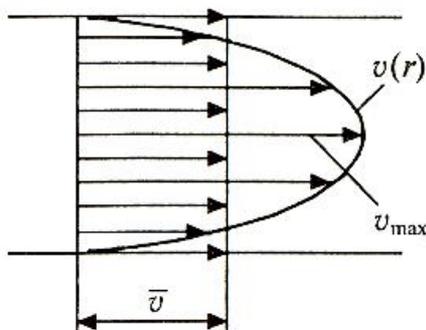


Рис. 4.9

Например, в круглой трубе распределение скоростей при ламинарном течении жидкости представлено на рис. 4.9. Здесь $v(r)$ - действительный профиль скорости при ламинарном течении.

Средняя скорость \bar{v} равна половине максимальной скорости (см. § 6.5):

$$\bar{v} = 0,5v_{\max}.$$

§ 4.6. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Уравнение неразрывности (сплошности) выражает закон сохранения массы и неразрывность течения. Для вывода уравнения выделим в массе жидкости элементарный параллелепипед с ребрами dx , dy , dz (рис. 4.10).

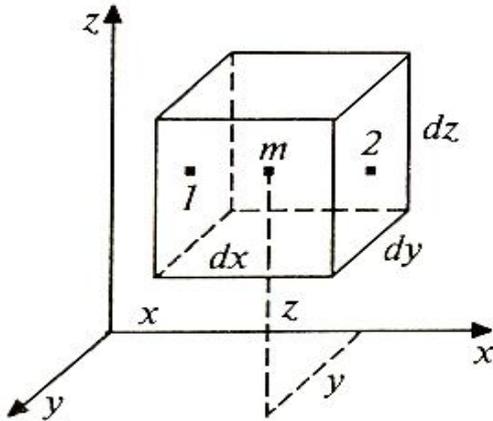


Рис. 4.10

Пусть точка m с координатами x , y , z находится в центре этого параллелепипеда. Плотность жидкости в точке m будет $\rho = f(x, y, z, t)$.

Подсчитаем массу жидкости, втекающей в параллелепипед и вытекающей из него через противоположные грани за время dt .

Масса жидкости, втекающей через левую грань за время dt в направлении оси x , равна

$$dM_1 = \rho_1 (v_x)_1 dydzdt,$$

где ρ_1 и $(v_x)_1$ - плотность и проекция скорости на ось x в точке 1.

Функция $\rho_1 v_x$ является непрерывной функцией координаты x . Разлагая эту функцию в окрестности точки m в ряд Тэйлора с точностью до бесконечно малых первого порядка, для точек 1 и 2 на гранях параллелепипеда получим следующие ее значения:

$$\rho_1 (v_x)_1 = \rho v_x - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$\rho_2 (v_x)_2 = \rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

Масса жидкости, вытекающей через правую грань за время dt в направлении оси x , будет

$$dM_2 = \rho_2 (v_x)_2 dydzdt.$$

Разность между массой втекающей и вытекающей жидкости в

направлении оси x за время Δt равна

$$dM_x = \rho_1(v_x)_1 dydzdt - \rho_2(v_x)_2 dydzdt = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Аналогично для осей y и z получим

$$dM_y = -\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz dt;$$

$$dM_z = -\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dx dy dz dt.$$

Если жидкость сплошь заполняет рассматриваемый объем, то согласно закону сохранения массы сумма найденных разностей масс должна быть равна приращению массы жидкости в том же объеме, вызванному изменением плотности ρ за время dt , т. е.

$$dM_1 = dM_x + dM_y + dM_z.$$

Известно, что

$$dM_t = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz.$$

Подставляя значения dM_1 , dM_x , dM_y , dM_z , в уравнение закона сохранения масс, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (4.6)$$

Так как

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x};$$

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y};$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z};$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z},$$

то, подставляя последние соотношения в (4.6), будем иметь

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}, \quad (4.7)$$

Соотношение (4.7) является уравнением неразрывности сжимаемой жидкости. Этому уравнению можно придать вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\mathbf{v}) = 0,$$

где выражение в скобках называют дивергенцией вектора скорости.

Для установившегося движения частная производная от плотности по времени равна нулю $d\rho/dt = 0$, и уравнение (4.7) принимает вид

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

В случае движения несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, и плотность от времени не зависит, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (4.8)$$

Или

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0.$$

Уравнение неразрывности для элементарной струйки имеет вид

$$\rho v d\omega = \text{const},$$

т. е. массовые расходы во всех сечениях элементарной струйки одинаковы.

Для потока

$$\int_{\omega} \rho v d\omega = \text{const}.$$

Если жидкость несжимаема, то

$$\rho = \text{const}; \int_{\omega} v d\omega = \text{const}; Q = \text{const}.$$

Отсюда следует, что $Q_1 = Q_2$.

Так как

$$Q = \bar{v}\omega,$$

то

$$\bar{v}_1\omega_1 = \bar{v}_2\omega_2.$$

Отсюда

$$\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

т. е. средние скорости потока обратно пропорциональны площадям живых сечений потока (рис. 4.11).

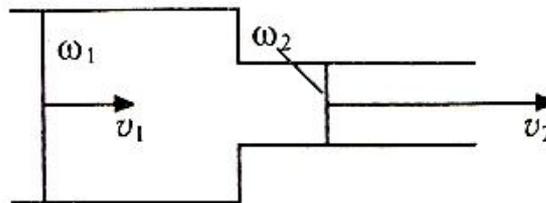


Рис.4.11

Объемный расход Q несжимаемой жидкости остается постоянным вдоль канала.

§ 4.7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ (НЕВЯЗКОЙ) ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА)

Невязкой или *идеальной жидкостью* называют жидкость, частицы которой обладают абсолютной подвижностью. Такая жидкость не способна сопротивляться сдвигающим усилиям и поэтому касательные напряжения в ней будут отсутствовать. Из поверхностных сил в ней будут действовать только нормальные усилия.

Предел

$$p = \lim \left(\frac{\Delta p}{\Delta \omega} \right)_{\Delta \omega \rightarrow 0}$$

в движущейся жидкости называют гидродинамическим давлением.

Гидродинамическое давление обладает следующими свойствами:

- *сила гидродинамического давления действует всегда по внутренней нормали* (сжимающее усилие);
- *величина гидродинамического давления не зависит от ориентировки площадки* (что доказывается аналогично второму свойству гидростатического давления).

На основании этих свойств можно считать, что $p = f(x, y, z, t)$. Таким образом, свойства гидродинамического давления в невязкой жидкости идентичны свойствам гидростатического давления. Однако величина гидродинамического давления определяется уравнениями, отличными от уравнений гидростатики.

Для вывода уравнений движения жидкости выделим элементарный параллелепипед в массе жидкости с ребрами dx, dy, dz (рис. 4.12).

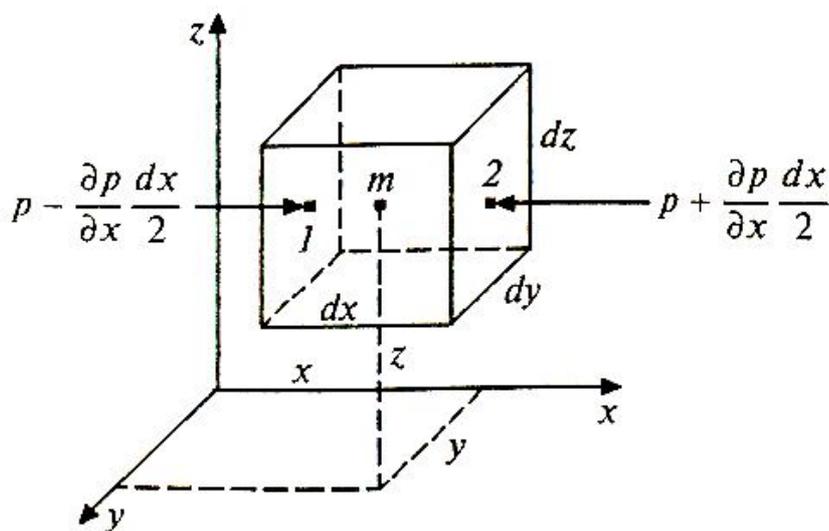


Рис 4.12

Пусть точка m с координатами x, y, z находится в центре этого параллелепипеда. Давление в точке m будет $p = f(x, y, z, t)$. Компоненты массовых сил, отнесенных к единице массы, пусть будут X, Y, Z .

Запишем условие равновесия сил, действующих на элементарный

параллелепипед, в проекции на ось x :

$$F_1 - F_2 + F_m - F_u = 0, \quad (4.9)$$

где F_1 и F_2 - силы гидростатического давления; F_m - равнодействующая массовых сил тяжести; F_u - равнодействующая сил инерции.

Силы гидростатического давления равны произведению гидростатических давлений в центрах тяжести элементарных площадок (в точках 1 и 2) на их площади:

$$F_1 = p_1 dz dy = p_1 d\omega_x;$$

$$F_2 = p_2 dz dy = p_2 d\omega_x.$$

Давления p_1 и p_2 определяются по формулам (см. § 3.3):

$$p_1 = p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx; \quad p_2 = p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx,$$

которые показывают, насколько давление p в точке A отличается от давлений в точках 1 и 2.

Формула для определения равнодействующей массовых сил имеет вид

$$F_m = X dm = X \rho dV = X \rho dx dy dz,$$

где $dm = \rho dx dy dz$ - масса элементарного параллелепипеда.

Равнодействующая сил инерции определяется в виде произведения массы, элементарного, параллелепипеда на его ускорение:

$$F_u = -W_x dm = -\frac{dv_x}{dt} \rho dx dy dz.$$

Знак минус указывает на то, что сила инерции направлена противоположно направлению оси x .

Подставляя F_1 , F_2 , F_m , F_u в (4.9), получим

$$X \rho dx dy dz + p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx dy dz - p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx dy dz - \rho dx dy dz \frac{dv_x}{dt} = 0,$$

Отсюда

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Если рассматривать условие равновесия сил, действующих на элементарный параллелепипед в проекциях на оси y и z , то получим еще два уравнения:

$$\frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

$$\frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Записывая последние три уравнения в развернутом виде, получим уравнения движения Эйлера для идеальной невязкой жидкости, выведенные им в 1775 г.

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

В случае несжимаемой невязкой жидкости ($\rho = \text{const}$) система уравнений Эйлера имеет четыре неизвестных: v_x , v_y , v_z , p . Так как уравнений 3, а неизвестных 4, то система уравнений Эйлера в данном случае оказывается незамкнутой. Чтобы она была замкнутой, необходимо добавить еще одно уравнение. Таким уравнением будет уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Для получения конкретных однозначных решений замкнутой системы дифференциальных уравнений, необходимо задать условия однозначности, которые включают следующие условия: 1) геометрические (линейные размеры рассматриваемой области); 2) физические (физические константы, характеризующие жидкость); 3) начальные (значения искомых функций в начальный момент времени); 4) граничные (значения искомых

функций на границе области). Система дифференциальных уравнений с условиями однозначности представляет полную математическую постановку задачи.

§ 4.8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ - СТОКСА)

Вязкой называют такую жидкость, которая при своем движении оказывает сопротивление сдвигающим усилиям. Все жидкости, существующие в природе, являются вязкими, поэтому вязкую жидкость называют еще реальной. Рассмотрим поверхностные силы, действующие в вязкой жидкости.

В вязкой жидкости ввиду наличия сил трения возникают касательные напряжения. Поэтому напряжения, действующие на площадку, могут быть направлены как угодно по отношению к ней, а не обязательно по нормали.

В вязкой жидкости различают два рода напряжений (рис. 4.13).



Схема поверхностных сил, действующих в вязкой жидкости, представлена на рис. 4.14. Первый индекс при p указывает на нормаль к площадке, на которую действует напряжение; второй - ось, на которую оно спроектировано.

Выделим в движущейся жидкости элементарный параллелепипед с

ребрами, параллельными осям x , y , z и рассмотрим поверхностные силы, действующие на его гранях.

Условимся считать нормальное напряжение положительным в том случае, когда оно направлено по внешней нормали, т. е. в данном случае нормальное напряжение направлено противоположно давлению. Нормальное напряжение - это реакция жидкого элемента на воздействие окружающей его жидкости.

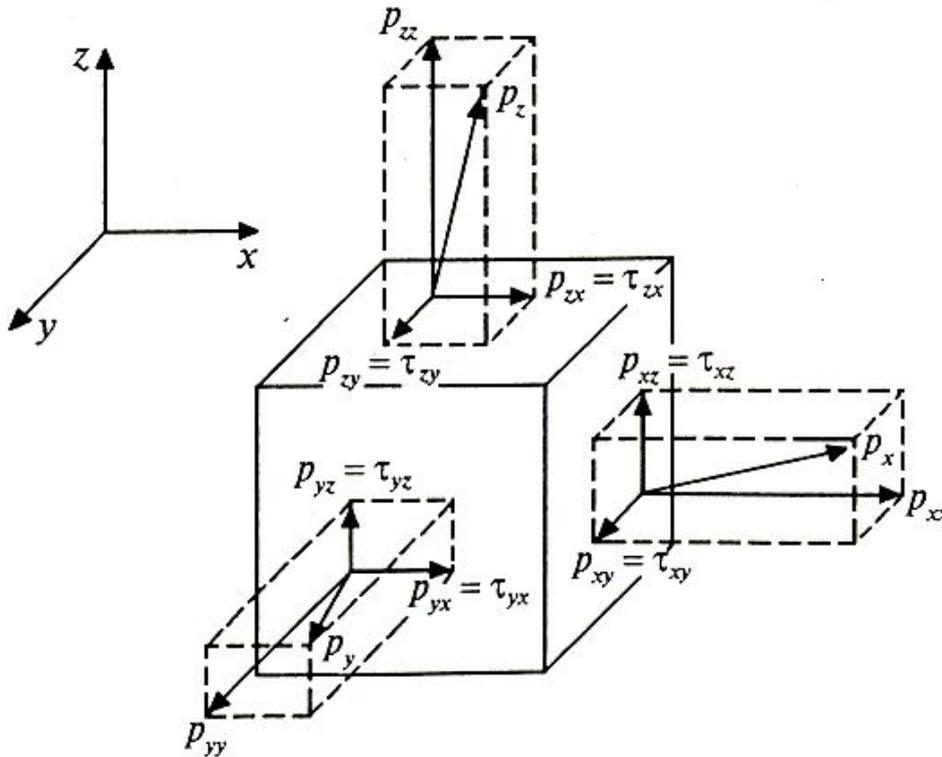


Рис.4.14

В вязкой жидкости, в противоположность невязкой, напряжение зависит от ориентации площадки в данной точке. Однако, как строго доказывается в теоретической гидромеханике, сумма всех нормальных напряжений $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$. В данной точке не зависит от ориентации площадки и, следовательно, эта сумма является скалярной функцией только координат точки и времени, в связи, с чем вводится новое понятие о гидромеханическом давлении:

$$p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}, \quad p = f(x, y, z, t).$$

Гидромеханическим давлением в вязкой жидкости называют давление,

величина которого равна среднему арифметическому из величин любых трех нормальных напряжений в данной точке. Знак «минус» берется потому, что $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$, направленные по внешней нормали, всегда отрицательны, а p должно быть положительным, как это обычно принимают в гидравлике.

Таким образом, понятия гидромеханического давления в вязкой жидкости и гидродинамического давления в невязкой идеальной жидкости существенно различны.

Дадим упрощенный вывод уравнений движения вязкой жидкости применительно лишь к частному случаю несжимаемой жидкости. Рассмотрим вначале одномерное движение жидкости в направлении, параллельном оси Ox .

Выделим в потоке движущейся жидкости элементарный параллелепипед с ребрами dx , dy , dz (рис. 4.15). Соотношение (4.9) для сил, действующих на элементарный параллелепипед, в данном случае будет

$$F_1 + F_2 + F_m - F_n + F_{mp} = 0, \quad (4.10)$$

где F_{mp} - сила трения, определяемая по формуле

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau dx dy = \frac{\partial \tau}{\partial z} dx dy dz.$$

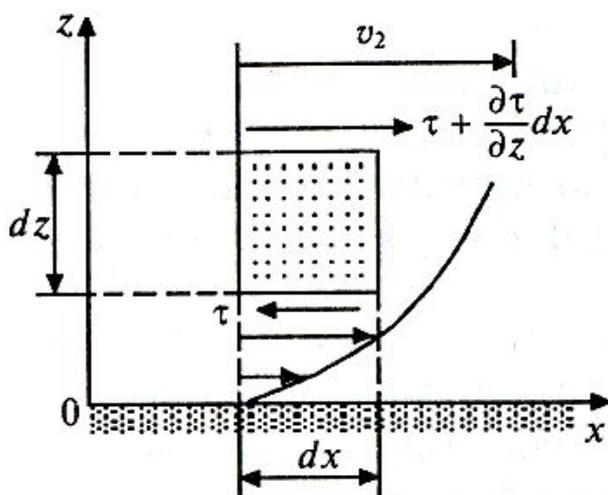


Рис.4.15

По закону Ньютона для касательного напряжения τ имеем

$$\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Отсюда сила трения будет равна

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} dx dy dz = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dx dy dz.$$

Формулы для сил F_l , F_2 , F_m , F_n смотреть в § 4.7. Подставляя эти силы и силу трения в формулу (4.10), получим

$$X \rho dx dy dz - \frac{\partial \rho}{\partial x} dx dy dz - \rho dx dy dz \frac{dv_x}{dt} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dx dy dz = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2},$$

где

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

В общем случае движения в трехмерном пространстве, когда v_x изменяется по всем направлениям, а не только в направлении оси z , проекция силы трения на ось x определится более сложным выражением:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) dx dy dz.$$

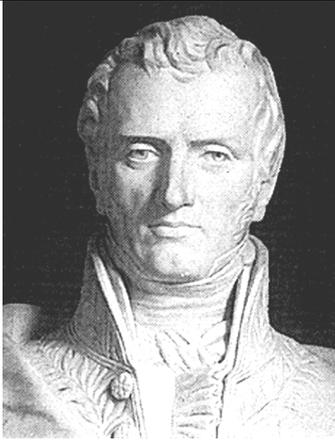
Тогда уравнение движения в проекции на ось x будет

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

Или для всех трех осей x , y , z получим в развернутом виде:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned}}$$

Последние три уравнения называют уравнениями Навье -Стокса для вязкой несжимаемой жидкости.



Луи Мари Анри Навье
(1785—1836)



Джордж Габриэль Стокс
(1819 — 1903)

Французский инженер и учёный, член французской Академии наук. Известен работами в области строительной механики, сопротивления материалов и теории упругости, а также гидравлики и гидромеханики.

Навье даны общие уравнения равновесия и движения упругого тела, разработан метод аналитического расчёта висячих мостов, выведены уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости (уравнения Навье - Стокса) и др.

Автор ряда учебников по механике, а также курса сопротивления материалов, являвшегося в течение нескольких десятилетий основным руководством для инженеров-строителей и машиностроителей.

Английский физик-теоретик и математик ирландского происхождения. Работал в Кембриджском университете, внёс значительный вклад в гидро- и газодинамику (Уравнения Навье — Стокса), оптику и математическую физику. Был секретарём, а позднее президентом Лондонского королевского общества.

За достижения в области исследования света в 1852 году Стокс получил медаль Рамфорда от Королевского Общества, а в 1893 медаль Копли. В 1889 году получил дворянский титул баронета. Был членом многих иностранных академий

В честь него названа единица измерения вязкости в системе СГС.

Или в векторной форме

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 v,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = & \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) j + \\ & + \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) k; \end{aligned}$$

$$F = X i - Y j - Z k;$$

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k};$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{v} = & \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k}; \end{aligned}$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - орты координатных осей (см. § 3.3).

Уравнения Навье - Стокса являются основными в гидромеханике вязкой жидкости. Но они определяют течение реальной вязкой жидкости вполне лишь тогда, когда подтверждается закон Ньютона о внутреннем трении в жидкости.

Добавим к полученным уравнениям движения уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Полагая, что массовые силы X, Y, Z заданы, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными функциями v_x, v_y, v_z, p . Следовательно, получена замкнутая система уравнений.

Принципиально эта система при заданных условиях однозначности дает возможность строгого решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости. Однако аналитические решения уравнений Навье - Стокса найдены лишь для весьма ограниченного круга частных случаев.

§ 4.9. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В технической гидромеханике уравнение Бернулли устанавливает зависимость между скоростью и давлением в различных сечениях одной и той же элементарной струйки.

При выводе этого уравнения принимаются следующие допущения.

1. Движение жидкости установившееся.

2. Массовые силы имеют потенциал, т. е.

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x};$$
$$Y = -\frac{\partial U}{\partial y};$$
$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z};$$

3. Жидкость баротропна, т. е. плотность является функцией лишь одного давления $\rho = f(p)$.

Запишем уравнения движения Эйлера:

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x};$$
$$\frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y};$$
$$\frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Умножим обе части каждого из уравнений на dx , dy , dz соответственно и сложим полученные соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz = \\ & = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Считая dx , dy , dz не любыми произвольными приращениями координат, а взятыми по какой-либо линии тока, а также учитывая, что при установившемся движении линии тока и траектории частиц совпадают, получим

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt.$$

Преобразуем левую часть уравнения (4.11)

$$v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = d\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_z^2}{2}\right) =$$

$$= d\left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

В правой части уравнения получим

$$Xdx + Ydy + Zdz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) = -dU.$$

$$\text{Так как } p = f(x, y, z), \text{ то } dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Отсюда уравнение (4.11) примет вид

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) + dU + \frac{1}{\rho} dp = 0$$

или

$$dU + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

Интегрируя последнее соотношение по линии тока, получим

$$U + P + \frac{v^2}{2} = C, \quad (4.12)$$

где $P = \int \frac{dp}{\rho}$ - функция Громеко; C - константа интегрирования.

Соотношение (4.12) называется интегралом Бернулли или уравнением Бернулли в общем виде. Оно показывает, что при установившемся движении баротропной идеальной жидкости в поле потенциальных сил сумма трех членов U, P и $\frac{v^2}{2}$ одинакова во всех точках на данной линии тока. Очевидно, что оно будет верно также и для элементарной струйки тока, выделенной вокруг данной линии тока.



Даниил Бернулли
(1700 — 1782)

Выдающийся физик и математик, один из создателей кинетической теории газов, гидродинамики и математической физики.

Академик и иностранный почётный член (1733) Петербургской академии наук, член Академий: Болонской (1724), Берлинской (1747), Парижской (1748), Лондонского королевского общества (1750).

Первый выступил с утверждением, что причиной давления газа является тепловое движение молекул. В своей классической «Гидродинамике» он вывел уравнение стационарного течения несжимаемой жидкости, лежащее в основе динамики жидкостей и газов. В этом труде он осветил ряд основополагающих гидравлических вопросов и в частности объяснил физический смысл слагаемых, входящих в современное уравнение установившегося движения (идеальной жидкости), носящее его имя.

С точки зрения молекулярной теории он объяснил закон Бойля-Мариотта.

В частном случае тяжелой несжимаемой не вязкой жидкости будем иметь потенциал массовой силы тяжести в виде

$$U = -gz. \quad (4.13)$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ и функция Громеко приводится к виду

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}. \quad (4.14)$$

Подставляя соотношения (4.13), (4.14) в (4.12), получим

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C.$$

с учетом $\gamma = \rho g$ найдем

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C.$$

Отсюда для двух различных точек линии тока или для двух различных сечений элементарной струйки можно написать

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Таким образом, для всех частиц, расположенных на одной и той же линии тока, сумма трех величин z , $\frac{p}{\gamma}$ и $\frac{v^2}{2g}$ сохраняет постоянное значение.

§ 4.10. ФИЗИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ. НАПОР ЖИДКОСТИ

Уравнению Бернулли можно дать два различных истолкования: физическое и геометрическое.

С физической точки зрения уравнение Бернулли есть выражение закона сохранения энергии для движущейся жидкости.

Рассмотрим величину

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}.$$

Эту сумму трех слагаемых называют полным напором жидкости или *гидродинамическим напором*.

С физической точки зрения напор есть механическая энергия жидкости, отнесенная к единице веса жидкости. Для того чтобы это показать, рассмотрим жидкость, движущуюся по трубопроводу (рис. 4.16). Выделим в движущейся жидкости частицу M с массой m , веса $P = mg$. Потенциальная энергия этой частицы в поле силы тяжести по отношению к плоскости сравнения 0-0 будет mgz , а потенциальная энергия, отнесенная к единице веса, будет

$$\frac{mgz}{mg} = z,$$

т. е. z *есть удельная потенциальная энергия положения частицы жидкости* - энергия, отнесенная к единице веса.

Под действием давления p частица жидкости M может подняться на

высоту $h_p = \frac{p}{\gamma}$ и, следовательно, совершить работу (рис. 4.17)

$$mgh_p = mg \frac{p}{\gamma},$$

т. е. она обладает потенциальной энергией давления в размере

$$mg \frac{p}{\gamma}.$$

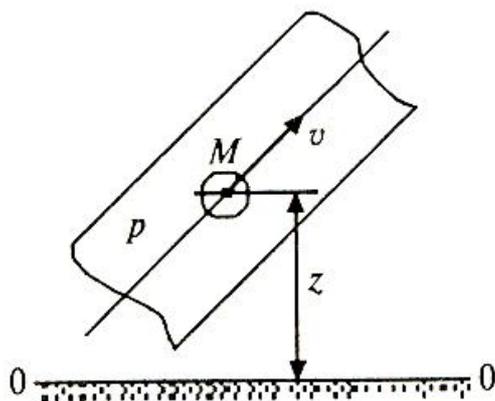


Рис. 4.16

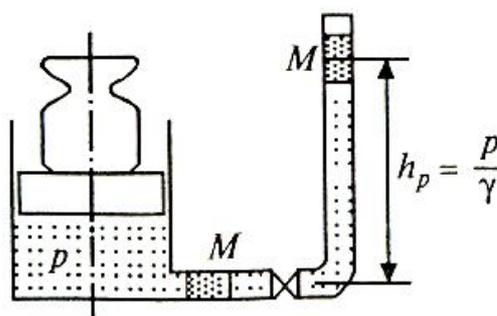


Рис.4.17

Потенциальная энергия давления, отнесенная к единице веса, будет

$$\frac{mg \frac{p}{\gamma}}{mg} = \frac{p}{\gamma},$$

т. е. $\frac{p}{\gamma}$ - *удельная потенциальная энергия давления частицы жидкости* -

энергия, отнесенная к единице веса жидкости.

Кроме того, выделенная частица обладает скоростью и, следовательно, имеет *кинетическую энергию*, равную $\frac{mv^2}{2}$.

Кинетическая энергия, отнесенная к единице веса, будет

$$\frac{mv^2}{2mg} = \frac{v^2}{2g}.$$

Напор жидкости

$$H = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g},$$

следовательно, равен полной энергии частицы жидкости, отнесенной к единице веса.

Таким образом, физическое истолкование уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости заключается в том, что для любых сечений 1 и 2 полная удельная энергия остается неизменной: $H_1 = H_2$ или

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g},$$

Уравнению Бернулли можно дать наглядное геометрическое истолкование. Для этого снова рассмотрим отдельные члены суммы:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g},$$

где z - геометрическая высота данной частицы жидкости над условной плоскостью сравнения; $\frac{p}{\gamma}$ - пьезометрическая высота - высота, на которую

поднимется жидкость в пьезометре; $\frac{v^2}{2g}$ - скоростная высота - высота, на которую поднимется жидкость, имея начальную скорость v .

Таким образом, с геометрической точки зрения уравнение Бернулли в любом сечении элементарной струйки идеальной жидкости представляет собой сумму трех высот: геометрической, пьезометрической и скоростной, которая остается неизменной. График уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости представлен на рис. 4.1.8.

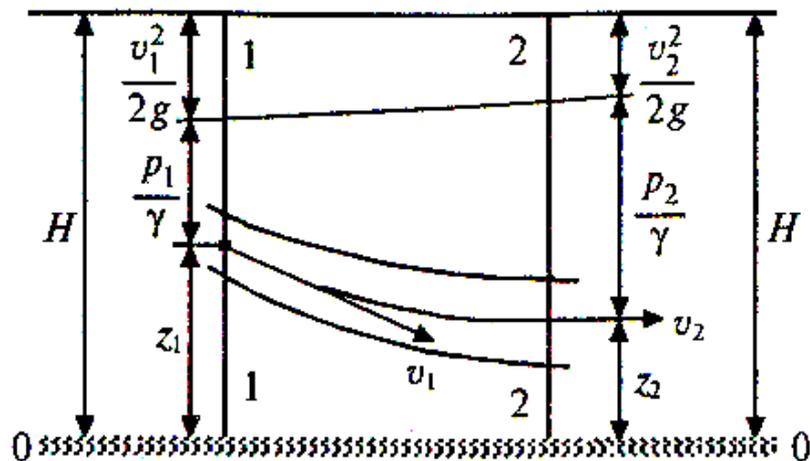


Рис .4.18

Если сечение струйки увеличивается, скорость падает, а давление возрастает, т. е. энергия, сохраняясь в целом, переходит из одного вида в другой (кинетическая энергия переходит в потенциальную и наоборот).

§ 4.11. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В идеальной жидкости в отличие от реальной отсутствуют силы внутреннего трения (отсутствует вязкость). Благодаря вязкости в реальной жидкости происходят потери механической энергии потока на трение внутри жидкости и о стенки канала. При этом происходит рассеивание (диссипация) энергии. Энергия, потерянная на трение, превращается в теплоту и идет на пополнение запаса внутренней энергии жидкости, а часть ее отводится в виде тепла через стенки канала.

Внутренняя энергия жидкости не может быть непосредственно использована для приведения жидкости в движение и поэтому в гидравлике рассматривается как потеря механической энергии (потеря напора).

Для реальной жидкости равенство $H_1 = H_2$ нарушается и вместо него имеем $H_1 = H_2 + \Delta H$, где $\Delta H = h_{1-2}$ - потеря напора на участке 1-2. Тогда для элементарной струйки реальной жидкости уравнение Бернулли примет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{1-2}.$$

Таким образом, полный напор вдоль струйки реальной жидкости уменьшается для характеристики относительного изменения полного напора на единицу длины вводится понятие о гидравлическом уклоне:

$$J = -\frac{dH}{dl} = -\frac{d\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right)}{dl}.$$

Например, на прямом участке трубопровода 1-2 (см. рис. 4.18)

$$J_{1-2} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}\right)}{l_{1-2}} = \frac{h_{1-2}}{l_{1-2}},$$

где l_{1-2} - длина участка 1-2.

Таким образом, гидравлическим уклоном называют отношение потери напора к длине, на которой она происходит.

Кроме того, вводится еще понятие о пьезометрическом уклоне:

$$J_p = \frac{d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)}{dl}.$$

Пьезометрический уклон может быть положительным, равным нулю и отрицательным.

§ 4.12. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Применение уравнения Бернулли, выведенного для отдельной струйки, для потока жидкости затрудняется неравномерностью распределения скоростей по живому сечению потока, наличием поперечных составляющих продольной скорости и влиянием центробежных сил. В связи с этим необходимо установить характеристику потоков, для которых можно применять уравнение Бернулли, а также предложить способ учета неравномерности скоростей в живых сечениях потока.

Для решения этих вопросов в гидравлике выделяется так называемое плавно изменяющееся движение (рис. 4.19, 4.20), которое характеризуется следующими особенностями.

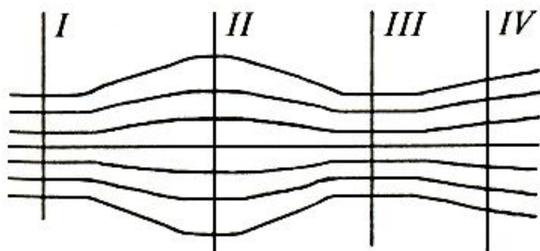


Рис.4.19

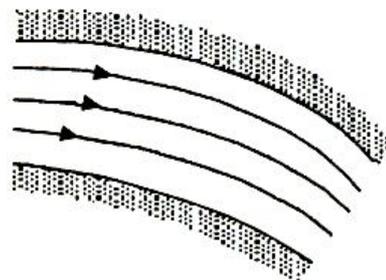


Рис.4.20

1. Угол расхождения соседних струек, а следовательно, и поперечные составляющие скоростей в живых сечениях потока настолько малы, что ими можно пренебречь и рассматривать течение как происходящее только с продольной скоростью.

2. Кривизна линий тока настолько мала, а радиусы закруглений настолько велики, что центробежными силами в таких потоках можно пренебречь.

3. Кривизна живых сечений при неравномерном распределении скорости настолько невелика, что их можно рассматривать как плоские.

4. Гидродинамическое давление в живых сечениях распределяется по законам гидростатики, т. е. сумма $z + p/\gamma = \text{const}$ для всех точек данного живого сечения. Следовательно, уровень в пьезометрах при плавно изменяющемся движении во всех точках живого сечения потока будет одним и тем же (рис. 4.21).

В случае плавно изменяющегося движения уравнение Бернулли для элементарной струйки можно распространить и на поток с поперечным сечением конечных размеров, скорости в различных точках которого различны.

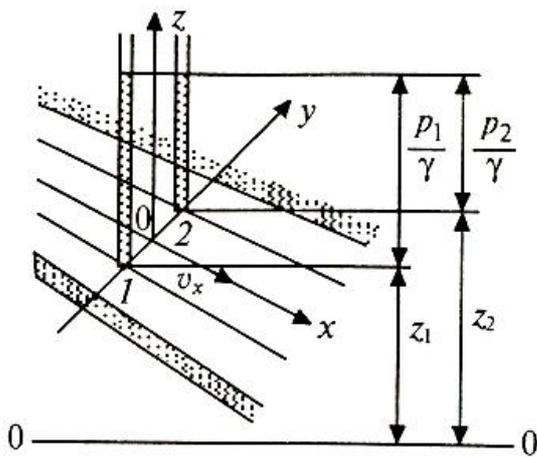


Рис 4.21

Однако в гидравлике обычно расчеты ведутся по средним скоростям для приведения результатов расчетов по средним скоростям в соответствие с расчетами по действительным скоростям вводятся некоторые поправочные коэффициенты (коэффициент Кориолиса, см. ниже).

Таким образом, плавно изменяющееся движение можно считать практически одномерным, т. е. положить $v_x = f(x, y, z)$, направив ось x параллельно потоку. Отсюда $v_y = 0$; $v_z = 0$. Тогда уравнения Навье-Стокса примут вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right);$$

$$0 = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y};$$

$$0 = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Последние два уравнения переходят в уравнения гидростатики Эйлера, а это означает, что в плоскости yOz давления распределяются по закону гидростатики.

Распространим уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{1-2}$$

на поток реальной жидкости.

Правая и левая части этого уравнения есть удельная энергия жидкости, т. е. энергия, отнесенная к единице веса. Весовой расход элементарной струйки определяется по формуле

$$dG = \gamma v_1 d\omega_1 = \gamma v_2 d\omega_2,$$

где $d\omega$ - сечение элементарной струйки; $Q = v d\omega$ - объемный расход.

Умножая обе части уравнения (4.15) на dG , получим не удельную, а полную энергию элементарной струйки в сечениях 1 и 2. И полную потерю этой энергии между сечениями 1 и 2 в единицу времени, т. е. $dN_1 = dN_2 + dN_n$, где dN_1 - энергия струйки в 1-м сечении; dN_2 - энергия струйки во 2-м сечении; dN_n - потеря энергии между 1-м и 2-м сечениями.

Или

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \right) \gamma v_1 d\omega_1 = \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \right) \gamma v_2 d\omega_2 + h_{1-2} \gamma v_2 d\omega_2.$$

Для того чтобы получить подобные соотношения мощностей для всего потока

$$N_1 = N_2 + N_n,$$

необходимо произвести интегрирование:

$$\int_{\omega_1} \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \right) \gamma v_1 d\omega_1 = \int_{\omega_2} \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \right) \gamma v_2 d\omega_2 + \int_{\omega_2} h_{1-2} \gamma v_2 d\omega_2. \quad (4.16)$$

Преобразуем эти интегралы:

$$\int_{\omega_1} \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) \gamma v_1 d\omega_1 = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) \gamma \int_{\omega_1} v_1 d\omega_1 = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) \gamma Q.$$

Так как при плавно изменяющемся движении $z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}$, то во всех

точках данного сечения $\omega = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$.

Аналогично

$$\int_{\omega_1} \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \gamma v_2 d\omega_2 = \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \gamma Q.$$

Запишем третий интеграл в левой части соотношения (4.16) в виде

$$\frac{\gamma}{2g} \int_{\omega_1} v_1^3 d\omega_1 = \alpha_1 \frac{\overline{v_1^2}}{2g} \gamma Q,$$

т. е. выразим его как произведение некоторого коэффициента α на скоростной напор, подсчитанный по средней скорости потока v и на весовой расход жидкости $G = \gamma Q$.

Коэффициент α называют коэффициентом кинетической энергии потока, или коэффициентом Кориолиса. Таким образом, α представляет отношение кинетической энергии потока к кинетической энергии, вычисленной в предположении, что скорости всех точек живого сечения потока равны средней скорости потока, т. е.

$$\frac{\rho}{2} \int_{\omega_1} v_1^3 d\omega_1 = \alpha_1 \frac{\rho}{2} \overline{v_1} \overline{v_1^2} \omega_1; \quad (4.17)$$

$$\int_{\omega_1} \frac{\rho v_1 d\omega_1 v_1^2}{2} = \alpha_1 \frac{\overline{v_1} \overline{v_1^2} \omega_1 \rho}{2};$$

$$\int_{\omega_1} \frac{dm_1 v_1^2}{2} = \alpha_1 \frac{dm_1 \overline{v_1^2}}{2};$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_{\omega_1} \frac{v_1^2 dm}{2}}{\frac{m_1 \overline{v_1^2}}{2}}.$$

Кроме того, из соотношений (4.17) следует

$$\alpha_1 = \frac{\int_{\omega_1} v^3 d\omega}{\frac{v \omega}{3}}.$$

Отсюда заключаем, что коэффициент α характеризует неравномерность распределения скоростей по сечению потока.

Для ламинарного режима $\alpha = 2$, для турбулентного $\alpha \approx 1,05 - 1,1$.

Сушественно большее значение α для ламинарного режима течения по сравнению с турбулентным объясняется бóльшей неравномерностью

скорости в поперечном сечении потока при ламинарном режиме.

Последний интеграл в соотношении (4.16) будет:

$$\int_{\omega_1} h_{1-2} \gamma v_2 d\omega_2 = h_{1-2} \gamma Q.$$

Тогда уравнение Бернулли для потока примет вид

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) \gamma Q = \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right) \gamma Q + h_{1-2} \gamma Q.$$

Поделив на весовой расход жидкости $G = \gamma Q$ обе части уравнения, получим соотношение для удельных энергий потока:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{1-2}.$$

Обычно для упрощения гидравлических расчетов трубопроводов для турбулентных потоков принимают $\alpha = 1$, и уравнение Бернулли для потока будет иметь вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{1-2}.$$

§ 4.13. ГРАФИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим распределение напоров в трубопроводе, имеющем сужение в средней его части (рис. 4.22). Выделим три характерных сечения, в которых расположим пьезометры и трубки Пито (описание трубок см. § 4.14).

На рис. 4.22 при течении жидкости в трубопроводе могут быть выделены следующие характерные линии:

I - линия геометрических напоров;

II - пьезометрическая линия;

III - линия полного напора.

h_{1-2} , h_{1-3} - потеря напора соответственно во 2-м и 3-м сечениях.

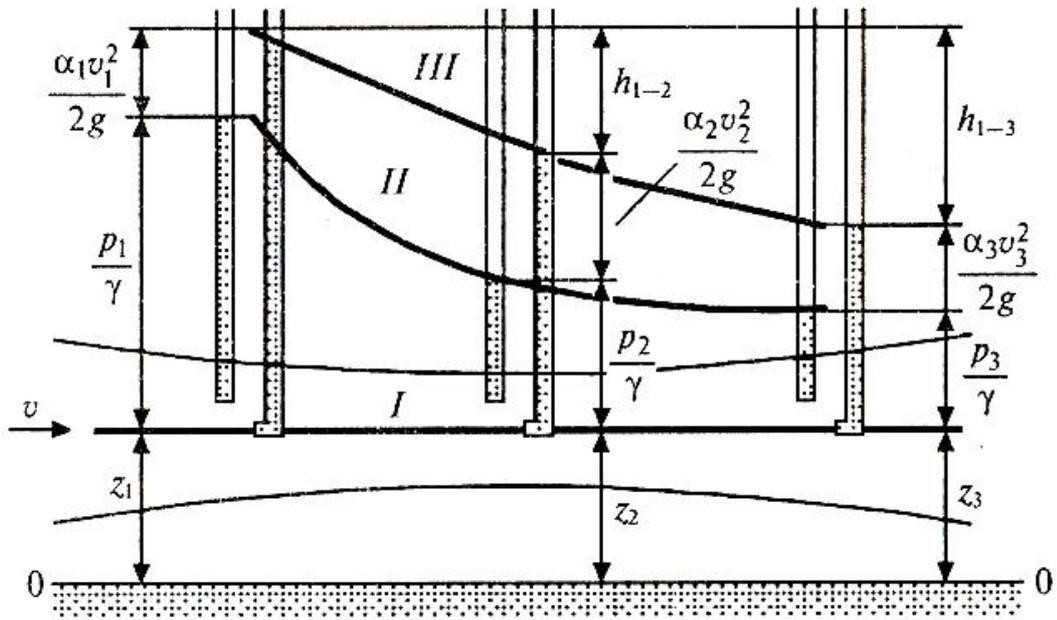


Рис. 4.22

Применительно к рис. 4.22 уравнение Бернулли запишется в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{1-2} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{1-3}.$$

На рис. 4.22 отмечены все члены уравнения Бернулли. В частности, видно, что пьезометрический напор p_2/γ в узком сечении уменьшается, а скоростной напор $v^2/2g$ - возрастает. Максимальная потеря напора имеет место в 3-м сечении (h_{1-3}) (потери на трение и в местных сопротивлениях см. гл. 6).

§ 4.14. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Уравнение Бернулли широко применяют во многих гидравлических расчетах и для объяснения многих гидравлических явлений. В частности, оно может быть использовано для измерения давления и скорости движущейся жидкости. Для измерения давления используют пьезометр (прямая трубка, рис. 4.23). Для измерения скорости совместно с пьезометром используют трубку Пито - трубку полного напора.

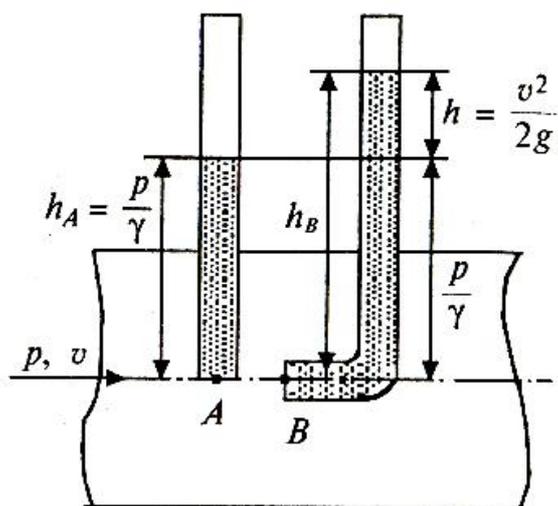


Рис.4.23

Она представляет собой трубку, изогнутую под прямым углом и установленную навстречу потоку. Уровень жидкости в пьезометре равен

$$h_A = \frac{p}{\gamma}.$$

Разность уровней в пьезометре и в трубке полного напора будет равна скоростному напору

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

Действительно, напишем уравнение Бернулли для точек A и B :

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}.$$

Так как $p_A = p$, $v_A = v$, $v_B = 0$, то

$$\frac{p_B}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g},$$

где $\frac{p_B}{\gamma} = h_B$ - высота жидкости в трубке полного напора;

$\frac{p}{\gamma} = h_A$ - высота жидкости в пьезометре.

Отсюда

$$h = h_B - h_A = \frac{v^2}{2g}.$$

Тогда

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Или

$$v = \varphi \sqrt{2gh},$$

где $\varphi > 1$ - коэффициент, определяемый для каждой трубки опытным путем.

За счет вязкости жидкости и других отклонений от идеального случая

преобразования энергии $h < \frac{v^2}{2g}$ и поэтому, чтобы не получать

пониженных значений скоростей, $\varphi > 1$.

§ 4.15. ТРУБКА ПРАНДТЛЯ

Дальнейшим усовершенствованием трубки Пито является трубка Прандтля. В этом приборе объединяются, трубка Пито и пьезометр (рис. 4.24). Роль трубки Пито здесь выполняет трубка 2 (она направлена навстречу потоку), а пьезометра - трубка 1 (отверстия в этой трубке находятся параллельно направлению потока).

Пусть в сечении *I* имеем давление и скорость набегающего потока p и v . В сечении *II* давление на входе в трубку 2 равно p_k (скорость v_k здесь равна нулю).

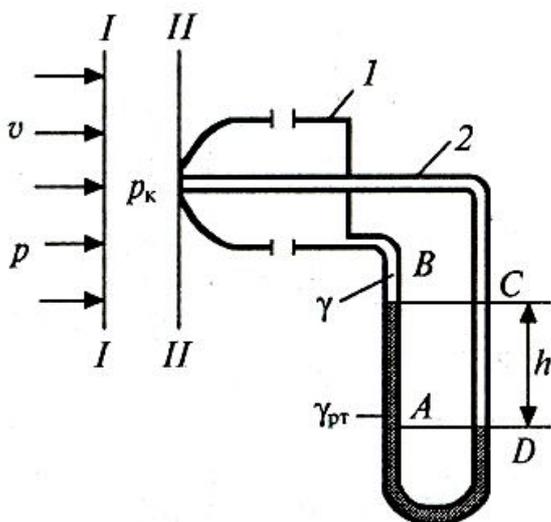


Рис.4.24

Записывая уравнение Бернулли для сечений *I* и *II* и учитывая, что $v_k = 0$,

$$z_1 = z_2, \text{ получим } \frac{p_k - p}{\gamma} = \frac{v^2}{2g}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_k - p)}. \quad (4.18)$$

Для определения $p_k - p$ воспользуемся формулой гидростатического давления $p = p_o + \gamma h$ (см. § 3.7).

Применяя эту формулу для точек *A* и *D*, получим

$$p_A = p_B + \gamma_{pt} h;$$

$$p_D = p_C + \gamma h,$$

где $\gamma_{рт}$ - удельный вес ртути; γ - удельный вес газа, скорость которого измеряется.

Так как при равновесии давление в точках A и D одинаково, то

$$p_B + \gamma_{рт} h = p_C + \gamma h.$$

Учитывая, что $p_B = p$, $p_C = p_K$ получим

$$p_K - p = h(\gamma_{рт} - \gamma).$$

Подставляя последнее соотношение в (4.18), получим

$$v = \sqrt{2gh \left(\frac{\gamma_{рт} - \gamma}{\gamma} \right)}.$$

Для каждой отдельной трубки вводится некоторый коэффициент ψ , определяемый опытным путем. Отсюда формула для определения скорости потока принимает вид

$$v = \psi \sqrt{2gh \left(\frac{\gamma_{рт} - \gamma}{\gamma} \right)}.$$

§ 4.16. ТРУБКА ВЕНТУРИ, СОПЛО, ДИАФРАГМА

В промышленных условиях для измерения расхода жидкостей применяют трубки Вентури, сопла и диафрагмы. Трубка Вентури создает в трубопроводе местное сужение потока и по возникающему перепаду давлений Δp можно определить расход жидкости (рис. 4.25).

Для сечений I и II запишем уравнение Бернулли (считая распределение скоростей равномерным):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_M,$$

где h_M - потеря напора между сечениями I и II ,

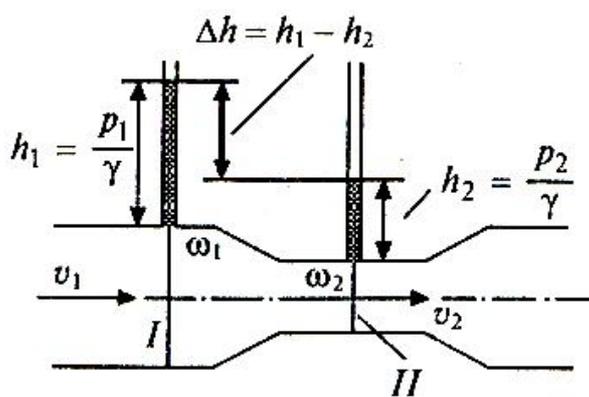


Рис. 4.25

$$h_M = \xi \frac{v_2^2}{2g};$$

ξ - коэффициент местных потерь (см. § 6.21).

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2.$$

Отсюда:

$$v_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} v_2.$$

Подставляя

$$h_M, v_1 \text{ и } \Delta h = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}$$

в уравнение Бернулли и выражая v_2 , получим

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \xi}}.$$

Объемный расход будет определяться по формуле

$$Q = v_2 \omega_2 = \omega_2 \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \xi}} \sqrt{\Delta h} = C \sqrt{\Delta h}, \quad (4.19)$$

где C - величина, постоянная для данного расходомера (трубки Вентури).



**Джованни Баттиста
Вентури**
(1746-1822)

Итальянский учёный. С 1773 профессор университета в Модене, затем в Павии. Наиболее известны работы Вентури в области гидравлики ирригации, теории света, оптике. В 1797 опубликовал на французском языке исследование об истечении воды через короткие цилиндрические и расходящиеся насадки (насадки Вентури). В 1887 американским учёным К. Гершелем был предложен водомер, названный именем Вентури Известна трубка Вентури для измерения скорости в воздушном и водяном потоке и для создания вакуума в авиационных гироскопах.

Вентури был первым, кто привлек внимание к личности Леонардо да Винчи как ученого, собрал и опубликовал множество работ и записей Галилея.

Его именем названы открытый им эффект снижения давления газа или жидкости с увеличением скорости их движения, а также труба Вентури.

Довольно часто вместо пьезометров и для измерения перепада давления в расходомере применяют дифференциальный трубный манометр (рис. 4.26).

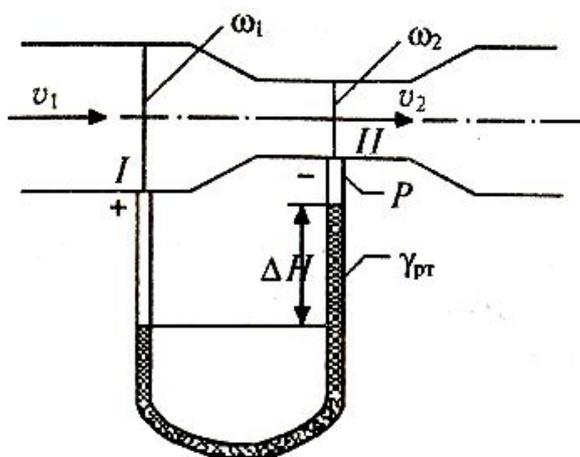


Рис.4.26

Учитывая, что над ртутью в трубках находится одна и та же жидкость плотностью ρ , запишем (см. рис. 4.26):

$$\Delta h = \frac{\Delta H (\rho_{рт} - \rho)}{\rho}. \quad (4.20)$$

Значения Δh , полученные по формуле (4.20), можно использовать для определения расхода по формуле (4.19).

Аналогично для измерения расхода могут быть использованы диафрагмы (рис. 4.27) и сопла (рис. 4.28).

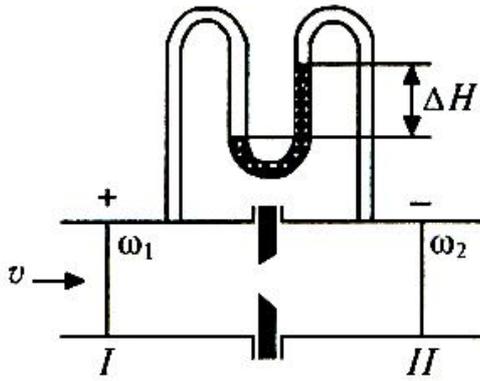


Рис.4.27

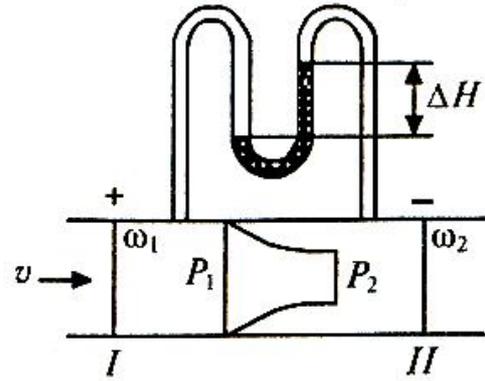


Рис.4.28

Задача. При ламинарном режиме движения жидкости по горизонтальному трубопроводу диаметром d расход жидкости равен Q (рис. 4.29). Падение пьезометрической высоты на участке длиной l составляет h . Определить коэффициенты кинематической ν и динамической μ вязкости жидкости. Исходные данные:

$$d = 0,5 \text{ м}; \quad l = 1000 \text{ м}; \quad h = 1 \text{ м}; \quad Q = 0,1 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}; \quad \rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

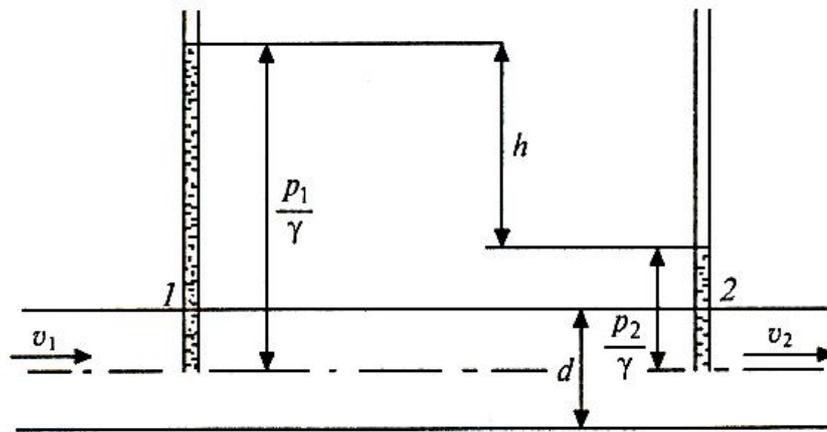


Рис.4.29

Решение.

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu}; \quad v = \frac{Q}{S}; \quad S = \frac{\pi d^2}{4}; \quad v = \frac{4Q}{\pi d^2};$$

$$\text{Re} = \frac{4Qd}{\pi d^2 \nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu}. \quad (\text{a})$$

Запишем уравнение Бернулли для сечений 1-й и 2-й трубы:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h.$$

Так как $z_1 = z_2$ и $v_1 = v_2$, то уравнение Бернулли примет вид

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + \sum h, \quad \text{где } \sum h = h_n = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}; \quad \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = h_n.$$

Учитывая, что $h_n = h$, получим

$$h_n = \lambda \frac{l Q^2}{d 2gS^2}.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{2hdgS^2}{lQ^2}.$$

Известно, что $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$ - формула Пуазейля. Отсюда $\text{Re} = \frac{64}{\lambda}$.

Подставляя последнее соотношение в (а), получим

$$\frac{64}{\lambda} = \frac{4Q}{\pi d v}.$$

Отсюда

$$v = \frac{4Q\lambda}{64\pi d} = \frac{8QhdgS^2}{64\pi dlQ^2} = \frac{hgS^2}{8\pi Ql}.$$

Учитывая, что $S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,5^2}{4} = 0,1963 \text{ м}^2$, получим

$$v = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0,1963^2}{8 \cdot 3,14 \cdot 0,1 \cdot 1000} = 15,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Так как $v = \frac{\mu}{\rho}$, то

$$\mu = v\rho = 15,3 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 = 15,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$



Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается отличие динамики жидкости от кинематики жидкости?
2. Какие формулы используются для описания движения жидкости в способах Лагранжа и Эйлера? Какой способ предпочтителен для гидравлики и почему?
3. Что такое линия тока, каково ее уравнение?
4. Что такое трубка тока, элементарная и конечная струйки жидкости?
5. Дайте определение живого сечения струйки, расхода жидкости и средней по живому сечению скорости.
6. Какой из фундаментальных законов природы отражает уравнение неразрывности?
7. Запишите уравнение Бернулли для невязкой несжимаемой жидкости.
8. Как записывается уравнение Бернулли, если из массовых сил действует только сила тяжести?
9. Что такое удельная энергия?
10. Какой физический закон выражает уравнение Бернулли?
11. Что такое пьезометрический, скоростной и гидродинамический напор? Как они изменяются по длине (вдоль направления движения)?
12. Что такое пьезометрическая линия и напорная линия или линия удельной энергии?
13. Дайте определение пьезометрического уклона.
14. Запишите уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости при установившемся движении.
15. Запишите уравнение Бернулли для потока при установившемся плавно изменяющемся движении вязкой жидкости.
16. Может ли коэффициент Кориолиса (коэффициент кинетической энергии) быть меньше единицы, больше единицы; равен единице?
17. Какова размерность членов уравнения Бернулли? Как интерпретируются члены уравнения Бернулли с геометрической и энергетической точки зрения?
18. Что такое гидравлический уклон для потока? Запишите выражения для гидравлического уклона.
19. Каковы основные особенности ламинарного и турбулентного режима движения жидкости?
20. Какова структура числа Рейнольдса?
21. Какой смысл имеют критические скорости?
22. Что такое смоченный периметр, живое сечение и гидравлический радиус?



Примеры решения задач

Задача 1. В трубе диаметром $d_1 = 250$ мм поток имеет среднюю скорость $v_1 = 0,6$ м/с. Затем труба плавно сужается до диаметра $d_2 = 125$ мм. Определить расход и среднюю скорость в трубе меньшего диаметра.

Решение: Решение основывается на уравнении неразрывности. Поскольку

$$\omega_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{\pi d_2^2}{4},$$

находим:

$$v_2 = \frac{v_1 d_1^2}{d_2^2} = \frac{0,6 \cdot 0,25^2}{0,125^2} = 2,4 \text{ м/с.}$$

Расход $Q = 0,6 \cdot (3,14 \cdot 0,25^2 / 4) = 0,029 \text{ м}^3/\text{с.}$

Задача 2.

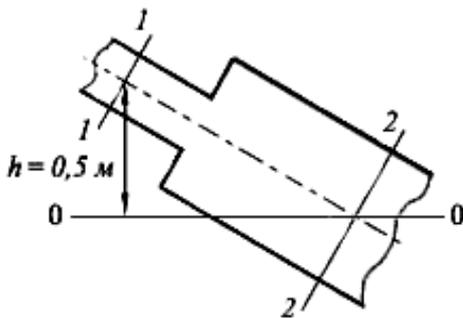


Рис. 4.30

Трубопровод диаметром 250 мм внезапно расширяется до диаметра 400 мм (рис.4.30). Центр тяжести сечения 1 - 1 расположен на 0,5 м выше центра сечения 2 - 2. Расход воды, пропускаемый по трубопроводу, равен 106 дм³/с. Коэффициент Кориолиса $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Определить разность давлений между сечениями, пренебрегая потерями напора.

Решение:

1. Составим уравнение Бернулли двух сечений 1 - 1 и 2 - 2 относительно плоскости сравнения 0 - 0, проходящей через центр сечения 2 - 2

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g};$$

$$0,5 + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g};$$

2. Вычислим скорости из формулы для расхода

$$Q = \omega v.$$

$$v_1 = \frac{Q}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{0,106}{\frac{3,14 \cdot 0,25^2}{4}} = 2,16 \text{ м/с}; \quad \frac{v_1^2}{2g} = \frac{2,16^2}{19,62} = 0,24 \text{ м.}$$

$$v_2 = \frac{Q}{\pi d_2^2} = \frac{0,106}{3,14 \cdot 0,4^2} = 0,84 \text{ м/с}; \quad \frac{v_2^2}{2g} = \frac{0,84^2}{19,62} = 0,04 \text{ м.}$$

3. Таким образом, имеем

$$0,5 + 0,24 - 0,04 = \frac{p_2 - p_1}{\rho g};$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} = 0,7 \text{ м} \quad \text{или} \quad p_2 - p_1 = 6867 \text{ Н/м}^2.$$

Задача 3. Гидродинамический напор потока идеальной жидкости $H_{г.д}$ плотностью $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ равен $8,6 \text{ м}$. Вычислить среднюю линейную скорость потока, если давление жидкости в центре тяжести сечения потока $p = 50 \text{ кПа}$, а замеры всех параметров произведены на нивелирной высоте $z = 2,5 \text{ м}$.

Решение:

Левая и правая части уравнения Бернулли представляют собой гидродинамический напор потока, который для идеальной жидкости может быть определен:

$$H_{г.д} = v^2/(2 \cdot g) + p/(\rho \cdot g) + z$$

Решаем уравнение относительно v и определим её величину:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H_{г.д} - \frac{p}{\rho g} - z)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot (8,6 - \frac{50000}{900 \cdot 9,81} - 2,5)} = 2,93 \text{ м/с.}$$

Задача 4. Определить расход воды Q с помощью водомера Вентури, если известны: разность показаний пьезометров $h = 0,25 \text{ м.}$, диаметр трубопровода $d_1 = 0,2 \text{ м.}$, диаметр горловины $d_2 = 0,1 \text{ м.}$ (рис.4.31). При решении задачи пренебречь потерями напора и сжатием струи в горловине.

Решение:

Составляем уравнение Бернулли для сечений $1-1$ и $2-2$ относительно произвольной горизонтальной плоскости сравнения $0-0$:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{тр.}$$

В соответствии с условием задачи $h_{тр.} = 0$. Допустим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Тогда

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

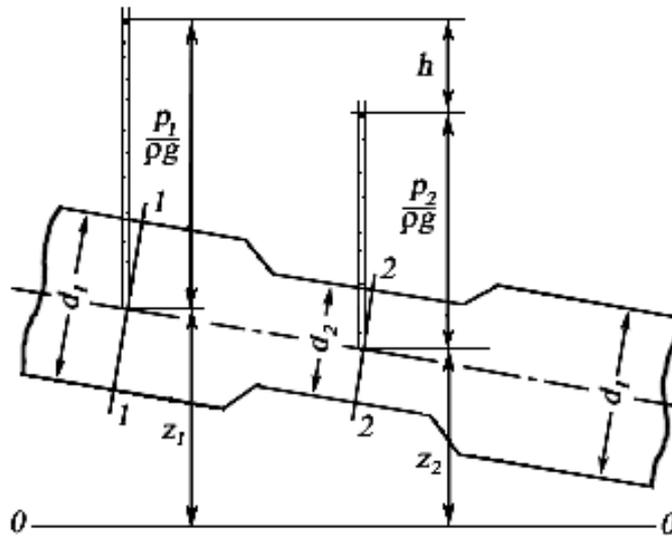


Рис. 4.31

Имеем

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = h .$$

При этом

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} .$$

В данном уравнении два неизвестных: v_1 и v_2 .

Для исключения одного из них применяем уравнение неразрывности, из которого следует $v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$ и $v_1 = \omega_2 v_2 / \omega_1$.

Тогда

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right] .$$

Преобразуя это уравнение, определим среднюю скорость v_2 в сечении 2-2:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2}} \sqrt{2gh} .$$

Из уравнения неразрывности получим

$$Q = v_2 \omega_2 = \frac{\omega_2 \sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2}} \sqrt{h} = A \sqrt{h} ,$$

где A постоянная водомера

$$A = \frac{\omega_2 \sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}}$$

Далее вычисляем:

$$A = \frac{0,00785 \cdot 4,43}{\sqrt{1 - 0,25^2}} = 0,037 \text{ м}^{2,5} / \text{с};$$

$$\omega_1 = 0,785d_1^2 = 0,0314 \text{ м}^2; \quad \omega_2 = 0,785d_2^2 = 0,0785 \text{ м}^2;$$

$$Q = A\sqrt{h} = 0,037\sqrt{0,25} = 0,0185 \text{ м}^3 / \text{с} = 18,5 \text{ л/с}$$

Фактически расход будет меньше вычисленного, так как при расчете не учтены потери напора. При выполнении практических расчетов и измерении расхода с помощью водомера Вентури принимается

$$Q = \mu A \sqrt{h},$$

где μ - коэффициент расхода водомера, определяемый экспериментально, обычно считают, что $0,9 < \mu < 1$.

Если $\mu = 0,95$, то получим:

$$Q = \mu A \sqrt{h} = 0,95 \cdot 0,0185 = 0,0175 \text{ м}^3 / \text{с} = 17,5 \text{ л/с.}$$



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.

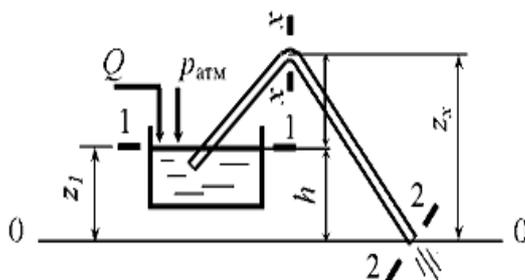


Рис.4.32

Определить скорость движения бензина v и расход Q в сифонном трубопроводе (рис.4.32). Нижняя точка оси трубопровода расположена ниже уровня жидкости в питающем резервуаре на расстоянии $h = 2,5$ м. Внутренний диаметр трубопровода $d = 25$ мм, плотность бензина $\rho = 850$ кг/м³. Потерями напора пренебречь.

Задача 2.

Вода движется в трубчатом расходомере в направлении от сечения 1-1 к сечению 2-2 (рис.4.33). Манометрическое давление в сечении 1-1 больше

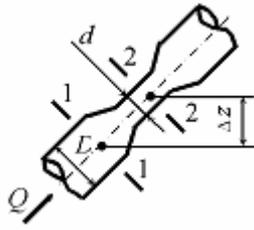


Рис.4.33

давления в сечении 2-2 на $\Delta p = 25$ кПа. Определить расход Q , если внутренний диаметр трубопровода в сечении 1-1 $D = 65$ мм, а в сечении 2-2 $d = 40$ мм, разность отметок сечений $\Delta Z = 2$ м. Потерями напора пренебречь.

Задача 3.

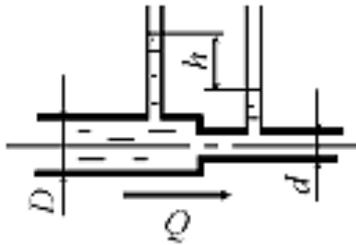


Рис.4.34

По горизонтальной трубе переменного сечения протекает нефть с расходом $Q = 1,3$ л/с (рис.4.34). Определить разность показаний пьезометров h , если диаметр трубопровода в широком сечении $D = 10$ см, а в узком - $d = 5$ см. Плотность нефти $\rho = 850$ кг/м³. Потерями напора пренебречь.

Задача 4.

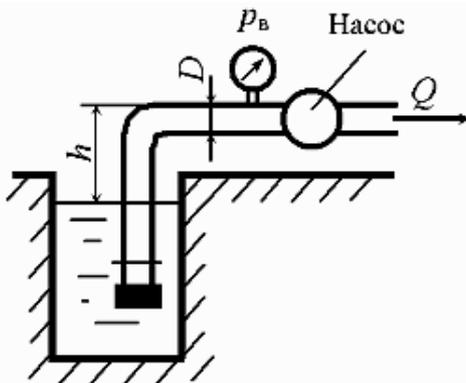


Рис.4.35

Насос с подачей $Q = 7.2$ м³/ч забирает воду из колодца (рис.4.35). Определить наибольший вакуум p_v при входе в насос. Внутренний диаметр трубопровода $D = 80$ мм, высота установки насоса над уровнем жидкости $h = 4$ м. Потери напора $h_w = 0,5$ м.

Задача 5.

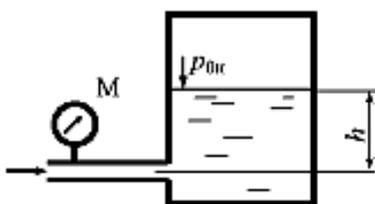
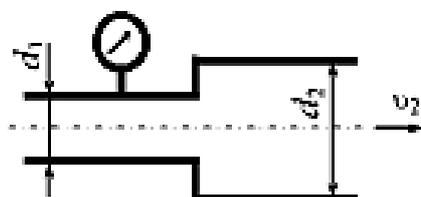


Рис.4.36

Определить избыточное давление в резервуаре (рис.4.36), если глубина воды в баке $h = 5$ м, потери напора $h_w = 4,9$ м, расход вод $Q = 0,02$ м³/с, диаметр трубопровода $d = 100$ мм, показание манометра, установленного на трубопроводе, $p_m = 1,08 \cdot 10^5$ Па.

Задача 6.



Трубопровод диаметром $d_1 = 50$ мм заканчивается коротким отрезком трубопровода $d_2 = 100$ мм, из которого вода вытекает в атмосферу со скоростью $v_2 = 1$ м/с (рис.4.37). Определить

Рис.4.37

Задача 7.

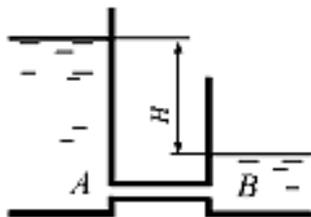


Рис.4.38

Задача 8.

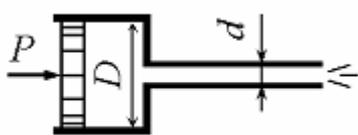


Рис.4.39

Задача 9.

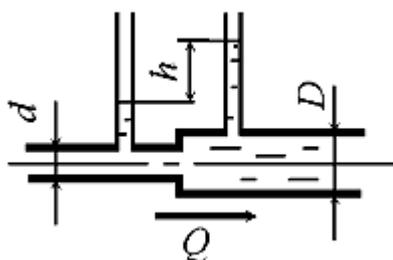


Рис.4.40

Задача 10.

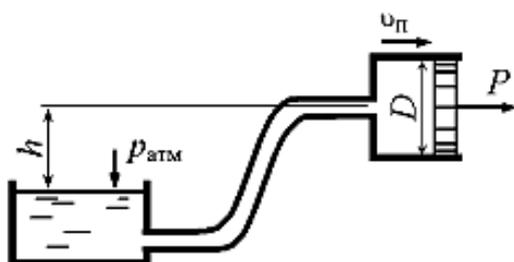


Рис.4.41

вакуумметрическое давление p_B , если потери напора $h_w = 0,15$ м.

Из бака A в бак B (рис.4.38) по трубопроводу диаметром $d = 100$ мм протекает вода при постоянной разности уровней $H = 2$ м. Определить скорость течения воды, если потери в трубопроводе $h_w = 1,8$ м.

Поршень диаметром $D = 200$ мм вытесняет воду по короткому трубопроводу диаметром $d = 20$ мм в атмосферу (рис.4.39). Определить усилие на поршень, если скорость истечения жидкости $v = 5$ м/с, потери напора $h_w = 2$ м.

По горизонтальной трубе переменного сечения протекает вода при разности показаний пьезометров $h = 50$ см (рис.4.40). Определить расход Q , если диаметр трубопровода в широком сечении $D = 50$ мм, а в узком $d = 30$ мм. Потери напора $h_w = 0,1$ м.

Поршень диаметром $D = 60$ мм, двигаясь равномерно со скоростью $v_п = 0,1$ м/с, всасывает керосин ($\rho_k = 850$ кг/м³) из открытого бака (рис.4.41). Определить усилие на поршне, если высота всасывания $h = 3$ м, потери напора в трубопроводе $h_w = 1,2$ м. Трением поршня в цилиндре пренебречь.

ГЛАВА 5.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

Увеличивается же подобное за счет подобного.

Анаксагор

Существует два метода исследования физических явлений - аналитический и экспериментальный. При аналитическом исследовании движения жидкости задача сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений при заданных условиях однозначности. Например, для вязкой несжимаемой жидкости имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 v; \quad (5.1)$$

$$\text{div } v = 0, \quad (5.2)$$

где (5.1) - система уравнений Навье - Стокса, записанных в векторной форме; (5.2) - уравнение неразрывности. Кроме того, должны быть заданы начальные и граничные условия и значения физических постоянных ρ и ν .

В принципе, совокупностью системы основных дифференциальных уравнений и условий однозначности конкретное единичное явление определено вполне. Однако эти уравнения чрезвычайно сложны (являются уравнениями в частных производных) и решения найдены лишь для небольшого числа частных случаев, к тому же при весьма существенных упрощающих предположениях.

Другим методом исследования является непосредственный эксперимент. При этом измеряются те величины, которые представляют прямой практический интерес, и находятся связи, допускающие непосредственное приложение. Однако данные, полученные из опыта, относятся только к тому частному случаю, который подвергался эксперименту. Необходимо найти пути обобщения данных опыта на другие родственные явления. Это

позволило бы на основании немногих экспериментов судить о параметрах жидкости в многочисленных родственных явлениях. Задача нахождения научно обоснованного метода обобщения данных опыта решается теорией подобия, которая является учением о методах обобщения данных опыта.

§ 5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Под классом явлений понимается система дифференциальных уравнений, описывающих физическое явление. Например, системой уравнений Навье - Стокса и уравнением неразрывности описываются все возможные виды движения вязкой несжимаемой жидкости в каналах любой формы.

Под единичным явлением понимается система дифференциальных уравнений с наложенными на нее условиями однозначности. Действительно, если к системе дифференциальных уравнений' присоединить условия однозначности и решить ее, то получим описание конкретного единичного явления.

Под группой явлений понимается система дифференциальных уравнений с наложенными на нее подобными условиями однозначности. Например, явления, протекающие в каналах, геометрически подобных, будут относиться к одной группе явлений.

Основная идея теории подобия заключается в выделении внутри класса явлений более узких групп.

Подобными явлениями называются такие, у которых отношение характеризующих их переменных есть постоянное число. Существуют следующие виды подобия.

1. для того чтобы модель была механически подобна образцу (объекту, для которого создается модель), прежде всего должно соблюдаться *геометрическое подобие*; для этого отношение длин сходственных отрезков образца и модели должно быть одинаковым, т. е.

$$\frac{l_m}{l_0} = C_1,$$

где l_m - некоторый линейный размер потока модели; l_0 - соответствующий размер потока в образце; C_1 - константа геометрического подобия (линейный масштаб модели).

Из последней формулы следуют также соотношения:

$$\frac{\omega''}{\omega'} = C_1^2; \quad \frac{V''}{V'} = C_1^3,$$

где ω'' , ω' - площади модели и образца; V'' , V' - объемы модели и образца.

2. При получении модели, кроме геометрического подобия, необходимо соблюдать еще *динамическое*, которое означает, что все силы, вызывающие рассматриваемые движения в модели, должны быть изменены с аналогичными силами в образце в одно и то же число раз.

Сила F определяется произведением массы m на ускорение a , т. е.

$$F = ma.$$

Так как размерность массы $m = \rho l^3$, а ускорения $a = l/t^2$, то размерность силы будет

$$F = \rho l^3 \frac{l}{t^2} = \rho l^2 v^2.$$

Отсюда следует, что для динамического подобия необходимо соблюдение соотношения

$$\frac{F_m}{F_0} = \frac{\rho_m l_m^2 v_m^2}{\rho_0 l_0^2 v_0^2} = C_\rho C_1^2 C_v^2 = C_f, \quad (5.3)$$

где $C_\rho = \frac{\rho_m}{\rho_0}$; $C_v = \frac{v_m}{v_0}$; C_f - константа динамического подобия (масштаб сил).

Условие (5.3) является математическим выражением общего закона динамического подобия, которое впервые сформулировано Ньютоном.

В теории подобия доказывается, что при выполнении геометрического и динамического подобий будет соблюдаться и кинематическое подобие.

Следовательно, скорости, ускорения и перемещения частиц в модели будут изменяться в одних и тех же отношениях по сравнению с образцами, т. е.

$$\frac{v_M}{v_0} = C_v; \frac{a_M}{a_0} = C_a; \frac{T_M}{T_0} = C_T$$

Таким образом, для двух подобных явлений должны существовать соотношения типа

$$\frac{l_M}{l_0} = C_l; \frac{F_M}{F_0} = C_f; \frac{v_M}{v_0} = C_v; \frac{a_M}{a_0} = C_a; \text{ и т.д.,}$$

где C_b , C_f , C_v , C_a сохраняют постоянные значения в соответственных точках подобных систем. Эти величины поэтому называются константами подобия.

Подобных явлений бывает не два, а бесконечно большое количество. Эти явления составляют группу подобных явлений, поэтому выражение вида $x_i^M = C_{xi} x_i^0$ есть групповое преобразование явлений, где C_x принимает последовательно постоянные значения при переходе от одного явления к другому, подобному первому.

§ 5.2. ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Очевидно, что подобные явления должны при надлежать лишь к одному классу, т. е. описываться одной и той же системой дифференциальных уравнений. в общем случае дифференциальные уравнения не могут соблюдаться одновременно при переменных x' , v' и т. д. и при новых переменных $x'' = C_l x'$, $v'' = C_v v'$ и т. д., т. е. в общем случае дифференциальные уравнения и уравнения группового преобразования несовместны.

Покажем, что для того чтобы переменные одновременно удовлетворяли дифференциальным уравнениям и уравнениям группового преобразования, множители C_b , C_v и т. д. не могут выбираться произвольно, а связаны определенными соотношениями.

Выпишем одно из уравнений Навье - Стокса для первого явления

(образца):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v'_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} = \\ & = X' - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + v' \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Для второго явления (модели), подобного первому, положим

$$\begin{aligned} v^M &= C_v v^0; \quad t^M = C_t t^0; \quad x^M = C_l x^0; \quad y^M = C_l y^0; \quad z^M = C_l z^0; \\ F^M &= C_f F^0; \quad \rho^M = C_\rho \rho^0; \quad v^M = C_v v^0; \quad p^M = C_p p^0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Уравнение Навье - Стокса для модели будет

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v''_x}{\partial t} + v''_x \frac{\partial v''_x}{\partial x'} + v''_y \frac{\partial v''_x}{\partial y'} + v''_z \frac{\partial v''_x}{\partial z'} = \\ & = X'' - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p''}{\partial x''} + v'' \left(\frac{\partial^2 v''_x}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 v''_x}{\partial y''^2} + \frac{\partial^2 v''_x}{\partial z''^2} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставляя (5.5) в уравнение (5.6) и учитывая, что константы подобия C постоянны и при дифференцировании выносятся за знак дифференциала, получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{C_v}{C_t} \right) \frac{\partial v'_x}{\partial t'} + \left(\frac{C_v^2}{C_l} \right) \left(v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} \right) = \\ & = C_f X' - \left(\frac{C_p}{C_\rho C_l} \right) \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \left(\frac{C_v C_v}{C_l^2} \right) v' \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из соотношения (5.7) следует, что для совместности уравнений (5.4) и (5.6), т. е. для того чтобы переменные первого и второго явлений удовлетворяли бы одному и тому же дифференциальному уравнению, должно быть

$$\frac{C_v}{C_t} = \frac{C_v^2}{C_l} = C_f = \frac{C_p}{C_\rho C_l} = \frac{C_v C_v}{C_l^2}.$$

Или, разделив все на $\frac{C_v^2}{C_t}$, получим

$$\frac{C_l}{C_t C_v} = \frac{C_f C_l}{C_v^2} = \frac{C_p}{C_\rho C_v^2} = \frac{C_v}{C_v C_l} = 1.$$

Отсюда

$$\frac{C_t C_v}{C_l} = \frac{C_f C_l}{C_v^2} = \frac{C_p}{C_\rho C_v^2} = \frac{C_v C_l}{C_v} = 1.$$

Учитывая, что из (5.5) $C_v = \frac{v^M}{v^0}$ и т. д., получим

$$\frac{v^M t^M}{l^M} = \frac{v^0 t^0}{l^0}$$

Или

$$\frac{vt}{l} = \text{Ho} = \text{idem},$$

т. е. комплекс величин в соответствующих точках образца и модели должен быть неизменен (условие равенства чисел подобия обозначается значком idem):

$$\frac{F^M l^M}{v^{M2}} = \frac{F^0 l^0}{v^{02}}, \text{ или } \frac{Fl}{v^2} = \text{Fr} = \text{idem};$$

$$\frac{p^M}{\rho^M v^{M2}} = \frac{p^0}{\rho^0 v^{02}}, \text{ или } \frac{p}{\rho v^2} = \text{Eu} = \text{idem};$$

$$\frac{v^M l^M}{v^M} = \frac{v^0 l^0}{v^0}, \text{ или } \frac{vl}{v} = \text{Re} = \text{idem}.$$

Величины Ho, Fr, Eu, Re называют критериями подобия. Ho - критерий гомохронности; Fr - критерий Фруда; Eu - критерий Эйлера; Re - критерий Рейнольдса.

Первая теорема подобия (теорема Ньютона) при этом будет: *у подобных явлений для любой пары соответственных точек критерии подобия численно одинаковы.* При переходе от одной пары соответственных точек к другой критерии подобия изменяют значение. Эта теорема дает необходимые условия подобия.

Рассмотрим условия, которые достаточны для того, чтобы явления в

модели и образце были подобны. Понятие подобия распространяется на все соответственные точки подобных систем, в том числе и на границах систем, а также в начальный момент времени. Отдельные явления различаются между собой лишь условиями однозначности, поэтому если условия однозначности сделать подобными, то и сами явления окажутся подобными, если они описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями. Но для подобия условий однозначности достаточно соблюдения равенства критериев подобия, составленных лишь из величин, входящих в условия однозначности. Поэтому, ***подобны те явления, условия однозначности которых подобны, а критерии подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности, равны.*** Это утверждение составляет 3-ю теорему подобия (теорему Кирпичева - Гухмана).

Значение этой теоремы состоит в том, что она позволяет воспроизводить подобные явления, т. е. моделировать их. Согласно этой теореме, для того чтобы модель была подобна образцу, достаточно осуществить пропорциональность всех величин на границе явления и в начальный момент времени, выбрав эти величины так, чтобы критерии, составленные из них, были численно равны для соответствующих точек модели и образца. Например, при течении жидкости в гладкой круглой трубе в условия однозначности входят v , ν , поэтому должно быть $Re = idem$ или $Re_1 = Re_2$.

Отсюда

$$\frac{v_1 d_1}{\nu_1} = \frac{v_2 d_2}{\nu_2}.$$

Если $v_1 = v_2$ и $d_2 = 0,5d_1$, то на входе должно быть $\nu_2 = 2 \nu_1$. Именно в этом случае условия однозначности будут подобны.

Все критерии, полученные из данной системы уравнений, можно разбить на две категории. К первой категории относят критерии, составленные из величин, входящих в условия однозначности. Эти критерии называют определяющими, так как они определяют достаточные условия

подобия. Ко второй - все остальные критерии, получающиеся из системы уравнений. Их называют неопределяющими.

Если значения определяющих критериев у двух явлений в соответственных точках равны, то явления подобны. Если они подобны, то по первой теореме подобия они имеют в соответственных точках одинаковые значения всех критериев, независимо от того, к которой из двух категорий они относятся. Отсюда следует, что равенство определяющих критериев имеет следствием равенство всех остальных критериев. Это означает существование функциональной зависимости между определяющими и неопределяющими критериями.

Если перейдем от одних значений определяющих критериев к другим, то перейдем от одной группы подобных явлений к другой. Но при этом и все остальные не определяющие критерии получают какие-то новые единственные значения. Таким образом, каждый не определяющий критерий есть однозначная функция определяющих критериев. Например, $E_u = f(Re)$.

Вид этой функции может быть найден из опыта. Если получим из опыта зависимость $E_u = f(Re)$ и построим ее в виде графика, то каждая точка на таком графике будет отвечать целой группе подобных явлений, для которых $Re = idem$, а вся кривая в целом — серии групп.

Между тем одна точка на графике может быть получена в результате единичного опыта, а вся кривая — в виде небольшой серии опытов на единственной установке. Например, после того как найдено число $E_u = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$, перепад Δp находится по формуле

$$\Delta p = E_u \cdot \rho \cdot v^2.$$

Таким образом, можно обобщить результаты единичного эксперимента на целую серию групп и получить решение или интеграл дифференциального уравнения в виде критериального уравнения. Отсюда вторая теорема подобия (теорема Федермана - Букингема) формулируется следующим образом: *решение системы дифференциальных уравнений может быть*

представлено в виде функции между критериями подобия этой системы.

Значение второй теоремы подобия состоит в том, что она позволяет не интегрировать систему дифференциальных уравнений, а получать ее интеграл из опыта в виде критериального уравнения. Кроме того, она указывает на то, что данные опыта должны обрабатываться в виде функциональной зависимости между критериями подобия.

§ 5.3. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Процесс течения реальной жидкости описывается сложной системой дифференциальных уравнений (система уравнений Навье-Стокса) и условиями однозначности с большим числом переменных величин. Попытки аналитического решения этой системы уравнений представляют серьезные трудности, поэтому большое значение приобретают экспериментальные исследования. С помощью эксперимента для отдельных значений аргумента можно получить численные значения искомых переменных, а затем подобрать уравнения, описывающие результаты опытов. Однако при изучении столь сложного явления, как течение реальной жидкости, не всегда легко проводить и опытное исследование. Кроме того, здесь нужно быть уверенным, что результаты, получаемые с помощью какой-либо установки (модели), можно перенести и на аналогичные процессы (образец). Для решения этих трудностей и предназначена теория подобия.

На основе теории подобия размерные физические величины объединяются в безразмерные комплексы. При этом число таких комплексов оказывается существенно меньше числа величин, из которых они составлены. Полученные безразмерные комплексы рассматриваются как новые переменные.

Кроме того, теория подобия устанавливает условия, при которых результаты экспериментальных исследований можно распространить и на другие явления, подобные исследуемому.

В уравнениях и условиях однозначности различают три вида величин (применительно к системе дифференциальных уравнений Навье - Стокса).

1. Независимые переменные - координаты x, y, z и время t .

2. Зависимые переменные (искомые функции), которые однозначно определяются значениями независимых переменных. К их числу относится давление p и составляющие скорости v_x, v_y, v_z по координатным осям.

3. Постоянные величины (константы), которые для определенной задачи являются постоянными величинами, не зависящими от других переменных. Однако при переходе к другим задачам они могут изменяться. Постоянными величинами являются линейные размеры, вязкость, плотность и др.

После перевода математической постановки задачи к безразмерному виду получаем комплекс критериев подобия.

Критериям подобия присвоены имена ученых, которые внесли значительный вклад в развитие гидродинамики.

Первый из этих безразмерных комплексов обозначают

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

и называют критерием Рейнольдса. Он характеризует отношение сил инерции и сил вязкости. При заданных диаметре трубопровода d и вязкости жидкости ν критерий Рейнольдса зависит лишь от скорости течения v и поэтому является, по сути дела, безразмерной скоростью.

Безразмерный комплекс

$$Eu = \frac{p}{\rho v^2}$$

называется критерием Эйлера. Он характеризует отношение сил давления и сил инерции. для несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами большой интерес представляет неабсолютное давление p , а его изменение. Поэтому критерий Eu обычно записывают в виде

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = \frac{p - p_0}{\rho v^2},$$

где p_0 - фиксированное значение давления (например, на входе в канал).

Безразмерный комплекс

$$\text{Gr} = \frac{g\beta l^3 \Delta T}{\nu^2}$$

называют критерием Грасгофа. Здесь g - ускорение силы тяжести;

$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta T}$ - коэффициент объемного расширения (1/К); ν - кинематический коэффициент вязкости; l - определяющий размер; ΔT изменение температуры в процессе; ρ - плотность.

Критерий Грасгофа характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотности из-за изменения температуры.

В случае, когда разность плотностей обусловлена не температурным фактором, а составом жидкости (присутствие примесей или других жидкостей, удельный вес которых отличается от удельного веса основной жидкости), критерием подобия будет диффузионное число Архимеда:

$$\text{Ar} = \frac{gl^3}{\nu^2} \frac{\rho_0 - \rho}{\rho},$$

где ρ_0 и ρ - плотность одной и другой фаз.

В случае, когда в жидкости велики силы поверхностного натяжения, вводится критерий подобия Вебера:

$$\text{We} = \frac{\rho v^2 l}{\sigma},$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения.

Критерий подобия Вебера - отношение сил инерции к силам поверхностного натяжения.

Критерий подобия Фруда

$$\text{Fr} = \frac{gl}{v^2}$$

есть мера отношения потенциальной энергии массовых сил к силам инерции потока.

При исследовании неустановившихся явлений используются критерии подобия Струхала

$$\text{Sh} = \frac{l}{\nu t}$$

и Фурье

$$\text{Fo} = \frac{al}{d^2},$$

где t - время; a - коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{с}$.

Критерий подобия Струхала характеризует составляющие инерционных сил, зависящих от времени.

Критерий подобия Фурье представляет безразмерное время.

При исследовании процессов теплопередачи и диффузии используют критерий подобия Пекле

$$\text{Pe} = \frac{\nu l}{a},$$

характеризующий отношение тепла, переносимого конвекцией, к теплу, передаваемому теплопроводностью. Например, при больших числах Pe преобладающим будет конвективный теплоперенос и наоборот.

Критерий подобия Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$$

полностью составлен из физических параметров, а потому и является физическим параметром. Этот критерий имеет смысл подобия полей температур и скоростей.

§ 5.4. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ. π - ТЕОРЕМА

При организации экспериментов необходимо с самого начала установить наиболее целесообразную методику их проведения и порядок обработки результатов опытов.

В практике гидравлических исследований метод анализа размерностей нашел широкое применение. Этот метод позволяет заранее определить основные критерии подобия, в которых следует обрабатывать результаты опытов, а также обобщать их и устанавливать закономерности, отражающие исследуемый процесс.

Исходным для метода анализа размерностей является то, что любое математическое уравнение, описывающее физический процесс, обязательно должно быть размерно-однородным.

Это означает, что обе его части имеют всегда одинаковую размерность независимо от выбора системы физических величин.

Свойство однородности является основой теории размерностей. В механике в качестве основных физических величин принимают длину L , массу M и время T . Они независимы друг от друга.

В механике жидкости и газа не всегда удастся воспользоваться основными физическими величинами, тогда принимаются любые, независимые друг от друга, например плотность, скорость, время.

Достоинством метода является то, что при его применении достаточно знать основные переменные величины, характеризующие данный процесс, само же уравнение, описывающее этот процесс, может быть неизвестно.

Обычно задача анализа размерностей решается путем определения физических величин, которые полностью характеризуют данный процесс. Затем устанавливается характер зависимости между выделенными величинами, исходя из принципа однородности размерности с помощью так называемой π -теоремы.

Сущность π -теоремы состоит в следующем. В общем случае π -теорема устанавливает связь между теорией подобия и теорией размерностей.

Предположим, что переменная величина A_1 зависит от ряда переменных: A_2, A_3, \dots, A_n , участвующих в каком-либо физическом процессе, и не зависит от каких-либо других переменных.

Тогда общая функциональная зависимость между этими величинами может быть представлена уравнением

$$A_1 = f(A_2, A_3, \dots, A_n) \quad (5.8)$$

или

$$\varphi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0.$$

Пусть число определяющих размерных единиц, через которые могут быть выражены все n – переменные, равно m .

π -Теорема формулируется так:

Уравнение, связывающее между собой n размерных физических величин, характеризующих рассматриваемое явление, среди которых m обладают независимой размерностью, может быть преобразовано в $n-m$ безразмерных комплексов, составленных из указанных величин.

π -Теорема устанавливает, что если указанные n переменных выразить через эти основные единицы, то их можно сгруппировать в $n-m$ безразмерных π -членов:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0, \quad (5.9)$$

где каждое число π представляет собой безразмерное произведение нескольких A , то есть число членов в физическом уравнении сокращается до $n - m$. Причем каждый такой π -член будет содержать $m + 1$ переменную величину. В гидродинамических задачах число таких переменных, входящих в π -члены, должно равняться четырем.

Три из них – определяющие: характерный размер (диаметр d), скорость течения жидкости v и ее плотность ρ (или вязкость μ) входят в каждый из π -членов и только четвертая заменяется другой при переходе от члена к члену.

Для удобства исследования показатели последних принимаются равными -1 . Показатели степени определяющих переменных неизвестны. Обозначим их x, y, z с индексами, соответствующими индексам π -членов.

Таким образом, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= A_1^{x_1} \cdot A_2^{y_2} \cdot A_3^{z_1} \cdot A_4^{-1} \\ \pi_2 &= A_1^{x_2} \cdot A_2^{y_2} \cdot A_3^{z_2} \cdot A_5^{-1} \\ \pi_{n-3} &= A_1^{x_{n-3}} \cdot A_2^{y_{n-3}} \cdot A_3^{z_{n-3}} \cdot A_n^{-1} \end{aligned} \right\}. \quad (5.10)$$

Выражаем затем входящие в π -члены переменные через основные независимые размерности, но, поскольку эти члены являются безразмерными во всех полученных для них выражениях, то показатели степени каждой из основных размерностей должны обязательно равняться нулю.

Пример. Рассмотрим применение π -теоремы для определения опытным путем потерь напора на трение по длине потока при равномерном напорном движении по трубам вязкопластичной бингамовской жидкости.

Известно, что потери напора, а следовательно, и давления Δp зависят от следующих факторов:

- геометрических характеристик трубопровода диаметра d , длины l , шероховатости стенок Δ ;
- физических свойств жидкости: плотности ρ , динамической вязкости μ , начального напряжения сдвига τ_0 ;
- средней скорости течения v .

Общую функциональную зависимость, связывающую эти величины, представим уравнением:

$$\Delta p = f(d, l, \rho, v, \mu, \tau_0, \Delta) \quad (5.11)$$

или

$$\varphi\left(\frac{\Delta p}{l}, d, \rho, v, \mu, \tau_0, \Delta\right). \quad (5.12)$$

В задачах прикладной механики жидкости и газа имеются три физические величины, имеющие независимые размерности: масса $[M]$, время $[T]$, длина $[L]$, то есть в этих задачах следует принимать $m = 3$. Это позволяет составить уравнение размерностей для каждого π -члена, соблюдая при этом обязательное условие их размерной однородности. Так как число основных размерных величин равно трем ($m = 3$), а переменных величин в уравнении (5.12) семь ($n = 7$), то получим уравнение, состоящее из $n-m$ безразмерных π -членов:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0. \quad (5.13)$$

Каждый π -член должен содержать четыре переменные величины. Принимаем в качестве определяющих переменных величин следующие:

- диаметр трубопровода d ;
- среднюю скорость v ;
- плотность жидкости ρ .

Комбинируя их поочередно с остальными переменными, входящими в уравнение (5.12), получим:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= d^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} \mu^{-1}; \\ \pi_2 &= d^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2} \tau_0^{-1}; \\ \pi_3 &= d^{x_3} v^{y_3} \rho^{z_3} \Delta^{-1}; \\ \pi_4 &= d^{x_4} v^{y_4} \rho^{z_4} \left(\frac{\Delta p}{l} \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Запишем размерности переменных величин, входящих в π -члены системы (5.14):

$$\begin{aligned} [d] &= [L]; & [v] &= \left[\frac{L}{T} \right]; & [\rho] &= \left[\frac{M}{L^3} \right]; \\ [\mu] &= \left[\tau \frac{dv}{dn} \right] = [FTL^{-2}] = \left[\frac{M}{LT} \right]; & [\tau_0] &= \left[\frac{M}{LT^2} \right]; \\ [\Delta] &= [L]; & [\Delta p] &= \left[\frac{M}{LT^2} \right]; & \left[\frac{\Delta p}{L} \right] &= \left[\frac{M}{L^2 T^2} \right]. \end{aligned}$$

Составим уравнения размерностей для каждого из π -членов, имея в виду обязательное условие их размерной однородности. Для первого члена имеем

$$\pi_1 = d^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} \mu^{-1} = L^{x_1} \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^{y_1} \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_1} \cdot \left(\frac{M}{LT}\right)^{-1} = L^0 T^0 M^0. \quad (5.15)$$

Найдем степени размерностей в левой части уравнения (5.15):

$$\pi_1 = L^{x_1+y_1-3z_1+1} \cdot T^{-y_1+1} \cdot M^{z_1-1} = L^0 T^0 M^0.$$

Приравнявая к нулю показатели степени при одинаковых основаниях x , получим систему уравнений с неизвестными x_1, y_1, z_1 :

$$\left. \begin{aligned} x_1 + y_1 - 3z_1 + 1 &= 0; \\ -y_1 + 1 &= 0; \\ z_1 - 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Из совместного решения уравнений (5.16) находим:

$$x_1 = 1; \quad y_1 = 1; \quad z_1 = 1; \quad \pi_1 = d^1 v^1 \rho^1 \mu^{-1}.$$

Подставив эти значения показателей степени в первый π -член системы уравнений (5.14), получим

$$\pi_1 = \frac{d v \rho}{\mu}, \quad (5.17)$$

где найденное значение π_1 представляет собой критерий Рейнольдса:

$$\left(\text{Re} = \frac{d v \rho}{\mu} \right).$$

Для второго π -члена имеем

$$\begin{aligned} \pi_2 &= d^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2} \tau_0^{-1} = L^{x_2} \left(\frac{L}{T}\right)^{y_2} \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_2} \cdot \left(\frac{M}{LT^2}\right)^{-1} = \\ &= L^{x_2+y_2-3z_2+1} \cdot T^{-y_2+2} \cdot M^{z_2-1} = L^0 T^0 M^0. \end{aligned}$$

Отсюда запишем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 &= 0; \\ -y_2 + 2 &= 0; \\ z_2 - 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Находим x_2, y_2, z_2 :

$$x_2 = 0; \quad y_2 = 2; \quad z_2 = 1.$$

Запишем выражение для второго π -члена с учетом показателей степени:

$$\pi_2 = d^0 v^2 \rho^1 \tau_0^{-1}$$

или

$$\pi_2 = \frac{v^2 \rho}{\tau_0}. \quad (5.18)$$

Для третьего π -члена:

$$\pi_3 = d^{x_3} v^{y_3} \rho^{z_3} \Delta^{-1} = L^{x_3} \left(\frac{L}{T} \right)^{y_3} \cdot \left(\frac{M}{L^3} \right)^{z_3} \cdot [L^{-1}] = L^0 T^0 M^0;$$

$$\pi_3 = L^{x_3 + y_3 - 3z_3 - 1} \cdot T^{-y_3} \cdot M^{z_3} = L^0 T^0 M^0.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} x_3 + y_3 - 3z_3 - 1 &= 0; \\ -y_3 &= 0; \\ z_3 &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$x_3 = 1; \quad y_3 = 0; \quad z_3 = 0.$$

Тогда

$$\pi_3 = d^1 v^0 \rho^0 \Delta^{-1}$$

или

$$\pi_3 = \frac{d}{\Delta}. \quad (5.19)$$

Для четвертого π -члена:

$$\pi_4 = d^{x_4} v^{y_4} \rho^{z_4} \left(\frac{\Delta p}{l} \right)^{-1} = L^{x_4 + y_4 - 3z_4 + 2} \cdot T^{-y_4 + 2} \cdot M^{z_4 - 1} = L^0 T^0 M^0.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} x_4 - y_4 - 3z_4 + 2 &= 0; \\ -y_4 + 2 &= 0; \\ z_4 - 1 &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$x_4 = -1; \quad y_4 = 2; \quad z_4 = 1.$$

Тогда

$$\pi_4 = d^{-1} v^2 \rho^1 \left(\frac{\Delta p}{l} \right)^{-1}$$

или

$$\pi_4 = \frac{v^2 \rho l}{d \Delta p}. \quad (5.20)$$

Подставив значения π -членов в соотношение (5.13), получаем уравнение:

$$F \left(\frac{dv\rho}{\mu}, \frac{v^2\rho}{\tau_0}, \frac{d}{\Delta}, \frac{v^2\rho l}{d\Delta p} \right) = 0. \quad (5.21)$$

Решая уравнение (5.21) относительно π_4 , находим

$$\frac{v^2\rho l}{d\Delta p} = F \left(\frac{dv\rho}{\mu}, \frac{d}{\Delta}, \frac{v^2\rho}{\tau_0} \right). \quad (5.22)$$

Выделим Δp из уравнения (5.22) и получим:

$$\Delta p = \frac{v^2\rho l}{d} \left[F \left(\frac{vd\rho}{\mu}, \frac{v^2\rho}{\tau_0}, \frac{d}{\Delta} \right) \right]^{-1}. \quad (5.23)$$

Разделив левую и правую части уравнения (5.23) на ρg , находим:

$$h_{\text{тр}} = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{l v^2}{d g} \left[F \left(\frac{d v \rho}{\mu}, \frac{v^2 \rho}{\tau}, \frac{d}{\Delta} \right) \right]^{-1}.$$

Обозначим

$$\frac{\lambda}{2} = \left[F \left(\frac{d v \rho}{\mu}, \frac{v^2 \rho}{\tau_0}, \frac{d}{\Delta} \right) \right]^{-1}$$

и получим выражение для потери напора:

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}.$$

Тогда общее выражение для λ примет вид:

$$\lambda = \frac{2}{F \left(\frac{d v \rho}{\mu}, \frac{v^2 \rho}{\tau_0}, \frac{d}{\Delta} \right)}. \quad (5.24)$$

Знаменатель выражения (5.24) представляет собой критериальное уравнение, включающее критерии:

$\text{Re} = \frac{d v \rho}{\mu}$ – критерий Рейнольдса;

$\frac{v^2 \rho}{\tau_0} = \frac{\text{Re}}{\text{Sen}} = \frac{d v \rho}{\mu} / \frac{\tau_0 d}{\mu v} = \frac{d v \rho \mu v}{\mu \tau_0 d} = \frac{v^2 \rho}{\tau_0} = B$ – критерий пластичности;

здесь $\text{Sen} = \frac{\tau_0 d}{\mu v}$ – критерий Сен-Венана (Ильюшина) – есть характеристика

пластичности жидкости.

Отношение $\frac{d}{\Delta}$ является характеристикой геометрического подобия

$\left(\frac{d}{\Delta} = \frac{1}{\varepsilon} \right)$. Следовательно, можно выразить l в следующем виде:

$$\lambda = \frac{2}{F \left(\text{Re}, B, \frac{1}{\varepsilon} \right)} = F' \left(\frac{\varepsilon}{\text{Re}, B} \right). \quad (5.25)$$

Для ньютоновской жидкости $\tau_0 = 0$, поэтому при турбулентном режиме имеем

$$\lambda = \frac{2}{F\left(\text{Re}, \frac{1}{\varepsilon}\right)} = F'\left(\frac{\varepsilon}{\text{Re}}\right).$$

При ламинарном режиме ($\varepsilon = 0$), тогда

$$\lambda = \frac{2}{F(\text{Re})} = F'(\text{Re}).$$

Таким образом, применение метода анализа размерностей позволило выявить основные критерии подобия, характеризующие потери напора на трение по длине трубопровода.

В этих критериях производится обработка опытных данных на модели так, чтобы соблюдалось их равенство в натуре.

Таким образом, теория подобия и анализ размерностей являются, по существу, разными методами одной и той же системы исследования, основанной на использовании обобщенных безразмерных переменных. Различие этих методов в основном обусловлено только объемом предварительных знаний об исследуемом процессе. Для применения теории подобия необходим большой объем предварительных знаний, достаточный для вывода уравнений, определяющих процесс. Если применение теории подобия возможно, то ей следует отдать предпочтение. Если математическая постановка задачи невозможна, то применение анализа размерностей становится неизбежным. При использовании метода анализа размерностей не всегда бывает полная уверенность в безошибочности составленного перечня существенных для процесса параметров, а также в правильности принятой системы размерностей. Если существенные для процесса параметры и их связь с первичными (независимыми) размерностями установлены точно, то использование анализа размерностей обеспечивает результаты, эквивалентные результатам, получаемым с помощью теории подобия.

§ 5.5. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Физическое моделирование находит широкое применение при опытных исследованиях в области гидравлики. Моделирование основано на создании модели, имеющей ту же физическую природу, что и процессы, протекающие в натуре. Достоинством этого метода является возможность изготовления модели в любом произвольном масштабе и применения на модели любой жидкости.

Обычно модель выполняется меньших размеров, чем в натуре, что значительно удешевляет и упрощает проведение опытов. Полученные результаты опытов обрабатываются и обобщаются с целью переносов их в натуре. Физическое моделирование базируется на законах теории механического подобия и теории размерностей.

На практике обычно применяется частичное, или приближенное, моделирование. В этом случае модель исследуется по основным признакам, соответствующим реальному процессу.

При частичном моделировании используются свойства приближенного подобия по одному из определяющих критериев.

В этом случае основной задачей является определение связи между определяющими и неопределяющими критериями, а также нахождение масштабов для основных физических величин.

Непременным условием при физическом моделировании является строгое геометрическое подобие модели и природы, а также равенство в них соответствующих критериев подобия.

Рассмотрим примеры частичного физического моделирования.

Пример 1. Частичное моделирование по критерию Рейнольдса.

Если при движении жидкости преобладающими силами, определяющими движение жидкости или газа, являются сила трения и инерции, то моделирование проводится по критерию Re .

Согласно условию динамического подобия

$$\text{Re}_1 = \text{Re}_2 \quad \text{или} \quad \frac{v_1 l_1}{\nu} = \frac{v_2 l_2}{\nu}. \quad (5.26)$$

Причем вязкость жидкости на модели и в натуре одна и та же, то есть $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

Соотношение (5.26) принимает вид:

$$v_1 l_1 = v_2 l_2 \quad \text{или} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (5.27)$$

Отсюда просто определяется масштаб скоростей:

$$k_v = k_l^{-1,0}.$$

Масштабы других физических величин находятся следующим образом.

Например, определение масштаба расхода вычисляется из уравнения расхода

$$Q = v\omega.$$

Для динамически подобных потоков определяется комбинация масштабных коэффициентов, с учетом соотношения (5.27):

$$k_Q = k_v k_\omega = k_l^{-1,0} k_l^{2,0} = k_l^{1,0},$$

где k_Q – масштаб расхода;

$$k_v = \frac{v_1}{v_2} = \frac{L_2}{L_1} = k_l^{-1,0} \quad \text{– масштаб скорости;}$$

$$k_\omega = \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 = k_l^2 \quad \text{– масштаб площади.}$$

По аналогии можно получить масштабы других физических величин.

При частичном моделировании, по критерию Рейнольдса, одним из основных признаков динамического подобия потоков с преобладающим действием сил трения является равенство коэффициентов гидравлического сопротивления по длине, то есть $\lambda_1 = \lambda_2$.

Это свойство широко используется при моделировании по критерию Рейнольдс

Пример 2. Частичное моделирование по критерию Фруда.

Моделирование по критерию Фруда применяется при изучении потоков, в которых преобладают силы инерции и тяжести, например при изучении гидравлических струй и др.

Динамическое подобие потоков обеспечивается равенством критерия Фруда на натуре и модели.

$$F_{r1} = F_{r2} \text{ или, при условии, что } g_1 = g_2 = g :$$

$$\left(\frac{v^2}{l} \right)_1 = \left(\frac{v^2}{l} \right)_2. \quad (5.28)$$

Из соотношения (5.28) определим масштаб скоростей:

$$k_v^2 = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Отсюда $k_v^2 = k_l$ или $k_v = k_l^{0,5}$.

Аналогично можно получить масштабы других физических величин.



Вопросы для самопроверки

1. Раскройте сущность физического моделирования.
2. Раскройте сущность математического моделирования.
3. Что называется законами механического подобия?
4. Раскройте сущность геометрического, кинематического и динамического подобия.
5. Что такое коэффициенты подобия?
6. Что такое критерий Ньютона?
7. Раскройте физический смысл критерия Рейнольдса.
8. Раскройте физический смысл критерия Фруда.
9. Раскройте физический смысл критерия Вебера.
10. Что характеризует критерий Прандтля?
11. Как преобразовывают дифференциальные уравнения, описывающие тот или иной процесс, методами теории подобия? Приведите обобщенные (критериальные) уравнения.
12. Сущность анализа размерностей и его достоинства.
13. Сущность π -теоремы.
14. Как определяется число π -членов?



Примеры решения задач

Задача 1. В газопроводе низкого давления происходит изменение площади поперечного сечения от S_1 до S_2 ($S_2 < S_1$). Определить, в каком из этих сечений число Рейнольдса будет большим. Расход, плотность и вязкость газа считать постоянными.

Решение: Диаметры труб равны $d_1 = \sqrt{\frac{4S_1}{\pi}}$; $d_2 = \sqrt{\frac{4S_2}{\pi}}$.

Из уравнения расхода определяем скорости движения газа:

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}; \quad v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2}.$$

Числа Рейнольдса

$$\text{Re}_1 = \frac{v_1 d_1}{\mu / \rho} = \frac{4Q}{\pi d_1 \nu}; \quad \text{Re}_2 = \frac{v_2 d_2}{\mu / \rho} = \frac{4Q}{\pi d_2 \nu},$$

так как $d_1 > d_2$, то $\text{Re}_1 < \text{Re}_2$.

Следовательно, во втором сечении газопровода число Рейнольдса будет больше, чем в первом сечении.

Задача 2. В каком соотношении должны находиться вязкости потока жидкости модели и натурального объекта в случае, когда для обоих потоков числа Рейнольдса и Фруда будут одинаковы, а модель выполнена в масштабе 1:5.

Решение. Из условия равенства чисел Фруда и Рейнольдса соответственно имеем

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}; \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{l_1}{l_2}.$$

Здесь индексы 1 и 2 соответственно относятся к модели и натурному объекту.

Подставляя значение v_1/v_2 из первого выражения во второе, найдем

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^{1,5}.$$

Так как по условию задачи $l_1/l_2=1/5$, то окончательно получаем

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{1}{5} \right)^{1,5} = 0,09,$$

т. е. $v_1 = 0,09v_2$.

Таким образом, вязкость жидкости, используемой в модели, должна быть приблизительно в 10 раз меньше, чем вязкость жидкости, применяемой в натурном объекте.



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Сопротивление участка водопроводной трубы с арматурой необходимо перед установкой проверить в лаборатории путем испытаний на воздухе. Определить:

1. С какой скоростью v_m следует вести продувку, сохраняя вязкостное подобие, если скорость воды в трубе будет равна $v = 2,5$ м/с.
2. Какова будет потеря напора h_n при работе трубы на воде с указанной скоростью, если при испытании на воздухе потеря давления оказалась равной $\Delta p_m = 8,35$ кПа. Значения кинематической вязкости (при $t = 20^\circ\text{C}$) для воздуха $\nu = 0,156$ Ст и воды $\nu_{\text{вод}} = 0,01$ Ст, плотность воздуха $\rho_v = 1,166$ кг/м³.

Задача 2. Требуется определить аэродинамическое сопротивление автомобиля (высотой $h = 1,5$ м) путем продувки его модели в аэродинамической трубе. Определить:

1. Каков должен быть размер модели h_m для соблюдения подобия (равенство Re), если максимальная скорость движения автомобиля равна $v = 108$ км/ч, а скорость продувки ограничена величиной $v_m = 45$ м/с.
2. Какую силу лобового сопротивления P будет испытывать автомобиль при максимальной скорости движения, если для модели при максимальной скорости продувки сила найдена равной $P_m = 1500$ Н.

Вязкость и плотность воздуха принимать для природы и модели одинаковыми.

Задача 3. При испытании на воде модели насадка (рис.5.1), выходной диаметр которого $d_m = 30$ мм, под статическим напором $H_m = 50$ м получены расход $Q_m = 18$ л/с и средняя скорость в сжатом сечении струи $v_m = 30$ м/с.

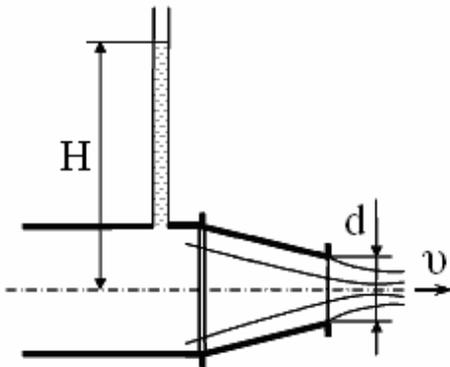


Рис.5.1

Каков должен быть выходной диаметр d насадка в натуре и под каким напором H он должен работать на воде, чтобы получить $Q = 100$ л/с и $v = 60$ м/с?

Считать, что испытания модели произведены в зоне турбулентной автомодельности, в силу чего коэффициенты истечения для модели и натуре одинаковы.

Задача 4. Истечение керосина ($\nu = 0,045$ Ст) через отверстие диаметром $d = 75$ мм моделируется на воде ($\nu_m = 0,01$ Ст) при соблюдении вязкостного и гравитационного подобия (рис.5.2).

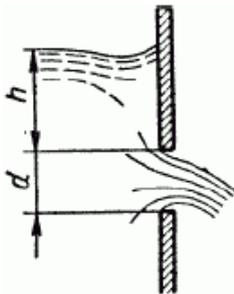


Рис.5.2

Определить:

1. Диаметр отверстия d_m для модели.
2. В каком отношении должны находиться высоты уровней для натуре h и модели h_m .
3. В каком отношении при выполнении этих условий будут находиться расходы Q и Q_m .

Задача 5. Водосливная плотина исследуется в лаборатории на геометрически подобной модели, выполненной в масштабе 1:20 (Рис.5.3).

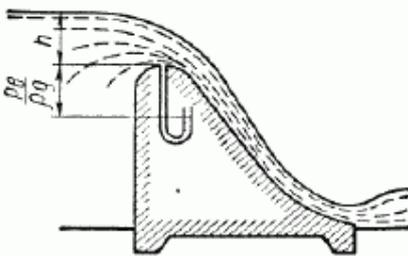


Рис.5.3

Определить:

1. Напор h_m на водосливе, который нужно принять для модели, если в натуре будет $h = 3$ м.
2. Расход через водосливное отверстие в натуре, если расход, полученный при испытании модели, равен $Q_m = 0,19$ м³/с.
3. Вакуум на гребне водослива в натуре, если на модели получен вакуум $p_{в.м} = 2$ кПа.

Ввиду незначительного влияния вязкости моделирование осуществляется по критерию Фруда.

ГЛАВА 6.

КЛАССИФИКАЦИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ. РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Познание начинается с удивления

Аристотель

Одна из важнейших задач гидравлики - определение потерь напора в трубопроводах. Знание этих потерь необходимо для расчета трубопроводов. Общую потерю напора на каком-либо участке трубопровода принято в гидравлике разделять на два вида:

- потери напора по длине трубопровода, или линейные;
- потери напора в местных сопротивлениях, или местные.

Таким образом, потеря напора на участке 1-2 трубопровода определяется по формуле

$$h_{1-2} = h_l + h_m$$

и измеряется в метрах столба (м ст.) жидкости.

Линейные потери напора - это потери напора на трение на прямых участках трубопровода. Потери напора по длине для трубопроводов, находящихся под напором, принято определять по формуле Дарси – Вейсбаха

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ (в м.в.ст.)},$$

где l - длина участка трубопровода, м;

d - внутренний диаметр трубопровода, м;

λ - коэффициент гидравлического сопротивления (коэффициент трения) - безразмерная величина.

Местные потери напора возникают в результате деформации потока и потерь энергии на вихреобразование в тех местах, где происходит изменение конфигурации канала. Они наблюдаются в местах поворота, резкого

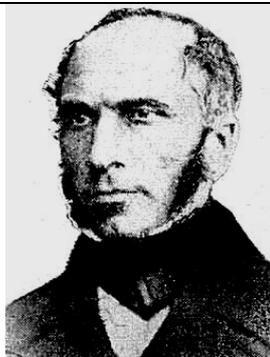
расширения или сужения потока, в различного рода запорных и регулирующих устройствах.

Местные потери напора определяют по формуле

$$h_m = \xi \frac{v^2}{2g},$$

где ξ - коэффициент местных потерь (безразмерная величина).

Таким образом, задача по определению гидравлических потерь при известной скорости течения среды сводится к нахождению коэффициентов λ и ξ (теоретически или экспериментально).



**Анри Филибер
Гаспар Дарси
(1803-1858)**



**Юлиус Вейсбах
(1806 - 1871)**

Французский инженер-гидравлик, обосновавший закон Дарси (1856), связывающий скорость фильтрации жидкости в пористой среде с градиентом давления. Результаты его трудов имели большое влияние на усовершенствование науки о движении воды.

Доказал, в противоположность господствовавшему мнению, что диаметр трубы, как и большая или меньшая гладкость ее стенок, имеет чувствительное влияние на скорость протекающей по ней жидкости.

Исследовал законы движения воды в открытых каналах. Опыты эти дали замечательные выводы относительно влияния русла на коэффициенты сопротивления движению воды. Именем Дарси названа единица измерения проницаемости пористой среды.

Немецкий математик и механик-гидравлик. Открытие им неполного сжатия струи воды при истечении через отверстия и трубки принадлежит к одним из наиболее важных успехов гидравлики после Бернулли. Практические коэффициенты, выведенные Вейсбахом наблюдениями над истечением воды через щитовые отверстия и протокам по трубам, в значительной степени упрощают все расчеты по этой части гидравлики.

Уравнение Дарси - Вейсбаха представляет собой универсальное расчетное уравнение, с помощью которого можно вычислять потери напора в трубах как при ламинарном, так и при турбулентном режиме.

Коэффициенты λ и ξ обладают замечательным свойством: если потоки жидкости динамически подобны, то величина λ или ξ для всех них будет иметь независимо от рода жидкости одно и то же значение. Можно,

например, получить λ с опытами на воздухе, и его величина будет тем же и для воды, и для масла, и для любой другой жидкости, если число Re во всех случаях одно и то же. Это свойство легко объяснить с помощью теории подобия. Действительно,

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Так как $\Delta p = \gamma h$, то

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}.$$

Отсюда

$$\lambda = 2 \frac{\Delta p}{\rho v^2} \frac{d}{l}$$

или

$$\lambda = 2Eu \frac{d}{l}.$$

Для подобных потоков при $Re = idem$, $Eu = idem$ и $d/l = idem$, поэтому и $\lambda = idem$.

Аналогично из $h_m = \xi \frac{v^2}{2g}$, получим

$$\Delta p = \xi \frac{\rho v^2}{2}.$$

Отсюда

$$\xi = 2 \frac{\Delta p}{\rho v^2} = 2Eu.$$

§ 6.1. ДВА РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

В 1883 г. английский физик Рейнольдс с помощью весьма простого и наглядного эксперимента показал, что существуют два отличных друг от друга режима движения жидкости. Установка Рейнольдса состояла из бака I ,

трубы 2, мерного бачка 3, сосуда с окрашенной жидкостью 4 и трубки 5 для ввода краски в трубу 2 (рис. 6.1).

Опыты показали, что при малой скорости движения жидкости Вводимая в нее окрашенная жидкость движется в виде отчетливо Выраженной струйки, не смешиваясь с потоком неокрашенной воды (рис. 6.2). При возрастании скорости движения жидкости струйка Начинает колебаться и принимает волнообразное очертание. Наконец, при каком-то определенном значении скорости окрашенная струйка полностью размывается жидкостью. Жидкость начинает двигаться, перемешиваясь (рис. 6.3).

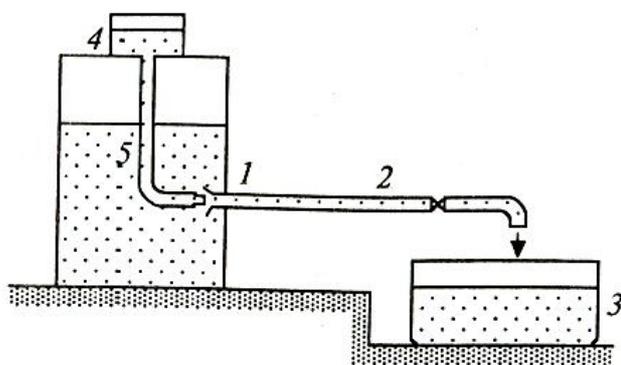


Рис. 6.1

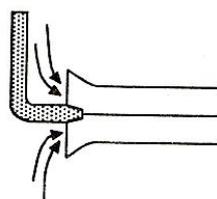


Рис. 6.2

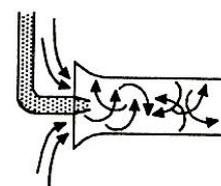


Рис. 6.3

Режим движения жидкости без перемешивания слоев был назван **ламинарным** (движение жидкости слоями).

Режим движения жидкости с перемешиванием слоев - **турбулентным** (беспорядочное движение жидкости). Среднюю скорость течения жидкости $\overline{v'_{кр}}$, при которой происходит смена режимов движения потока, называют критической.

При проведении опыта в обратном порядке, т. е. при уменьшении скорости движения жидкости, происходил переход турбулентного режима в ламинарный, однако при несколько иной критической скорости $\overline{v_{кр}} < \overline{v'_{кр}}$. Поэтому необходимо различать две критические скорости: верхнюю $\overline{v'_{кр}}$ и

нижнюю критическую $\overline{v_{кр}}$ причем $\overline{v'_{кр}} > \overline{v_{кр}}$.

Верхней (бóльшей) критической скоростью называют скорость, при которой ламинарный режим движения переходит в турбулентный. Нижней (меньшей) критической скоростью называют скорость, при которой турбулентный поток переходит в ламинарный.

Но скорость непосредственно не может являться критерием, указывающим на режим движения жидкости. Как показали опыты Рейнольдса, в трубах различного диаметра и при различных жидкостях нижняя критическая скорость, к примеру, оказывалась различной по величине. Таким критерием, как показывает теория подобия, должен быть критерий подобия, а именно, определяющий критерий Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\overline{v}d}{\nu}$$

Опыты подтвердили, что нижнее критическое число Re, при переходе турбулентного режима в ламинарный, имеет всегда одно и то же значение при любом диаметре трубы. Скорости движения жидкости и при любой жидкости и оно равно $\text{Re}_{кр} = 2320$.



Осборн Рейнольдс
(1842-1912)

Английский физик и инженер. Работы Рейнольдса посвящены механике, гидродинамике, теплоте, электричеству, магнетизму. В 1883 году установил, что ламинарное течение переходит в турбулентное, когда введенная им безразмерная величина (число Рейнольдса) превышает критическое значение.

Число Рейнольдса широко используется при решении задач гидро- и аэродинамики в случае малых и средних дозвуковых скоростей. Рейнольдс определил механический эквивалент теплоты. Сконструировал ряд турбин и центробежных насосов.

Основные труды по теории динамического подобия течений вязкой жидкости, по теории турбулентности и теории смазки. В 1876-1883 г.г. предложил дифференциальные уравнения для осреднённого движения жидкости, учитывающие дополнительные напряжения (турбулентные напряжения). Внёс большой вклад в развитие гидродинамической теории смазки.

Таким образом, условия существования различных режимов для потоков в трубах могут быть сформулированы в следующем виде:

- ламинарный режим безусловно существует при числе Рейнольдса, меньшем нижнего критического числа $Re_{кр}$ ($Re < Re_{кр}$);
- турбулентный режим безусловно существует при числе Рейнольдса, большем верхнего критического числа $Re'_{кр}$ ($Re > Re'_{кр}$);
- оба режима возможны (но ламинарный режим неустойчив) при $Re_{кр} < Re < Re'_{кр}$

Опыты показывают, что путем устранения возможных возмущений потока и при плавном входе в трубу можно затянуть переход ламинарного движения в турбулентное до значений чисел $Re = 50\ 000$ и более. Однако такой ламинарный режим будет неустойчив. Достаточно малейшего возмущения, как ламинарный режим тотчас же переходит в турбулентный.

Поскольку значение нижнего критического числа является весьма устойчивым, при практических расчетах принято считать, что при $Re < 2320$ режим ламинарный, а при $Re > 2320$ - турбулентный. При этом движение в неустойчивой зоне исключается, что приводит, как будет ясно из дальнейшего, к не которому расчетному запасу в случае, если при $Re > 2320$ движение будет ламинарным.

§ 6.2. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Равномерным потоком жидкости называют такой поток, в котором все частицы движутся равномерно и прямолинейно. В таком потоке все живые сечения плоские и распределение скоростей по сечениям одинаковое, т. е. $v_1(d) = v_2(d) = v_3(d)$ (рис. 6.4). В равномерном потоке

$$Q = \text{const}, \quad \omega = \text{const},$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{\omega} = \text{const},$$

$$a = \frac{\omega}{v^3 \omega} = \text{const.}$$

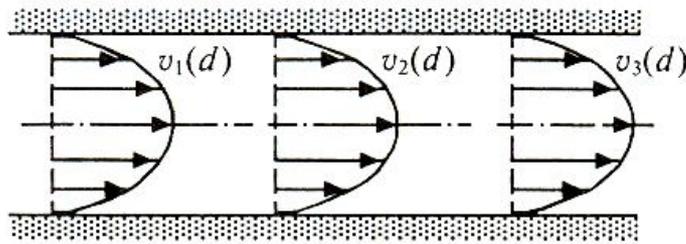


Рис. 6.4

Так как равномерное движение есть предельный случай плавно изменяющегося, то ясно, что давление в живых сечениях потока при равномерном движении будет меняться по гидростатическому закону, т. е.

$$z + \frac{p}{\lambda} = \text{const.}$$

Удельная кинетическая энергия при равномерном движении

$$\frac{a\bar{v}^2}{2g} = \text{const.},$$

так как $a = \text{const}$ и $\bar{v} = \text{const}$, т. е. удельная кинетическая энергия во всех живых сечениях потока одинакова. Следовательно, вдоль равномерного потока уменьшается лишь потенциальная энергия, расходуемая на потери.

Так как все частицы жидкости в данном сечении обладают одинаковыми запасами удельной потенциальной энергии, то потеря энергии на любой линии тока между двумя сечениями одна и та же. Отсюда следует важный вывод, что в равномерном потоке гидравлический уклон

$$J = \frac{h_{1-2}}{l} = \text{const.},$$

т. е. не зависит от расположения частицы от оси потока.

§ 6.3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ПОТОКА. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ РАВНОМЕРНОГО ПОТОКА

Проведем исследование равномерного потока с целью вывода основных уравнений, характеризующих его. При равномерном движении средние скорости во всех поперечных сечениях одинаковы, местные сопротивления отсутствуют и существуют лишь сопротивления трения, проявляющиеся по длине трубопровода и вызывающие соответствующие потери напора.

Выведем сначала уравнение динамического равновесия. Для этого рассмотрим равномерный поток жидкости в цилиндрической трубе (рис. 6.5).

Выделим в потоке отсек длиной l и площадью поперечного сечения ω . Контур, ограничивающий площадку ω , обозначим через χ (хи), которую называют смоченным периметром.

Контур χ выберем концентрично по отношению к стенкам трубы.

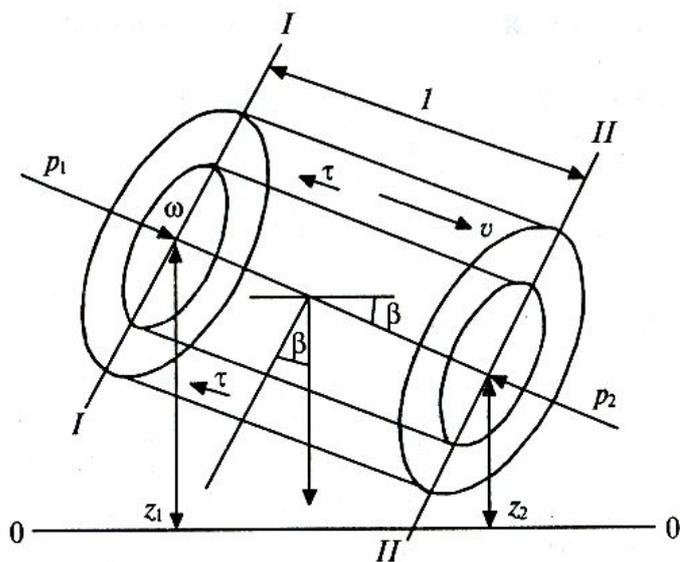


Рис. 6.5

На выделенный отсек действуют силы:

- тяжести

$$G = \gamma \omega l;$$

- гидродинамического давления

$$F_1 = p_1 \omega_1; F_2 = p_2 \omega_2,$$

где p_1 и p_2 - давления в соответствующих сечениях жидкости (поскольку в равномерном потоке гидромеханические давления

распределяются в сечении по линейному закону, то в этих формулах под p_1 и p_2 следует понимать давления, действующие в центре тяжести площадок ω_1 и ω_2);

- трения $T = \gamma \chi l$, где (χl) - боковая поверхность выделенного отсека.

Составим уравнение движения на направление l . Так как силы инерции в равномерном потоке отсутствуют, то получим

$$F_1 - F_2 - T + G \sin \beta = 0$$

или

$$p_1 \omega_1 - p_2 \omega_2 - \tau \chi l + \gamma \omega l \sin \beta = 0.$$

Так как

$$l \sin \beta = z_1 - z_2, \text{ то}$$

$$p_1 \omega_1 - p_2 \omega_2 - \tau \chi l + \gamma \omega (z_1 - z_2) = 0.$$

Поделив обе части уравнения на γ и ω и учитывая, что $\omega_1 = \omega_2$, находим

$$\frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{p_2}{\gamma_2} + z_1 - z_2 = \frac{\tau l}{\gamma \left(\frac{\omega}{\chi} \right)}.$$

Обозначив $\frac{\omega}{\chi} = R$, где R - гидравлический радиус, будем иметь

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{\tau l}{\gamma R}. \quad (6.1)$$

Соотношение (6.1) представляет уравнение динамического равновесия равномерного потока.

Выведем уравнение энергии равномерного потока. Уравнение Бернулли для потока имеет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2g} + h_{1-2}.$$

В равномерном потоке $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ и, следовательно,

$$\frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2g} = \frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2g}$$

Тогда

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = h_{1-2}. \quad (6.2)$$

Объединяя соотношения (6.1) и (6.2), получим общее выражение для потери напора по длине потока:

$$\boxed{\frac{\tau l}{\gamma R} = h_{1-2}.}$$

Последнее уравнение называют основным уравнением равномерного потока. Этому уравнению можно придать несколько иной вид:

$$\frac{\tau}{\gamma} = R \frac{h_{1-2}}{l}.$$

Отсюда

$$\boxed{\frac{\tau}{\gamma} = RJ}$$

или

$$\boxed{\frac{\tau}{\rho} = gRJ,}$$

где J - гидравлический уклон потока. Последние два соотношения также представляют основное уравнение равномерного потока.

Для касательного напряжения на стенке это уравнение принимает вид

$$\frac{\tau_0}{\gamma} = R_0 J,$$

или

$$\frac{\tau_0}{\rho} = gR_0 J,$$

Уравнение равномерного потока показывает, что напряжение силы трения, отнесенное к удельному весу жидкости, равно произведению гидравлического радиуса на гидравлический уклон.

§ 6.4. ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Определим основные закономерности ламинарного потока при равномерном движении в круглых трубах. При этом будем рассматривать участок стабилизированного течения, т. е. участок, на котором профиль скорости ламинарного потока полностью сформировался (см. § 6.7).

Ранее (см. § 6.1) было показано, что ламинарное течение имеет слоистый характер без перемешивания частиц. При этом имеют место только направления потока, параллельные оси трубы при полном отсутствии поперечных движений жидкости. Скорость в слое, непосредственно соприкасающемся со стенками, вследствие прилипания жидкости к стенке (из-за вязкости жидкости) равна нулю. Максимального значения скорость достигает в слое, движущемся по оси трубы.

Для принятой схемы движения необходимо установить закон распределения скоростей в поперечном сечении потока, получить расчетные зависимости для определения расхода жидкости и потерь напора на трение по длине потока.

Рассмотрим ламинарный равномерный поток жидкости в трубе круглого сечения (рис. 6.6).

Основное уравнение равномерного потока имеет вид

$$\tau = \gamma R J. \quad (6.3)$$

По закону Ньютона для внутреннего трения

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n}. \quad (6.4)$$

В трубе круглого сечения гидравлический радиус отсека потока с геометрическим радиусом r равен $R = r/2$. Поскольку при ламинарном режиме течения жидкости в трубе векторы скорости симметричны относительно продольной оси, то за нормаль следует принять радиус отсека потока.

Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{dv}{dr}.$$

Знак минус взят потому, что при увеличении радиуса скорость убывает.

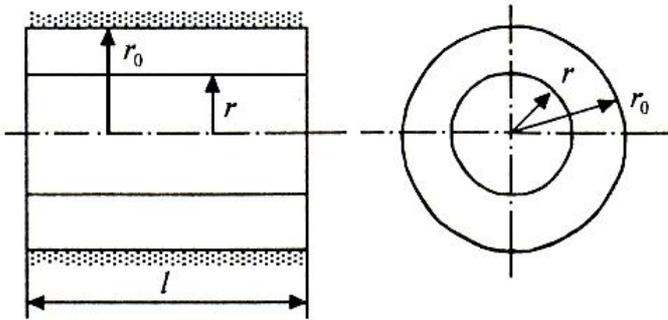


Рис. 6.6

Уравнения (6.3) и (6.4)

примут вид: $\tau = \gamma J \frac{r}{2}$; $\tau = -\mu \frac{dv}{dr}$.

Приравнивая правые части этих уравнений, находим

$$\mu \frac{dv}{dr} = -\gamma J \frac{r}{2}$$

или

$$dv = -\frac{\gamma J}{2\mu} r dr.$$

Интегрируя, получим (учитывая, что в равномерном потоке $J = \text{const}$, т.е. не зависит от r):

$$v = -\frac{\gamma J}{4\mu} r^2 + C.$$

Постоянная интегрирования C находится из граничных условий: при $r = r_0$ $v = 0$ (скорость движения жидкости на стенке равна 0). Тогда

$$C = \frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2.$$

Отсюда

$$\boxed{v = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2)}. \quad (6.5)$$

Из полученного уравнения видно, что скорость в поперечном сечении потока изменяется по закону параболы (рис. 6.7).

Максимальная скорость имеет место на оси трубы при $r = 0$. Тогда из последнего уравнения следует

$$v_{\max} = \frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2.$$

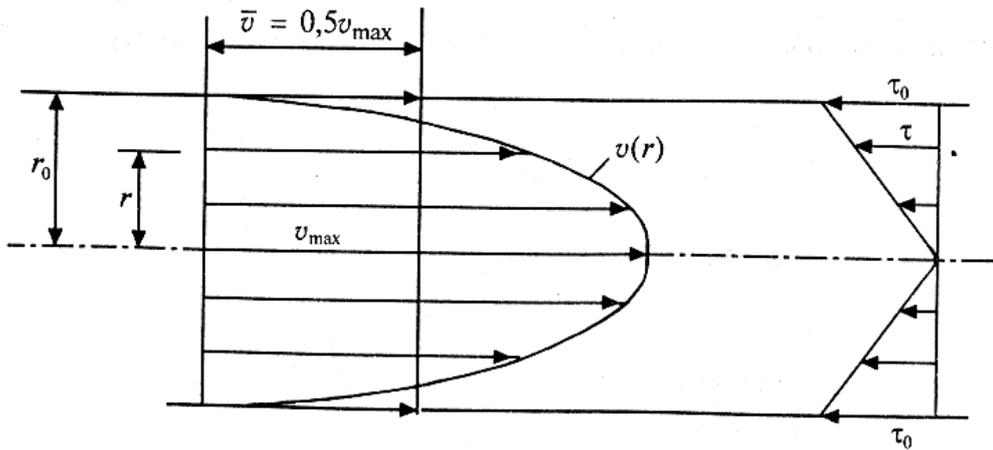


Рис. 6.7

Или, преобразуя уравнение (6.5)

$$v = \frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

и учитывая формулу для v_{\max} , получим

$$\frac{v}{v_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2,$$

т. е. распределение безразмерных скоростей v / v_{\max} является лишь Функцией безразмерной величины r / r_0 . Эта функция одинакова во всех случаях ламинарного движения любой жидкости внутри круглых труб.

Следовательно, все рассматриваемые течения подобны независимо от числа Re . Такие явления называют автомодельными.

Полученную выше формулу для касательных напряжений

$$\tau = \gamma J \frac{r}{2},$$

учитывая, что $J = \text{const}$, можно записать в виде

$$\tau = rC,$$

где

$$C = \frac{\gamma J}{2} = \text{const} = \frac{\tau_0}{r_0}.$$

Отсюда формула для τ принимает вид

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}.$$

Из этой формулы следует, что касательное напряжение является линейной функцией текущего радиуса трубы r . Максимальное значение τ принимает на стенке трубы, минимальное ($\tau=0$) в ее центре. Эюра касательного напряжения представлена на рис. 6.7.

§ 6.5. РАСХОД ЖИДКОСТИ

Найдем расход жидкости, протекающей через данное сечение ламинарного потока. Выделим в потоке элементарное кольцо, ограниченное радиусом r и $r + dr$ (рис. 6.8).

Элементарный расход составит

$$dQ = v 2\pi r dr,$$

- полный

$$Q = \int_0^{r_0} v 2\pi r dr. \quad (6.6)$$

Подставляя уравнение (6.5) в (6.6), получим

$$Q = \frac{\gamma J \pi}{2\mu} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr.$$

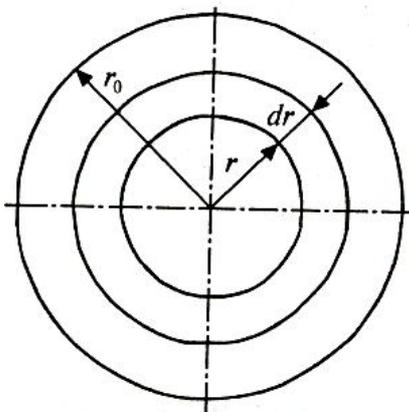


Рис.6.8

Определяя интеграл, будем иметь

$$Q = \frac{\gamma J \pi}{8\mu} r_0^4. \quad (6.7)$$

Найдем среднюю по сечению скорость:

$$\bar{v} = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\gamma J}{8\mu} r_0^2. \quad (6.8)$$

Отношение средней скорости к максимальной будет

$$\frac{\bar{v}}{v_{\max}} = \frac{\frac{\gamma J}{8\mu} r_0^2}{\frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\bar{v} = 0,5v_{\max}.$$

Выведем формулы для гидравлического уклона J .

Из уравнения для расхода (6.7), учитывая, что $r_0^4 = d^4/16$ получим

$$Q = \frac{\gamma J \pi}{128\mu} d^4.$$

Отсюда

$$J = 128 \frac{\mu Q}{\gamma \pi d^4}. \quad (6.9)$$

Так как

$$\bar{v} = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

и

$$Q = \bar{v} \frac{\pi d^2}{4},$$

то

$$\boxed{J = 32 \frac{\mu \bar{v}}{\gamma d^2}}. \quad (6.10)$$

Формулы (6.9) и (6.10) называют формулами Гагена - Пуазейля.

Из формулы (6.9) видно, что при одном и том же расходе гидравлический уклон обратно пропорционален диаметру в четвертой степени. Из формулы (6.10) следует, что гидравлический уклон прямо пропорционален средней скорости \bar{v} .

§ 6.6. КОЭФФИЦИЕНТ ЛИНЕЙНЫХ ПОТЕРЬ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Зная закон распределения скорости в поперечном сечении, можно

вывести теоретические формулы для определения расхода жидкости, потери напора на трение, а также коэффициент линейных потерь λ при ламинарном режиме течения.

Средняя по сечению скорость согласно формуле (6.8) равна

$$\bar{v} = \frac{\gamma J}{8\mu} r_0^2.$$

Учитывая, что $J = h/l$ и $r_0^2 = d^2/4$ получим

$$\bar{v}l = \frac{\gamma h}{32\mu} d^2.$$

Отсюда

$$h = \frac{32\mu\bar{v}l}{\gamma d^2}$$

или

$$h = \frac{32\mu}{\rho g d} \frac{\bar{v}l}{d}.$$

После некоторых преобразований найдем

$$h = \frac{64}{\frac{\nu d}{\mu/\rho}} \frac{l}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g}.$$

Отсюда получим

$$h = \frac{64}{\frac{\bar{v}d}{\nu}} \frac{l}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g}.$$

Сравнивая с формулой Дарси – Вейсбаха

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g},$$

находим

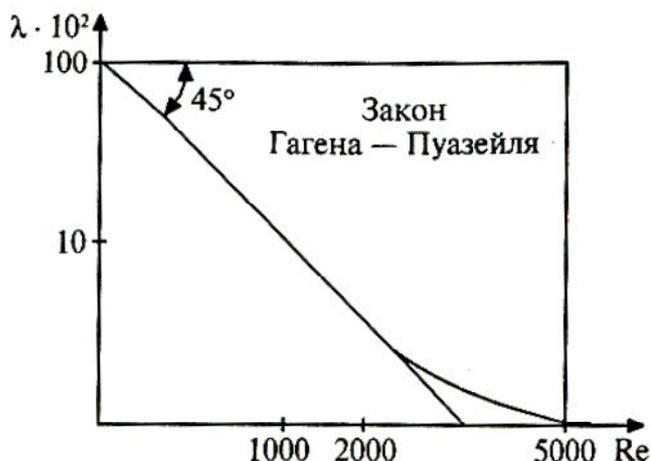
$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Последнее соотношение представляет формулу Пуазейля для

определения коэффициента трения λ (коэффициента линейных потерь).

Логарифмируя формулу Пуазейля, получим

$$\lg \lambda = \lg 64 - \lg Re.$$



Из последнего соотношения следует, что зависимость λ от Re будет выражаться в логарифмических координатах прямой линией с углом наклона к оси абсцисс, равным 45° (рис. 6.9).

Рис.6.9

Многочисленные эксперименты полностью подтверждают правильность для ламинарного изотермического потока полученных теоретических выводов. Тем самым подтверждается правильность закона Ньютона для внутреннего трения, положенного в основу этих выводов. При $Re \geq 2300$, т. е. при турбулентном режиме, закон Пуазейля неприменим.

§ 6.7. ФОРМИРОВАНИЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА

Изучение скоростей отдельных частиц жидкости по длине потока показывает, что на участке вблизи входа в трубопровод частицы движутся неравномерно. Частицы, расположенные вблизи оси потока, движутся ускоренно, а находящиеся у стенки - замедленно, поэтому эпюры скоростей в различных сечениях на этом участке трубопровода будут различными. На участке длиной l_n произойдет формирование профиля скорости ламинарного потока. Длину входного участка l_n , на котором заканчивается формирование потока, называют длиной начального участка (рис. 6.10).

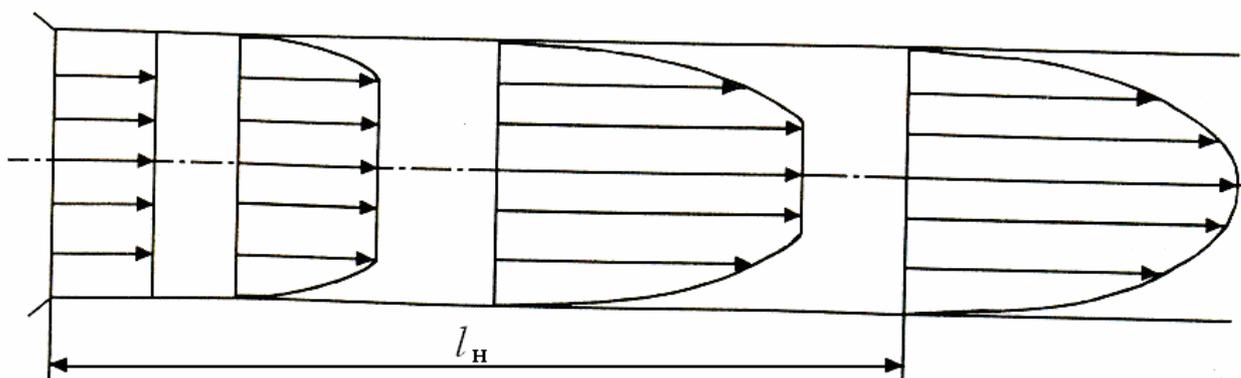


Рис. 6.10

Рассмотрим формирование ламинарного потока в трубопроводе, вход в который сделан плавным. Жидкость поступает в трубу с почти одинаковой скоростью по всему сечению и только на стенке скорость жидкости равна нулю. По мере удаления от входа толщина затормаживаемого слоя жидкости у стенки увеличивается. Но так как расход жидкости Q остается одним и тем же, то замедление слоев, расположенных у стенки, приводит к увеличению скорости слоев, расположенных ближе к оси трубы. Сформировавшемуся равномерному изотермическому ламинарному потоку жидкости в трубе соответствует параболический закон распределения скоростей. Такое распределение скоростей теоретически наступает лишь на расстоянии от входа в трубу, равном бесконечности. Но практически уже на конечных расстояниях от входа распределение скоростей мало отличается от параболического. Для ламинарного потока можно принять $l_H = 0,28 \text{ Re } d$. Формирование турбулентного потока происходит на длине $l_H = 40 \div 50d$.

§ 6.8. ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ

Создателем гидродинамической теории смазки является профессор Н. П. Петров. До него считали, что в подшипниках качения происходит трение одного тела (вала) о другое (вкладыш).

Н. П. Петров показал, что при вращении вал увлекает за собой смазочную жидкость, направляя ее в зазор между валом и вкладышем в нижней части (рис. 6.11, а). От этого давление в зазоре между валом и

вкладышем возрастает. Образуется своего рода масляный клин, вытесняющий вал вверх и влево (см. рис. 6.11, б). При увеличении числа оборотов n вал всплывает. Таким образом, трения вала о вкладыш не происходит - сухое трение заменяется жидкостным. При увеличении числа оборотов вал стремится встать в центре отверстия во вкладыше (центр вала O_1 совпадает с центром подшипника O (см. рис. 6.11, в).

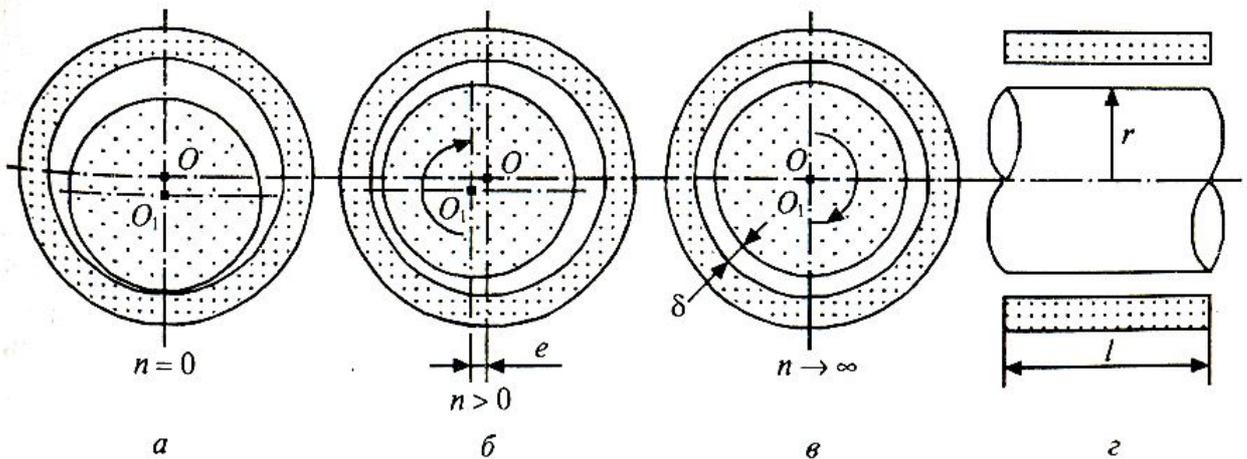


Рис. 6.11

Вывод формулы Н. П. Петрова для силы трения основывается на следующем. При одинаковой толщине слоя смазки δ

$$\tau = \mu \frac{du}{dr},$$

где u - окружная скорость.

При радиусе вала r и длине вкладыша l (см. рис. 6.11, з) полная поверхность, по которой происходит трение

$$S = 2\pi rl.$$

Тогда сила трения будет

$$T = \tau S.$$

Так как

$$\frac{du}{dr} \approx \frac{u}{\delta},$$

то

$$\tau = \mu \frac{u}{\delta},$$

Отсюда

$$T = \mu \frac{u}{\delta} 2\pi r l.$$

Учитывая, что

$$u = \omega r = \frac{2\pi n}{60} r = \frac{\pi n}{30} r,$$

где ω - угловая скорость; n - число оборотов вала, получим

$$T = \mu \frac{\pi^2 r^2 l n}{15\delta}.$$

Так как слой смазки не одинаков по толщине, а всегда имеет место эксцентриситет e , то вводится поправочный коэффициент

$$\beta = f\left(\frac{e}{\delta}\right).$$

Окончательно формула Н. П. Петрова принимает вид

$$T = \beta \frac{\mu \pi^2 r^2 l n}{15\delta}.$$

§ 6.9. ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Вывод закона сопротивления Пуазейля мог быть произведен исходя из самых общих уравнений движения вязкой жидкости уравнений Навье - Стокса. Этот закон, казалось бы, должен быть верен во всех случаях движения вязкой жидкости в круглой трубе. Однако опыт показывает, что он нарушается при числе $Re > 2300$. В данном случае имеют место другие законы сопротивления.

Так как при $Re = 2300$ происходит смена ламинарного режима на турбулентный, то можно сделать вывод, что закономерности турбулентного движения отличны от закономерностей ламинарного режима.

Проблема турбулентности возникла в середине XIX в. в результате

противоречия между теоретическим (казалось бы, вполне строгим выводом закона сопротивления в круглой трубе из уравнения Навье - Стокса) и эмпирическими законами сопротивления. Это противоречие выходило далеко за пределы ошибок измерений. Первый закон (Пуазейля) давал сопротивление, пропорциональное 1-й степени скорости; второй закон (Шези) приводил к квадрату скорости.

Теоретический анализ турбулентного движения, являющегося, на первый взгляд, совершенно беспорядочным, представляет большие трудности. Однако, несмотря на беспорядочность движения отдельных частиц в турбулентном потоке, в целом имеет место свой строгий порядок, свои вполне определенные закономерности, которые будут рассмотрены ниже.

§ 6.10. ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ. ПУЛЬСАЦИЯ СКОРОСТЕЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

Рассматривая турбулентный поток с использованием метода Лагранжа, наблюдаем непрерывное перемешивание масс жидкости. Рассматривая этот же поток, исходя из основных положений метода Эйлера, вместо перемешивания будем наблюдать пульсации давления и скорости в данной точке. В каждой точке турбулентного потока скорость весьма интенсивно меняется во времени как по величине, так и по направлению. То же самое происходит и с напряжениями.

Таким образом, турбулентное движение является по самой своей природе движением типично неустановившимся. Рассмотрим турбулентное движение жидкости в трубе при неизменных внешних условиях на границе. Опыты, проведенные в подобных условиях, показывают следующее. Характер изменения компоненты скорости, спроектированной, например, на ось трубы x , имеет вид, показанный на рис. 6.12.

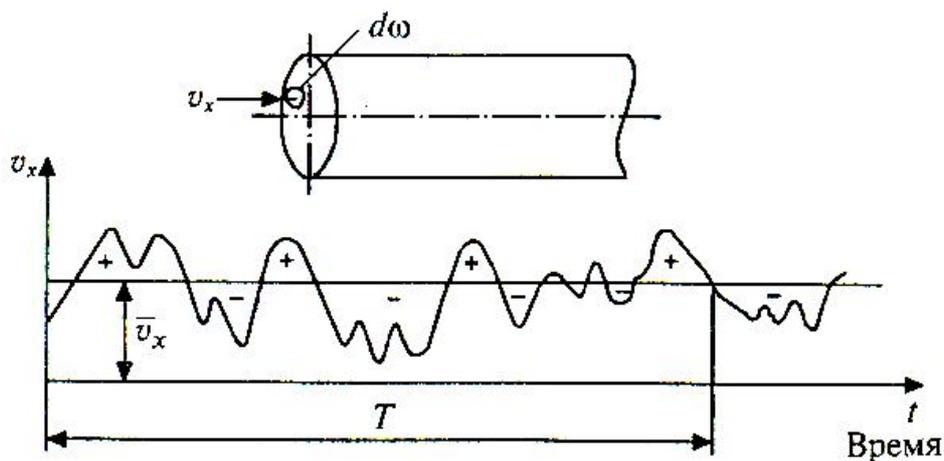


Рис. 6.12

Изменение скорости, как видно из рис. 6.12, имеет вид случайных отклонений. При этом весьма важно, что, несмотря на кажущуюся беспорядочность изменения скорости, среднее значение ее за достаточно длительный промежуток времени остается все-таки постоянным и не зависит от времени.

То же самое утверждение будет справедливо и для средних во времени значений нормальных и касательных напряжений. Средние во времени величины скоростей или напряжений в данной точке принято называть осредненными. Операцию получения этих средних величин - осреднением.

§ 6.11. ОСРЕДНЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

За осредненную скорость \bar{v}_x в данной точке принимается такая постоянная за период осреднения T скорость, при которой через элементарную площадку $d\omega$ за период T проходит объем жидкости, равный истинному ее объему, проходящему через $d\omega$ за время T , т. е.

$$d\omega \bar{v}_x T = d\omega \int_0^T v_x dt.$$

Отсюда

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T} \int v_x dt.$$

Аналогично

$$\bar{v}_y = \frac{1}{T} \int_0^T v_y dt; \quad \bar{v}_z = \frac{1}{T} \int_0^T v_z dt.$$

Осредненную во времени скорость \bar{v}_x следует отличать от средней скорости по сечению $\bar{v} = Q/\omega$.

Записанным выше интегралам легко дать геометрическую интерпретацию. Действительно, $\int_0^T v_x dt$ равен площади, лежащей под кривой действительной скорости на участке времени длиной T в координатах $v_x T$. Это значит, что сумма площадок на графике $v_x = f(t)$, выражающая отклонения истинной скорости от средней, равняется нулю.

§ 6.12. ОСРЕДНЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

За осредненное напряжение \bar{p} в данной точке принимается следующая величина:

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt,$$

где T – время осреднения.

Аналогично для касательного напряжения

$$\bar{\tau} = \frac{1}{T} \int_0^T \tau dt.$$

Если произведено осреднение скорости, то действительную (истинную) скорость в данной точке можно представить как сумму средней скорости и величины отклонения скорости от средней в данный момент, т. е.

$$\begin{aligned} v_x &= \bar{v}_x + v'_x; \\ v_y &= \bar{v}_y + v'_y; \\ v_z &= \bar{v}_z + v'_z. \end{aligned}$$

Величины v'_x , v'_y , v'_z получили названия пульсационных скоростей.

Очевидно, $v'_x = v_x - \bar{v}_x$ т. е. пульсационной скоростью называется разность между истинной скоростью в точке в данный момент и осредненной скоростью в этой же точке.

Пульсационные добавки напряжений определяются аналогичным образом:

$$\begin{aligned} p' &= p - \bar{p}; \\ \tau' &= \tau - \bar{\tau}. \end{aligned}$$

Заметим, что величина осредненной пульсационной добавки всегда равна нулю:

$$v'_x = \frac{1}{T} v'_x dt = 0; \quad \bar{p}' = 0; \quad \bar{\tau}' = 0,$$

что наглядно видно из графика пульсаций (см. рис. 6.12).

Если измерять в некоторой точке скорости и давления жидкости, то при измерении обычными грубыми средствами - пьезометром, трубкой полного напора и т. п. - практически не будут отмечаться пульсации. Скорости и давления нам будут представляться постоянными во времени.

По существу, будут измеряться осредненные во времени величины \bar{v} и \bar{p} . Кроме того, очевидно, что осредненное турбулентное движение в данном случае можно рассматривать как установившееся.

Рейнольдс предложил рассматривать не действительное движение жидкости, а осредненно - идеализированное. Этот осредненный поток лучше отвечает опытными данным, относящимся, по существу, лишь к средним во времени величинам. Но тогда, как показал Рейнольдс, и дифференциальные уравнения должны содержать в качестве неизвестных не истинные переменные, а осредненные. В частности, Рейнольдс произвел осреднение уравнений Навье - Стокса, т. е. ввел вместо актуальных величин скоростей и давлений их осредненные значения.

При таком осреднении в уравнениях движения жидкости появляется девять новых неизвестных членов типа

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho v'_x v'_y}),$$

т. е. появляются какие-то новые силы (так как каждый член уравнения выражает силу).

Идеализация движения жидкости привела к идеализации и силовых соотношений. При этом замкнутая система уравнений Навье - Стокса оказалась разомкнутой. Появилась необходимость связать каким-то образом пульсации v'_x и v'_y с осредненными величинами \bar{v}_x и \bar{v}_y и т. п. Эта связь может быть получена лишь на основании новых гипотез о механизме движения жидкости.

Так появились гипотезы турбулентности Маккавеева, Прандтля, Кармана, Тейлора, Фридмана и др. Но ни одна из этих гипотез (за исключением гипотезы Фридмана) не в состоянии замкнуть систему уравнений. Они лишь сводят задачу к отысканию опытным путем каких-либо новых функций l, χ и т. п. взамен пульсаций v'_x и v'_y . Эти функции могут быть легче определены из опыта, чем пульсации.

Подобные теории турбулентности названы полуэмпирическими, так как часть величин в них находится из опыта. Гипотеза же Фридмана хотя и замыкает систему уравнений, но сводит ее к системе из двадцати дифференциальных уравнений в частных производных весьма сложного вида, поэтому практически эта гипотеза использована быть не может.

Наиболее простые случаи осредненных потоков и наиболее распространенная полуэмпирическая теория турбулентности Прандтля будут рассмотрены в § 6.15.

§ 6.13. СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Рассмотрим турбулентный поток в трубе круглого сечения (рис. 6.13).

Рассмотрим турбулентный поток в трубе круглого сечения (рис. 6.13).

Очевидно, что на стенке трубы возникновение поперечных пульсаций

невозможно, поэтому вблизи самой стенки парализуется возможность перемешивания. Это дает основание предполагать, что на некотором расстоянии от стенки должен быть расположен весьма тонкий ламинарный слой, так называемая ламинарная пленка некоторой толщины δ_l . Опыты вполне подтверждают это предположение.

Таким образом, турбулентный поток в трубе можно представить схематично состоящим, по меньшей мере, из двух составляющих (двухслойная модель турбулентного потока): ядра потока с турбулентным движением (турбулентное ядро) и ламинарного гидродинамического пограничного слоя (ламинарная пленка), имеющего толщину δ_l .

В пределах ламинарной пленки скорость существенно меняется от 0 до значения $\bar{U}_{гр}$ на границе с турбулентным ядром. Далее из-за перемешивания жидкости скорость меняется медленнее.

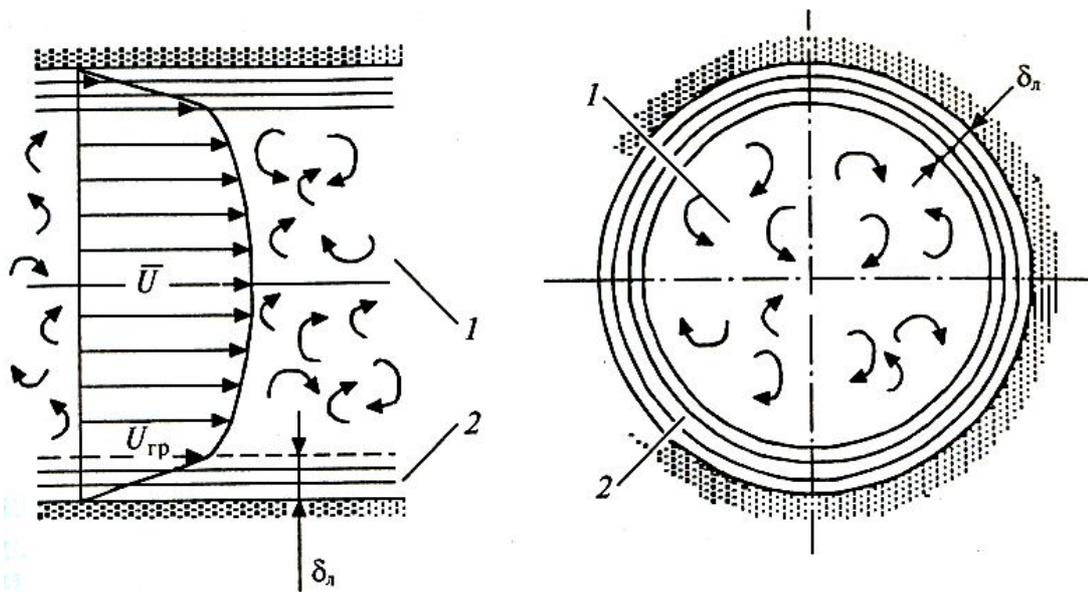


Рис. 6.13

Произведем оценку толщины ламинарной пленки δ_l . Касательное напряжение на стенке:

$$\tau_0 = \mu \frac{d\bar{U}}{dn} = \mu \frac{\bar{U}_{гр}}{\delta_l}.$$

Так как

$$\mu = \rho\nu,$$

то

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{\bar{U}_{\text{гр}}}{\delta_l}$$

Величину

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

имеющую размерность скорости, принято называть динамической скоростью или скоростью касательного напряжения у стенки. Динамическая скорость является одной из важнейших характеристик турбулентного потока и для данного потока она является постоянной величиной.

Динамическая скорость U_* является расчетной характеристикой и особого физического смысла не имеет. Она составлена по аналогии с обычным приемом, принятым в аэродинамике, — характеризовать скорость набегающего потока динамическим давлением:

$$p = \frac{\rho v^2}{2}$$

или

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$$

Учитывая, что

$$\frac{\tau_0}{\rho} = U_*^2,$$

можно записать

$$U_*^2 = \nu \frac{\bar{U}_{\text{гр}}}{\delta_l} \quad \text{или} \quad \frac{U_* \delta_l}{\nu} = \frac{\bar{U}_{\text{гр}}}{U_*}.$$

Левая часть последнего уравнения конструктивно сходственна с числом Рейнольдса. По аналогии с переходом потока от ламинарного режима к турбулентному, характеризуемому числом Рейнольдса, можно

предположить, что переход от ламинарной пленки к турбулентному ядру происходит также всегда при одном и том же значении комплекса $\frac{U_*\delta}{\nu} = N$.

Отсюда можно записать

$$\frac{U_*\delta_l}{\nu} = \frac{\bar{U}_{\text{гр}}}{U_*} = N = \text{const}$$

По опытам Никурадзе, это число оказалось равным $N = 11$. Отсюда найдем δ_l :

$$\delta_l = \frac{\nu N}{U_*},$$

где

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{gJR}.$$

§ 6.14. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

При исследовании закономерностей турбулентного течения в трубах целесообразно исходить из выражений для касательных напряжений. Их природа в турбулентном потоке более сложна, чем в ламинарном. Это связано с тем, что в процессе турбулентного перемешивания массы жидкости из центральной части трубы могут попасть в область потока у стенок и наоборот.

Массы жидкости, перемещающиеся из центральной части трубы к периферийной, обладают большими продольными скоростями, чемдвигающиеся в обратном направлении. Такой обмен массами жидкости, имеющими разные скорости, приводит к соответствующему обмену количеством движения.

Рассмотрим простейший случай плоскопараллельного осредненного турбулентного потока (рис. 6.14).

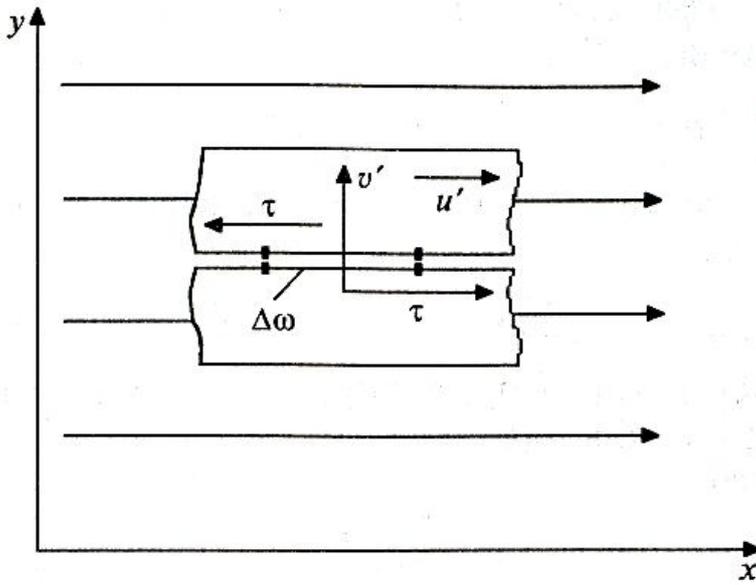


Рис. 6.14

В целях упрощения записи формул введем следующие обозначения:

$$v_x = u = \bar{u} + u';$$

$$v_y = v = \bar{v} + v',$$

где u' и v' - пульсации скоростей соответственно по осям x и y . Так как поток принят плоскопараллельным, то, очевидно, $v' = 0$.

Покажем, что в таком потоке будет возникать дополнительное касательное инерционное напряжение, равное

$$\bar{\tau} = -\rho \overline{u'v'},$$

где $\overline{u'v'}$ - осредненное значение произведения пульсаций скорости:

$$\overline{u'v'} = \frac{1}{T} \int_0^T u'v' dt.$$

Рассмотрим два соседних слоя жидкости, разделенных площадкой $\Delta\omega$. Пусть вблизи верхней поверхности площадки имеют место пульсации скоростей v' и u' . В этом случае можно сказать, что верхний слой жидкости движется относительно нижнего с какой-то относительной скоростью u' .

Под действием вертикальной пульсации скорости v' через площадку $\Delta\omega$ за время Δt протечет масса жидкости

$$\Delta m = \rho v' \Delta\omega \Delta t.$$

В верхнем слое эта масса получит ускорение в направлении оси x . При ускорении этой массы верхним слоем на нижнюю часть последнего будет действовать сила инерции, направленная в сторону, обратную ускорению, т.е. жидкость, поступающая из нижнего слоя в верхний, будет затормаживать

его. Этот эффект торможения равносителен приложению к верхнему слою на поверхности раздела слоев по площадке $\Delta\omega$ некоторой касательной силы инерции ΔT , направленной противоположно движению, или касательного напряжения τ (на нижний слой по третьему закону Ньютона будет действовать напряжение τ в сторону движения). Касательную силу ΔT легко подсчитать.

Изменение количества движения жидкости, перешедшей из нижнего слоя в верхний, будет

$$\Delta m(\bar{u} + u') - \Delta m\bar{u} = \Delta m u' = \rho v' \Delta\omega \Delta t u' = \rho u' v' \Delta\omega \Delta t.$$

Это изменение количества движения равно импульсу касательной силы ΔT , т. е.

$$\Delta T \Delta t = -\rho u' v' \Delta\omega \Delta t.$$

Знак «минус» поставлен потому, что сила инерции всегда направлена против ускорения.

Учитывая, что $\tau = \frac{\Delta T}{\Delta\omega}$, получим $\tau = -\rho u' v'$ или осредненное за период T :

$$\boxed{\bar{\tau} = -\rho \overline{u' v'}}$$

Это и есть выражение для турбулентного касательного напряжения в функции от пульсационных скоростей.

Полное напряжение в турбулентном потоке определится по формуле

$$\tau = \tau_B + \bar{\tau} = \mu \frac{du}{dy} - \rho \overline{u' v'}, \quad (6.11)$$

где τ_B - касательное напряжение от действия сил вязкости; $\bar{\tau}$ - напряжение, обусловленное турбулентным перемешиванием.

При ламинарном движении перемешивания не происходит и в формуле (6.11) $\bar{\tau} = 0$.

§ 6.15. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Величина $\bar{\tau}$ в формуле (6.11) обусловлена пульсационными добавками скорости. Для ее определения необходимо иметь зависимость этих добавок от осредненных характеристик потока. Вследствие хаотичного характера турбулентного потока для получения таких зависимостей необходимо применять статистические методы, на которых основаны так называемые статистические теории турбулентности. Однако основанные на этих теориях зависимости оказываются весьма сложными, и поэтому они не получили распространение в инженерной практике при решении задач о распределении скоростей и потерях энергии в турбулентном потоке.

Для количественного описания турбулентного движения используют так называемые полуэмпирические теории турбулентности, основанные на упрощенных моделях турбулентного потока.

Основной частью их является предположение о том, что касательное напряжение, вызванное турбулентным перемешиванием, можно описать в виде, аналогичном закону вязкости Ньютона:

$$\tau_T = \mu_T \frac{d\bar{u}_x}{dy},$$

где μ_T - динамический коэффициент турбулентной вязкости, имеющий ту же размерность, что и обычный динамический коэффициент вязкости μ при ламинарном движении, но отличающийся от него тем, что μ_T не является свойством жидкости, а зависит от интенсивности турбулентного перемешивания.

Различные полуэмпирические теории турбулентности отличаются использованием различных выражений для турбулентной вязкости μ_T . Наиболее распространена из них теория Прандтля.

Согласно этой теории на различных расстояниях от стенки величины μ и μ_T имеют различные значения. Вдали от стенки градиенты скорости

малы и, следовательно, вязкостные напряжения τ_B значительно меньше турбулентных $\bar{\tau}$, и, наоборот, вблизи стенок преобладают вязкостные напряжения. На этом основании поток разделяется на две области: **ламинарный гидродинамический пограничный слой (ламинарный подслой)** у стенок, где движение ламинарное и оно формируется исключительно под действием сил вязкости, и **турбулентное ядро**, где влиянием вязкости можно пренебречь.

Для величины касательного напряжения в ядре потока $\bar{\tau}$ принимается выражение

$$\bar{\tau} = -\rho u \omega.$$

Для установления связи между $\bar{\tau}$ и осредненными скоростями движения Прандтль исходил из следующей схемы пульсационного движения в осредненном плоскопараллельном турбулентном потоке (рис. 6.15).

В турбулентном потоке возникают жидкие комки (моли). Каждый из таких комков обладает собственной скоростью и движется на протяжении некоторого расстояния l в поперечном направлении в виде неразрывного целого с сохранением составляющей скорости u вдоль оси x . После того как жидкий комок (моль) пройдет некоторое расстояние l , он попадает в другой слой жидкости, где цели ком смешивается с этим слоем и приобретает скорость этого слоя.

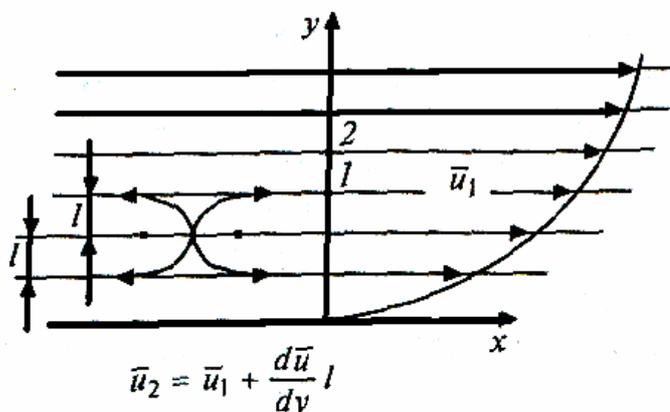


Рис. 6.15

Величину пути l пройденного молекул в поперечном направлении вплоть до потери им его индивидуальных особенностей, Прандтль назвал путем перемешивания. Предположим, что такой моль жидкости перешел из слоя 2 в слой 1

(см. рис. 6.15). Так как в слое 2 моль в среднем во времени имел скорость

$$\bar{u} + \frac{d\bar{u}}{dy}l,$$

а в слое 1 скорость равна \bar{u} , то естественно предположить, что возникающая в слое l пульсация

$$u' = \left(\bar{u} + \frac{d\bar{u}}{dy}l \right) - \bar{u} = \frac{d\bar{u}}{dy}l, \quad (6.12)$$

т. е. величина пульсации равна привнесенному в слой возмущению скорости.

Величину поперечной пульсации v' Прандтль принимает пропорциональной продольной пульсации u' :

$$v' = ku', \quad (6.13)$$

где k - коэффициент пропорциональности.

Так как продольная пульсация возникает благодаря поперечной, то естественно положить, что v' и u' пропорциональны (если $v' = 0$, то и $u' = 0$; чем больше v' , тем больше и продольные пульсации u').

Кроме того, u' и v' разного знака. Положительная пульсация v' приводит к отрицательной пульсации u' , так как моль переходит от слоя с меньшей скоростью в слой с большей скоростью. И наоборот, отрицательная пульсация v' вызывает положительную пульсацию u' , так как жидкость переходит из верхнего слоя с большей скоростью в нижний.

Из формулы (6.13) с учетом (6.12) следует

$$v' = -kl \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right).$$

Тогда турбулентное напряжение можно представить в виде

$$\bar{\tau} = -\rho \overline{u'v'} = \rho l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right) kl \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)$$

или

$$\bar{\tau} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

Здесь коэффициент пропорциональности k внесен в величину l , где l по-прежнему характеризует путь молярного перемешивания, но с точностью до постоянного множителя.

Таким образом, избавление от пульсационных добавок приводит к появлению новой функции l (путь перемешивания), которая должна находиться из опыта (эмпирически). Поэтому и теория Прандтля названа полуэмпирической.

По аналогии с молекулярной вязкостью вводят понятие динамического коэффициента турбулентной вязкости μ_T . Формулу для $\bar{\tau}$ можно записать в виде

$$\tau = \rho l^2 \frac{du}{dy} \frac{du}{dy},$$

В дальнейшем для простоты знак осреднения над величинами писать не будем, т. е. будем иметь дело только с осредненными величинами. Тогда

$$\tau = \mu_T \frac{du}{dy},$$

где $\mu_T = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$ — динамический коэффициент турбулентной вязкости

(коэффициент турбулентного обмена).

Можно ввести кинематический коэффициент турбулентной вязкости:

$$\nu_T = \frac{\mu_T}{\rho} = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|.$$

Тогда суммарное касательное напряжение от молекулярного и молярно-турбулентного трения будет

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} + \mu_T \frac{du}{dy} = (\mu + \mu_T) \frac{du}{dy},$$

где μ_T не является физической постоянной жидкости, а есть функция ее движения - скорости u .

Как показывает опыт, коэффициент μ_T резко меняется по сечению трубы от нуля у стенки (так как там нет перемешивания) до некоторого максимума на расстоянии $0,5 r_o$ трубы и до не которого минимума на оси трубы. В области развитого турбулентного движения μ_T значительно больше величины μ . В связи с этим всюду в потоке за исключением области, непосредственно прилегающей к стенке, вязкими напряжениями по сравнению с турбулентными можно пренебречь.

Эпюра касательных напряжений в турбулентном потоке в круглой трубе имеет вид, показанный на рис.6.16.

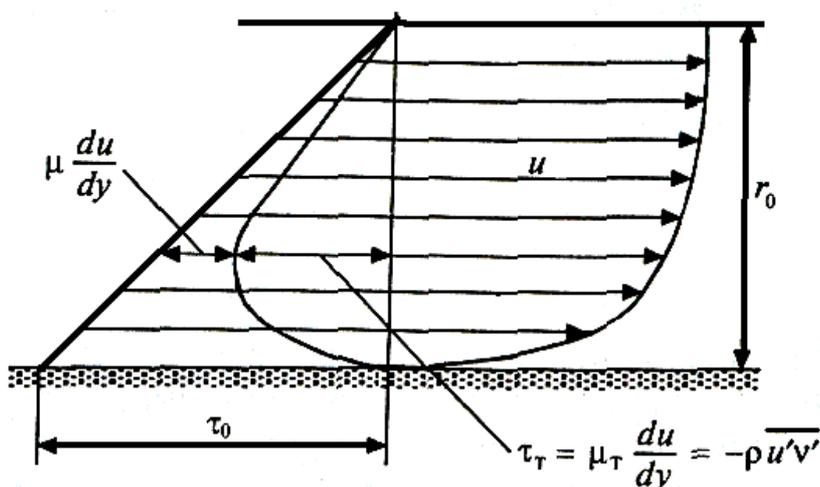


Рис. 6.16.

§ 6.16. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

На рис. 6.17 даны эпюры скорости ламинарного (1) и турбулентного (2) потоков при одинаковых расходах в круглой цилиндрической трубе. В ламинарном гидродинамическом пограничном слое турбулентного потока (δ_λ) имеет место линейный закон изменения скорости, а в турбулентном ядре (δ_τ) - логарифмический закон. В ламинарном потоке закон изменения скорости параболический.

Выведем закон распределения скорости в круглой трубе для турбулентного потока вблизи стенки, за исключением ламинарного

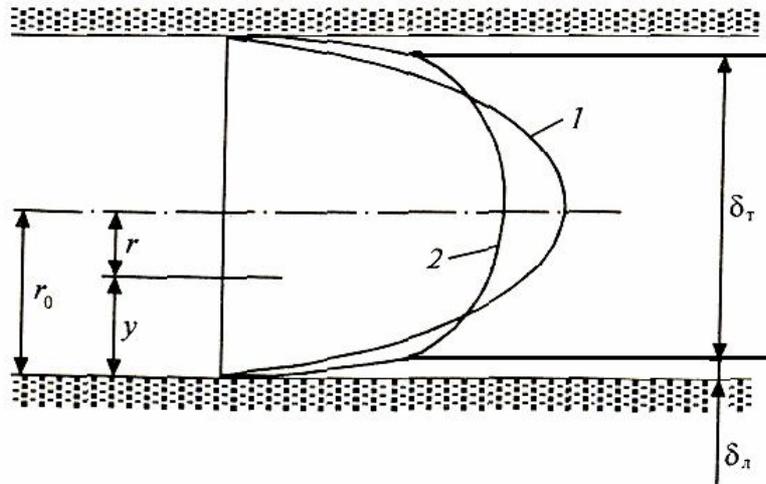


Рис. 6.17

пограничного слоя (δ_l). При турбулентном движении инерционное касательное напряжение определяется по формуле (пренебрегая напряжением от молекулярной вязкости)

$$\tau_{и} = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2,$$

где l - длина пути перемешивания при переходе жидкости из одного слоя в другой.

Примем следующие допущения:

1) касательное напряжение по всему поперечному сечению потока одинаково и равно касательному напряжению на стенке $\tau_{и} = \tau_0$;

2) длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию от стенки:

$$l = \chi y,$$

где χ - коэффициент пропорциональности, определяемый из опыта.

С учетом принятых допущений формула для $\tau_{и}$ примет вид

$$\tau_0 = \rho \chi^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

или

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \chi y \frac{du}{dy}.$$

Известно, что $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = U_*$, где U_* - динамическая скорость.

Тогда

$$U_* = \chi y \frac{du}{dy}.$$

Отсюда

$$du = \frac{U_*}{\chi} \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получим

$$\boxed{u = \frac{U_*}{\chi} \ln y + C.} \quad (6.14)$$

Следовательно, в области турбулентного потока около стенки скорость изменяется по логарифмическому закону (кривая 2 на рис. 6.17).

Опытом установлено, что при соответствующем выборе постоянной χ эта формула может быть распространена на все живое сечение трубы за исключением ламинарного слоя, где скорость изменяется по линейному закону. Так как формулу (6.14) можно распространить на все живое сечение трубы, то определим постоянную C из того условия, что при $y = r_0$, $u = u_{\max}$.

Тогда

$$u_{\max} = \frac{U_*}{\chi} \ln r_0 + C. \quad (6.15)$$

Вычитая из формулы (6.15) выражение (6.14), получим

$$\frac{u_{\max} - u}{U_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{r_0}{y}.$$

Или, переходя к десятичным логарифмам $\ln \frac{r}{y} = 2.3 \lg \frac{r_0}{y}$

и подставляя $\chi = 0,4$ (для гладких труб), получим

$$\frac{u_{\max} - u}{U_*} = 5.75 \lg \frac{r_0}{y} \quad (6.16)$$

Разность $u_{\max} - u$ называется дефицитом скорости, а выражение в левой части - относительным дефицитом. Таким образом, относительный дефицит скорости является функцией только безразмерного расстояния $\frac{r_0}{y}$.

Установим соотношение между средней и максимальной скоростями. Пусть при некотором значении $y_{\text{ср}}$ скорость жидкости равна средней скорости $u_{\text{ср}}$.

Тогда можно записать

$$\frac{u_{\max} - u_{\text{ср}}}{U_*} = 5.75 \lg \frac{r_0}{y_{\text{ср}}}.$$

Вследствие того что относительный дефицит скорости есть всегда одна и та же функция $\frac{r_0}{y}$, то и средняя ордината должна пересекать кривую

$$\frac{u_{\max} - u}{U_*} = f\left(\frac{r_0}{y}\right)$$

всегда в одной и той же точке с абсциссой $\frac{r_0}{y_{\text{ср}}}$, т. е. должно быть

$$\frac{r_0}{y_{\text{ср}}} = \text{const.}$$

Следовательно,

$$\frac{u_{\max} - u_{\text{ср}}}{U_*} = D = \text{const.} \quad (6.17)$$

Расчеты и эксперимент показывают, что можно принять

$$\frac{u_{\max} - u_{\text{ср}}}{U_*} = 3.75 \quad (6.18)$$

Формулы (6.16) и (6.18) позволяют производить построение эпюр скоростей в турбулентном ядре потока.

§ 6.17. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ. ОПЫТЫ НИКУРАДЗЕ И ЗЕГЖДА

При исследовании турбулентного движения жидкости в трубах необходимо решать два основных вопроса - определение потерь напора и распределение скоростей по поперечному сечению трубы. Опыты показывают, что обе эти величины существенно изменяются в зависимости от диаметра трубы, вязкости жидкости, скорости движения и шероховатости стенок труб.

Экспериментальные данные для λ (коэффициент Дарси) в широком интервале чисел Re были получены Никурадзе в трубах и Зегжда - в прямоугольных каналах с искусственной (песочной) шероховатостью.

Никурадзе создавал равнозернистую шероховатость, равномерно наклеивая песчинки определенных размеров на стенку трубы. Размеры зерен песка принимались за размер выступа шероховатости Δ . В опытах были измерены потери напора и расход, вычислены средние скорости потоков и коэффициенты λ . Данные опытов Никурадзе изобразил на графике $\lg Re - \lg (100\lambda)$ (рис.6.20).

Средний диаметр фракции песка Δ принимали за меру абсолютной шероховатости (рис. 6.18). Труба называется гидравлически гладкой, если средняя высота выступов шероховатости Δ меньше толщины ламинарной пленки δ_l . В этом случае шероховатость не влияет на движение. Если абсолютная шероховатость Δ больше толщины ламинарной пленки δ_l , то труба называется гидравлически шероховатой. В этом случае шероховатость существенно влияет на движение жидкости (рис. 6.19).

Таким образом, абсолютная шероховатость Δ - это средняя высота выступов шероховатости. Относительная шероховатость определяется величиной

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{r_0},$$

где r_0 - радиус трубы.

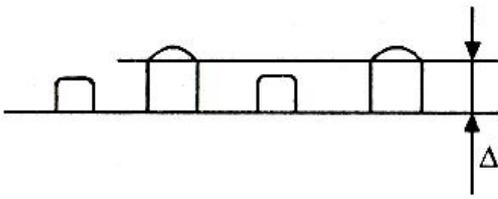


Рис. 6.18

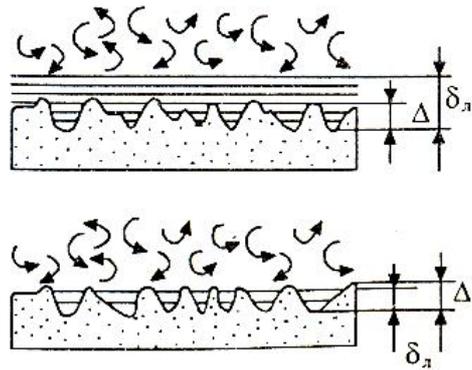


Рис. 6.19

Величина, обратная относительной шероховатости

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{r_0}{\Delta},$$

называется относительной гладкостью.

Результаты опытов Никурадзе представлены на графиках рис. 6.20.

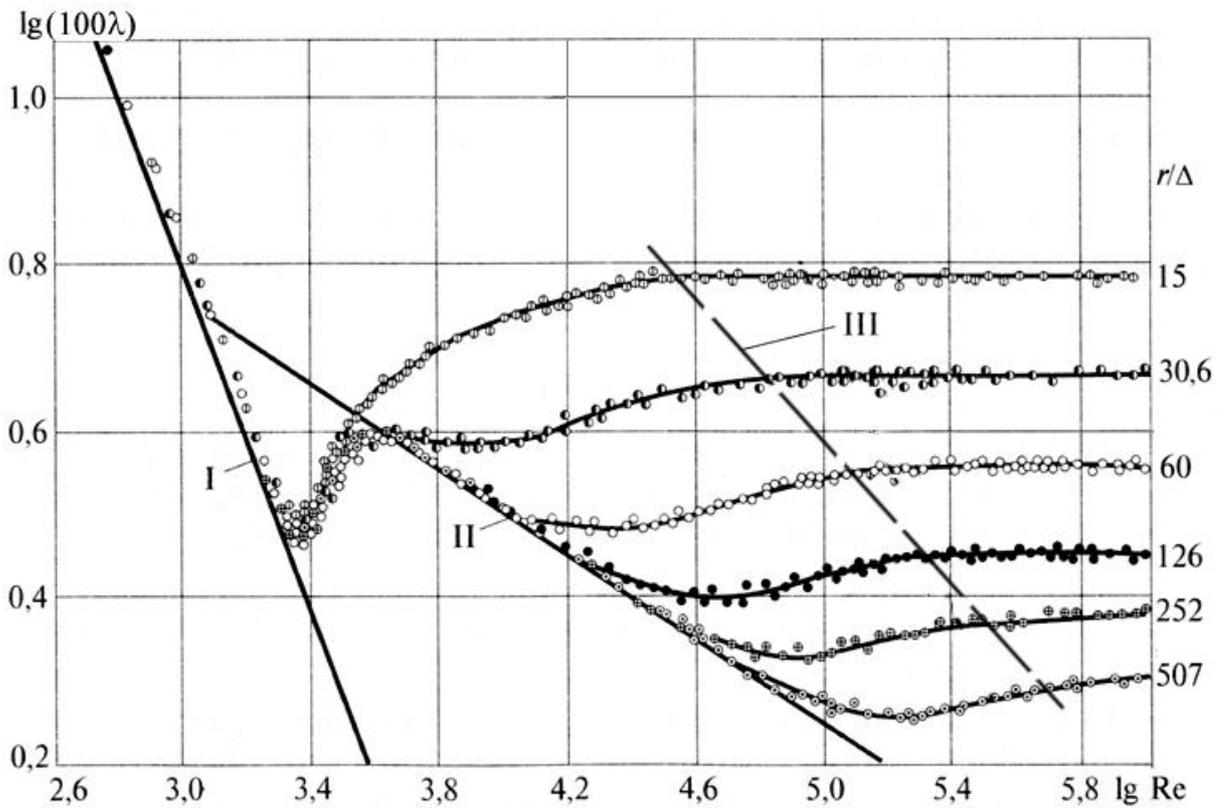


Рис. 6.20

На графике (см. рис. 6.20) всю область чисел Рейнольдса можно разделить на 5 характерных зон движения.

1. Зона ламинарного режима ($Re < 2300$ или $\lg Re < 3,6$). Здесь все опытные точки независимо от шероховатости стенок ложатся на прямую линию I , описываемую уравнением Пуазейля:

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Следовательно, опытные данные позволяют заключить, что при ламинарном движении шероховатость стенок не оказывает влияния на сопротивление (коэффициент трения). Потери напора здесь пропорциональны скорости. Действительно, подставляя выражение для коэффициента трения

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{\frac{v \cdot d}{\nu}}$$

в формулу Дарси - Вейсбаха

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

получим $h = kv$, где v - средняя скорость,

$$k = \frac{64vl}{2gd^2}.$$

Эпюра распределения скоростей в трубах представляет собой параболу, выраженную уравнением

$$u = u_{\max} [1 - (r/r_0)^2],$$

где u - местная скорость в точке, расположенной на произвольном расстоянии r от оси трубы; r_0 - радиус трубы; u_{\max} - максимальная скорость на оси трубы при $r=0$.

Максимальная скорость на оси трубы определяется по формуле

$$u_{\max} = \frac{g_i}{4\nu} r_0^2 = \frac{\gamma i}{4\mu} r_0^2,$$

где i - гидравлический уклон, ν и μ - соответственно кинематическая и динамическая вязкости.

Средняя скорость при ламинарном движении в круглой трубе равна половине максимальной скорости

$$v = 0,5u_{\text{макс}} .$$

2. Переходная зона. Здесь ламинарный режим переходит в турбулентный ($2300 \leq Re \leq 3000$); коэффициент λ возрастает с увеличением числа Рейнольдса, оставаясь одинаковым для различных шероховатостей.

3. Зона гидравлически гладких труб для турбулентного режима. Для труб с высокими значениями относительной гладкости ($\frac{r_0}{\Delta} > 500$) опытные

точки для чисел Рейнольдса $400 < Re < 80 \frac{r_0}{\Delta}$ располагаются вдоль наклонной прямой II . Эта прямая известна как прямая Блазиуса для гладких труб. На ней коэффициент трения λ хорошо описывается эмпирической формулой Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} .$$

Потери напора определяют по формуле

$$h = kv^{1.75} .$$

Для круглых напорных труб толщина ламинарного слоя определяется по формуле

$$\delta_{\text{л}} = 30 \frac{d}{Re\sqrt{\lambda}} .$$

4. Зона шероховатых труб ($\frac{r_0}{\Delta} < 500$), или так называемая докватратичная зона при турбулентном режиме ($80 \frac{r_0}{\Delta} < Re < 1000 \frac{r_0}{\Delta}$).

Здесь отклонение экспериментальных точек от прямой II зависит от величины шероховатости (относительной гладкости). Это отклонение

наступает тем раньше, чем меньше относительная гладкость. При этом коэффициент λ стремится к некоторому пределу (разному для труб с различной шероховатостью), оставаясь затем постоянным при увеличении числа Re .

5. Зона вполне шероховатых труб ($\frac{r_0}{\Delta} = 15$ и $\frac{r_0}{\Delta} = 30$). Гидравлические потери в этой области пропорциональны квадрату скорости (квадратичный закон сопротивления). Для кривых $\frac{r_0}{\Delta} = 15$ и $\frac{r_0}{\Delta} = 30$ ламинарная пленка даже при небольших значениях Re не перекрывает выступов шероховатости, и эти кривые с увеличением числа Re только пересекают линию II для гладких труб. Следовательно, в данном случае коэффициент λ совершенно не подчиняется закону для гладких труб. С увеличением числа Re он постепенно возрастает и при $\lg Re = 4,6$ для первой кривой ($\frac{r_0}{\Delta} = 15$) или $\lg Re = 5,0$ для второй кривой ($\frac{r_0}{\Delta} = 30$) становится практически независимым от Re .

Коэффициент λ для этой зоны может быть определен по формуле Б. Л. Шифринсона:

$$\lambda = 0.11 \left(\frac{\Delta_{\text{э}}}{d} \right)^{0.25},$$

где $\Delta_{\text{э}}$ - эквивалентная шероховатость (см. ниже).

В квадратичной области сопротивления коэффициент Дарси λ зависит от относительной гладкости R/Δ :

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{2AR}{\Delta} \right)^2},$$

где R - гидравлический радиус, A - по опытам Никурадзе для равнозернистой шероховатости равна 7,4.

Часто ввиду отсутствия данных по шероховатости λ определяется через **коэффициент Шези C** :

$$\lambda = \frac{8g}{C^2}.$$

Для приближенных расчетов чугунных водопроводных труб с диаметром $d < 500$ мм можно воспользоваться **формулой Дарси**:

$$\lambda = 0,02 \left(1 + \frac{1}{40d} \right) = 0,02 + \frac{0,0005}{d},$$

где d - диаметр, м.

В качестве расчетных формул для коэффициента Шези используются следующие эмпирические формулы:

а) **Павловского**

$$C = \frac{1}{n} R^y,$$

где n - коэффициент шероховатости (прил.);

R - гидравлический радиус, м ($0,1 \text{ м} < R < 3 \text{ м}$);

y - показатель степени, приближенно вычисляемый по формуле

$y \approx 1,5\sqrt{n}$ (при $R < 1 \text{ м}$) и $y \approx 1,3\sqrt{n}$ (при $R > 1 \text{ м}$).

б) **Агроскина**

$$C = 17,72(k + \lg R),$$

где k - параметр гладкости; R - гидравлический радиус, м.

С некоторой погрешностью при назначении k формулу Агроскина можно переписать в виде:

$$C = 1/n + 17,72 \lg R.$$

в) **Маннинга** (используется при расчетах напорных труб)

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}.$$

г) **Форгеймера** (для открытых земляных русел)

$$C = \frac{1}{n} R^{0,2}.$$

В целях упрощения расчета и избежания вычисления коэффициента λ формулу $h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g}$ в квадратичной области сопротивления удобно представить в виде

$$h_{\text{дл}} = \frac{v^2 l}{C^2 R}.$$

Как видно из последней формулы, потери напора прямо пропорциональны скорости во второй степени, поэтому эта область и носит название квадратичной области сопротивления.

Полученным результатам можно дать следующее объяснение: до тех пор, пока выступы шероховатости полностью погружены в ламинарный пограничный слой ($\Delta < \delta_l$), для величины гидравлических сопротивлений нет разницы между гладкими и шероховатыми поверхностями стенок. Коэффициент λ здесь зависит только от числа Рейнольдса и определяется как для гладких труб (1 - 3-я зоны).

В случае, когда выступы шероховатости выходят за пределы пограничного слоя ($\Delta > \delta_l$), ламинарное течение нарушается, и выступы шероховатости оказываются в области турбулентного течения жидкости.

С увеличением числа Рейнольдса толщина пограничного слоя уменьшается и в случае, когда величина Δ оказывается сопоставимой с величиной δ_l коэффициент λ зависит не только от числа Рейнольдса, но и от шероховатости стенок (4-я зона).

Если число Рейнольдса достаточно велико и Δ значительно больше δ_l , то коэффициент λ зависит только от шероховатости и не зависит от числа Рейнольдса (5-я зона).

Опыты А. П. Зегжда для прямоугольных каналов позволили получить график, близкий графику Никурадзе не только качественно, но и количественно, если результаты сопоставлять при одинаковых гидравлических радиусах.

Опыты, проведенные в промышленных трубопроводах с естественной

шероховатостью, показали, что оценка только по высоте выступов шероховатости Δ недостаточна. Большую роль имеет также характер шероховатости: форма выступов, их расположение и прочее. Поэтому было введено понятие об эквивалентной шероховатости $\Delta_э = \varphi \delta$ ($\varphi > 1$), где φ - зависит от характера шероховатости. Под эквивалентной шероховатостью $\Delta_э$ понимают такую зернистую шероховатость, при которой сопротивление оказывается таким же, как и при действительной шероховатости. Величина эквивалентной шероховатости $\Delta_э$ указывается в гидравлических справочниках в зависимости от типа трубопровода.

§ 6.18. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Графики зависимости коэффициента λ от числа Re и относительной шероховатости, найденные экспериментально и приведенные на рис. 6.20, позволяют определить круг формул, теоретических и эмпирических (экспериментальных), хорошо согласующихся с экспериментальными данными.

При ламинарном режиме в круглых трубах для определения λ применяют формулу Пуазейля:

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Ее справедливость хорошо подтверждается многочисленными экспериментами, включая графики Никурадзе (см. рис. 6.20). Согласно этой формуле коэффициент λ при ламинарном режиме не зависит от состояния внутренних поверхностей стенок труб, характеризуемого их шероховатостью, а зависит только от числа Рейнольдса.

Для турбулентного режима рассмотрим лишь наиболее универсальные формулы, среди которых формула Кольбрука и Уайта, справедливая для всей зоны турбулентного течения в шероховатых трубах с естественной шероховатостью в доквадратичной области:

$$\frac{1}{\lambda} = -2 \lg(\Delta_{\text{э}} / 3,7d + 2,51 / \text{Re} \sqrt{\lambda}),$$

где $\Delta_{\text{э}}$ - эквивалентная шероховатость; d - диаметр трубопровода.

Впервые эта формула была получена А. Д. Альтшулем как эмпирическая зависимость в 1939 г., и лишь значительно позже (1970 г.) она была теоретически обоснована.

Как частные случаи из этой формулы можно получить формулу Прандтля - Никурадзе для гладких труб при $\frac{\Delta_{\text{э}}}{d} = 0$;

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg(\text{Re} \sqrt{\lambda} / 2,51)$$

и для вполне шероховатых труб при $\text{Re} = \infty$:

$$\lambda = \frac{1}{[1,74 + 2 \cdot \lg(1/\varepsilon)]^2}.$$

Среди наиболее универсальных в доквадратичной области шероховатых труб отмечены также теоретическая формула А. Д. Альтшуля:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1,8 \cdot \lg \frac{\text{Re}}{\text{Re}(\Delta_{\text{э}} / 10d) + 7}$$

и предложенная им же более простая приближенная формула

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta_{\text{э}}}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}. \quad (6.19)$$

Эта формула в квадратичной области вполне шероховатых труб (см. кривые $r_0 / \Delta = 15$ и $r_0 / \Delta = 30$ на графике рис. 6.20) при больших значениях чисел Re переходит в формулу Б. Л. Шифринсона:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta_{\text{э}}}{d} \right)^{0,25}.$$

Указанные выше формулы наиболее правильно учитывают влияние различных факторов на гидравлические сопротивления. Их недостатками являются некоторая громоздкость и отсутствие полных данных об

эквивалентной шероховатости.

Для отдельных зон турбулентного режима, например в области, гидравлически гладких труб (3-я зона на графике Никурадзе, см. рис. 6.20), применима формула Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0.3164}{\text{Re}^{0.25}},$$

устанавливающая зависимость коэффициента λ только от числа Re . Эта формула как частный случай может быть получена из приближенной формулы (6.19) А. Д. Альтшуля при $\frac{\Delta_{\text{э}}}{d} = 0$. Формула Блазиуса справедлива лишь при малой шероховатости стенок и при числах Рейнольдса $\text{Re} < 100\,000$.

§ 6.19. МЕСТНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

При движении реальных жидкостей, кроме потерь на трение по длине потока, возникающих из-за вязкости жидкости, могут возникать и местные потери напора. Причиной последних являются местные сопротивления (краны, задвижки, сужения, расширения, повороты трубопроводов и прочее), которые вызывают изменение скорости движения или направления потока.

$$h = \xi \frac{v^2}{2g} \quad (6.20)$$

где ξ - коэффициент местных потерь; $\frac{v^2}{2g}$ - скоростной напор; v - средняя скорость.

Коэффициентом местных потерь ξ называют отношение потери напора в данном местном сопротивлении к скоростному напору:

$$\xi = \frac{h_M}{v^2 / 2g}.$$

Очень часто диаметр трубопровода до местного сопротивления и после него бывает разным, поэтому и скорости потока при этом разные (рис. 6.21).

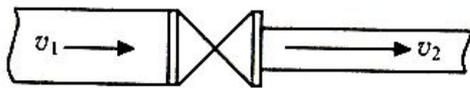


Рис. 6.21

Очевидно, что и коэффициенты местных потерь, отнесенные к скоростному напору до и после местного сопротивления, будут различными.

Поэтому при пользовании гидравлическими справочниками необходимо обращать внимание на то, к какому скоростному напору отнесен коэффициент ξ . Обычно ξ относят к скоростному напору за местным сопротивлением.

В некоторых случаях удобно определять местные сопротивления через так называемую эквивалентную длину местного сопротивления. Эквивалентная длина местного сопротивления - это длина прямого трубопровода, на которой происходит такая же потеря напора h_M , как и в данном местном сопротивлении.

Эквивалентную длину l , можно определить из равенства

$$h_M = \xi \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l_{\text{э}}}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Отсюда

$$\xi = \lambda \frac{l_{\text{э}}}{d}, \quad l_{\text{э}} = \frac{\xi}{\lambda} d.$$

Понятие эквивалентной длины позволяет ввести понятие о приведенной длине трубопровода:

$$l_p = l + l_{\text{э}},$$

где l - действительная длина трубопровода.

Коэффициент местных потерь ξ в общем случае зависит от формы местного сопротивления, числа Re , шероховатости поверхности, а для запорных устройств также от степени их открытия, т. е.

$$\xi = f\left(\frac{l_1}{d}, \frac{l}{d}, Re, \frac{\Delta}{d}\right),$$

где симплексы $\frac{l}{d}$ характеризуют форму местного сопротивления, в том числе и степень открытия в случае запорного устройства.

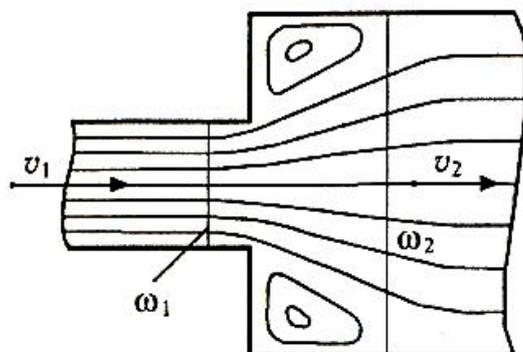


Рис. 6.22

Ввиду большой сложности происходящих в местных сопротивлениях явлений в настоящее время нет надежных методов теоретического определения коэффициента ξ . Он определяется в основном экспериментально. Имеется попытка теоретически обосновать коэффициент местных потерь на случай внезапного расширения трубопровода (рис. 6.22).

Используя аналогию потерь энергии при внезапном расширении с неупругим ударом твердых тел, Борда из теоремы о приращении количества движения и уравнения Бернулли вывел формулу для местных потерь при внезапном расширении потока в виде

$$h_M = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g},$$

где v_1, v_2 - скорости потока до и после внезапного расширения, т. е. потеря напора при внезапном расширении равна скоростному напору потерянной скорости, где $v = v_1 - v_2$ - потерянная скорость.

Это утверждение представляет так называемую теорему Борда-Карно. Однако более детальный анализ явлений показывает, что аналогия потерь напора при внезапном расширении с потерями энергии при неупругом ударе твердых тел далеко не полная. Опыт, в частности, подтверждается, что потери напора, даваемые теоремой Борда - Карно, получаются завышенными, поэтому на основании теоретических соображений и эксперимента предложено эту потерю определять по формуле

$$h_M = k \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \quad (6.21)$$

где k - коэффициент, определяемый опытным путем.



Жан-Шарль де Борда
1733–1799

Французский математик, физик, геодезист, инженер, политолог и морской офицер. Автор доказательства теоремы в гидравлике об ударе струи жидкости или газа, носящей его имя. Жана-Шарля де Борда занимал вопрос о сопротивлении движущихся тел в жидкости. Его изыскания, напечатанные в «Мемуарах» Парижской академии в 1763, 1767 и 1770 годов, привели к заключению, что сопротивление жидкостей почти пропорционально квадратам скоростей. При описании вклада де Борда в механику жидкости следует также отметить вклад, который он сделал для изучения водяных колес и насосов. Кроме исследования сопротивления жидкостей, Борда занимался также исследованиями истечения жидкостей из сосудов через малые отверстия и работал над установлением десятичной системы мер и весов.

Рассмотрим отдельные практически важные типы местных сопротивлений.

1. Внезапное расширение потока (см. рис. 6.22).

Хотя аналогия внезапного расширения потока с не упругим ударом не может служить основой для строгого теоретического обоснования и объяснения физического смысла явления, в первом приближении она достаточна. Благодаря не упругости удара механическая энергия рассеивается и превращается во внутреннюю энергию жидкости, чем и объясняется основная доля потерь при внезапном расширении, которые подсчитываются по формуле (6.21).

Уравнение неразрывности потока для несжимаемой жидкости имеет вид

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2. \quad (6.22)$$

Отсюда

$$v_2 = v_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (6.23)$$

Подставляя уравнение (6.23) в (6.21), получим

$$h_M = k \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \quad (6.24)$$

Сравнивая формулу (6.24) с формулой (6.20), найдем

$$\xi = k \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2. \quad (6.25)$$

Выразим из уравнения (6.22) v_1 :

$$v_1 = v_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (6.26)$$

Подставляя формулу (6.26) в формулу (6.21), получим

$$h_M = k \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g}. \quad (6.27)$$

Сравнивая формулу (6.27) с формулой (6.20), найдем $\xi = k \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2$.

Таким образом, по формулам (6.24), (6.27) можно определить потери напора в местном сопротивлении в случае известных скоростей v_1 или v_2 . Для приближенных расчетов коэффициент k можно принять равным 1.

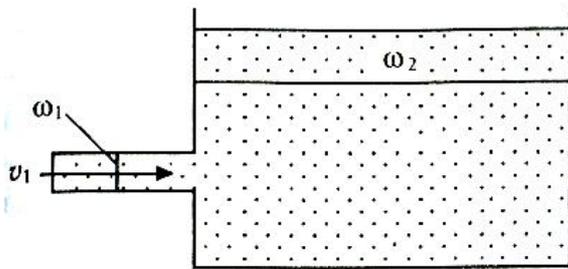


Рис. 6.23

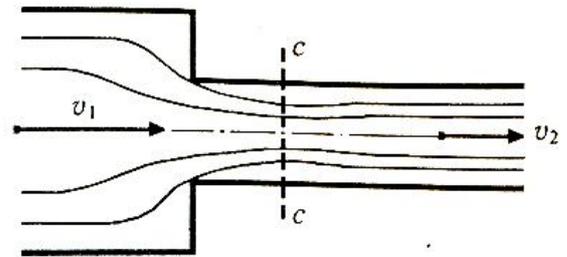


Рис. 6.24

2. Выход из трубы в резервуар больших размеров (рис. 6.23).

В данном случае площадь сечения резервуара $\omega_2 \gg \omega_1$ и поэтому

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \cong 0.$$

Тогда из формулы (6.25) следует

$$\xi_1 = K \approx 1.$$

3. Внезапное сужение потока (рис. 6.24).

В данном случае происходит внезапное увеличение скорости. Удара при этом в плоскости перехода сечения не происходит. Но на некотором расстоянии ниже по течению происходит сжатие струи (сечение C-C), а затем переход от сжатого сечения к нормальному, который можно рассматривать как удар, что и служит причиной потерь напора.

Потери напора при внезапном сужении значительно меньше потерь напора при внезапном расширении. Коэффициент ξ здесь зависит от соотношения ω_2 / ω_1 . Найденные опытным путем значения ξ приведены в табл. 6.1:

Таблица 6.1

ω_2 / ω_1	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ξ	0,45	0,39	0,35	0,38	0,2	0,09	0,0

4. Постепенное расширение потока (диффузор) (рис. 6.25).

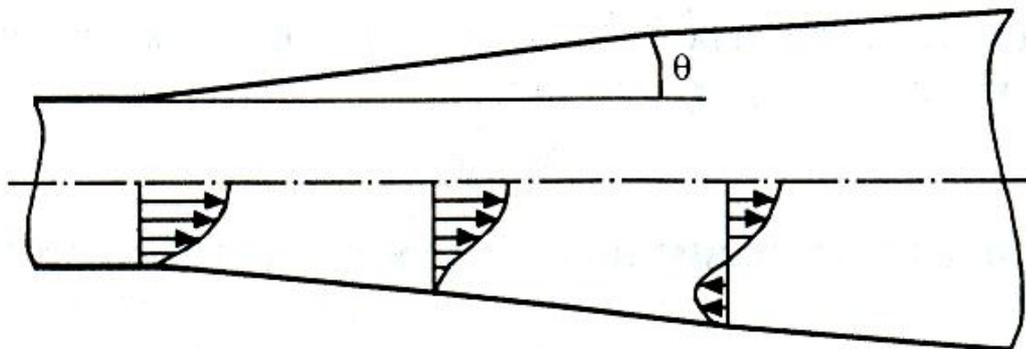


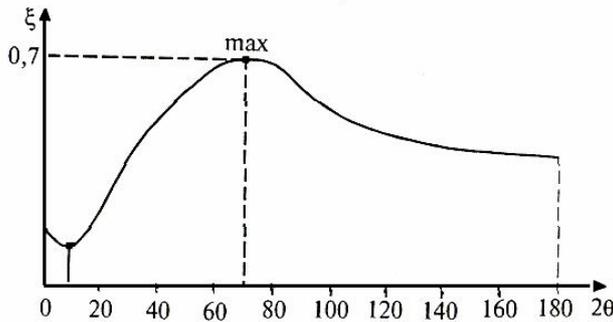
Рис. 6.25

При малых углах $\theta \leq 4-5^\circ$ течение в диффузоре происходит безотрывно. При углах $\theta > 4-5^\circ$ происходит отрыв потока от стенки. Это объясняется тем, что в диффузоре происходит увеличение давления в направлении движения, вызываемое уменьшением скорости вследствие расширения канала. Частицы жидкости, движущейся у стенки, сильно затормаживаются силами вязкости, и в определенной точке их кинетическая энергия становится недостаточной для преодоления всевозрастающего давления. Поэтому скорость жидкости в

пристенном слое в такой точке обращается в нуль, а за этой точкой появляются обратные течения - отрыв потока.

Если безотрывное течение в диффузоре происходит практически без потерь, то течение с отрывом сопровождается значительными потерями энергии на вихреобразование.

Зависимость $\xi = f(\theta)$ имеет вид, представленный на рис. 6.26.



При угле $2\theta \approx 70^\circ$ коэффициент потерь достигает максимума, причем при угле $2\theta > 40 \div 60^\circ$ потери напора превосходят потери при внезапном расширении потока ($2\theta = 180^\circ$).

Рис. 6.26.

Поэтому вместо переходов в виде диффузоров с углом $2\theta > 40^\circ$ нужно применять внезапное расширение как переход, дающий меньшие потери напора.

§ 6.20. ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА МЕСТНЫХ ПОТЕРЬ ОТ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

Для данного местного сопротивления коэффициент ξ будет функцией только от числа Re . В зависимости от влияния числа Re на коэффициент ξ режимы движения жидкости могут быть разделены на следующие зоны.

1. Движение в местном сопротивлении и в трубопроводе ламинарное.

Коэффициент местных сопротивлений в этом случае определяется по формуле

$$\xi = \frac{A}{Re}, \quad (6.28)$$

где A - коэффициент, зависящий от типа местного сопротивления.

Так как

$$h_M = \xi \frac{v^2}{2g}, \quad (6.29)$$

то, учитывая выражение (6.28), будем иметь $h_M = K\nu$,

где $K = \frac{A\nu}{2dg}$. Следовательно, потери напора пропорциональны первой степени скорости.

2. Движение в трубопроводе без местного сопротивления ламинарное, а с местным сопротивлением - турбулентное. В этом случае

$$\xi = \frac{B}{\text{Re}^{0.27}},$$

где B - коэффициент, зависящий от типа местного сопротивления.

Потери напора в данном случае определяют по формуле

$$h_M = K\nu^{1.73},$$

где

$$K = \frac{B\nu^{0.53}}{2gd^{0.27}}.$$

3. Движение в трубопроводе без местного сопротивления и при наличии его турбулентное при небольших числах $\text{Re} > 2300$.

Формула для коэффициента местного сопротивления имеет вид

$$\xi = \frac{C}{\text{Re}^{0.53}},$$

где C - коэффициент, зависящий от типа местного сопротивления.

Подставляя последнее соотношение в формулу (6.29), получим

$$h_M = K\nu^{1.47},$$

где

$$K = \frac{C\nu^{0.53}}{2gd^{0.53}}.$$

4. Развитое турбулентное течение при больших числах Рейнольдса.

Коэффициент ξ здесь не зависит от числа Рейнольдса, и местные потери напора пропорциональны квадрату скорости (квадратичная зона):

$$h_M = K\nu^2,$$

где

$$K = \frac{\xi}{2g}.$$

Коэффициенты A , B , C для различных типов местных сопротивлений приведены в учебниках по гидравлике и гидравлических справочниках.

§ 6.21. ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ ПОТЕРЬ НАПОРА. КОЭФФИЦИЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ

Для определения суммарных потерь напора в трубопроводе применяют так называемый принцип наложения потерь. Согласно этому принципу суммарная потеря напора в трубопроводе равна сумме отдельных потерь.

Например, если имеется трубопровод с постоянным диаметром $d = \text{const}$, то скорость в различных сечениях постоянна ($v = \text{const}$), и суммарная потеря напора будет

$$\sum h = \xi_1 \frac{v^2}{2g} + \xi_2 \frac{v^2}{2g} + \xi_3 \frac{v^2}{2g} + \dots + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \left(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} = \xi_c \frac{v^2}{2g},$$

где ξ_c - коэффициент сопротивления системы.

Если трубопровод имеет участки с различным диаметром (рис. 6.27), то суммарная потеря напора определяется по формуле

$$\sum h = \xi_1 \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \xi_2 \frac{v_2^2}{2g}.$$

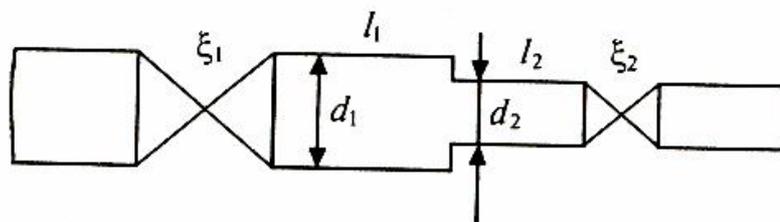


Рис. 6.27

Так как

$$v_2^2 = v_1^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2,$$

то

$$\sum h = \left[\xi_1 + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 + \xi_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \right] \frac{v_1^2}{2g}.$$

Однако, несмотря на кажущуюся очевидность, принцип наложения потерь не всегда справедлив, и его нельзя механически использовать во всех случаях расчета. Дело в том, что местные сопротивления, установленные в трубопроводе, взаимно влияют друг на друга. Так, если два вентиля установлены на небольшом расстоянии друг от друга, то их сопротивление не будет равно сумме сопротивлений для каждого вентиля в отдельности. В этом случае последовательно соединенные сопротивления надо рассматривать как особый тип местного сопротивления.

Для того чтобы был справедлив принцип наложения потерь, местные сопротивления должны отстоять друг от друга на расстояние, большее расстояния стабилизации потока, равного $20 \div 50d$ (рис. 6.28).

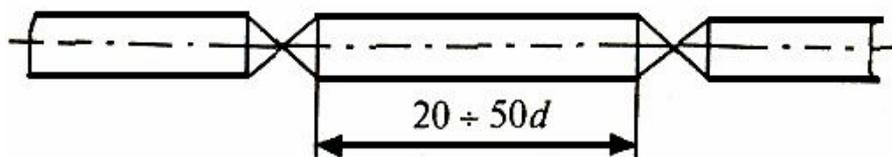


Рис. 6.28

Применимость этого принципа особенно нужно иметь в виду при проектировании насосных станций, где трубопроводы насыщены множеством местных сопротивлений.

§ 6.22. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕРЬ НАПОРА

Линейные потери напора в напорных трубопроводах круглого сечения определяют по формуле Дарси - Вейсбаха:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

где v - средняя по сечению скорость.

Из этой формулы, называемой первой водопроводной, следует

$$v^2 = \frac{2g}{\lambda} d \frac{h}{l}$$

или

$$v^2 = \frac{2g}{\lambda} \frac{4d}{4} \frac{h}{l}. \quad (6.30)$$

Так как $d/4 = R$; $h/l = J$, где R - гидравлический радиус; J - пьезометрический (гидравлический) уклон, то формула (6.30) примет вид

$$\boxed{v = C\sqrt{RJ}}, \quad (6.31)$$

где $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ - коэффициент Шези.

Формула (6.31) называется формулой Шези. Она используется для определения скорости течения при равномерном движении жидкости в трубах, каналах и естественных руслах. Коэффициент C может быть вычислен, если известно λ , или его определяют по эмпирическим формулам, например по эмпирической формуле Павловского

$$C = \frac{1}{n} R^y,$$

где n - коэффициент шероховатости (дается в таблицах);

$y = f(n, R)$ - переменный показатель степени, равный

$$y = 2.5\sqrt{n} - 0.13 - 0.75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0.10).$$

Из формулы Шези найдем

$$v^2 = C^2 RJ \quad \text{или} \quad v^2 = C^2 R \frac{h}{l}.$$

Отсюда

$$h = \frac{v^2 l}{C^2 R}.$$

По этой формуле находятся линейные потери напора, главным образом при расчете некруглых труб.

Местные потери напора рассчитываются по общей формуле

$$h_M = \xi \frac{v^2}{2g}.$$

С целью упрощения гидравлических расчетов формулу Шези представляют в несколько ином виде. Учитывая, что

$$Q = \omega v, \quad \text{получим} \quad Q = \omega C \sqrt{RJ} \quad \text{или} \quad Q = \omega C \sqrt{R} \sqrt{J}.$$

Обозначив $K = \omega C \sqrt{R}$, получим $Q = K \sqrt{J}$ или $Q^2 = K^2 J$.

Отсюда

$$h = Q^2 \frac{l}{K^2}.$$

Последняя формула называется **второй водопроводной формулой**.

Величина K называется модулем расхода или расходной характеристикой. При $J = 1$ $K = Q$, т. е. K представляет собой расход жидкости в трубопроводе при гидравлическом уклоне, равном единице. Следовательно, K имеет размерность расхода. С другой стороны, при $Q = 1$ из второй водопроводной формулы получаем $h = l/K^2$, т. е. l/K^2 представляет собой сопротивление трубопровода при расходе, равном единице, поэтому величину l/K^2 называют удельным сопротивлением трубопровода.

Особенно удобно введение величины K при расчете трубопроводов с турбулентным движением в квадратичной зоне. В этом случае

$$K = \omega C \sqrt{R}.$$

Часто второй водопроводной формуле придают другой вид.

Так как

$$K = \omega C \sqrt{R} = \frac{\pi d^2}{4} C \sqrt{\frac{d}{4}},$$

то

$$K^2 = \frac{\pi^2 C^2}{64} d^5.$$

Обозначив

$$a = \frac{64}{\pi^2 C^2},$$

получим

$$K^2 = \frac{d^5}{a}.$$

Тогда из формулы

$$h = Q^2 \frac{l}{K^2}$$

получим еще один вид второй водопроводной формулы:

$$h = a \frac{Q^2 l}{d^5}.$$



Вопросы для самопроверки

1. Каковы основные особенности ламинарного и турбулентного режима движения жидкости?
2. Какова структура числа Рейнольдса?
3. Какой смысл имеют критические скорости?
4. Согласно какой математической зависимости описывается распределение местной скорости по сечению цилиндрической трубы при равномерном ламинарном движении?
5. Как соотносятся максимальная и средняя скорости при равномерном ламинарном движении в цилиндрической трубе?
6. Как распределяются касательные напряжения по сечению трубы при ламинарном равномерном движении?
7. Какой зависимостью описывается эпюра распределения осредненных местных скоростей при равномерном турбулентном движении?
8. Есть ли различия между отношениями средней скорости к максимальной скорости в живом сечении при равномерном ламинарном и турбулентном движении? Если есть, то какие именно?
9. Поясните понятия «гидравлически гладкие» и «гидравлически шероховатые» поверхности.
10. Как рассчитывается толщина вязкого подслоя? В зависимости от каких других величин может изменяться толщина вязкого подслоя?
11. Какие зоны сопротивления при равномерном турбулентном движении в трубах можно указать? В чем различия вида кривых зависимости коэффициента Дарси от числа Рейнольдса и от относительной

- шероховатости в трубах с равнозернистой шероховатостью и в трубах промышленного изготовления с естественной шероховатостью?
12. Запишите формулы Шези для средней скорости и расхода при равномерном движении.
 13. Что такое эквивалентная шероховатость, в каких расчетах она используется?
 14. Какой вид имеют формула Дарси-Вейсбаха?
 15. Какие параметры жидкости, русла (или трубопровода) потока влияют на потери напора?
 16. Какие формулы для определения коэффициента Шези используются в расчетах?
 17. Как распределяются касательные напряжения по сечению цилиндрической трубы при равномерном движении?
 18. От каких факторов в общем случае зависят значения коэффициентов местных сопротивлений?
 19. Запишите формулу для коэффициента сопротивления при внезапном расширении.
 20. Можно ли выразить потерю напора при движении через местное сопротивление по скоростному напору?
 21. В каком случае потери напора будут больше – при внезапном расширении или при внезапном сужении труб (соотношение диаметров в обоих случаях одно и то же, другие параметры потока одинаковы)?



Примеры решения задач

Задача 1. Каковы будут потери напора при напорном движении воды в трубе с площадью живого сечения $\omega = 2,83 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,83 \text{ см}^2$, если расход воды равен $30 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с} = 30 \text{ см}^3/\text{с}$, температура воды $t = 10 \text{ }^\circ\text{C}$. Длина трубы 10 м, поперечное сечение трубы - круглое.

Решение: В начале определяем, каким будет режим движения. Для этого найдем значение числа Рейнольдса, предварительно вычислив

$$d = \sqrt{\frac{4\omega}{\pi}} = 0,019 \text{ м} = 1,9 \text{ см} \quad \text{и}$$

$$v = \frac{Q}{\omega} = 0,106 \text{ м/с} = 10,6 \text{ см/с}$$

Тогда при $\nu = 0,0131 \text{ см}^2/\text{с}$, имеем

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{10,6 \cdot 1,9}{0,0131} = 1537 < \text{Re}_{\text{кр}} = 2320 .$$

Следовательно, режим движения в трубе - ламинарный.

Определим значение коэффициента Дарси по формуле $\lambda = 64/\text{Re} = 0,0416$.

Тогда

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,0416 \frac{100}{0,019} \frac{0,106^2}{19,62} = 0,125 \text{ м.}$$

Задача 2. Определить потери напора при равномерном напорном движении воды в трубе диаметром $d=0,2$ м; средняя скорость потока равна $0,15$ м/с; температура воды $t = 12$ °С. Внутренняя поверхность трубы характеризуется равнозернистой шероховатостью с высотой выступа $\Delta=0,0005$ м=0,5 мм. Длина трубы $l=900$ м.

Решение: Приняв по таблице $\nu=0,0124$ см²/с, найдем

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{15 \cdot 20}{0,0124} = 24193 > \text{Re}_{\text{кр}} = 2320$$

соответственно режим движения - турбулентный.

Выясним, в какой области сопротивления происходит движение в рассматриваемом случае. Найдем значение числа Рейнольдса, соответствующее концу области гидравлически гладких труб: $\text{Re}_{\text{г.л}} = 27(d/\Delta)^{8/7} = 27(200/0,5)^{8/7} = 25440$. Так как найденное для условий задачи $\text{Re} = 24193 < \text{Re}_{\text{г.л}} = 25440$, то рассматриваемый случай относится к турбулентному движению в области гидравлически гладких труб.

Тогда имеем по формуле Блазиуса

$$\lambda = 0,3164/\text{Re}^{0,25} = 0,3164/24193^{0,25} = 0,0254,$$

а по формуле Кольбрука

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \lg \text{Re} - 1,52)^2} = 0,0246 .$$

Определяя потери напора с использованием λ , полученных по указанным формулам, получим:

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,0254 \frac{900}{0,2} \frac{0,15^2}{19,62} = 0,131 \text{ м и}$$

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,0246 \frac{900}{0,2} \frac{0,15^2}{19,62} = 0,127 \text{ м.}$$

Определим какова область сопротивления, сопоставляя толщину вязкого подслоя δ_v и высоту выступа шероховатости Δ .

Находим значения δ_v с использованием значений λ , полученных по формулам Блазиуса и Кольбрука. При этом полагаем, что в связи со

сравнительно небольшим значением $Re=24193$ трубы могут работать как гидравлически гладкие. Тогда

$$\delta_b \approx \frac{30d}{Re\sqrt{\lambda}} = \frac{30 \cdot 0,2}{24193\sqrt{0,0254}} = 0,00155 \text{ м} = 1,55 \text{ мм} \text{ и}$$

$$\delta_b \approx \frac{30d}{Re\sqrt{\lambda}} = \frac{30 \cdot 0,2}{24193\sqrt{0,0246}} = 0,00158 \text{ м} = 1,58 \text{ мм}$$

Так как толщина вязкого подслоя $\delta_b > \Delta = 0,5$ мм, то справедливо рассматривать область сопротивления в данных условиях как область гидравлически гладких труб и потери напора считать равными 0,13 м.

Задача 3.

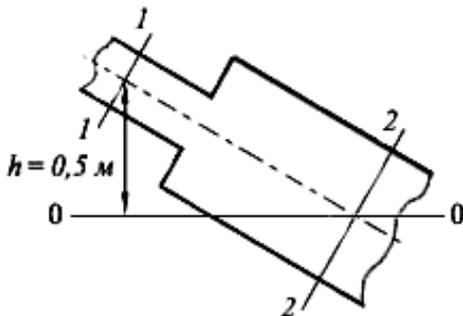


Рис. 6.29

Трубопровод диаметром 250 мм внезапно расширяется до диаметра 400 мм (рис.6.29). Центр тяжести сечения 1 - 1 расположен на 0,5 м выше центра сечения 2 - 2. Расход воды, пропускаемый по трубопроводу, равен 106 дм³/с. Коэффициент Кориолиса $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Определить разность давлений между сечениями с учетом потерь, пренебрегая потерями напора.

Решение: 1. В этом случае уравнение Бернулли примет вид

$$0,5 + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} - \sum h_{тр} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g};$$

2. Определим потери напора, в нашем случае это потери напора на внезапное расширение.

$$\sum h_{тр} = \zeta_{вр} \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \cdot \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{0,1256}{0,0491} \right) \cdot 0,04 = 0,1 \text{ м}$$

3. Таким образом,

$$0,5 + 0,24 - 0,04 - 0,1 = \frac{p_2 - p_1}{\rho g};$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} = 0,6 \text{ м} \text{ или } p_2 - p_1 = 5886 \text{ Н/м}^2.$$

Задача 4. По трубопроводу (рис. 6.30) диаметром $d = 50$ мм и длиной $l = 10$ м движется жидкость (керосин). Определить напор H , при котором происходит смена ламинарного режима течения на турбулентный (потери

напора в местных сопротивлениях не учитывать). Температура жидкости 30° С. Кинематический коэффициент вязкости керосина $\nu = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Решение. Считая, что в данном случае смена ламинарного режима течения на турбулентное происходит при числе Рейнольдса, равном $Re = vd/\nu = 2320$, линейные потери напора будут определены по формуле Дарси - Вейсбаха:

$$h_{л} = H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

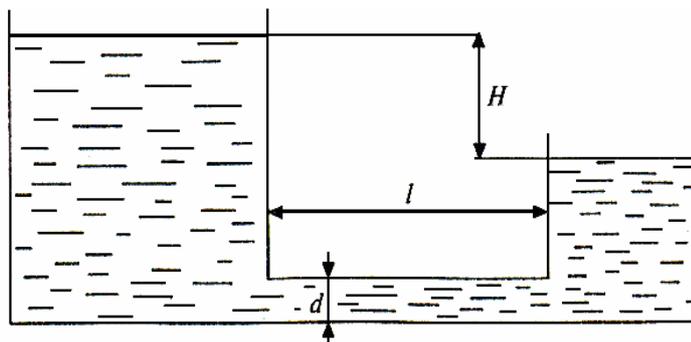


Рис.6.30

где $h_{л}$ - коэффициент линейных потерь; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения; v - скорость течения жидкости, которая может быть определена из числа Рейнольдса:

$$v = \frac{2320 \cdot \nu}{d} = \frac{2320 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}}{0,05} = 0,116 \text{ м/с}.$$

Коэффициент линейных потерь находится по формуле Пуазейля:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{2320} = 0,0276.$$

Искомый напор H затрачивается лишь на преодоление линейных потерь напора, поэтому он может быть найден по формуле Дарси - Вейсбаха:

$$H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,0276 \cdot \frac{10}{0,05} \cdot \frac{0,116^2}{2 \cdot 9,8} = 0,037 \text{ м}.$$

Задача 5. Определить диаметр d трубопровода, по которому подается жидкость $\mathcal{Ж}$ с расходом Q , из условия получения в нем максимально возможной скорости при сохранении ламинарного режима при следующих

исходных данных: $t_{ж} = 20^{\circ} \text{C}$; $\nu_{ж} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $Q = 0,01 \text{ м}^3/\text{с}$.

Решение. Расход, скорость и число Рейнольдса определяются по формулам

$$Q = v_{\text{ср}} S; \quad v_{\text{ср}} = \frac{Q}{S}; \quad \text{Re} = \frac{v_{\text{ср}} d}{\nu}.$$

Максимальная скорость, при которой сохраняется ламинарный режим течения, будет наблюдаться при числе Рейнольдса, равном $\text{Re} = 2320$. Тогда

$$2320 = \frac{v_{\text{ср}} d}{\nu} = \frac{Q d}{S \nu} = \frac{Q d}{\pi d^2 / 4 \nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu}.$$

Отсюда

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{2320 \cdot \pi \nu}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,01}{2320 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = 0,741 \text{ м}.$$

Задача 6. По трубопроводу диаметром $d = 0,01 \text{ м}$ и длиной $l = 50 \text{ м}$. (рис. 6.31) движется жидкость (вода, $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$). Определить потерю напора h , при которой происходит смена ламинарного режима течения на турбулентный.

Решение. Потерю напора определяем по формуле Дарси - Вейсбаха:

$$h = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}.$$

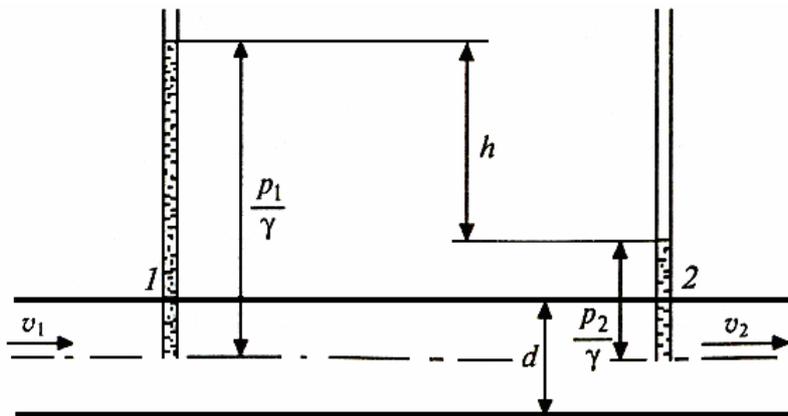


Рис.6.31

Коэффициент линейных потерь находится по формуле Пуазейля:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}},$$

где $Re = 2320$.

Тогда

$$\lambda = \frac{64}{2320} = 0,0276.$$

Скорость v (м/с) - из числа Рейнольдса:

$$v = \frac{Re \cdot \nu}{d} = \frac{2320 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{0,01} = 0,232.$$

Тогда

$$h = 0,0276 \cdot \frac{50}{0,01} \frac{0,232^2}{2 \cdot 10} = 0,371 \text{ м.}$$

Задача 7. При внезапном расширении трубопровода скорость жидкости в трубе большего диаметра равна v_2 (рис. 6.32). Большой и малый диаметры трубы соответственно равны $D = 0,2$ м. и $d = 0,1$ м, причем $D/d = 2$. Определить разность показаний пьезометров h .

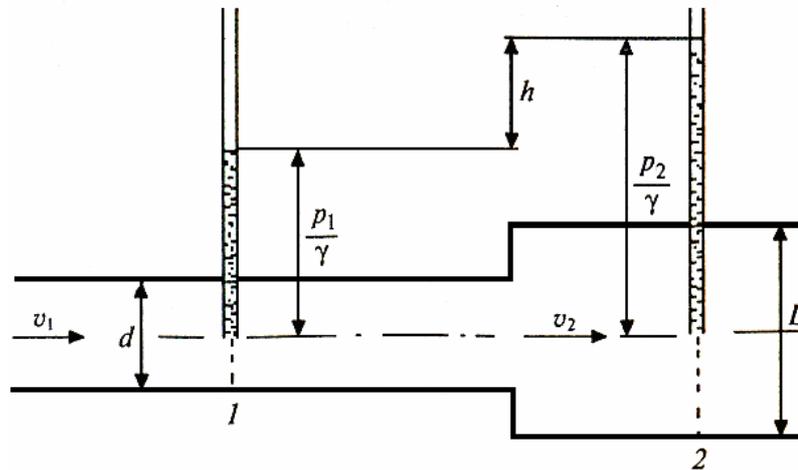


Рис.6.32

Решение. Из уравнения неразрывности потока имеем

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (6.32)$$

Так как $S_1 = \pi d^2/4$; $S_2 = \pi D^2/4$; $D = 2d$, то $S_2 = \pi d^2$.

Потерю напора при внезапном расширении трубопровода находим по формуле

$$h = \xi \frac{v^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \frac{v_1^2}{2g}.$$

Из соотношения (6.32) находим

$$v_1 = \frac{v_2 S_2}{S_1} = \frac{4v_2 \pi d^2}{\pi d^2} = 4v_2.$$

Отсюда

$$h = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{16v_2^2}{2g} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{8 \cdot (0,3)^2}{10} = 0,0405 \text{ м.}$$



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.

Вода движется в прямоугольном лотке с глубиной наполнения $h = 0,5$ м (рис. 6.33). Ширина лотка $b = 1,0$ м. Определить, при каком максимальном расходе Q сохранится ламинарный режим, если температура воды $t = 30$ °С.

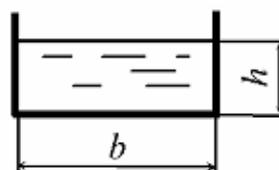


Рис. 6.33

Задача 2.

Найти максимальный диаметр d напорного трубопровода, при котором нефть будет двигаться при турбулентном режиме (рис. 6.34), если кинематический коэффициент вязкости нефти $\nu = 0,30$ см²/с, а расход в трубопроводе $Q = 8$ л/с.

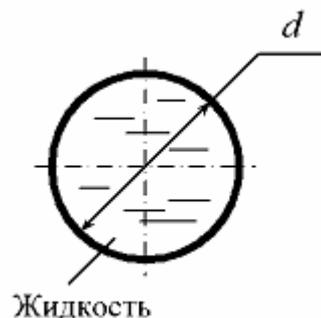


Рис. 6.34

Задача 3.

Определить число Рейнольдса по гидравлическому радиусу Re_R при безнапорном движении нефти по трубопроводу (рис.6.35). Трубопровод заполнен нефтью наполовину сечения. Диаметр трубопровода $d = 0,5$ м, расход $Q = 1,2$ м³/мин, динамический коэффициент вязкости нефти $\mu = 0,027$ Па·с, плотность $\rho = 900$ кг/м³.

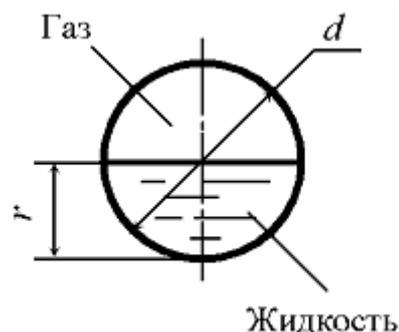


Рис. 6.35

Задача 4.

Для осветления сточных вод используют горизонтальный отстойник, представляющий собой удлиненный прямоугольный в плане резервуар. Глубина $h = 2,6$ м, ширина $b = 5,9$ м. Температура воды 20 °С. Определить среднюю скорость и режим движения сточной жидкости, если ее расход $Q = 0,08$ м³/с, а коэффициент кинематической вязкости $\nu = 1,2 \cdot 10^{-6}$ м²/с. При какой скорости движения жидкости в отстойнике будет наблюдаться ламинарный режим движения жидкости?

Задача 5.

Из напорного бака, в котором поддерживается постоянный уровень $H = 3$ м, по наклонному трубопроводу переменного сечения (рис. 6.36) движется вода. Диаметры участков трубопровода $d_1 = 40$ мм, $d_2 = 25$ мм, длины соответственно $l_1 = 50$ м, $l_2 = 75$ м. Начало трубопровода расположено выше его конца на величину $z = 1,5$ м. Определить расход воды в трубопроводе, если коэффициент гидравлического трения $\lambda = 0,035$ для обоих участков трубопровода. Местными потерями напора пренебречь.

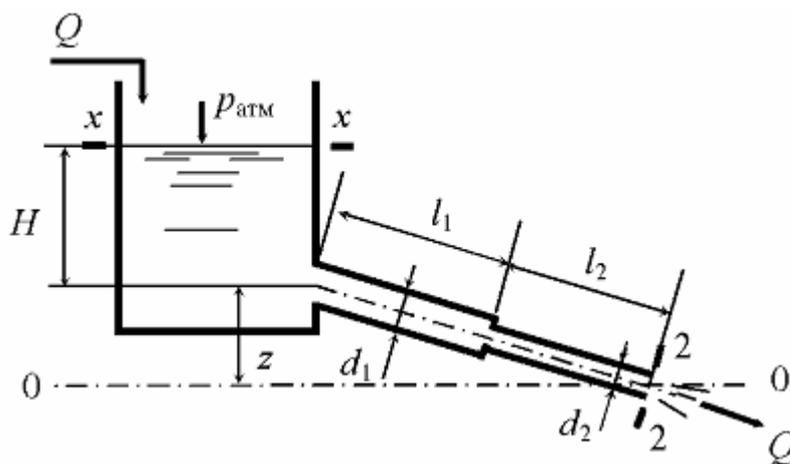


Рис. 6.36

Задача 6. Насос подает воду в водонапорную башню по трубопроводу (рис. 6.37). Расход воды в трубопроводе $Q = 5,3$ л/с. Определить показания манометра М, присоединенного к напорному трубопроводу, если вода поднимается на высоту $H = 21$ м, длина трубопровода от точки присоединения манометра до уровня в напорном баке $l = 17$ м, диаметр $d = 35$ мм, коэффициент гидравлического трения $\lambda = 0,032$. Местными потерями напора пренебречь.

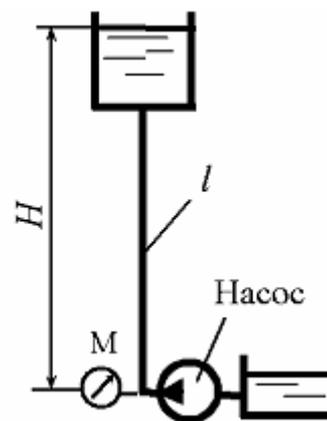


Рис. 6.37

Задача 7. По горизонтальному трубопроводу длиной $l = 50$ м и диаметром $d = 150$ мм движется нефть плотностью $\rho = 800$ кг/м³. Кинематический коэффициент вязкости $\nu = 0,15$ см²/с, шероховатость стенок трубопровода $\Delta = 0,15$ мм. Определить расход нефти, если перепад давления в начале и конце участка трубопровода $\Delta p = 12$ кПа. Местные потери напора не учитывать.

Задача 8. По горизонтальному трубопроводу переменного сечения движется масло плотностью $\rho = 780$ кг/м³. Определить расход Q , если трубопровод имеет внезапное сужение от диаметра $d_1 = 60$ мм до диаметра $d_2 = 30$ мм, вентиль обыкновенный, поворот трубы на 90° с угольником и внезапное расширение до начального диаметра d_1 , а местные потери давления составляют 30 кПа. Потерями напора по длине пренебречь.

Задача 9.

По горизонтальному трубопроводу, на котором установлена диафрагма (рис. 6.38), движется вода с расходом $Q = 8,2$ л/с. Диаметр трубопровода $D = 80$ мм, диафрагмы $d = 35$ мм. Определить показания ртутного дифференциального манометра. Сжатием струи на выходе из диафрагмы пренебречь.

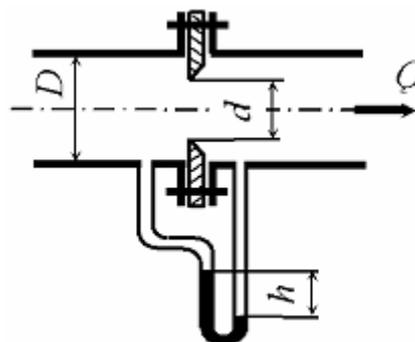


Рис. 6.38

Задача 10.

Определить давление в начале горизонтального трубопровода переменного сечения, состоящего из двух участков: первый участок имеет длину $l_1 = 100$ м и диаметр $d_1 = 80$ мм; второй – $l_2 = 150$ м и $d_2 = 50$ мм. Расход жидкости $Q = 12$ л/с, свободный напор в конце трубопровода $H = 15$ м. Плотность жидкости $\rho = 900$ кг/м³, кинематический коэффициент вязкости жидкости $\nu = 0,2$ см²/с, шероховатость стенок трубопровода $\Delta = 0,15$ мм. Местные потери напора не учитывать.

ГЛАВА 7.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

*То, что мы знаем, - ограничено,
а то, чего мы не знаем, - бесконечно.*

Пьер-Симон Лаплас

§ 7.1. НАЗНАЧЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ТРУБОПРОВОДОВ

Трубопроводы служат для перемещения разнообразных жидкостей и газов. В зависимости от рода перекачиваемой жидкости различают: водопроводы, нефтепроводы, маслопроводы, газопроводы и т. п.

В зависимости от конфигурации различают простые и сложные трубопроводы.

Простым называют трубопровод, не имеющий разветвлений от точки забора до точки потребления.

Разветвленные трубопроводы - сложные. Они делятся на следующие основные виды:

- а) разветвленные или тупиковые;
- б) трубопроводы с параллельным соединением;
- в) кольцевые.

В зависимости от длины и гидравлических условий расчета их делят на длинные и короткие.

Длинными называют такие трубопроводы, которые имеют значительную протяженность и в которых линейные потери напора являются основными. В них местные потери напора обычно специально не учитывают, а принимают в 5-10 % от потерь по длине. В коротких трубопроводах местные потери напора являются основными.

Расход жидкости в трубопроводе может быть транзитным, т. е. передаваемым по магистрали без отбора, и путевым, т. е. отбираемым из магистрали по пути.

§ 7.2. РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТРУБОПРОВОДОВ

В наиболее общей постановке задачи при проектировании трубопроводов задают расход жидкости Q и положения начального и конечного пунктов трубопровода. В случае сложного трубопровода задают расходы на всех участках трубопровода и расположение потребителей. На основании топографических изысканий на плане наносят трассу трубопровода с указанием его длины.

Определению подлежат диаметр трубопровода d и напор H_1 , в его начальной точке. Рассматриваемая задача допускает множество решений, так как при изменении d меняется и H_1 : чем больше диаметр d , тем меньше потребный напор H_1 . Величину диаметра трубопровода, поэтому обычно определяют из экономических соображений.

Очевидно, что с увеличением диаметра трубопровода будут возрастать капитальные затраты. Но одновременно с этим будут уменьшаться эксплуатационные расходы, так как с увеличением d уменьшается H_1 и уменьшаются расходы энергии на перекачку жидкости. Для нахождения экономически выгодного диаметра d строят график (рис. 7.1), где кривая $S_1 = f_1(d)$ - капитальные затраты, вычисленные с учетом срока окупаемости, кривая $S_2 = f_2(d)$ - эксплуатационные расходы.

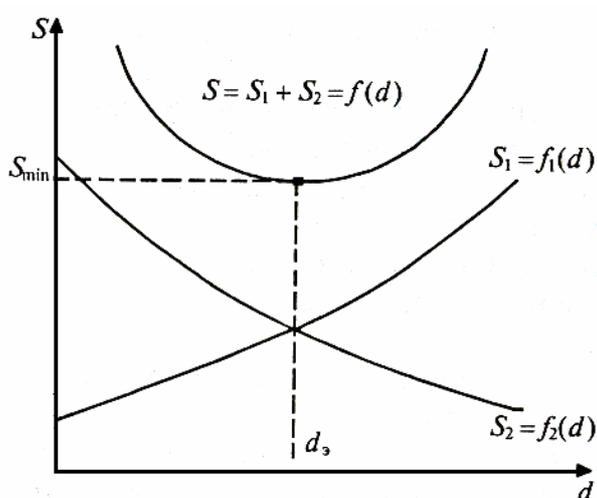


Рис. 7.1

Тогда суммарные затраты выразятся кривой, полученной как сумма $S = S_1 + S_2 = f(d)$. Абсцисса d_3 определит экономически выгодный диаметр, при котором затраты будут наименьшими, т. е. $S = S_{\min}$. Помимо рассмотренной основной задачи при расчете трубопроводов могут встретиться также частные задачи.

1. Определение перепада напора $\Delta H = H_1 - H_2$ по заданному расходу Q и размерам трубопровода.

2. Определение расхода Q при заданном перепаде напора ΔH и размерам трубопровода.

3. Определение диаметра d при заданном расходе Q и перепаде ΔH .

Если число Рейнольдса невелико, то при определении Q или d коэффициент $\lambda = f(\text{Re})$ становится известным лишь по окончании расчета, поэтому в данном случае расчет усложняется и ведется методом последовательных приближений.

§ 7.3. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДА

Исходными выражениями для расчета трубопровода являются:
уравнение Бернулли $H_1 - H_2 = \sum h$;

водопроводные формулы $h_{\text{л}} = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}$; $h = Q^2 \frac{l}{K^2}$;

формула для определения местных потерь напора $h_{\text{м}} = \xi \frac{v^2}{2g}$.

Рассмотрим установившееся движение жидкости по трубопроводу, соединяющему два резервуара A и B (из сосуда A жидкость переливается в сосуд B (рис. 7.2).

Составим уравнение Бернулли для сечений I и II .

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h,$$

где $\sum h = h_{\text{л}} + h_{\text{м}}$ - сумма линейных и местных потерь напора.

Так как $v_1 = v_2 \approx 0$, а также $p_1 = p_2 = p_0$, то

$$\Delta H = z_1 - z_2 = \sum h.$$

Отсюда следует, что разность геометрических напоров полностью идет на покрытие потерь.

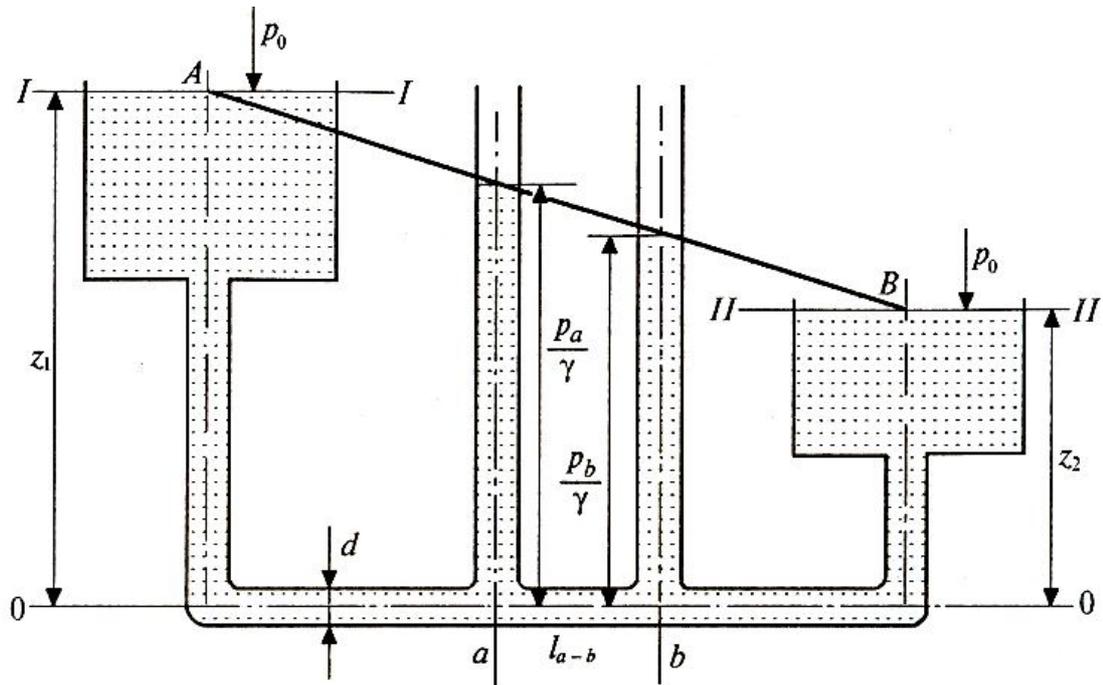


Рис. 7.2

Формула для суммарной потери напора имеет вид

$$\sum h = h_{\text{л}} + h_{\text{м}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \xi \frac{v^2}{2g} = \xi_c \frac{v^2}{2g},$$

где $\xi_c = \lambda \frac{l}{d} + \sum \xi$ - коэффициент сопротивления системы.

Тогда

$$\Delta H = \xi_c \frac{v^2}{2g}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\xi_c}} \quad \text{и} \quad Q = \omega v.$$

В том случае, когда местными потерями можно пренебречь и при турбулентном режиме движения, расход можно определить непосредственно по формуле

$$Q = K\sqrt{J} = K\sqrt{\frac{\Delta H}{l}}$$

где K – модуль расхода (см. § 6.22).

Составляя уравнение Бернулли для сечений a и b , убеждаемся, что разность пьезометрических напоров идет на преодоление сопротивления по длине:

$$\frac{P_a - P_b}{\gamma} = h_{\text{л}}$$

Без учета местных сопротивлений линия полного напора будет выражаться прямой линией с постоянным наклоном (линия AB на рис. 7.2).

Если трубопровод состоит из ряда отдельных участков с различными диаметрами, последовательно соединенных между собой (рис. 7.3), то задача решается аналогично:

$$\Delta H = \sum h = h_{\text{л}} + h_{\text{м}},$$

где $\Delta H = z_1 - z_2$.

Формула для ΔH в развернутом виде будет

$$\Delta H = \left[\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} \left(\frac{\omega_1}{\omega_3} \right)^2 + \xi_1 + \xi_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \right] \frac{v_1^2}{2g}$$

или

$$\Delta H = \xi_c \frac{v_1^2}{2g}$$

При не учете местных потерь и турбулентном движении

$$\Delta H = h_{1\text{л}} + h_{2\text{л}} + h_{3\text{л}}.$$

Учитывая, что

$$h = Q^2 \frac{l}{K^2},$$

получим

$$\Delta H = Q^2 \frac{l_1}{k_1^2} = Q^2 \frac{l_2}{k_2^2} + Q^2 \frac{l_3}{k_3^2}.$$

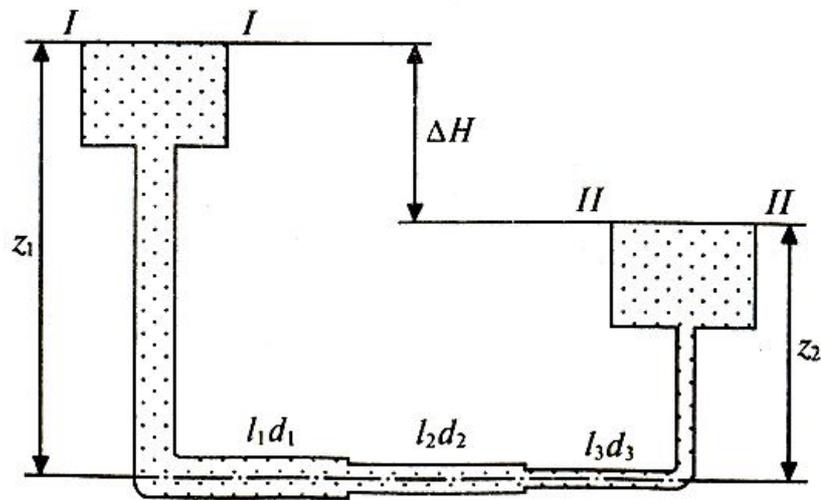


Рис. 7.3

Для простого трубопровода $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$.

Тогда

$$\Delta H = Q^2 \left(\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \frac{l_3}{K_3^2} \right).$$

Отсюда

$$Q = \sqrt{\frac{1}{\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \frac{l_3}{K_3^2}}} \sqrt{\Delta H}.$$

Последнюю формулу можно записать в виде

$$Q = A \sqrt{\Delta H}, \quad (7.1)$$

где $A = \sqrt{\frac{1}{\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \frac{l_3}{K_3^2}}}$ - коэффициент пропускной способности

трубопровода.

Формулу (7.1) перепишем в виде

$$\Delta H = \frac{1}{A^2} Q^2 = B Q^2,$$

где $B = 1 / A^2$ - коэффициент гидравлической характеристики трубопровода.

Рассмотрим теперь, как в случае простого трубопровода решаются вышеупомянутые три частные задачи.

1. Заданы расход Q и размеры трубопровода (диаметр d и длина l).
Определить перепад напора ΔH .

Из уравнения Бернулли

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \sum h,$$

определив среднюю скорость

$$v_1 = \frac{Q}{\frac{\pi d_1^2}{4}},$$

находим

$$\Delta H = \xi_c \frac{v_1^2}{2g}$$

или

$$\Delta H = \frac{1}{A^2} Q^2$$

2. Заданы перепад напоров ΔH и размеры трубопровода (диаметр d и длина l). Определить расход Q .

Определив среднюю скорость

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\xi_c}} \sqrt{2g\Delta H},$$

найдем $Q = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4}$ или $Q = A\sqrt{\Delta H}$.

3. Заданы расход Q и перепад напоров ΔH . Определить диаметр трубопровода d (длина и конфигурация трубопровода также считаются заданными).

В простейшем случае, когда местными сопротивлениями можно пренебречь,

$$\Delta H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Так как

$$v^2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 d^4},$$

то

$$\Delta H = \lambda \frac{l}{d^5} Q^2 \frac{8}{\pi^2 g}.$$

Отсюда

$$d = \sqrt[5]{\frac{8\lambda \cdot l \cdot Q^2}{\Delta H \cdot g \cdot \pi^2}}.$$

Для квадратичной области можно принять $\lambda = \text{const}$, если шероховатость трубопровода задана и, следовательно, d определено явно.

Если $\lambda = f(\text{Re})$ и, следовательно, $\lambda = f(d)$, так как $\text{Re} = vd/\nu$, то расчет усложняется и ведется методом последовательных приближений.

Для ламинарного режима

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64\nu}{vd}$$

и

$$\Delta H = \frac{32lv\nu}{d^2 g}.$$

Так как

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2},$$

то

$$\Delta H = \frac{128 \cdot l \cdot Q \cdot \nu}{\pi g d}.$$

Отсюда

$$d = \sqrt[4]{\frac{128 \cdot l \cdot Q \cdot \nu}{\Delta H \pi g}}$$

§ 7.4. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПОТЕРЬ

Гидравлический расчет трубопровода производят также по методу эквивалентных потерь. Основная идея метода состоит в том, что трубопровод, состоящий из участков с разными диаметрами, заменяется условно трубопроводом с постоянным диаметром $d_э$, потери напора в котором равны (эквивалентны) потерям в действительном трубопроводе.

Применим этот метод к расчету простого трубопровода. Обозначим $d_э$ и $a_э$ диаметр и коэффициент сопротивления. По второй водопроводной формуле для эквивалентного трубопровода

$$h_э = a_э \frac{l}{d_э^5} Q^2,$$

где $l = l_1 + l_2 + l_3$.

Так как

$$h_э = h_1 + h_2 + h_3$$

и

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

то

$$\frac{a_э}{d_э^5} = \frac{1}{l} \left(a_1 \frac{l_1}{d_1^5} + a_2 \frac{l_2}{d_2^5} + a_3 \frac{l_3}{d_3^5} \right) = N.$$

Вычислив значение N , можно найти $\frac{d_э^5}{a_э} = K^2$. После этого расчет ведется как для простого трубопровода постоянного диаметра.

§ 7.5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

Сложными трубопроводами называют разомкнутые или замкнутые сети, возможно, с уравнительными резервуарами. Гидравлический расчет таких сетей с учетом изменяющегося во времени расхода представляет

довольно сложную задачу. Эти расчеты рассматриваются в специальных курсах.

Ниже будут даны расчеты следующих схем сложных трубопроводов: с параллельным соединением труб; последовательно-параллельным и схемы разветвленного трубопровода.

Схема трубопровода с параллельным соединением труб показана на рис. 7.4.

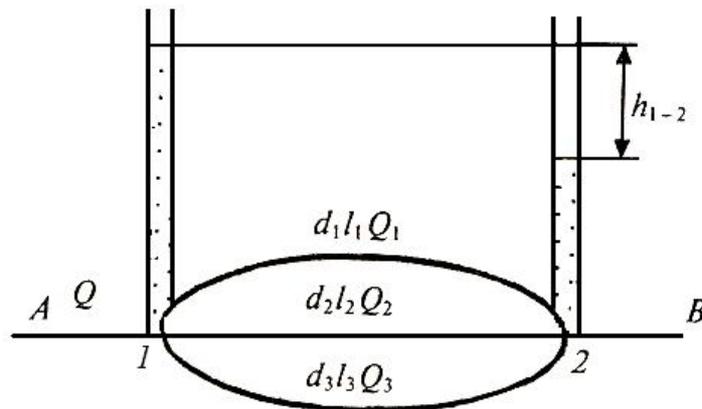


Рис. 7.4.

Применительно к этой схеме могут решаться следующие задачи.

Задача 1. По известному расходу Q определить расходы Q_1 , Q_2 , Q_3 в параллельных ветвях.

Очевидно, что потеря напора h_{1-2} во всех параллельных ветвях одинакова, поэтому можно составить следующую систему уравнений:

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h_3 = \Delta h_{1-2};$$

$$Q_1 = K_1 \sqrt{\frac{h_{1-2}}{l_1}}; \quad Q_2 = K_2 \sqrt{\frac{h_{1-2}}{l_2}}; \quad Q_3 = K_3 \sqrt{\frac{h_{1-2}}{l_3}};$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Отсюда

$$Q = \left(\frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}} + \frac{K_3}{\sqrt{l_3}} \right) \sqrt{h_{1-2}}.$$

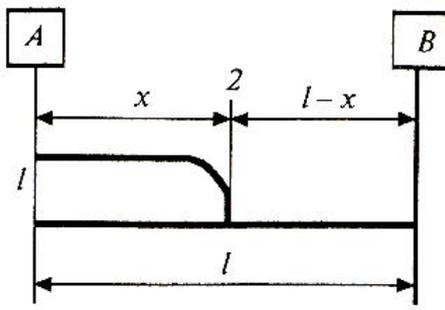
Тогда

$$h_{1-2} = \frac{Q_2}{\left(\frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}} + \frac{K_3}{\sqrt{l_3}} \right)}.$$

Расход в любой из параллельно соединенных труб находится по формуле

$$Q_i = K_i \sqrt{\frac{h_{1-2}}{l_i}}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Задача 2. Определить длину участка x с параллельным соединением труб по указанной схеме (рис. 7.5).



A и B — насосные станции

Рис. 7.5

В практике эксплуатации нефтепроводов иногда прибегают к параллельному подключению труб на отдельных участках для увеличения пропускной способности нефтепровода. Требуется без увеличения мощности насосной станции увеличить пропускную способность трубопровода, т. е.

при неизменном H_{1-2} найти длину x для пропуска увеличенного расхода Q .

Для участка 1-2 длиной x с параллельным соединением будем иметь

$$h_{1-2} = \frac{Q^2}{\left(\frac{K_1}{\sqrt{x}} + \frac{K_2}{\sqrt{x}} \right)^2} = \frac{xQ^2}{(K_1 + K_2)^2}.$$

Для участка длиной $l - x$ получим

$$h = Q^2 \frac{l - x}{K_3^2}.$$

Тогда полная потеря напора будет

$$H_{1-2} = h_{1-2} + h = Q^2 \left[\frac{x}{(K_1 + K_2)^2} + \frac{(l - x)}{K_3^2} \right].$$

Из этого уравнения можно найти x при заданных H и Q .

Схема трубопровода с последовательно-параллельным соединением труб представлена на рис. 7.6.

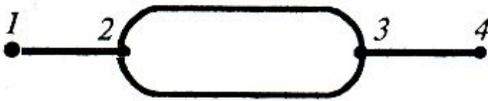


Рис. 7.6

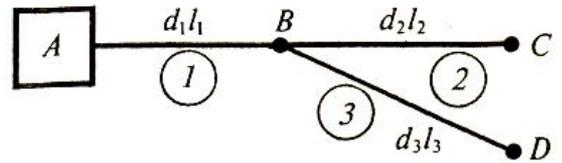


Рис. 7.7

В этом случае сначала находят потерю напора на участке с параллельным соединением H_{2-3} согласно формулам, приведенным выше. Затем трубопровод рассчитывают как обычный простой трубопровод с последовательным соединением труб:

$$\sum h = h_{1-2} + h_{2-3} + h_{3-4}.$$

Необходимо иметь в виду, что при параллельном соединении потеря напора во всех параллельных ветвях одна и та же, а расходы складываются. При последовательном соединении расход один и тот же, а напоры складываются. Схема разветвленного трубопровода представлена на рис. 7.7.

Давление в точках C и D одинаковое и равно атмосферному. Тогда можно записать $H = h_1 + h_2$, $H = h_1 + h_3$.

Или, так как $h = Q^2 \frac{l}{K^2}$, а также $Q_1 = Q_2 + Q_3$, то можно записать

$$\left. \begin{aligned} H &= Q_1^2 \frac{l_1}{K_1^2} + Q_2^2 \frac{l_2}{K_2^2}; \\ H &= Q_1^2 \frac{l_1}{K_1^2} + Q_3^2 \frac{l_3}{K_3^2}; \\ Q_1 &= Q_2 + Q_3. \end{aligned} \right\}$$

Получена система из трех уравнений с тремя неизвестными, откуда и находят Q_1 , Q_2 , Q_3 .

Если точки C и D лежат на разной высоте, то при составлении системы уравнений необходимо учесть высотные отметки этих точек.

§ 7.6. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРУБОПРОВОДОВ

При гидравлическом расчете трубопроводов весьма широко используются графические методы расчета, основанные на понятии гидравлической характеристики трубопровода. Применение графических методов значительно упрощает расчет, а в отдельных случаях является практически единственным возможным приемом, позволяющим получить решение. Предположим, что имеется какой-то трубопровод диаметром d и длиной l . На основании вышеизложенного, потери напора в нем при турбулентном режиме течения будут

$$\Delta H = BQ^2,$$

где $B = \text{const}$ для данного трубопровода. Используя это соотношение, можно построить график $\Delta H = f(Q)$ (рис.7.8), называемый гидравлической характеристикой трубопровода.

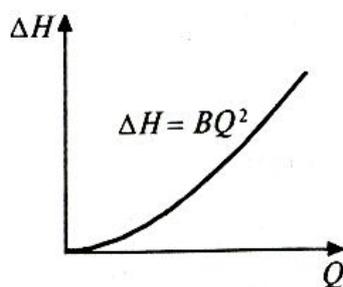


Рис.7.8

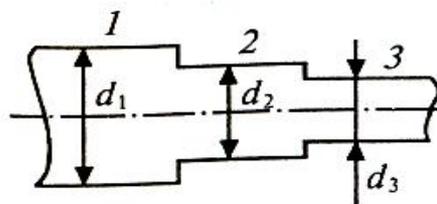


Рис. 7.9

При малых расходах и скоростях ($Re < 2300$) имеет место ламинарный режим течения. Для ламинарной области следовало бы записать $\Delta H = B'Q$ и характеристика представляла бы прямую линию, переходящую затем при больших расходах в параболу. Практически в большинстве случаев имеем дело с турбулентным режимом и поэтому характеристику строят сразу в виде $\Delta H = BQ^2$.

Рассмотрим построение характеристик для некоторых сложных трубопроводов.

1. Последовательное соединение трубопроводов (рис. 7.9).

В случае последовательного соединения при одном и том же расходе $Q_1 = Q_2 = Q_3$ потери напора складываются: $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$ (рис. 7.10).

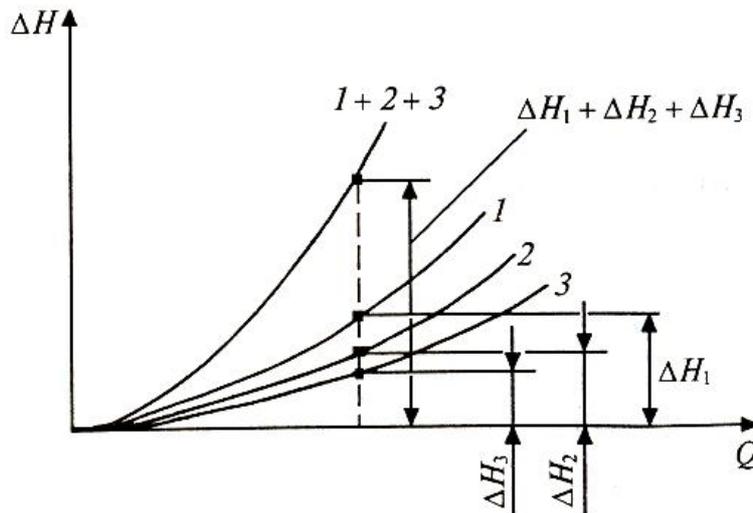


Рис. 7.10

На рис. 7.10 кривая $1 + 2 + 3$ является суммарной характеристикой трех трубопроводов $1, 2, 3$ (см. рис. 7.9).

2. Параллельное соединение трубопроводов (рис. 7.11).

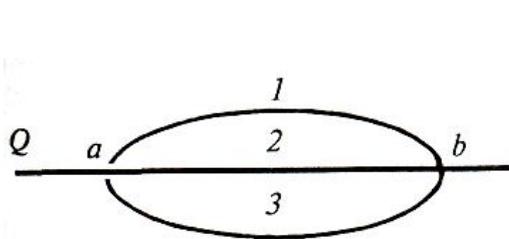


Рис. 7.11

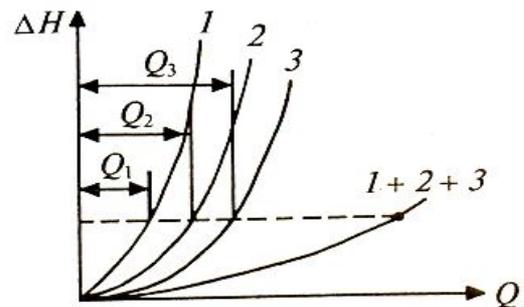


Рис. 7.12

В случае параллельного соединения при одном и том же напоре $\Delta H = \Delta H_1 = \Delta H_2 = \Delta H_3$ расходы складываются: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$.

Кривая $1+2+3$ на рис. 7.12 является суммарной характеристикой трубопроводов $1, 2, 3$, соединенных параллельно.

3. Последовательно-параллельное соединение (рис. 7.13).

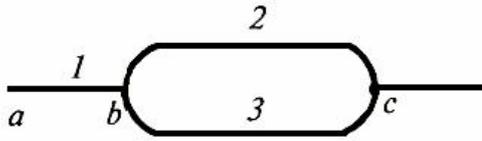


Рис. 7.13

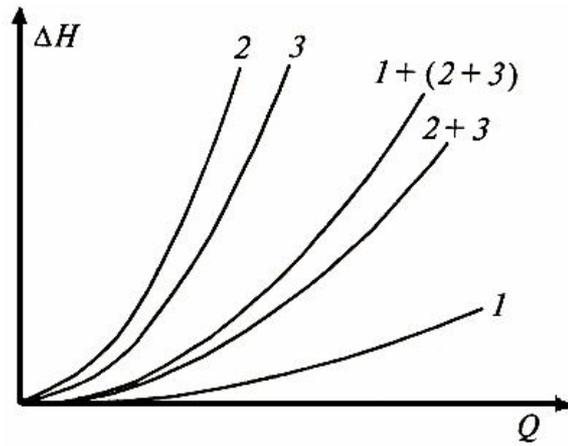


Рис. 7.14

Найти суммарную характеристику трубопровода $a - c$.

а) Складываем характеристики трубопроводов 2 и 3 как при параллельном соединении (рис. 7.14);

б) складываем характеристики трубопроводов 1 и 2 + 3 как при последовательном соединении.

Графическим методом легко решаются следующие задачи.

1. Зная общую потерю напора ΔH , можно найти расходы Q_1, Q_2, Q_3 .
2. Зная общий расход Q , можно найти потери напора на отдельных участках $\Delta H_1, \Delta H_2$ и ΔH_3 .

Метод гидравлических характеристик особенно важен при анализе работы центробежных нагнетателей на сеть.

§ 7.7. ГИДРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС НАСОСНОЙ УСТАНОВКИ

До сих пор рассматривались потоки, в которых происходила только потеря энергии жидкости. В более общем случае в систему трубопроводов включен насос, сообщаящий энергию жидкости (рис. 7.15).

Разность напоров

$$H_{\text{эфф}} = H_2 - H_1$$

называется эффективным напором насоса.

Тогда эффективная (полезная) мощность будет

$$N_{\text{эфф}} = H_{\text{эфф}} Q \gamma.$$

§ 7.8. СИФОННЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

Сифонным трубопроводом называют трубопровод, часть которого располагается выше уровней в питающем и приемном сосудах (рис. 7.16).

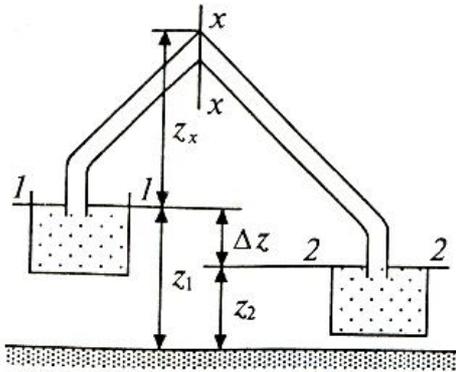


Рис. 7.16

Сифоны применяют для опорожнения водоемов, слива нефтепродуктов из цистерн и тому подобного. Для приведения сифона в действие из него необходимо предварительно удалить воздух. Это достигается либо путем отсасывания воздуха из верхней части сифона воздушным насосом, либо заполнением его жидкостью извне.

Очевидно, что в верхней точке сифона в сечении $x - x$ имеет место разрежение - вакуум. Наличие разрежения вызывает выделение из жидкости растворенного в ней воздуха, а при большом разрежении может начаться испарение самой жидкости (ее вскипание). Поэтому для нормальной работы сифона необходимо, чтобы давление в сечении $x - x$ не снижалось до того давления, при котором жидкость начнет испаряться при данной температуре. Испарение жидкости может приводить к разрыву столба жидкости и к срыву работы сифонного устройства.

Гидравлический расчет сифонных трубопроводов принципиально не отличается от расчета обычных трубопроводов - необходимо лишь производить проверку давления в наивысшей точке сифона - в сечении $x - x$.

Для определения давления p_x составим уравнение Бернулли для сечений $1-1$ и $x - x$, приняв за плоскость сравнения плоскость $1-1$:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_x + \frac{p_x}{\gamma} + \frac{v_x^2}{2g} + \sum h,$$

где $\sum h$ - сумма потерь напора на участке между сечениями $1-1$ и $x-x$.

Пренебрегая изменением скоростных напоров и учитывая, что $z_1 = 0$, получим

$$\frac{p_x}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} - z_x - \sum h.$$

Отсюда найдем p_x .

Теоретически для нормальной работы сифона достаточно, чтобы

$$p_x \geq p_{нас},$$

где $p_{нас}$ - упругость паров жидкости при данной температуре (давление насыщения). Так, например, для воды

при $t = 10^\circ\text{C}$ $p_{нас} = 0,012 \text{ кг/см}^2$,

при $t = 20^\circ\text{C}$ $p_{нас} = 0,024 \text{ кг/см}^2$.

Практически назначают p_x не менее 0,2-0,3 ата, чему соответствует наибольшая возможная высота $z_x = 6 - 7 \text{ м}$ в зависимости от величины потерь напора $\sum h$.

§ 7.9. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБАХ

Гидравлическим ударом называют резкое изменение давления в трубопроводе вследствие резкого изменения в нем скорости движения. Гидравлический удар может наблюдаться, например, при быстром закрывании запорных устройств, внезапной остановке насоса и т. п. При этом различают положительный удар, когда происходит повышение давления вследствие уменьшения скорости, и отрицательный удар, когда давление падает вследствие увеличения скорости.

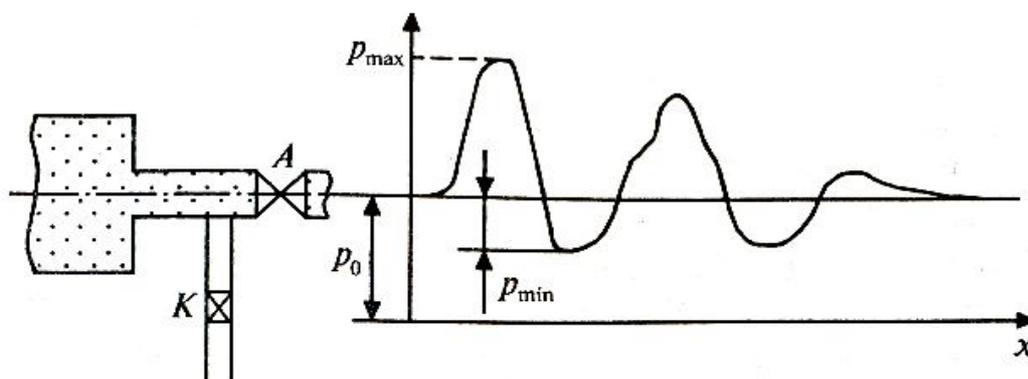


Рис. 7.17

Пусть в напорном трубопроводе с рабочим давлением жидкости p_0 будет внезапно закрыта задвижка A (рис. 7.17). Тогда в результате остановки жидкости произойдет резкое повышение давления в нем вследствие перехода кинетической энергии остановившихся слоев жидкости в потенциальную энергию - энергию давления. Остановка жидкости происходит не мгновенно, а в течение весьма малого отрезка времени Δt . В течение этого времени в часть объема $\omega\Delta x$ поступают продолжающие движение предыдущие слои жидкости.

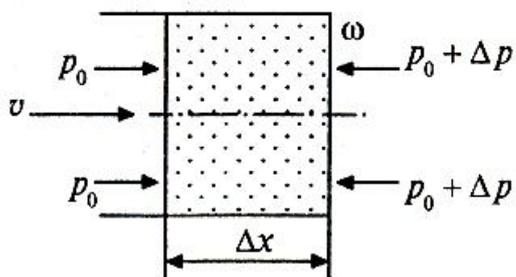


Рис. 7.18

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, найдем увеличение давления Δp при гидравлическом ударе (рис. 7.18). Изменение количества движения за время Δt будет

$$\rho\omega\Delta x v,$$

где $\rho\omega\Delta x$ - масса жидкости; ω - площадь сечения трубы, v - скорость движения жидкости до закрытия задвижки A (см. рис. 7.17).

Это изменение количества движения должно равняться импульсу силы

$$\Delta p\omega\Delta t = \rho\omega\Delta x v.$$

Отсюда

$$\Delta p = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} v;$$

обозначая $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, где c - скорость, с которой распространяется повышение давления (скоростное распространение ударной волны), получаем формулу для определения повышения давления

$$\boxed{\Delta p = \rho c v},$$

которая называется формулой Жуковского.

Величина скорости распространения ударов волны зависит от рода жидкости, материала и размеров трубы и определяется по формуле

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho} \frac{1}{1 + \frac{K d}{E \delta}}},$$

где K - модуль упругости жидкости;

ρ - плотность жидкости;

E - модуль упругости материала трубы;

d - диаметр трубы;

δ - толщина стенки трубы.

Повышение давления будет распространяться от задвижки к резервуару со скоростью c . После того как остановится последний слой жидкости у резервуара, вся жидкость в трубопроводе окажется сжатой. Но поскольку в этот момент давление в резервуаре будет меньше давления у задвижки, то жидкость придет в движение по направлению к резервуару. При этом давление жидкости, начиная от резервуара, начнет понижаться. Это понижение, распространяющееся со скоростью c в направлении к задвижке, называется обратной волной. Время пробега прямой и обратной ударных волн составляет длительность фазы гидравлического удара. Благодаря инерции массы жидкости, находящейся в трубопроводе, она продолжает двигаться по направлению к резервуару и после того, как движение у задвижки снизится до давления p_0 (рабочее давление при открытой задвижке A). Давление у задвижки продолжает снижаться и дальше до некоторого давления p_{\min} (см. рис. 7.17). Так как p_{\min} меньше, чем давление в резервуаре, то вновь начнется движение жидкости к задвижке и снова произойдет гидравлический удар, но уже меньшей силы ввиду того, что часть энергии жидкости будет потеряна на гидравлических сопротивлениях. Таким образом, при гидравлическом ударе имеют место затухающие колебания давления.

Для предотвращения гидравлического удара следует увеличивать время закрытия и открытия запорных устройств; устанавливать воздушные

колпаки, играющие роль буфера, смягчающего повышение давления; устанавливать специальный предохранительный клапан K (см. рис. 7.17), который сбрасывает часть жидкости из трубопровода, уменьшая тем самым уровень давления при гидравлическом ударе.

Предохранительный клапан при давлении p_0 находится в закрытом состоянии и открывается лишь при значительном возрастании давления в магистрали.

§ 7.10. КАВИТАЦИЯ

Кавитацией называют возникновение в движущейся жидкости областей, заполненных газом (паром). Причиной их образования является падение давления в жидкости до величин, меньших величин давления насыщения при данной температуре. При дальнейшем повышении давления может происходить конденсация с исчезновением (схлопыванием) пузырьков пара. При этом поверхности оборудования, вблизи которых находятся пузырьки пара, испытывают удар, что может приводить к их эрозии (выбиванию материала поверхности), повышенной вибрации оборудования, а также к его разрушению.

Кавитационные явления могут возникать в тех местных сопротивлениях, где наблюдается значительное увеличение скорости из-за сужения потока с последующим его расширением, например в трубках Вентури, диффузорах, соплах и т. д. (рис. 7.19).

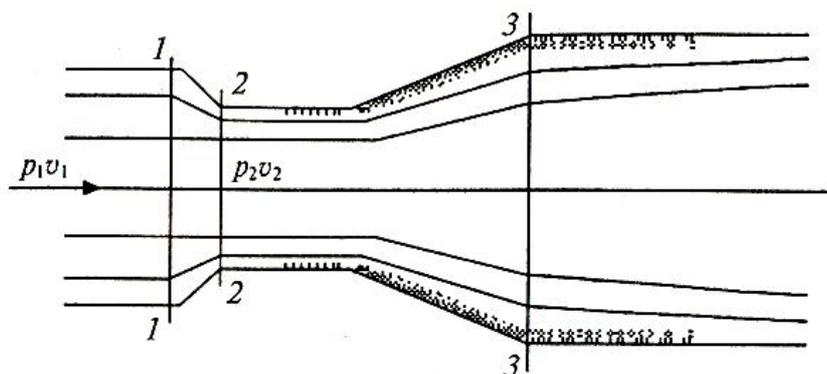


Рис. 7.19

В узкой части потока (сечение 2-2) происходит падение давления рис. 7.19 и создаются условия для возникновения кавитации. При дальнейшем расширении потока (сечение 3-3) происходит возрастание давления (так как уменьшается скорость) и может происходить схлопывание пузырьков.

Расчет кавитации сводится к определению минимального давления p_2 в узком сечении, равного давлению насыщения, при котором возникает кавитация. Для определения p_2 запишем уравнение Бернулли применительно к сечениям 1-1 и 2-2 (рис. 7.19), поместив плоскость сравнения по центру канала, т. е. $z_1 = z_2 = 0$:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Отсюда

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$$

или

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Кавитационные явления приводят к увеличению коэффициентов местных сопротивлений и, следовательно, местных потерь напора.

В качестве безразмерного критерия, определяющего кавитационные свойства местных сопротивлений, используют так называемое число кавитации σ :

$$\sigma = 2(p_1 - p_{кр}) / \rho v_1^2,$$

где p_1 , v_1 - давление и скорость перед местным сопротивлением; $p_{кр}$ - минимальное давление, при котором возникает кавитация (обычно оно равно давлению насыщения).

Величину давления парообразования $p_{кр}$ для различных жидкостей можно найти в физических справочниках. Ниже (табл.7.1) приведена величина $p_{кр}$ для воды.

Таблица 7.1

$t, ^\circ\text{C}$	200	100	40	20	4
$P_{кр}$ мм рт. ст.	11660	760	55,3	17	4

Из приведенных данных следует, что при $t = 20 ^\circ\text{C}$ вода закипает при давлении 17 мм рт. ст.

Кавитация возникает не только при движении жидкости в трубах и каналах, но и при внешнем обтекании тел, например на лопатках гидромашин, гребных винтов и т. п. При больших скоростях их вращения скорости течения среды могут быть настолько большими, что в некоторых областях давление падает до давления парообразования. Как следствие, возникает кавитация, которая приводит к увеличению сопротивления (потерь энергии), появлению вибрации и кавитационных шумов и, возможно, к разрушению конструкции. В связи с этим при проектировании гидромашин необходимо стремиться к обеспечению такого кавитационного числа σ , при котором кавитационные явления должны быть исключены.



Вопросы для самопроверки

1. В чем различие между гидравлически длинными и короткими трубопроводами?
2. Сформулируйте понятие простого и сложного трубопровода. Какие виды задач решаются при расчете простого трубопровода? Приведите пример решения одной из них.
3. В связи с чем в формулы для расхода и напора вводятся поправочные коэффициенты?
4. В чем гидравлические особенности работы трубопроводов из последовательно и параллельно соединенных труб?
5. Как учитываются области сопротивления при расчете последовательно соединенных труб?
6. Какие виды схем сложного трубопровода Вы рассмотрели? Опишите последовательности расчета одной из приведенных схем.
7. Раскройте понятие гидравлического удара. Приведите формулы для определения величины ударного давления при прямом гидравлическом

ударе и скорости ударной волны в трубе с абсолютно жесткими и деформируемыми стенками.



Примеры решения задач

Задача 1. Построить характеристики двух последовательно соединенных трубопроводов и найти их суммарную характеристику при следующих исходных данных (рис. 7.20): $d_1 = 0,2$ м; $d_2 = 0,4$ м; $l_1 = 20$ м; $l_2 = 15$ м; $k_{э1} = 0,15$ мм; $k_{э2} = 0,3$ мм, где $k_э$ - эквивалентная шероховатость. Потери напора в местных сопротивлениях не учитывать.

Решение. Потерю напора определяем по формуле

$$H = \left(1 + \sum \xi + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4}, \quad (7.2)$$

где

$$\sum \xi = 0; \quad \lambda = 0,11 \left(\frac{k_э}{d} \right)^{0,25}.$$

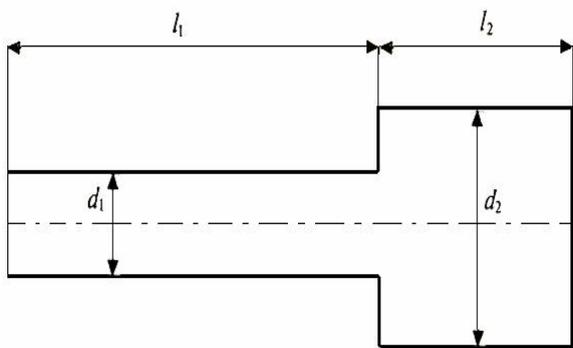


Рис. 7.20

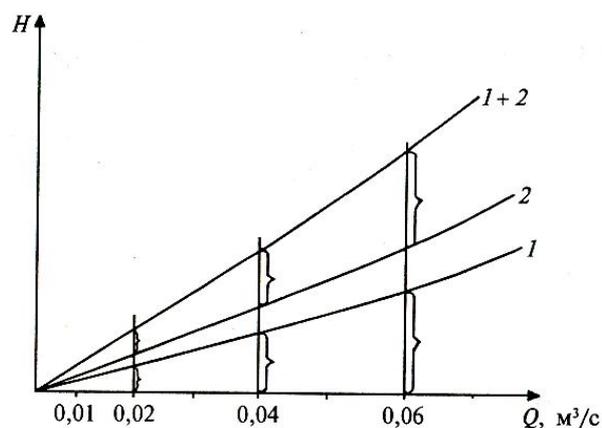


Рис.7.21

Задаваясь рядом значений Q , по формуле (7.2) находим потерю напора H . По этим результатам, строим характеристики первого и второго трубопроводов (1 и 2) (рис. 7.21). Затем находим их суммарную характеристику $1 + 2$ путем сложения потерь напора при неизменном расходе.

Задача 2. Определить необходимый напор для пропуска расхода $Q = 62,8$ л/с через трубопровод длиной $l = 1000$ м, $d = 200$ мм, трубы чугунные новые.

Решение.

1) Определяем среднюю скорость и сравниваем с $v_{\text{кв}}$.

$$v = Q/\omega = 0,0628/(3,14 \cdot 0,2^2/4) = 2 \text{ м/с} < v_{\text{кв}} = 3,1 \text{ м/с (см. приложение)}.$$

2) Так как зона сопротивления не квадратичная, то в формулу для необходимого напора следует ввести поправку θ_2 . Для данного случая $\theta_2=1,08$.

3) При расчете трубопроводов достаточно большой протяженности напор можно вычислить по формуле

$$H = \theta_2 \cdot Q^2 \cdot L \frac{1000}{K_{\text{кв}}^2},$$

где L - длина трубопровода, км; значения $\frac{1000}{K_{\text{кв}}^2}$

приведены в таблице (см. приложение); для данных условий $\frac{1000}{K_{\text{кв}}^2} = 0,00647$.

Таким образом, $H = 1,08 \cdot 62,8^2 \cdot 1 \cdot 0,00647 = 27,56$ м.

Задача 3. Определить необходимый напор, обеспечивающий подачу транзитного расхода $Q_t = 250$ л/с и расхода непрерывной раздачи воды $Q_p = 300$ л/с по трубопроводу длиной $l = 1200$ м и диаметром $d = 400$ мм (рис.7.22). Трубы нормальные.

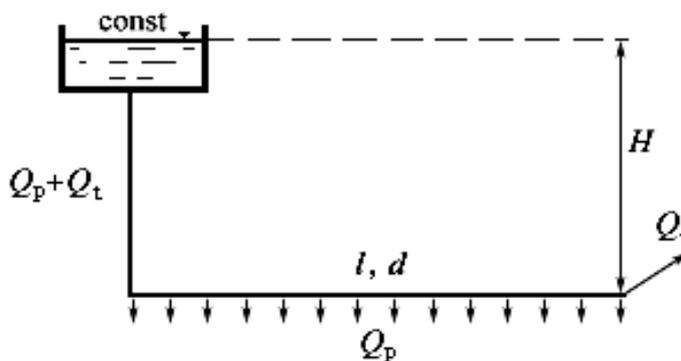


Рис.7.22

Решение.

1) Напор при непрерывном изменении расхода по длине определяется по формуле

$$H = \theta_2 \frac{Q_{\text{расч}}^2}{K_{\text{кв}}^2} l;$$

где $Q_{\text{расч}}$ – расчетный расход; $Q_{\text{расч}} = Q_t + 0,55Q_p = 250 + 0,55 \cdot 300 = 415$ л/с

2) Определяем среднюю расчетную скорость и сравниваем с $v_{\text{кв}}$.

$$v = Q_{\text{расч}} / \omega = 0,415 / 0,1257 = 3,3 \text{ м/с} > v_{\text{кв}} = 1,1 \text{ м/с (см. приложение),}$$

т.к. трубопровод работает в квадратичной зоне сопротивления, то $\theta_2 = 1$.

3) Таким образом

$$H = \theta_2 \frac{Q_{\text{расч}}^2}{K_{\text{кв}}^2} l = 1 \cdot \frac{415^2}{2140^2} \cdot 1200 = 45,13 \text{ м.}$$

Задача 4. Определить диаметр всасывающего трубопровода и предельную теоретическую высоту установки (всасывания) центробежного насоса типа К-45/30а с учетом и без учета запаса, обеспечивающего отсутствие кавитации, если насос перекачивает воду при температуре $t = 10$ °С, расход воды $Q = 35$ м³/ч, $n = 2900$ об/мин. Трубопровод стальной, длиной 10 м, абсолютная шероховатость $k(\Delta) = 1,5$ мм; на трубопроводе установлены: приемный (обратный) клапан с сеткой, два поворота (колена) 90 ° ($R = 2d$) и задвижка.

Решение. Внутренний диаметр трубопровода рассчитываем по формуле

$$d = \sqrt{4Q / (\pi v)} = 1,1284 \sqrt{Q / v},$$

принимая скорость $v = 1,5$ м/с

$$d = 1,1284 \sqrt{35 / (1,5 \cdot 3600)} = 0,0908 \text{ м.}$$

Принимаем к установке трубопровод $d_{\text{н}} \times S = 89 \times 3$ мм ($d = 0,083$ м) и определяем фактическую скорость движения воды по формуле

$$v = 4Q / (\pi \cdot d \cdot 3600) = 4 \cdot 35 / (3,1416 \cdot 0,083^2 \cdot 3600) = 1,8 \text{ м/с.}$$

Рассчитываем число $Re = v d / \nu$

$$Re = 1,8 \cdot 0,083 / (1,306 \cdot 10^{-6}) = 114395.$$

Режим движения турбулентный, $Re > 500$ $\frac{d}{k} = 27667$.

Коэффициент гидравлического трения λ определяем по формуле Шифринсона

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k}{d} \right)^{0,25} = 0,11 \left(\frac{0,0015}{0,083} \right)^{0,25} = 0,0403.$$

Сумма коэффициентов местных сопротивлений

$$\sum \xi_m = \xi_{кл} + 2\xi_{кол} + \xi_{завд.} = 6 + 2 \cdot 0,7 + 0,5 = 7,9.$$

Рассчитываем потери напора во всасывающем трубопроводе по Формуле

$$\Delta h_c^{1-2} = \Delta h_{д}^{1-2} + \Delta h_{м}^{1-2} = \left(\lambda \frac{L}{d} + \sum \xi_m^{1-2} \right) \frac{v^2}{2g}.$$

$$\Delta h_c = (0,0403 \cdot 10 / 0,083 + 7,9) \cdot 1,8^2 / (2 \cdot 9,81) = 2,11 \text{ м вод. ст.}$$

Определяем предельную теоретическую высоту установки насоса без учета запаса, обеспечивающего отсутствие кавитации по формуле

$$Z_H = \frac{p_{ат}}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} - \frac{\alpha_2 v^2}{2g} - \Delta h_c \quad (\text{принимаем } p_2 / \rho g = p_H / \rho g).$$

$$z_H = \frac{101325}{999,7 \cdot 9,81} - 0,12 - \frac{1,1 \cdot 1,8^2}{2 \cdot 9,81} - 2,11 = 7,92 \text{ м.}$$

Рассчитываем кавитационный запас напора $\Delta h_{кав}$ для центробежного насоса по следующей приближенной формуле

$$\Delta h_{кав} = \sigma \cdot H_H = (0,001218 \cdot n^{4/3} \cdot Q^{2/3} / H_H) \cdot H_H.$$

Здесь σ – коэффициент кавитации; H_H – полный напор, развиваемый насосом, м вод. ст. ; n – число оборотов в минуту; Q – производительность насоса, м³/с.

$$\Delta h_{кав} = 0,001218 \cdot 2900^{4/3} \cdot 0,00972^{2/3} = 2,29 \text{ м.}$$

Определяем высоту установки насоса с учетом запаса, обеспечивающего отсутствие кавитации

$$Z_{н.фак.} = Z_H - \Delta h_{кав} = 7,92 - 2,29 = 5,63 \text{ м.}$$



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. По горизонтальному участку трубопровода ($D = 820$ мм, $\delta = 10$ мм, $L = 120$ км) перекачивают жидкость ($\nu = 25$ сСт) с расходом 2000 м³/ч. Для увеличения пропускной способности участка Q на 20%, решено параллельно основному трубопроводу проложить дополнительный трубопровод с диаметром, равным диаметру основного. Определить длину дополнительного трубопровода.

Задача 2. В трубопроводе ($D = 720$ мм, $\delta = 10$ мм, $E_{ст} = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па) произошло мгновенное (аварийное) перекрытие магистрали. Рассчитать повышение давления перед задвижкой и понижение давления после нее в первую секунду после закрытия, если вязкая жидкость, которую перекачивают по трубопроводу с расходом 2200 м³/ч, имеет следующие параметры: $\rho = 875$ кг/м³, $E = 1350$ МПа.

Задача 3.

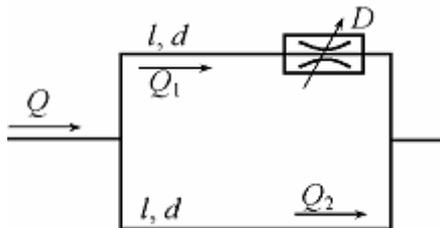


Рис.7.23

Расход в основной гидролинии $Q = 3$ л/с. Определить расходы Q_1 и Q_2 в параллельных одинаковых по длине и диаметру трубах ($l = 1$ м, $d = 10$ мм), если в одной из них установлен дроссель D с коэффициентом сопротивления $\zeta = 9$. Коэффициент сопротивления трения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,03$ (рис.7.23).

Задача 4.

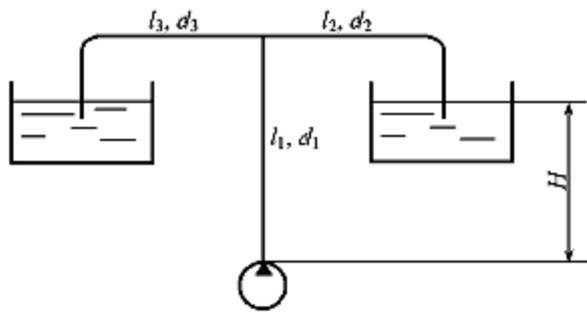


Рис.7.24

Определить давление, с которым работает насос, перекачивающий минеральное масло ($\rho = 800 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 1 \text{ Ст}$), если $H = 1,5 \text{ м}$, $l_1 = 10 \text{ м}$, $l_2 = 5 \text{ м}$, $l_3 = 6 \text{ м}$, $d_1 = 10 \text{ мм}$, $d_2 = d_3 = 8 \text{ мм}$, а расход $Q_2 = 0,1 \text{ л/с}$ (рис. 7.24).

Задача 5.

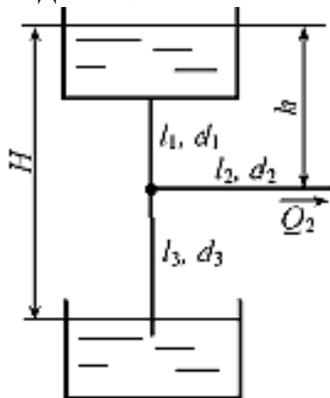


Рис.7.25

Из верхнего водонапорного бака вода с расходом $Q_2 = 5 \text{ л/с}$ поступает в атмосферу и в нижний бак по стальным трубам длинами $l_1 = 30 \text{ м}$, $l_2 = l_3 = 25 \text{ м}$, $d_1 = 75 \text{ мм}$, $d_2 = d_3 = 50 \text{ мм}$. Определить расходы Q и Q_3 , напор H , если $h = 7 \text{ м}$ (рис. 7.25).

ГЛАВА 8.

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

Три пути ведут к знанию:

путь размышления - это путь самый благородный,

путь подражания - это путь самый легкий и

путь опыта - это путь самый горький.

Конфуций

§ 8.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИСТЕЧЕНИЯ. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ МАЛОЕ ОТВЕРСТИЕ В ТОНКОЙ СТЕНКЕ

Истечение жидкостей из отверстий и насадков имеет большое практическое значение, поскольку они применяются при решении многих технических задач. Например, в различных двигателях внутреннего сгорания при подаче топлива, при опорожнении цистерн и различных ёмкостей, при конструировании сопел и форсунок, где необходима строгая дозировка и расход жидкости, а также гидромониторных и эжекторных установках, разрабатывающих грунты, гидротехнических сооружениях, содержащих затворы или отверстия для сброса воды.

Истечение жидкости может происходить при постоянном и переменном напорах, через малое или большое отверстие, через насадки различной конструкции. Кроме того, истечение может быть свободным в атмосферу или вакуум и под уровень (затопленное истечение).

Задача об истечении жидкостей через отверстия сводится к определению скорости истечения и расхода вытекающей жидкости.

Рассмотрим случай истечения жидкости из малого отверстия в тонкой стенке при постоянном напоре (рис. 8.1). Стенка считается тонкой, если ее толщина $\delta < 0,2d$, где d - диаметр отверстия.

Отверстие считается малым, если $n = \omega/\omega_1 < 0,1$, где ω - площадь сечения отверстия; ω_1 - площадь поперечного сечения сосуда (рис. 8.2).

При истечении жидкости из отверстия в тонкой стенке на некотором расстоянии от стенки образуется сжатие струи, так что $\omega_c < \omega$, где ω_c - площадь струи в сжатом сечении. Для оценки степени сжатия вводят коэффициент сжатия $\varepsilon = \omega_c / \omega$. Для отверстий с острой кромкой $\varepsilon = 0,60 - 0,64$. Кроме того, струя, вытекающая из отверстия, не сохраняет его форму, а вследствие действия сил поверхностного натяжения деформируется. Так, например, струя, вытекающая из треугольного отверстия, принимает форму треугольной звезды, а из круглого отверстия - форму эллипса. Явление деформации струи под действием сил поверхностного натяжения носит название инверсии струи. Условия сжатия струи оказывают значительное влияние на пропускную способность отверстия. Различают совершенное и несовершенное сжатие.

Совершенным сжатием называют такое, при котором отверстие достаточно удалено от стенок сосуда или уровня жидкости в сосуде и они не влияют при этом на условия сжатия струи. Опытами установлено, что совершенное сжатие наблюдается лишь в тех случаях, когда расстояние от стенок до отверстия не меньше утроенной длины соответствующего размера отверстия. Например, для круглого отверстия это расстояние должно быть не менее трех диаметров отверстия.

Несовершенным сжатием называют такое, при котором отверстие находится на близком расстоянии от стенок сосуда и от уровня жидкости в сосуде.

Сжатие называют полным, если струя испытывает сжатие со всех сторон; неполным,- если струя не имеет сжатия с одной или нескольких сторон.

Выведем формулу для расхода жидкости, проходящей через отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре (см. рис. 8.2). Для этого составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2, приняв за плоскость сравнения плоскость 0-0 ($z_2 = 0$).

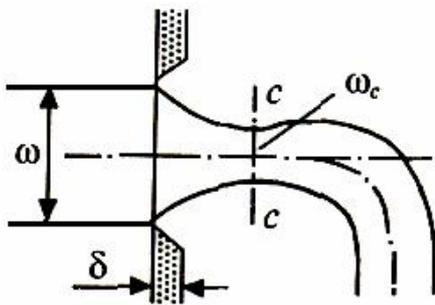


Рис.8.1

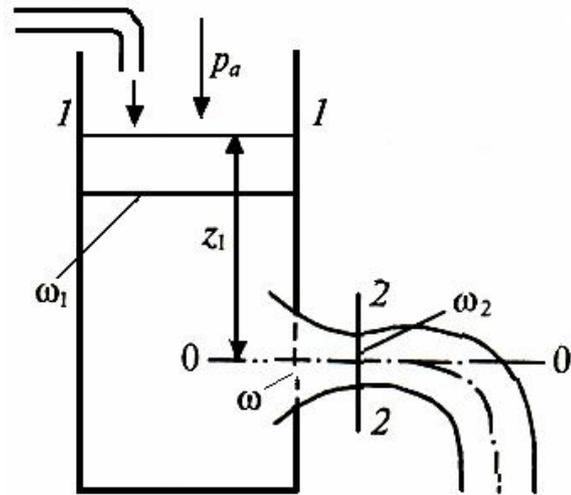


Рис.8.2

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \xi \frac{v_2^2}{2g}.$$

Учитывая, что $p_1 = p_2 = p_a$ (p_a - атмосферное давление) и обозначая начальный напор через

$$H_0 = z_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \cong z_1,$$

так как $v_1 \approx 0$, получим

$$H_0 = (\alpha_2 + \xi) \frac{v_2^2}{2g}.$$

Или

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \xi}} \sqrt{2gH_0}.$$

Обозначая

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \xi}},$$

где φ - коэффициент скорости, получим

$$v_2 = \varphi \sqrt{2gH_0}.$$

Коэффициент скорости в общем случае учитывает неравномерность распределения скоростей в суженном сечении и гидравлические потери ($\varphi < 1$).

При $\alpha_2 = 1$ и отсутствии гидравлических потерь $\xi = 0$ получается значение так называемой теоретической скорости истечения:

$$\boxed{v_T = \sqrt{2gH_0}},$$

где $\varphi = 1$, поэтому $\frac{v_2}{v_T} = \varphi$.

Таким образом, коэффициент скорости φ есть отношение действительной скорости истечения к теоретической. Расход определяется из соотношения

$$Q = \omega_2 v_2.$$

Или с учетом $\omega_2 = \varepsilon \omega$,

$$Q = \varepsilon \varphi \omega \sqrt{2gH_0}.$$

Произведение двух коэффициентов $\mu = \varepsilon \varphi$ называют коэффициентом расхода. Он определяется опытным путем. Отсюда формула для расхода примет вид

$$\boxed{Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0}}. \quad (8.1)$$

Траектория полёта струи при истечении жидкости при небольших скоростях и небольших высотах падения, когда можно пренебречь сопротивлением окружающего струю воздуха и принять форму струи параболической, показана на рис. 8.2а.

Без большой погрешности можно считать, что частица жидкости за сжатым сечением *n-n* движется по инерции: по оси *x* – равномерно, по оси *z* – равноускоренно, поэтому закон движения частицы жидкости можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 l &= vt; \\
 l &= \varphi \sqrt{2gHt}; \\
 \Delta z &= \frac{gt^2}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{8.2}$$

Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta z}{g}}.$$

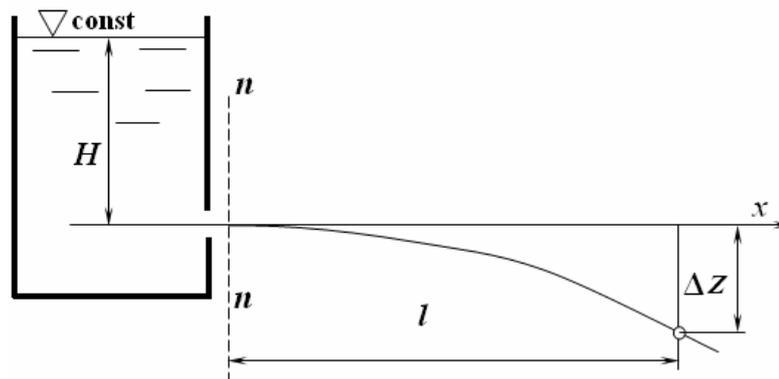


Рис. 8.2а

Подставляя выражение t в формулу (8.2), получим

$$l = \varphi \sqrt{2gH} \sqrt{\frac{2\Delta z}{g}}.$$

Отсюда

$$\Delta z = \frac{l^2 g}{2\varphi^2 2gH} = \frac{l^2}{4\varphi^2 H}. \tag{8.3}$$

Решая выражение (8.3) относительно коэффициента скорости, находим

$$\varphi = \frac{l}{2\sqrt{\Delta z H}} \tag{8.4}$$

Чтобы определить φ , надо измерить дальность полёта струи l , высоту падения Δz и напор H .

Расход жидкости равен произведению скорости в сжатом сечении на площадь живого сечения:

$$Q = \omega_c v$$

Подставляя вместо ω_c и v их значения, имеем:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{ВХ}} - \varepsilon^2 n^2}} \varepsilon \omega \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}$$

Введём обозначение

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \xi_{\text{ВХ}} - \varepsilon^2 n^2}} = \varphi \varepsilon, \quad (8.5)$$

где μ – коэффициент расхода.

С учётом обозначений в формуле (8.5) получим

$$Q = \mu \omega \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}$$

Так как для малых отверстий коэффициент сжатия $\varepsilon = 0,64$, а коэффициент скорости $\varphi = 0,97$, то, в соответствии с формулой (8.5),

$$\mu = \varphi \varepsilon = 0,64 \cdot 0,97 = 0,62.$$

Коэффициенты ε , ξ , φ и μ зависят, в первую очередь, от типа отверстия или насадка, а также, как все безразмерные коэффициенты в гидравлике, от основного критерия гидродинамического подобия – числа Re .

Характер изменения коэффициентов ε , φ и μ для круглого отверстия от $Re_{\text{и}}$, подсчитанного по идеальной скорости истечения

$$Re_{\text{и}} = \frac{V_{\text{и}} d}{\nu} = \frac{\sqrt{2gH} d}{\nu},$$

представлен на Рис. 31.

Из графика видно, что с увеличением $Re_{\text{и}}$, то есть с уменьшением влияния сил вязкости, коэффициент φ возрастает в связи с уменьшением коэффициента сопротивления ξ , а коэффициент ε уменьшается вследствие уменьшения торможения жидкости у кромки отверстия и увеличения радиусов кривизны поверхности струи на ее участке от кромки до начала цилиндрического участка. Значения коэффициентов φ и ε при этом

асимптотически приближаются к значениям, соответствующим истечению идеальной жидкости, то есть при $Re_{и} \rightarrow \infty$ значения $\varphi \rightarrow 1$, а $\varepsilon \rightarrow 0,6$. Коэффициент расхода μ с увеличением $Re_{и}$ сначала увеличивается, что обусловлено крутым возрастанием φ , а затем, достигнув максимума ($\mu_{max} = 0,69$ при $Re_{и} = 350$), уменьшается в связи со значительным падением ε и при больших значениях $Re_{и}$ практически стабилизируется на значении $\mu = 0,60 \div 0,61$.

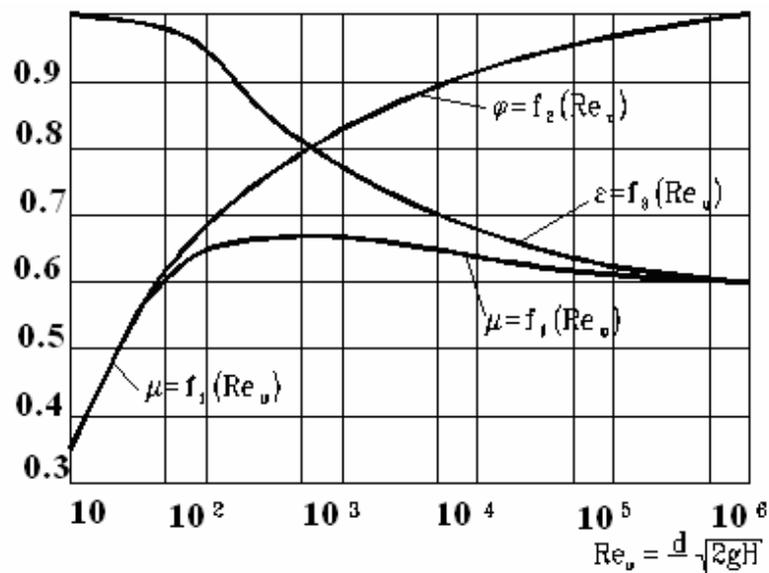


Рис. 8.2б. Зависимость ε , φ и μ от $Re_{и}$ для круглого отверстия в тонкой стенке

В области весьма малых значений $Re_{и}$ ($Re_{и} < 25$) роль вязкости настолько велика, а торможение у кромки столь значительно, что сжатие струи отсутствует ($\varepsilon = 1$) и $\mu = \varphi$. В этом случае можно пользоваться формулой из теоретического решения Вюста

$$\mu = \sqrt{\frac{156}{Re_{и}^2} + 1} - \frac{12,5}{Re_{и}}.$$

Для маловязких жидкостей (воды, бензина, керосина и т. п.), истечение которых обычно происходит при больших числах Re , коэффициенты истечения изменяются в узких пределах. Обычно в расчет берутся следующие осредненные значения: ($\varepsilon = 0,64$; $\varphi = 0,97$; $\mu = 0,62$; $\xi = 0,065$).

§ 8.2. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ БОЛЬШОЕ ОТВЕРСТИЕ

При истечении из отверстия больших размеров в боковой стенке сосуда напор H неодинаков во всем сечении отверстия. Для точек нижней части сечения он больше, а в верхней - меньше.

Однако давление во всех точках вытекающей струи будет одинаковым (при истечении в атмосферу оно будет равно атмосферному давлению), что не соответствует распределению давления по гидростатическому закону. В связи с этим уравнение Бернулли здесь можно применить не ко всей струе в целом, а лишь к отдельным элементарным струйкам. Чтобы определить среднюю скорость истечения и расход жидкости, площадь поперечного сечения отверстия подразделяется на элементарные площади и для каждой из них находится элементарный расход. Полный расход определяется суммированием элементарных расходов по всему сечению.

Пусть a и b - высота и ширина бокового отверстия в тонкой стенке некоторой емкости (рис. 8.3).

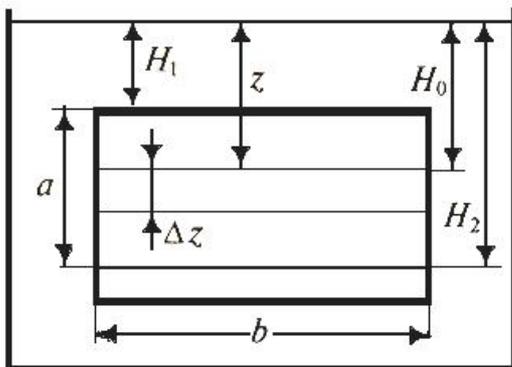


Рис. 8.3

Разобьем площадь поперечного сечения отверстия на полоски высотой dz .

Элементарный расход через такую полоску сечением $dz b$ согласно формуле (8.1) будет

$$dQ = \mu \cdot b \cdot dz \sqrt{2gz},$$

где μ - коэффициент расхода для малого отверстия.

Принимая $\mu = \text{const}$ и считая, что скорость на свободной поверхности $v_0 = 0$, получим

$$\begin{aligned} Q &= \mu b \int_{H_1}^{H_2} \sqrt{2gz} dz = \mu b \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} z^{1/2} dz = \mu b \sqrt{2g} \frac{2}{3} \Big|_{H_1}^{H_2} z^{3/2} = \\ &= \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Обозначая через H_0 полный напор над центром тяжести отверстия, найдем $H_2 = H_0 + a/2$ и $H_1 = H_0 - a/2$. Разлагая члены вида $\left(H_0 \pm \frac{a}{2}\right)^{3/2}$ по формуле

бинома Ньютона, будем иметь (ограничимся четырьмя членами разложения):

$$\begin{aligned}\left(H_0 + \frac{a}{2}\right)^{3/2} &= H_0^{3/2} + \frac{3}{2}H_0^{1/2} \frac{a}{2} + \frac{3}{8}H_0^{-1/2} \frac{a^2}{4} - \frac{3}{48}H_0^{-3/2} \frac{a^3}{8}; \\ \left(H_0 - \frac{a}{2}\right)^{3/2} &= H_0^{3/2} - \frac{3}{2}H_0^{1/2} \frac{a}{2} + \frac{3}{8}H_0^{-1/2} \frac{a^2}{4} + \frac{3}{48}H_0^{-3/2} \frac{a^3}{8}.\end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, выражение, заключенное в скобки в формуле (8.6), примет вид

$$\left(H_0 + \frac{a}{2}\right)^{3/2} - \left(H_0 - \frac{a}{2}\right)^{3/2} = \frac{3}{2}H_0^{1/2}a \left(1 - \frac{1}{96} \frac{a^2}{H_0^2}\right). \quad (8.7)$$

Второй член в скобке обычно мал по сравнению с единицей и им можно пренебречь. Тогда формула (8.6) с учетом (8.7) примет вид

$$Q = \frac{2}{3} \mu b a \frac{3}{2} \sqrt{2gH_0}^{1/2} \quad (8.8)$$

или

$$Q = \mu ab \sqrt{2gH_0}.$$

Учитывая, что $ab = \omega$, получим

$$\boxed{Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0}},$$

где ω - площадь сечения отверстия.

Эта формула имеет тот же вид, что и формула для определения расхода при истечении жидкости из малого отверстия в тонкой стенке (см. § 8.1).

Допущения, принятые при выводе формулы (8.8), корректируются уточнением коэффициента расхода μ . Как показывают опыты, этот коэффициент существенно зависит от формы, размеров отверстия и напора. Так, с увеличением размеров отверстия коэффициент расхода уменьшается, с увеличением напора уменьшается влияние размера отверстия на коэффициент расхода.

§ 8.3. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ЗАТОПЛЕННОЕ ОТВЕРСТИЕ

Рассмотрим открытый сосуд, разделенный перегородкой на два отделения с разными уровнями жидкости (рис. 8.4).

В перегородке имеется отверстие, через которое жидкость перетекает из одной части сосуда в другую.

Требуется определить скорость истечения жидкости через отверстие и ее расход.

Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и с-с (примем для простоты $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$):

$$z_1 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_c}{\gamma} + \frac{v_c^2}{2g} + \xi \frac{v_c^2}{2g}.$$

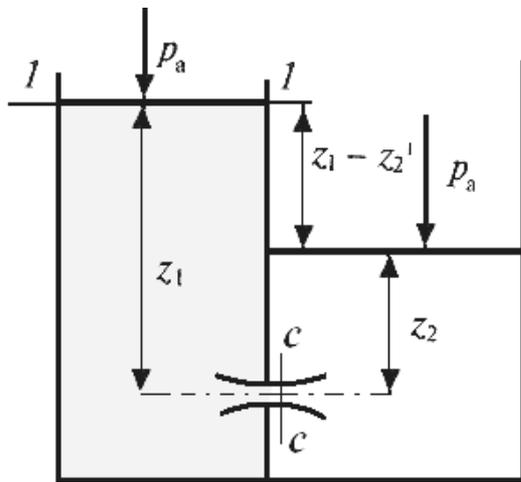


Рис. 8.4

Учитывая, что по формуле гидростатического давления

$$p_c = p_a \gamma z_2$$

принимая $v_1=0$ вследствие ее малости, получим

$$z_1 + \frac{p_a}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + z_2 + \frac{v_c^2 p_a}{2g} (1 + \xi).$$

Отсюда

$$v_c = \varphi \sqrt{2g(z_1 - z_2)},$$

где $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}}$.

Расход жидкости через отверстие определяется по формуле

$$Q = \omega_c v_c, \quad (8.5)$$

где ω_c - площадь струи в узком сечении.

Учитывая, что $\omega_c = \varepsilon \omega$ (см. § 8.1), где ω - площадь сечения отверстия, формула (8.5) будет

$$Q = \varepsilon \varphi \omega \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

Так как $\varepsilon \varphi = \mu$, где μ - коэффициент расхода, то

$$Q = \mu \omega \sqrt{2g(z_1 - z_2)}.$$

Опыт показывает, что коэффициент расхода μ для затопленных и незатопленных отверстий практически одинаков.

§ 8.4. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАПОРЕ

Истечение при переменном напоре является, по сути дела, неустановившимся движением жидкости. Ограничимся случаем, когда такое движение можно приближенно считать установившимся, т. е. пренебречь силами инерции. Рассмотрим простейший случай опорожнения резервуара, имеющего площадь живого сечения Ω (рис. 8.5).

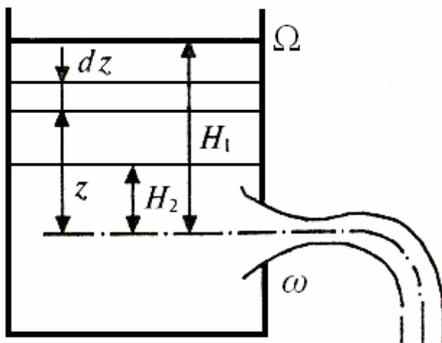


Рис. 8.5

Или иначе

$$dV = -\Omega dz,$$

где знак минус взят потому, что dz - отрицательно, а dV принимаем положительным.

Тогда

$$-\Omega dz = \mu \omega \sqrt{2gz} dt.$$

Отсюда

$$dt = -\frac{2\Omega}{\mu \omega \sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Интегрируя, получим

$$t = -\frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} z^{-1/2} dz = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} z^{-1/2} dz = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}).$$

Время полного опорожнения получим, положив $H_2 = 0$:

$$t = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}}. \quad \text{Или} \quad t = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega\sqrt{2gH}} = \frac{2V}{Q} = 2t_1,$$

где V - объем резервуара; Q - расход жидкости при начальном напоре H_1 , т. е. время опорожнения сосуда при переменном напоре в 2 раза больше того времени, которое требуется для вытекания жидкости при начальном напоре H_1 в количестве, равном первичному объему V_1 .

§ 8.5. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ НАСАДКИ

Насадкой называют короткий патрубок, присоединенный к отверстию в тонкой стенке. Длина патрубка $l = (3 \div 4)d$, где d – диаметр отверстия.

Насадки делят на три основных типа: цилиндрические (рис. 8.6, 8.7), конические (рис. 8.8; 8.9), коноидальные (рис. 8.10).

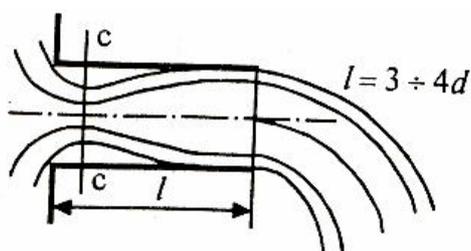


Рис. 8.6

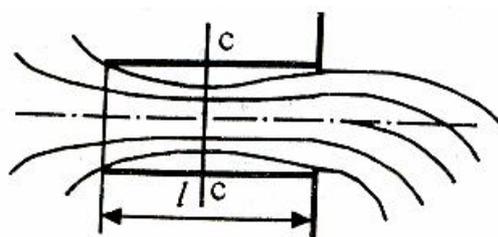


Рис. 8.7

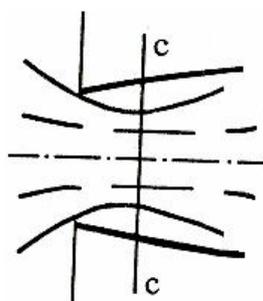


Рис. 8.8

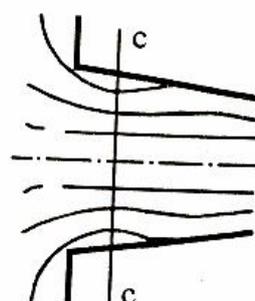


Рис. 8.9

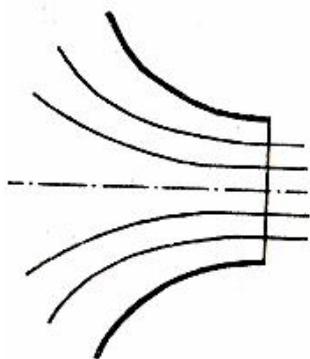


Рис. 8.10

Цилиндрические насадки делят на внешние (рис. 8.6) и внутренние (рис. 8.7). **Внешним цилиндрическим насадком** называется короткая трубка длиной, равной нескольким диаметрам без закругления входной кромки. На практике такой насадок часто получается в тех случаях, когда выполняют сверление в толстой стенке и не обрабатывают входную кромку.

Истечение через такой насадок в жидкую среду может происходить двояко. Первый режим истечения показан на рисунках 8.11а и 8.11б, а второй на 8.11в. При первом режиме струя после входа в насадок сжимается примерно так же, как и при истечении через насадок в тонкой стенке. Затем вследствие взаимодействия сжатой части струи с окружающей ее завихренной жидкостью, струя постепенно расширяется до размеров отверстия и из насадка выходит полным сечением. Этот режим истечения называют безотрывным.

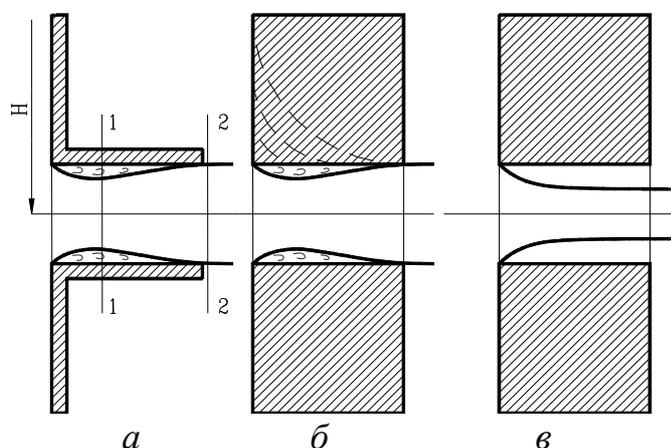


Рис.8.11

Так как на выходе из насадка диаметр струи равен диаметру отверстия, то $\varepsilon = 1$ и, следовательно, $\mu = \varphi$. Осредненные значения коэффициентов для этого режима истечения маловязких жидкостей (при больших Re) следующие:

$$\mu = \varphi = 0,8; \xi = 0,5.$$

В этом режиме истечения, который по сравнению с истечением из отверстия в тонкой стенке, расход получается больше из-за отсутствия сжатия струи на выходе из насадка, а скорость меньше вследствие большего сопротивления. Для вычисления коэффициента расхода при безотрывном истечении можно рекомендовать следующую эмпирическую формулу:

$$\mu = \frac{1}{1,23 + \frac{58 l}{\text{Re } d}}.$$

Из формулы следует, что при $\text{Re} \rightarrow \infty \mu = \mu_{\max} = 0,813$.

Минимальная относительная длина насадка l/d , при которой может реализоваться первый режим истечения, приблизительно равна 1. Однако, и при достаточных значениях l/d не всегда возможен этот режим.

Найдем давление внутри насадка и условие, при котором возможен безотрывный режим истечения.

Пусть истечение происходит под действием давления p_0 в среду газа с давлением p_2 . Расчетный напор в этом случае равен

$$H = \frac{p_0 - p_2}{g\rho}.$$

Так как давление на выходе из насадка p_2 , в суженном сечении 1–1, где скорость больше, давление $p_1 < p_2$. При этом, чем больше напор H , а значит и расход Q , тем меньше давление p_2 . Разность давлений $p_2 - p_1$ растет пропорционально напору H . Запишем уравнение Бернулли и убедимся в этом:

$$\frac{p_1}{g\rho} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{g\rho} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g},$$

где последний член уравнения – потеря напора на расширение потока, которое в данном случае происходит примерно, так же как и при внезапном расширении трубопровода.

Отношение скоростей

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Исключим из уравнения Бернулли v_1 с помощью этого соотношения и заменим $v_2 = \varphi\sqrt{2gH}$ и найдем падение давления внутри насадка:

$$p_2 - p_1 = \varphi^2 \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 \right] g\rho H = 2\varphi^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) g\rho H.$$

Подставив $\varphi = 0,8$ и $\varepsilon = 0,63$, получим $p_2 - p_1 \approx 0,75g\rho H$.

При некотором критическом значении напора $H_{кр}$ абсолютное давление внутри насадка становится равным давлению насыщенных паров, поэтому

$$H_{кр} \approx \frac{p_2 - p_{н.п.}}{0,75g\rho} \quad \text{или} \quad H_{кр} \approx \frac{p_2}{0,75g\rho},$$

если пренебречь величиной давления насыщенных паров. Следовательно, при $H > H_{кр}$ давление p_1 должно стать отрицательным, что быть не может, поэтому безотрывный режим истечения при $H > H_{кр}$ становится невозможным и, происходит переход ко второму режиму истечения.

Второй режим истечения характеризуется тем, что струя после сжатия уже не расширяется, а сохраняет цилиндрическую форму и перемещается внутри насадка, не касаясь его стенок. Истечение становится точно таким же, как из отверстия в тонкой стенке. Поэтому, при переходе от безотрывного режима истечения к отрывному, происходит увеличение скорости и уменьшение расхода. Если через внешний цилиндрический насадок происходит истечение воды в атмосферу, то

$$H_{кр} = \frac{p_a}{0,75g\rho} = \frac{10,33}{0,75} \approx 14 \text{ м.}$$

Если при втором режиме истечения уменьшить напор, то этот режим сохранится вплоть до самых малых H . Это значит, что второй режим

истечения возможен при любых напорах, а при $H < H_{кр}$ возможны оба режима истечения.

При истечении через цилиндрический насадок под уровень первый режим не будет отличаться от описанного выше, но, когда абсолютное давление при увеличении H упадет до давления насыщенных паров, перехода ко второму режиму не будет, а наступает кавитационный режим, при котором расход перестает зависеть от противодействия p_2 , то есть проявляется эффект стабилизации. При этом, чем меньше относительное противодействие

$$\bar{p} = \frac{p_2}{p_0} = \frac{p_{вых}}{p_{вх}},$$

тем шире область кавитации внутри насадка и тем меньше коэффициент расхода μ .

Таким образом, внешний цилиндрический насадок имеет существенные недостатки: на первом режиме – большое сопротивление и недостаточно высокий коэффициент расхода, а на втором – очень низкий коэффициент расхода. Кроме того, двойственность режима истечения в газовую среду при $H < H_{кр}$, двузначность расхода при данном H и возможность кавитации при истечении под уровень.

Внешний цилиндрический насадок может быть значительно улучшен путем закругления входной кромки или устройства конического входа с углом конусности около 60° . Чем больше радиус закругления, тем ниже коэффициент сопротивления и выше коэффициент расхода. В пределе, при радиусе, равном толщине стенки, такой насадок приближается к коноидальному насадку, или соплу.

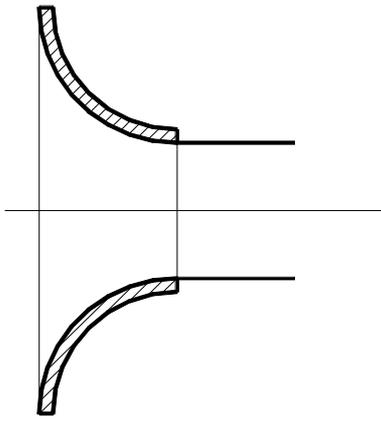


Рис. 8.12

Конический насадок (сопло), представленный на рис.8.12, очерчивается приблизительно по форме естественно сжимающейся струи и благодаря этому обеспечивает безотрывность течения внутри насадка и параллельноструйность в выходном его сечении.

Это широко распространенный насадок, так как он имеет коэффициент расхода, близкий к 1 и очень малые потери, а также устойчивый режим течения без кавитации. Для него $\xi = 0,03 \div 0,1$; $\mu = \varphi = 0,96 \div 0,99$.

Диффузорный насадок (рис. 8.13) – это комбинация сопла и диффузора. Добавление к соплу диффузора приводит к снижению давления в узком месте насадка, и следовательно, к увеличению скорости и расхода жидкости через него.

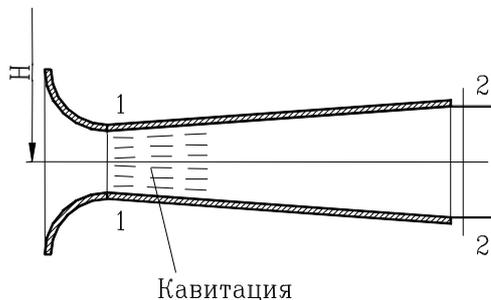


Рис. 8.13

При том же диаметре узкого сечения, что и у сопла, и том же напоре диффузорный насадок может дать значительно больший расход (до 2,5 раза), чем сопло.

Однако, использовать такой насадок можно только при малых напорах (1 ÷ 4 м), так как иначе в узком месте насадка возникает кавитация.

Следствием кавитации является большое сопротивление и снижение коэффициента расхода (при больших напорах – в 2 раза).

Внутренний цилиндрический насадок – трубка, закрепленная с внутренней стороны стенки (рис.8.7). Для него характерны также два режима истечения, как и для внешнего, но в связи с тем, что жидкость при входе в

насадок меняет направление движения в большей степени (вплоть до 180°), то сжатие струи получается более значительным ($\varepsilon = 0,5$), больше получается и коэффициент сопротивления $\xi = 1$, а коэффициент расхода меньше, чем у внешнего насадка: $\mu = 0,71$.

При движении жидкости внутри насадки образуется сжатое сечение с - с, в области которого наблюдается вакуум. Образование вакуума объясняется тем, что скорость в сжатом сечении больше, чем скорость в месте выхода струи из насадки. Как показывает опыт, при применении цилиндрических насадок пропускная способность увеличивается по сравнению с тонким отверстием того же диаметра. Увеличение пропускной способности и является основным назначением этих насадок.

Конические насадки бывают двух типов - расходящиеся (рис. 8.8) и сходящиеся (рис. 8.9).

В конических расходящихся насадках также создается вакуум.

При большом угле конусности возможен отрыв потока от стенок и насадка будет работать как обычное отверстие. Конические расходящиеся насадки имеют самые большие потери энергии. Отличительные особенности расходящихся насадок: значительный вакуум, большая пропускная способность, малые скорости выхода. Их применяют там, где требуется значительный вакуум, например в инжекторах, а также там, где требуется малая скорость, например в дождевальными аппаратах.

Основным назначением конических сходящихся насадок является увеличение скорости выхода потока с целью создания большой кинетической энергии в струе. Конические сходящиеся насадки применяют в качестве сопел гидромониторов и активных гидротурбин, наконечников пожарных брандспойтов и в других устройствах.

Конoidalные насадки представляют собой усовершенствованные конически сходящиеся насадки (см. рис. 8.10). Они выполнены по форме струи, выходящей из отверстия, и поэтому потери энергии в них

минимальные.

Коэффициент расхода коноидальной насадки является наивысшим.

Гидравлический расчет насадок ведется по тем же формулам, что и для отверстия в тонкой стенке:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0},$$

где $\mu = \varepsilon \varphi$ и $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \xi_{\text{сум}}}}$. Только вместо коэффициента местных потерь ξ

следует поставить в формулу для φ суммарный коэффициент сопротивления:

$$\xi_{\text{сум}} = \xi + \lambda \frac{l}{d},$$

где l - длина, d - диаметр насадки.



Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под тонкой стенкой, малым отверстием, большим отверстием?
2. Какие виды сжатия струи при истечении из отверстия в тонкой стенке вы знаете?
3. Какими коэффициентами характеризуется истечение жидкости из отверстий и какова между ними аналитическая связь?
4. Чем отличается формула расхода жидкости для незатопленного и затопленного отверстий?
5. Какие технические задачи решаются на основе гидравлического расчёта истечения жидкости?
6. Какие поправочные коэффициенты применяются при расчёте φ и μ при несовершенном сжатии?
7. Какая задача решается при опорожнении ёмкостей и от каких факторов зависит её решение?
8. Что называется насадком и какие насадки вы знаете?
9. При каких условиях образуется сжатое сечение и на каком удалении от входа?
10. Почему в насадках коэффициент сжатия струи $\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega}$ принимается равным единице?
11. Чем отличаются коэффициенты μ и φ для отверстия?

12. Как учитывается влияние вязкости на коэффициенты μ и φ ?
13. Назовите область применения цилиндрических насадков и дайте им краткую характеристику.
14. Назовите область применения конических насадков и дайте им краткую характеристику.
15. Что является следствием кавитации в диффузорном насадке?



Примеры решения задач

Задача 1. Вода вытекает из малого незатопленного отверстия в вертикальной стенке при постоянном напоре H . Высота расположения отверстия над полом $\Delta z = 1,0$ м и достигает пола на расстоянии $l = 1,2$ м. Диаметр отверстия $d = 50$ мм, $\varphi = 0,97$. Определить расход Q .

Решение:

Определяем H :

$$H = \frac{l^2}{\varphi^2 4 \Delta z} = \frac{1,2^2}{0,97^2 \cdot 4 \cdot 1,0} = 0,315 \text{ м.}$$

Принимая коэффициент расхода $\mu = 0,62$, находим расход:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH} = 0,62 \cdot \frac{3,14 \cdot 5^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 31,5} = 28 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с.}$$

Задача 2. Определить расход воды и скорость ее истечения через круглое незатопленное отверстие диаметром $d = 0,2$ м, если $H = 4$ м, $\mu = 0,62$, $\varphi = 0,97$. Скоростным напором пренебречь.

Решение: Определяем скорость истечения:

$$v = \varphi \sqrt{2gH} = 0,97 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4} = 8,58 \text{ м/с.}$$

Площадь отверстия

$$\omega = 0,78 \cdot 0,2^2 = 0,0314 \text{ м}^2.$$

Определяем расход воды через отверстие:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH} = 0,62 \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,0314 = 0,172 \text{ м}^3/\text{с.}$$

Задача 3. Определить скорость и расход вытекания воды из малого круглого затопленного отверстия в тонкой стенке, диаметр отверстия $d = 0,25$ м, перепад уровней жидкостей до отверстия и за ним $z = 4$ м.

Решение: Скорость вытекания воды равна

$$v = \varphi \sqrt{2g z},$$

где φ - коэффициент скорости, примем φ равное 0,97; тогда

$$v = 0,97 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4} = 8,6 \text{ м/с.}$$

Расход вытекания

$$Q = \mu \cdot \omega \sqrt{2g z},$$

где ω - площадь поперечного сечения отверстия, коэффициент расхода $\mu = 0,62$. Тогда

$$\omega = \pi \cdot d^2 / 4 = 3,14 \cdot 0,25^2 / 4 = 0,049 \text{ м}^2,$$

$$Q = 0,62 \cdot 0,049 \sqrt{19,62 \cdot 4} = 0,27 \text{ м}^3/\text{с.}$$

Для проверки правильности принятых значений $\varphi = 0,97$ и $\mu = 0,67$ найдем число Рейнольдса ($t = 20$ °С).

$$\text{Re} = \frac{d \sqrt{2g z}}{\nu} = \frac{0,25 \sqrt{19,62 \cdot 4}}{1,01 \cdot 10^{-6}} = 2192795$$

т.е. число Re больше чем 100 000, и решение было принято правильное.

Задача 4. Определить расход и скорость истечения воды из круглого отверстия диаметром $d = 0,01$ м в боковой стенке резервуара больших размеров. Напор воды над центром отверстия $H = 1$ м, температура воды $t = 20$ °С ($\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ м²/с).

Решение: Число Рейнольдса, характеризующее истечение:

$$\text{Re} = \frac{\sqrt{2gH} d}{\nu} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,01}}{1 \cdot 10^{-6}} = 44300.$$

По рис. 8.14 находим μ и φ при $\text{Re} = 44300$, $\mu = 0,62$, $\varphi = 0,95$ и определяем скорость истечения воды через отверстия:

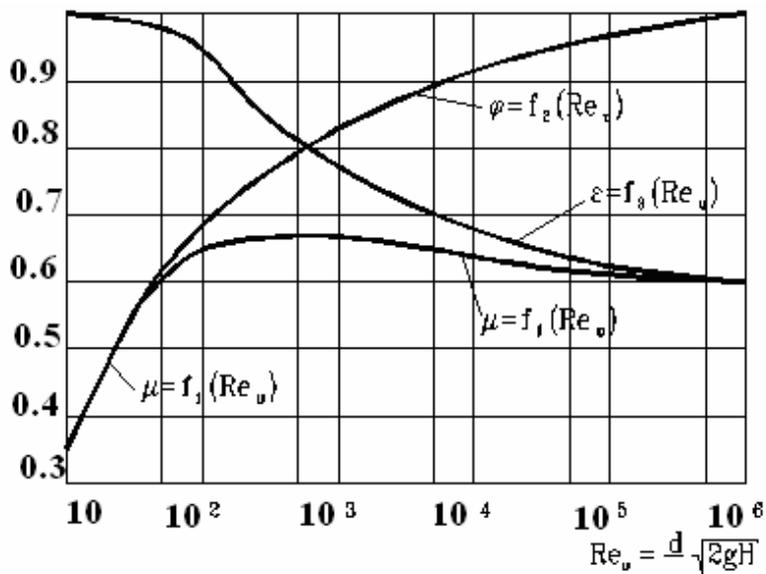


Рис. 8.14

$$v = \varphi \sqrt{2gH} = 0,95 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} = 4,2 \text{ м/с.}$$

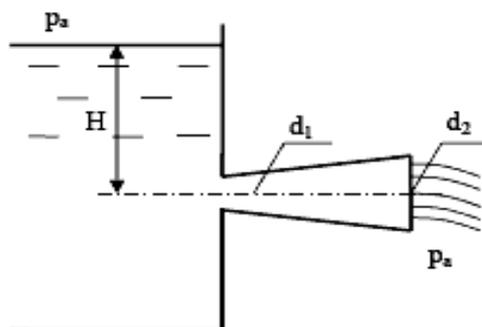
Расход вытекающей жидкости через отверстие

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH} = 0,62 \frac{\pi 0,01^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} \approx 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с.}$$



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.



Жидкость вытекает из открытого резервуара в атмосферу через трубу, имеющую плавное сужение до диаметра d_1 , а затем постепенное расширение до d_2 .

Рис.8.15

Истечение происходит под действием напора $H = 3 \text{ м}$ (рис.8.15).

Пренебрегая потерями энергии, определить абсолютное давление в узком сечении трубы 1-1, если соотношение диаметров $d_2/d_1 = \sqrt{2}$; атмосферное

давление соответствует $h_a = 750$ мм рт. ст.; плотность жидкости $\rho = 1000$ кг/м³. Найти напор $H_{кр}$, при котором абсолютное давление в сечении 1-1 будет равно нулю.

Задача 2.

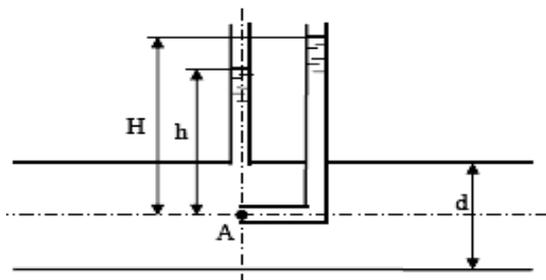


Рис.8.16

По длинной трубе диаметром $d = 50$ мм протекает жидкость ($\nu = 2$ Ст; $\rho = 900$ кг/м³). Определить расход жидкости и давление в сечении (рис.8.16), где установлены пьезометр ($h = 60$ см) и трубка Пито ($H = 80$ см).

Задача 3.

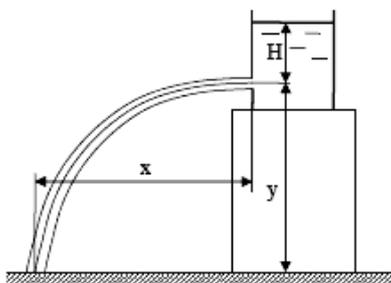


Рис.8.17

При истечении жидкости через отверстие диаметром $d_o = 10$ мм измерены: расстояние $x = 5,5$ м, высота $y = 4$ м, напор $H = 2$ м и расход жидкости $Q = 0,305$ л/с (рис.8.17). Подсчитать коэффициенты сжатия ϵ , скорости φ , расхода μ и сопротивления ζ . Распределение скоростей по сечению струи считать равномерным. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 4.

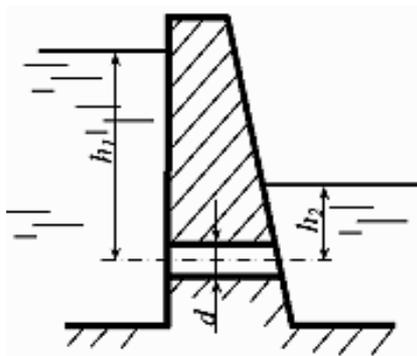


Рис.8.18

Через водоспуск плотины, имеющей форму цилиндрического насадка, протекает вода с расходом $Q = 2,3$ м³/с при постоянных уровнях (рис.8.18). Определить диаметр водоспуска, если $h_1 = 12,0$ м, $h_2 = 2,0$ м.

Задача 5.

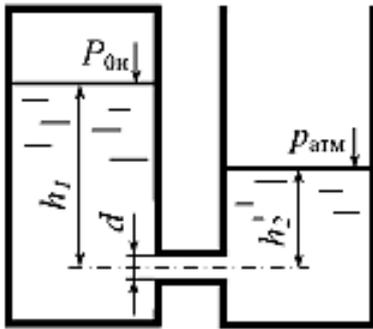


Рис.8.19

По короткой трубе диаметром $d = 0,10$ м из одного резервуара в другой перетекает бензин ($\rho_b = 800$ кг/м³). Определить начальный расход, если $h_1 = 2,0$ м, $h_2 = 0,5$ м, избыточное давление в одном резервуаре $p_{0н} = 0,2 \cdot 10^5$ Па (рис. 8.19).

Задача 6.

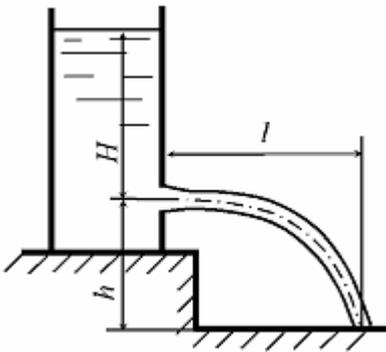


Рис.8.20

Определить коэффициенты расхода, скорости, сжатия и сопротивления при истечении воды в атмосферу через отверстие диаметром $d = 10$ мм под напором $H = 2$ м, если расход $Q = 0,294$ л/с, дальность полета струи $l = 3$ м. Отверстие расположено на высоте $h = 1,2$ м от пола (рис.8.20).

Задача 7.

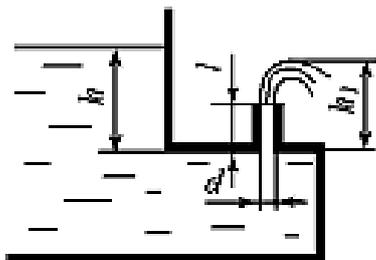


Рис.8.21

Определить расход воды через вертикально установленный внешний цилиндрический насадок и высоту подъема фонтана h_1 , если диаметр насадка $d = 2$ см, длина насадка $l = 10$ см. Глубина расположения входного отверстия насадка $h = 1,0$ м (рис.8.21).

ГЛОССАРИЙ

- Абсолютный покой** — покой жидкости, при котором действует только сила тяжести.
- Абсолютное давление** — напряжение сжатия, появляется в результате действия на жидкость сжимающих сил. Давление, отсчитываемое от полного вакуума.
- Безнапорное движение жидкости** — движение жидкости, при котором имеется свободная поверхность жидкости.
- Ватерлиния** — линия пересечения поверхности плавающего тела с поверхностью жидкости
- Внешние силы** — силы, приложенные к частицам рассматриваемого объема жидкости со стороны жидкости окружающей этот объем.
- Внутренние силы** — силы, возникающие внутри жидкости в результате воздействия на нее внешних сил.
- Вязкость.**
 η - динамический коэффициент вязкости;
 ν - кинематический коэффициент вязкости;
 $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}; [\nu] = \text{м}^2/\text{с};$
 $\nu = \eta/\rho,$
где ρ - плотность жидкости.
- коэффициент пропорциональности между касательными напряжениями и скоростью сдвига слоев жидкости, характеризующий интенсивность сил межмолекулярного взаимодействия при сдвиговой деформации (движение жидкости).
Зависит от структуры жидкости.
Уменьшается при увеличении температуры.
- Вязкость жидкостей** — свойство жидкостей оказывать сопротивление перемещению слоев жидкости относительно друг друга.
- Геометрическое подобие** — подобие поверхностей, которые ограничивают потоки жидкостей соответственно модели и природы.
- Гидравлика** — общепрофессиональная дисциплина, изучающая законы покоя и движения жидкостей, законы взаимодействия жидкости с твердыми телами и способы применения этих законов для решения

практических задач.

Гидродинамика	— раздел гидравлики, в котором рассматриваются законы движения жидкостей и законы взаимодействия твердых тел с жидкостью.
Гидродинамическое подобие	— геометрическое, кинематическое и динамическое подобие потоков несжимаемой жидкости.
Гидростатика	— раздел гидравлики, в котором рассматриваются законы покоя жидкостей и твердых тел, погруженных в жидкость.
Гидростатический парадокс	— правило, заключающееся в том, что давление на дно сосуда не зависит от формы сосуда.
Давление в точке поверхности $p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}$	— отношение нормальной сжимающей силы ΔP к площади поверхности $\Delta\omega$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$. Распределение давлений по поверхности называется эпюрой.
Давление насыщенного пара $p_{н.п.} = f(t^\circ)$,	— давление, при котором из жидкости выделяются пузырьки пара (жидкость кипит). Давление насыщенного пара зависит от рода жидкости и температуры. С увеличением температуры возрастает.
Давление манометрическое - p_M , вакуумметрическое - p_B $p_M = p - p_{ат};$ $p_B = p_{ат} - p.$	— показание мановакуумметра. Мановакуумметр измеряет избыток или недостаток абсолютного давления p в месте подсоединения прибора над атмосферным. По показаниям прибора p_M или p_B можно вычислить абсолютное давление p : $p = p_{ат} + p_M;$ $p = p_{ат} - p_B.$
Давление атмосферное $p_{ат}$,	— сила давления столба воздушной атмосферы на единицу поверхности Земли. В технике за среднее атмосферное давление принимается величина: $p_{ат} = 0,1 \text{ МПа}$

<p>Диаметр гидравлический d_r; $d_r = d$ - для круглой трубы; $d_r = D - d$ - для кольцевого сечения.</p>	<p>— характерный линейный размер сечения потока: $d_r = 4 \cdot \omega / \Pi,$ где ω - площадь поперечного сечения потока; Π - смоченный периметр (длина контакта в сечении потока между жидкостью и твердыми стенками).</p>
<p>Динамическое подобие</p>	<p>— пропорциональность сил, действующих на сходственные элементы кинематически подобных потоков, и равенство углов, характеризующих направления действия этих сил.</p>
<p>Живое сечение потока жидкости</p>	<p>— сечение, которое в каждой своей точке нормально к векторам скоростей частиц жидкости.</p>
<p>Жидкостный барометр</p>	<p>— стеклянная трубка с одним запаянным концом.</p>
<p>Жидкость</p>	<p>— физическое тело, не обладающее способностью сохранять свою форму (из-за слабой связи между отдельными ее частицами).</p>
<p>Закон Архимеда</p>	<p>— подъемная сила, действующая на тело со стороны жидкости, равна силе тяжести жидкости, вытесняемой телом.</p>
<p>Закон гидростатического давления</p>	<p>— гидростатическое давление в любой точке жидкости равно сумме поверхностного давления и давления столба жидкости над этой точкой.</p>
<p>Закон неразрывности потока жидкости</p>	<p>— (основной закон гидродинамики); при установившемся движении жидкости произведение средней скорости движения на площадь живого сечения является величиной постоянной, т.е. $v\omega = \text{const}$.</p>
<p>Законы сохранения</p>	<p>— фундаментальные физические законы, на основании которых выводится ряд частных соотношений в гидромеханике.</p>

Закон сохранения
объёмного расхода

— через любое сечение потока при движении малосжимаемой жидкости за единицу времени проходит одно и то же объемное количество вещества:

$$Q = v_1 \cdot \omega_1 = v_2 \cdot \omega_2 = \dots = \text{const};$$

v_1, v_2, \dots - средние скорости в сечениях;

$\omega_1, \omega_2, \dots$ - площади сечений потока.

Закон сохранения
энергии

— жидкость в сечении потока обладает запасом потенциальной энергии $E_{\text{п}}$ и кинетической $E_{\text{к}}$.

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}};$$

$$E_{\text{п}} = m \cdot g \cdot z + m \cdot p / \rho;$$

$$E_{\text{к}} = m \cdot v^2 / 2;$$

$$m \cdot g \cdot z_1 + m \cdot p_1 / \rho + m \cdot v_1^2 / 2 = \\ m \cdot g \cdot z_2 + m \cdot p_2 / \rho + m \cdot v_2^2 / 2 \\ + \Delta E;$$

При движении жидкости:

1. Кинетическая энергия может переходить в потенциальную и наоборот;

2. Часть полной энергии жидкости ΔE безвозвратно — теряется, затрачивается на работу по преодолению силы трения и на работу по деформации потока при прохождении жидкости через местные сопротивления.

Закон сохранения
количества движения

— изменение количества движения выделенной массы жидкости равно сумме импульсов действующих сил:

$$d(m \cdot v) = \sum_{i=1}^n F_i dt$$

Этот закон сохранения используется в гидромеханике для определения повышения давления при гидравлическом ударе, для определения силы давления струи жидкости на преграду и др.

Идеальная жидкость

— жидкость, которая не обладает свойствами температурного расширения, сжимаемости и вязкости, т.е. имеет идеальную подвижность.

Избыточное
(манометрическое)
давление

— давление больше атмосферного.

Кавитация

$p > p_{\text{н.п.}}$ - условие
отсутствия кавитации

$p < p_{\text{атм.}}$ - необходимое
условие для возни-
кновения кавитации

— кипение жидкости при нормальных температурах и пониженном давлении (меньшем атмосферного), сопровождающееся схлопыванием пузырьков пара в областях повышенного давления. Кавитация возникает в тех сечениях потока, где давление падает до величины давления насыщенного пара.

Кавитация может возникнуть:

$p < p_{н.п.}$ - достаточное условие для возникновения кавитации	<ol style="list-style-type: none"> 1. На входе в насос. 2. В местах резкого сужения потока (внутри насадка, струйный насос и др.). 3. В опасном сечении сифонного трубопровода.
Кинематическое подобие	— подобие линий тока жидкостей и пропорциональность сходственных скоростей.
Критическая скорость	— скорость, при которой для данной жидкости и определенного диаметра трубопроводов происходит смена режимов движения.
Ламинарное движение	— струйчатое (или слоистое) течение без перемешивания частиц жидкости и без пульсации скорости и давления.
Метацентр	— точка пересечения подъемной силы с осью плавания.
Механический барометр	— гофрированная металлическая коробка, из которой выкачан воздух.
Масса	— мера инертности тела, коэффициент пропорциональности между силой и ускорением движения тела во втором законе Ньютона.
Мера движения	<p>— векторная - количество движения;</p> <p>— скалярная - кинетическая энергия.</p> $(m \cdot v), \quad \frac{m \cdot v^2}{2};$
Модуль объёмной упругости	— коэффициент пропорциональности между сжимающим напряжением в жидкости (давлением) и относительной объёмной деформацией.
$p = -E \cdot \Delta V / V$ - закон Гука	Модуль упругости E определяет интенсивность сил межмолекулярного взаимодействия (сил отталкивания) при всестороннем сжатии.
Мощность потока жидкости	<p>— энергия массы жидкости, проходящей за единицу времени через сечение потока.</p> $N = p \cdot Q = \rho \cdot g \cdot H \cdot Q,$ <p>где H - энергия единицы веса жидкости (напор).</p>
Напорное движение жидкости	— движение, при котором поток жидкости со всех сторон ограничен твердыми стенками.

Напряжение	— отклик материала на деформацию. Связь между напряжениями и деформациями определяется структурой вещества.
Напор	— энергия, отнесенная к весу жидкости.
Насос	— машина для преобразования механической энергии приводного двигателя в гидравлическую энергию потока жидкости.
Неньютоновские жидкости	— жидкости, структура которых и, следовательно, вязкость изменяются при изменении скорости сдвига (органические вещества, суспензии и др.).
Ньютоновские жидкости	— жидкости с постоянной вязкостью (с простой внутренней структурой).
Неравномерное движение жидкости	— движение, при котором параметры потока переменные.
Неразрывное движение жидкости	— жидкости с постоянной вязкостью (с простой внутренней структурой). Вид движения, при котором жидкость движется сплошным потоком, образуя сплошную среду, заполняющую пространство.
Остойчивость	— способность плавающих тел возвращаться в исходное по-ложение после того, как они были выведены из этого поло-жения вследствие воздействия каких-либо внешних сил.
Ось плавания	— ось, проходящая через центр масс плавающего тела и центр водоизмещения.
Плавуность	— это способность тел плавать в полупогруженном состоянии.
Пневмопривод	— совокупность устройств, в число которых входит один или несколько объемных пневмодвигателей, предназначенных для приведения в движение механизмов и машин посредством газа под давлением.
Пьезометр	— вертикальная стеклянная трубка, верхний конец которой открыт в атмосферу, а нижний присоединен к сосуду в том месте, где требуется

	измерить избыточное давление.
Плотность	— количество массы жидкости в единице объема.
Равномерное движение жидкости	— такой вид движения, при котором параметры, характеризующие это движение, не меняются по длине потока.
Разрежение (вакуумметрическое давление)	— давление меньше атмосферного.
Расход	— количество жидкости, проходящей через сечение потока за единицу времени. Объемный расход: $Q = W/t = v \cdot \omega$. Массовый расход: $Q_m = m/t = \rho \cdot v \cdot \omega$. Весовой расход: $Q_G = G/t = \rho \cdot g \cdot v \cdot \omega$.
Расходомер	— прибор для измерения расхода жидкости.
Реальная жидкость	— жидкость, которая обладает всеми физическими свойствами жидкости и является легко подвижной и однородной.
Рейнольдса критерий Re	— мера отношения сил инерции к силам трения в потоке ньютоновской жидкости. $Re = v \cdot d \cdot \rho / \eta = v \cdot d / \nu$
Рейнольдса критерий модифицированный Re^*	— мера отношения сил инерции к силам трения в потоке вязко-пластичной жидкости. $Re^* = v \cdot d \cdot \rho / \eta_{\varepsilon}$ где η_{ε} - эффективная вязкость.
Рейнольдса критерий критический $Re_{кр}$	— число Re , при котором происходит переход от ламинарного режима движения к турбулентному. $Re_{кр}$ зависит от формы сечения канала и от структуры жидкости.
Сжимаемость жидкостей	— свойство жидкостей изменять свой объем при изменении давления.
Сила давления жидкости на плоскую поверхность	— мера взаимодействия между жидкостью и поверхностью, равна произведению давления в центре тяжести поверхности на ее площадь: $P = p_{ц.т.} \cdot \omega$

Скорость средняя v	— скорость, с которой должны были бы двигаться все частицы через данное сечение потока, чтобы сохранился расход, соответствующий действительному распределению скоростей в сечении.
Скорость витания	— скорость осаждения твердой частицы в потоке жидкости.
Скорость звука	— одна из физических характеристик вещества. Для несжимаемой жидкости $c = \sqrt{\frac{E_c}{\rho}}$, где E_c - модуль упругости жидкости ; ρ - плотность. Со скоростью звука распространяется ударная волна (импульс давления) в абсолютно жестком трубопроводе при гидравлическом ударе. Со скоростью звука распространяются все малые возмущения в среде.
Температурное расширение	— свойство жидкости изменять свой объем при изменении температуры.
Турбулентное движение	— течение, сопровождающееся интенсивным перемешиванием жидкости и пульсацией скоростей и давления.
Удельный вес	— отношение веса жидкости к его объему.
Упругость жидкостей	— способность жидкости принимать свой прежний объем после снятия внешней нагрузки.
Установившееся движение жидкости	— такой вид движения, при котором параметры, характеризующие движение, не изменяются во времени.
Центр весового давления жидкости	— точка на поверхности, через которую проходит вектор силы весового давления жидкости. Для плоских поверхностей, симметричных относительно вертикальной оси, центр давления расположен на оси симметрии в общем случае ниже центра тяжести. Для горизонтальных поверхностей центр давления и центр тяжести совпадают.

Энергия	<p>— определяет запас работы, которую может совершить тело, изменяя свое состояние.</p> <p>Энергия — это невостребованная работа, математическая абстракция, формула, по которой можно вычислить максимальную работу в реальных условиях функционирования конкретного механизма. Часть энергии теряется и переходит в тепло. Отношение полученной работы к затраченной энергии есть коэффициент полезного действия механизма.</p>
Энергия кинетическая $m \cdot v^2/2$	— численно равна работе, которую нужно совершить, чтобы уменьшить скорость движущегося тела до нуля.
Энергия потенциальная $m \cdot g \cdot z$ – положения; $m \cdot p / \rho$ - давления	<p>— $m \cdot g \cdot z$ - потенциальная энергия положения, такой энергией обладает тело массой m вследствие своего положения в поле силы тяжести. При падении с высоты z сила тяжести $G=mg$ совершает работу $m \cdot g \cdot z$.</p> <p>$m \cdot p / \rho$ - потенциальная энергия давления жидкости есть энергия упругой деформации, которая запасается в жидкости вследствие ее сжатия внешними силами (давление напряжение сжатия в жидкости).</p> <p>При расширении жидкости (уменьшении давления) может быть совершена работа, равная $m \cdot p / \rho$.</p>
Энергия удельная	— это энергия, отнесенная к количеству вещества (объемному, массовому или весовому).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Соотношения между единицами силы

1 килограмм-сила (кгс) = 9,81 Н

Соотношения между единицами давления

1 мм рт. ст. = 133 Па (Н/м²)

1 атм = 1,01325·10⁵ Па

1 кгс/м² = 9,81 Па

Соотношения между единицами динамической вязкости

1 Па·с [кг/(м·с)] = 10 Пз (Пуаз) = 10³ сПз (сантипуаз) = 1,02·10⁻¹ кгс·с/м²

Соотношения между единицами кинематической вязкости

1 м²/с = 10⁴ Ст (Стокс) = 10⁶ сСт (сантистокс)

Соотношения между единицами температуры

0°С = 273,16 К; $T = (t^{\circ}\text{C} + 273,16) \text{ К}$

Таблица III

Средние значения плотности ρ твердых тел (при 20 °С)

Металлы и сплавы		Различные материалы	
Вещество	ρ , кг/м ³	Вещество	ρ , кг/м ³
Алюминий	2700	Воск	950
Бронза	8800	Кость	1900
Вольфрам	19340	Лед	917
Железо	7880	Стекло обыкн.	2500
Золото	19310	Фарфор	2300
Латунь	8550	Янтарь	1100
Медь	8930	Бетон	2500
Никель	8900	Дерево	800
Олово	7290	Бумага	800
Платина	21460	Земля	1800
Свинец	11350	Кирпич	2000
Серебро	10500	Мрамор	2700
Уран	19100	Нафталин	1100
Цинк	7150	Песок	1500
Сталь	7800	Асфальт	2500
Чугун	7600	Графит	2300

Таблица П2

Средние значения плотности ρ жидкостей (при 20 °С)

Вещество	ρ , кг/м ³	Вещество	ρ , кг/м ³
Ацетон	791	Молоко	1030
Бензин	700	Вода морская	1030
Вода	1000	Ртуть	13550
Нефть	870	Масло машинное	900
Глицерин	1260	Керосин	800
Серная кислота	1840	Соляная кислота	1200
Спирт	790	Хлороформ	1500
Азотная кислота	1500	Уксус	1020

Таблица П3

Средние значения плотности ρ некоторых газов и паров
(при 0 °С и 760 мм рт. ст.)

Вещество	ρ , кг/м ³
Азот	1,251
Аммиак	0,771
Аргон	1,783
Ацетилен	1,173
Бензол (насыщенный при 0 °С)	0,012
Водород	0,0899
Водяной пар (насыщенный при 0 °С)	0,484
Воздух	1,293
Гелий	0,1785
Двуокись углерода	1,977
Кислород	1,429
Криптон	3,74
Неон	0,900
Метан	0,700
Озон	2,139
Окись углерода	1,25
Сероводород	1,500
Хлор	3,22
Этиловый спирт (насыщенный при 0 °С)	0,033
Этиловый эфир (насыщенный при 0 °С)	0,83

Таблица плотностей ρ различных органических веществ

№ п/п	Наименование	ρ , кг/м ³ · 10 ³ (лето)	ρ , кг/м ³ · 10 ³ (зима)
1	Ацетон технический	0,79	0,81
2	Бензол технический	0,88	0,90
3	Бутанол технический	0,81	0,83
4	Бутилацетат технический	0,88	0,90
5	Диэтиленгликоль	1,12	1,14
6	Дихлорэтан	1,25	—
7	Изобутиловый спирт технический	0,80	0,82
8	Изопропиловый спирт абс.	0,79	0,81
9	Изопропиловый спирт технический	0,82	0,84
11	Ксилол нефтяной	0,87	0,89
12	Ксилол технический	0,88	0,90
13	Метиенхлорид технический	1,34	1,36
14	Метилэтилкетон	0,81	0,83
16	Растворитель 646	0,865	0,885
17	Растворитель 647	0,87	0,89
18	Сольвент каменноугольный	0,88	0,90
19	Сольвент нефтяной	0,87	0,89
20	Толуол каменноугольный технический	0,87	0,89
21	Толуол нефтяной технический	0,87	0,89
22	Трихлорэтилен	1,47	1,49
23	Триэтиленгликоль	1,12	1,49
24	Уайт-спирит	0,79	0,81
25	Углерод четыреххлористый	1,60	1,62
26	Хлороформ технический	1,48	1,50
27	Этилацетат техн.	0,90	0,92
28	Этиленгликоль	1,11	1,13

Таблица П5

Зависимость плотности воды от температуры

Температура t , °С	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Плотность ρ , кг/м ³	1000	1000	998	996	992	988	983	978	972	965	958

Таблица П6

Кинематическая вязкость ν масел при различных температурах

Масло		ν , 10 ⁴ , м ² /с при °С					
		100	50	10	0	-5	-10
веретенное АУ		0,036	0,13	0,90	1,80	2,80	4,40
для гидравлических систем АМГ-30		0,047	0,11	0,30	0,44	0,54	0,67
индустриальное	И-20	0,048	0,18	1,13	2,75	4,20	6,40
	И-45	0,081	0,42	5,01	11,90	19,50	59,90
	И-50 (машинное)	0,085	0,50	8,33	22,90	41,70	83,80
трансформаторное с присадкой ионол		0,030	0,09	0,05	0,89	1,24	1,77
турбинное	ТП-22	0,060	0,22	2,13	4,76	7,73	9,10
	ТП-22 (из сернистых нефтей)	0,050	0,21	1,72	3,75	5,68	25,30
	ТП-30УТ	0,060	0,42	3,59	8,63	14,40	33,10

Таблица П7

Динамическая вязкость масел μ при различных температурах и давлениях

Жидкость	°C	10^{-1} Па с при давлении МПа					
		0,1	10	20	30	40	50
Автол	37	1,440	1,940	2,450	3,030	3,672	4,896
Машинное	22	2,880	3,416	4,176	5,184	6,822	8,640
Трансформаторное	22	0,346	0,374	0,418	0,489	0,562	0,650

Таблица П8

Значения кинематического коэффициента вязкости ν , см²/сек. для воды, в зависимости от температуры

t°	ν	t°	ν	t°	ν
1	0,017321	12	0,012396	26	0,008774
2	0,016740	13	0,012067	28	0,008394
3	0,016193	14	0,011756	30	0,008032
4	0,015676	15	0,011463	35	0,007251
5	0,015188	16	0,011177	40	0,006587
6	0,014726	17	0,010888	45	0,006029
7	0,014289	18	0,010617	50	0,005558
8	0,013873	19	0,010356	55	0,005147
9	0,013479	20	0,010105	60	0,004779
10	0,013101	22	0,009892		
11	0,012740	24	0,009186		

Таблица П9

Давление насыщения паров, МПа (абс.)

Вещество	Температура, °C				
	20	40	60	80	100
Бензин Б-70	0,0163	0,0332	0,056	0,1	-
Керосин Т-1	0,0035	0,0058	0,0075	0,0012	0,02
Вода	0,0033	0,008	0,02	0,048	0,1
Спирт	0,008	0,02	0,049	-	-

Значения эквивалентной шероховатости для труб (по А.Д. Альтшулю)¹

Трубы	Состояние труб	Δ , мм
1. Тянутые из стекла и цветных металлов	Новые, технически гладкие	$\frac{0-0,002}{0,001}$
2. Бесшовные стальные	Новые и чистые	$\frac{0,01-0,02}{0,014}$
	После нескольких лет эксплуатации	$\frac{0,15-0,3}{0,2}$
3. Стальные сварные	Новые и чистые	$\frac{0,03-0,1}{0,06}$
	С незначительной коррозией после очистки	$\frac{0,1-0,2}{0,15}$
	Умеренно заржавевшие	$\frac{0,3-0,7}{0,5}$
	Старые заржавевшие	$\frac{0,5-1,5}{1}$
4. Чугунные	Новые асфальтированные	$\frac{0-0,16}{0,12}$
	Новые без покрытия	$\frac{0,2-0,5}{0,3}$
	Бывшие в употреблении	$\frac{0,8-1,5}{1}$
	Очень старые	до 3 мм

¹В знаменателе – среднее значение Δ)

Таблица П11

Значения усредненных коэффициентов местных сопротивлений
(квадратичная зона)

Сопротивление	$\zeta_{кв}$	Сопротивление	$\zeta_{кв}$
Вход в трубу:		Задвижка:	
с острыми кромками	0,5	полностью открытая ($n=1$)	0,15
вдающийся внутрь	1,00	$n=0,75$	0,20
резервуара		$n=0,5$	2,00
Выход из трубы	1,00	$n=0,4$	4,60
Угольник с углом		$n=0,3$	10,00
поворота:		$n=0,2$	35,00
45°	0,44	Кран пробковый	0,40
90°	1,32	Фильтры для	
Колено плавное (90°)	0,23	нефтепродуктов:	
Тройник	0,32	светлых	1,70
Шаровой кран	45,00	темных	1,20
Вентиль обычный	4,00	Диафрагма с острыми	
Прижимная коробка		кромками при $n = S_{ом}/S_{мп}$:	
трубы		0,4	7,00
с клапаном и сеткой при		0,5	4,00
$d_{мп}$, мм:		0,6	2,00
100	7,00	0,7	0,97
150	6,00		
200	5,20		
300	3,70		

Таблица П12

Номограмма Кольбука-Уайта для определения коэффициента гидравлического трения

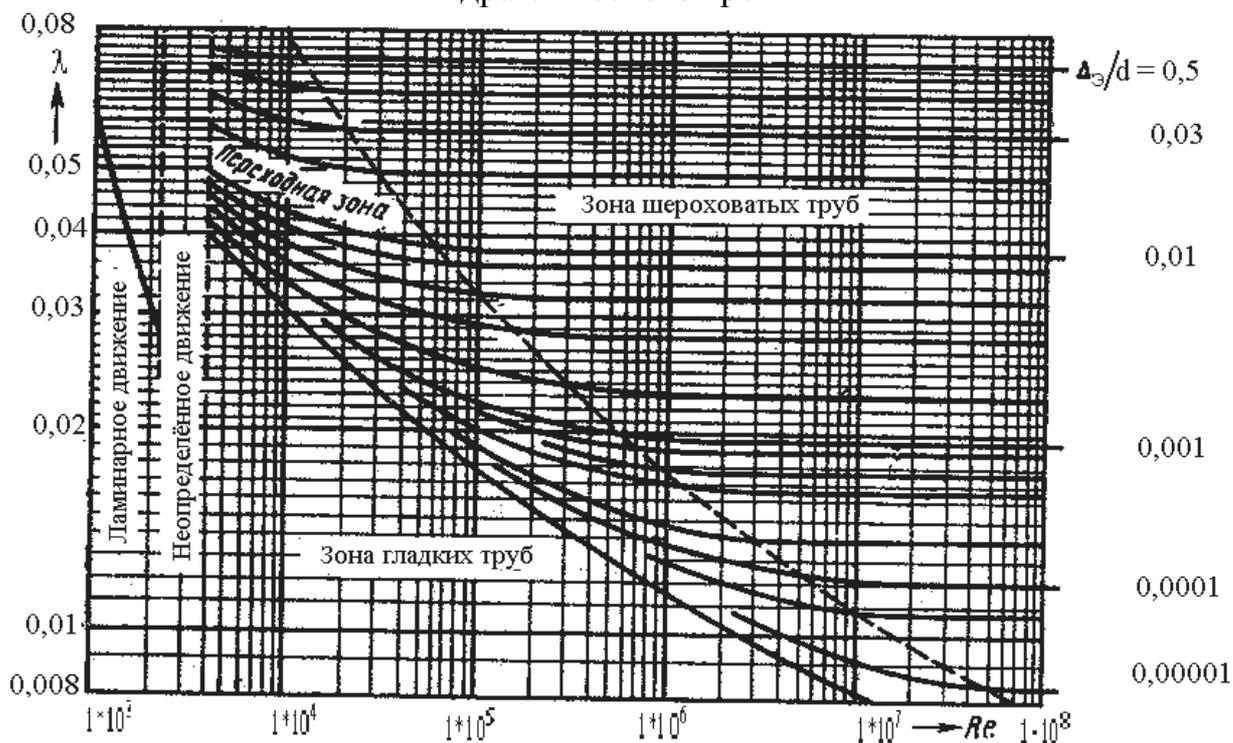
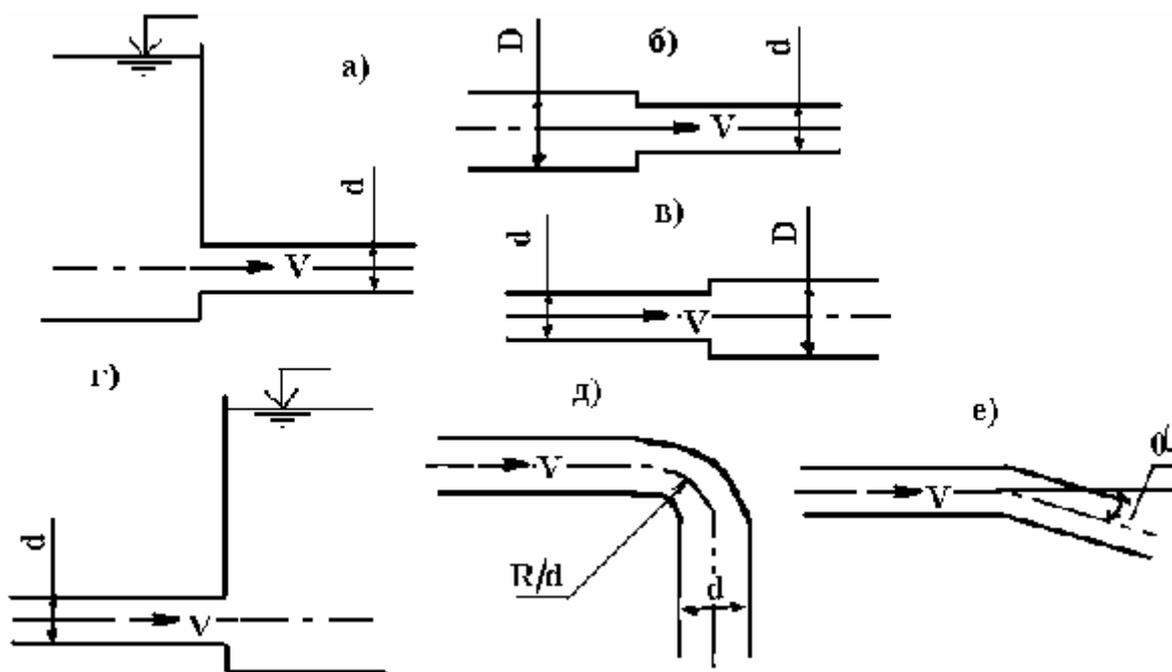


Таблица П13

Значение коэффициентов ξ некоторых местных сопротивлений



Тип препятствия	Схема сопротивл. по рисунку	Значение коэффициентов ξ	
Вход в трубу	а	0,50	
Внезапное сужение	б	0,50 $[1 - (d/D)^2]$	
Внезапное расширение	в	$[(D/d)^2 - 1]^2$	
Выход из трубы	г	1,0	
Плавный поворот (см. схему на рис. д)		Крутой поворот (см. схему на рис. е)	
d/D	ξ	α°	ξ
0,20	0,14	20	0,12
0,40	0,21	30	0,16
0,60	0,44	45	0,32
0,80	0,98	60	0,56
—	—	90	1,19

Таблица П14

Модуль упругости металлов, МПа

Сталь	$2 \cdot 10^5$
Чугун	10^5

Таблица П15

Модуль упругости жидкостей (при $t = 50^\circ \text{C}$, МПа)

Жидкость	Модуль упругости	Жидкость	Модуль упругости
Вода	2100	Турбинное масло	1750
		Спирт	1000
Нефть	1300	Глицерин	4150
Керосин	1400		
Ртуть	25100		

Таблица П16

Значения $\beta_{p=const}$ для воды при нормальном атмосферном давлении и различных температурах.

t, °C	1 – 10	10 – 20	40 – 50	60 - 70	90 - 100
$\beta_{p=const}, 1/°C$	0,000014	0,00015	0,000422	0,000556	0,000719

Таблица П17

Значения $\beta_{p=const}$ для некоторых жидкостей (при 20°C и нормальном атмосферном давлении).

Жидкость	$\beta_{p=const}, 1/°C$	Жидкость	$\beta_{p=const}, 1/°C$
Вода	0,00015	Нефть	0,00060
Глицерин	0,00050	Ртуть	0,00018
Спирт	0,00110	Масло	0,00080

Таблица П18

Коэффициенты расхода, скорости и сжатия струи для различных типов насадков

Тип насадка	Коэффициенты		
	ε	φ	μ
Внешний цилиндрический	1	0,82	0,82
Внутренний цилиндрический	1	0,71	0,71
Конический сходящийся (угол конусности 12-15°)	0,98	0,96	0,94
Конический расходящийся (угол конусности 5 -7°)	1	0,45...0,5	0,45...0,5 (по $S_{вх}$) 1...1,05 (по $S_{вых}$)
Коноидальный (сопло)	1	0,98	0,98

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ:

1. Штеренлихт Д.В. Гидравлика: Учеб. для вузов. - М.: Колосс, 2005.- 656 с.
2. Лапшев Н.Н. Гидравлика: учебник для студ. Высш. Учеб. Заведений – М.: Издательский центр «Академия», 2008 г. – 272 с.
3. Гиргидов А.Д. Механика жидкости и газа (гидравлика). Санкт-Петербург: СПб ГПУ, 2002. 544 с.
4. Кудинов В.А., Карташов Э.М. Гидравлика. М.: Высшая школа, 2006. 175 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840с.
6. Д.Р.Бозоров, Р.М.Каримов, Ж.С.Казбеков, С.Қ.Хидиров. Гидравлика. Тошкент: ТИИМСХ, 2003 й. –190 б.
7. Шейпак А.А. Гидравлика и гидропневмопривод. Часть 1. Основы механики жидкости и газа. М.: МГИУ, 2005. 192 с.
8. Турсунова Э.А., Мукольянц А.А. Механика жидкости и газа. – Ташкент.: ТАСИ, 2012. –150 с.
9. Гидравлика, гидромашины и гидропневмопривод: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Т.В.Артемьева, Т.В. Лысенко, А.Н.Румянцева, С.П.Стесин; Под ред. С.П.Стесина. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 336 с.
10. Попов Д.Н., Панайоти С.С., Рябинин М.В. Гидромеханика: Учеб. для вузов / Под ред. Д.Н.Попова. 2-е изд., стереотип. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. - 384 с
11. Кедров В.С., Калицун В.И. Гидравлика, водоснабжение и канализация: Учебник для вузов. - М.: Стройиздат, 2000. - 397 с.
12. Лапшев Н.Н. Гидравлика: учебник для студ. Высш. Учеб. Заведений – М.: Издательский центр «Академия», 2008 г. – 272 с.
13. Кедров В.С., Калицун В.И. Гидравлика, водоснабжение и канализация: Учебник для вузов. - М.: Стройиздат, 2000. - 397 с.
14. Гидравлика и гидропривод: Учеб. пособие для вузов/ Гудилин Н.С., Кривенко Е.М., Маховиков В.С. и др.; ред. Пастоев И.Л. – 3-е изд., стер. – М.: Изд-во МГТУ, 2001. – 519 с.
15. Вихарев, А.Н. Решение прикладных задач по гидромеханике: учеб. пособие / А.Н. Вихарев. - Архангельск, 2000. - 76 с.
16. Схиртладзе А.Г., Иванов В.И., Кареев В.Н. Гидравлические и пневматические системы.– М.: ИЦ МГТУ “Станкин”, Янус-К, 2003. – 544с.

17. Разбегина Е.Г., Сумбатова А.Р. Прикладные задачи гидравлики. – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2007.
18. Калищун В.И., Дроздов Е.в. и др. Основы гидравлики и аэродинамики. М.: Стройиздат, 2002. – 296с.
19. Гидростатика: Учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений/ Дмитриева И.Н., Григорьев Г.В., Калистратов А.В. – СПбГЛТА, 2010, 41с.
20. <http://www.techgidravlika.ru>
21. <http://www.zadachi.gidravlika.info>
22. <http://www.wmcentre.net>
23. <http://www.allgooods.com>
24. <http://www.twirpx.com/files/hydro/hidropr/>

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

1. Гидравлика и гидропривод: Учеб. пособие для вузов/ Гудилин Н.С., Кривенко Е.М., Маховиков В.С. и др.; ред. Пастоев И.Л. – 3-е изд., стер. – М.: Изд-во МГТУ, 2001. – 519 с.
2. Чугаев Р.Р. Гидравлика: Учебник для вузов. – 4-е изд. доп. и перераб. – Л.: Энергия, 1982. – 672 с.
3. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Башта Т.М., Руднев С.С., Некрасов Б.Б. и др. – М.: Машиностроение, 1982. – 422 с.
4. Гидравлика, гидромашинлар ва гидроюритмалар/ Латипов К.Ш. – Тошкент.: Укитувчи наш., 1992 – 185 б.
5. Брюханов О.В., Коробко В.И., Мелик-Аракелян А.Т. Основы гидравлики, теплотехники и аэродинамики: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 254 с. - (Среднее профессиональное образование).
6. Станочные гидравлические системы. Под ред. Ф.Ю. Свитковского. – Ижевск-Екатеринбург, изд. Института экономики Ур.РАН., 2003. 239с.
7. Мукольянц А.А. Гидравлика, гидравлические машины и гидропневмоприводы.: Учебно-методическое пособие. – Ташкент.: ТашГТУ, 2010. –160 с.
8. Иванов В.И., Навроцкий В.К., Сазанов И.И., Трифонов О.Н. Гидравлика и объемный гидропривод. Учебное пособие. - М.: ИЦ МГТУ «СТАНКИН», 2003. – 154 с.
9. <http://www.knigka.info/category/gidravlika>
10. <http://www.hydroaudit.ru/clean>
11. <http://halin.info/gidrot9r1part1>

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Предисловие.....	4
Список основных принятых обозначений.....	5
Глава 1. Введение	6
§ 1.1. Краткий исторический обзор развития гидравлики.....	6
§ 1.2. Определение науки «Гидравлика».....	20
§ 1.3. Размерности физических величин, применяемых в гидравлике.....	29
Глава 2. Основные физические свойства жидкостей	32
§ 2.1. Модель сплошной среды.....	32
§ 2.2. Жидкость как объект изучения гидравлики.....	34
§ 2.3. Плотность жидкости.....	36
§ 2.4. Сжимаемость капельной жидкости.....	39
§ 2.5. Температурное расширение капельных жидкостей.....	45
§ 2.6. Вязкость жидкости. Закон жидкостного трения – закон Ньютона.....	46
§ 2.7. Неньютоновские жидкости.....	52
§ 2.8. Определение вязкости жидкости.....	56
§ 2.9. Испарение. Кипение. Кавитация.....	57
§ 2.10. Сопротивление растяжению жидкостей.....	60
§ 2.11. Облитерация.....	60
§ 2.12. Растворяемость газов в жидкостях.....	61
§ 2.13. Капиллярность.....	63
§ 2.14. Рабочие жидкости гидросистем. Эксплуатационные свойства жидкостей.....	66
Глава 3. Основы гидростатики	79
§ 3.1. Основные сведения.....	79
§ 3.2. Силы, действующие в жидкости.....	80
§ 3.2.1. Массовые силы.....	81
§ 3.2.2. Поверхностные силы.....	82
§ 3.2.3. Силы поверхностного натяжения.....	82
§ 3.2.4. Силы давления.....	84

§ 3.3	Свойства гидростатического давления.....	87
§ 3.4	Дифференциальные уравнения равновесия жидкости.....	91
§ 3.5	Потенциал массовых сил.....	94
§ 3.6	Интеграл уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости.....	95
§ 3.7	Уравнение поверхности равного давления.....	95
§ 3.8	Основное уравнение гидростатики.....	96
§ 3.9	Эпюры давления.....	98
§ 3.10	Анализ основного уравнения гидростатики.....	99
§ 3.11	Условия равновесия жидкости в сообщающихся сосудах.....	101
§ 3.12	Круглая труба под действием гидростатического давления.....	103
§ 3.13	Простые гидравлические машины. Гидравлический пресс.....	104
§ 3.14	Гидравлический аккумулятор.....	106
§ 3.15	Методы и приборы для измерения давления. Абсолютное, избыточное и вакуумметрическое давление.....	107
§ 3.16	Гидростатический напор и энергетический закон для жидкости, находящейся в равновесии.....	112
§ 3.17	Интегрирование уравнений Эйлера для случая относительного покоя жидкости.....	115
§ 3.18	Сила давления жидкости на плоскую стенку.....	119
§ 3.19	Гидростатический парадокс.....	122
§ 3.20	Центр давления и определение его координат.....	123
§ 3.21	Сила давления жидкости на криволинейные стенки. Плавание тел.....	124
§ 3.22	Частные случаи расчета сил, действующих на криволинейные поверхности закономерных форм.....	129
§ 3.23	Закон Архимеда.....	129
§ 3.24	Условия плавучести и остойчивости тел, частично погруженных в жидкость.....	132
Глава 4.	Гидродинамика	146
§ 4.1	Основные кинематические понятия и определения. Два метода исследования движения жидкости.....	147
§ 4.2	Траектории частиц и линии тока.....	151
§ 4.3	Установившееся движение.....	152
§ 4.4	Струйчатая модель движения жидкости.	

	Трубка тока. Расход жидкости.....	153
§ 4.5	Средняя скорость.....	155
§ 4.6	Уравнение неразрывности в переменных Эйлера в декартовой системе координат.....	156
§ 4.7	Дифференциальные уравнения движения идеальной (невязкой) жидкости (уравнения Эйлера).....	159
§ 4.8	Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье - Стокса).....	163
§ 4.9	Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости.....	168
§ 4.10	Физический и геометрический смысл уравнения Бернулли. Напор жидкости.....	172
§ 4.11	Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости.....	175
§ 4.12	Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости.....	176
§ 4.13	Графическая иллюстрация уравнения Бернулли для потока реальной жидкости.....	181
§ 4.14	Практическое применение уравнения Бернулли.....	182
§ 4.15	Трубка Прандтля.....	184
§ 4.16	Трубка Вентури, сопло, диафрагма.....	185
Глава 5.	Основы теории гидродинамического подобия.....	197
§ 5.1	Основные понятия и определения теории подобия.....	198
§ 5.2	Теоремы теории подобия. Критерии подобия.....	200
§ 5.3	Физический смысл критериев подобия.....	205
§ 5.4	Анализ размерностей. π - теорема.....	208
§ 5.5	Физическое моделирование.....	218
Глава 6.	Классификация гидравлических потерь. Режимы течения жидкости.....	224
§ 6.1	Два режима движения жидкости.....	226
§ 6.2	Равномерное движение жидкости.....	229
§ 6.3	Основное уравнение равномерного потока. Уравнение динамического равновесия равномерного потока.....	231
§ 6.4	Ламинарное движение жидкости.....	234
§ 6.5	Расход жидкости.....	237
§ 6.6	Коэффициент линейных потерь при ламинарном движении жидкости.....	238

§ 6.7	Формирование изотермического ламинарного потока.....	240
§ 6.8	Основы гидродинамической теории смазки.....	241
§ 6.9	Турбулентное движение жидкости.....	243
§ 6.10	Турбулентное перемешивание. Пульсация скоростей и напряжений при турбулентном режиме.....	244
§ 6.11	Осреднение скоростей.....	245
§ 6.12	Осреднение напряжений.....	246
§ 6.13	Структура турбулентного потока.....	248
§ 6.14	Касательные напряжения в турбулентном потоке.....	251
§ 6.15	Полуэмпирические теории турбулентности.....	254
§ 6.16	Логарифмический закон распределения скоростей в круглой трубе.....	258
§ 6.17	Экспериментальные данные для коэффициента гидравлического сопротивления. Опыты Никурадзе и Зегжда..	262
§ 6.18	Формулы для определения коэффициента гидравлического сопротивления.....	269
§ 6.19	Местные сопротивления.....	271
§ 6.20	Зависимость коэффициента местных потерь от числа Рейнольдса.....	277
§ 6.21	Принцип наложения потерь напора. коэффициент сопротивления системы.....	279
§ 6.22	Основные расчетные формулы для определения потерь напора.....	280
Глава 7.	Гидравлический расчет трубопроводов.....	293
§ 7.1	Назначение и классификация трубопроводов.....	293
§ 7.2	Расчет и проектирование трубопроводов.....	294
§ 7.3	Гидравлический расчет простого трубопровода.....	295
§ 7.4	Метод эквивалентных потерь.....	301
§ 7.5	Гидравлический расчет сложных трубопроводов.....	301
§ 7.6	Гидравлические характеристики трубопроводов.....	305
§ 7.7	Гидроэнергетический баланс насосной установки.....	307
§ 7.8	Сифонные трубопроводы.....	309
§ 7.9	Гидравлический удар в трубах.....	310

§ 7.10	Кавитация.....	313
Глава 8.	Истечение жидкости через отверстия и насадки.....	322
§ 8.1	Общая характеристика истечения. Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке.....	322
§ 8.2	Истечение жидкости через большое отверстие.....	329
§ 8.3	Истечение жидкости через затопленное отверстие.....	331
§ 8.4	Истечение жидкости при переменном напоре.....	332
§ 8.5	Истечение жидкости через насадки.....	333
	Глоссарий.....	346
	Приложения.....	355
	Литература.....	365