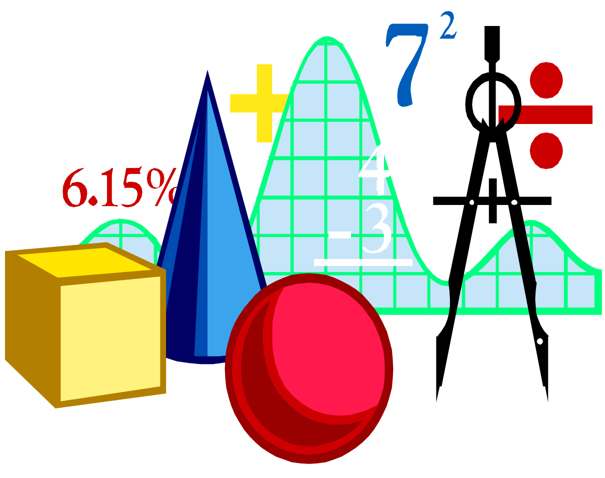
Министерство Здравоохранения Республики Узбекистан

Ташкентский Фармацевтический Институт

Текст лекций по инженерной графике

«Утверждаю»
Проректор по учебной работе
д.ф.н., проф.________Х.С.Зайнутдинов
«____»_______________2014 г.



Ташкент-2014

Это учебное пособие предназначена для студентов факультета Промышленная фармация. Она составлена по десяти темам, на каждую тему приведены чертежи, вопросы для проверки знаний по каждой теме.

Составители: Н.Х. Улугмурадов - профессор,

Ф.Н. Улугмурадова – ассистент.

Рецензенты:

зав.каф.биотехнологии, доц. Ф.Тухтаев

Всего -121 часов
из них лекции- 18 часов
практические занятия -54 часов
Самостоятельные занятия - 49часов

Тексты лекций по предмету «Инженерная графика» для студентов направлений биотехнологии и промышленной фармации. Тексты лекций составлены на основании типовой программы Министерства высшего и среднего специального образования республики Узбекистан от 08ноября 2011 года № БД-1.04-1 и утверждена на методическом совете кафедры.
Протокол №_11 от _28_февраля__2014 г.

Тексты лекций по предмету «Инженерная графика» для студентов направлений биотехнологии и промышленной фармации. Обучения составлена на основании типовой программы Министерства высшего и среднего специального образования республики Узбекистан от 08 ноября 2011 года № БД-1.04-1 и утверждена на Методическом совете Ташкентского фармацевтического института.
Протокол №___8___ от ___14 марта___2014 г.

ВВЕДЕНИЕ

Черчение как предмет изучения ставит перед собой следующие задачи:
- ознакомить обучающихся с правилами выполнения и оформления чертежей;
-научить их выполнять различные геометрические построения и проекционные изображения, как с помощью чертежных инструментов, так и от руки - в виде эскизов;
- изучение условности и условные графические обозначения, применяемые на проекционных чертежах и схемах;
- приобретение необходимых навыков в чтении чертежей по различным строительным специальностям.

Значение чертежей в различных областях производства и строительства очень велико. По чертежам изготовляют детали различных механизмов и осуществляют их сборку.

Чертежи зданий и сооружений – это комплекс прямоугольных проекций на ряд плоскостей. Они должны отражать как внешний вид, так и внутреннее устройство здания или деталей. В некоторых случаях дополнительно к прямоугольным проекциям даются наглядные изображения сооружения и его частей в виде аксонометрии или перспективы.

ЛЕКЦИЯ №1

О предмете начертательной геометрии.

1. Методы проектирования.

2. Параллельные и центральные методы проектирования.

Предмет начертательной геометрии

Начертательная геометрия изучает методы изображения пространственных геометрических фигур на плоскости, а также сами эти фигуры по их изображениям.

Среди других ветвей геометрии, начертательную геометрию выделяет то, что для решения обще-геометрических задач она использует графический способ. Чертеж в начертательной геометрии является основным средством изучения свойств геометрических фигур, тогда как в других ветвях геометрии он лишь иллюстрирует свойства фигур, т.е. является вспомогательным средством.

Для того, чтобы чертеж был геометрически равноценен изображаемой фигуре (оригиналу), он должен быть построен по определенным геометрическим законам. В начертательной геометрии чертежи строятся при помощи метода проецирования, благодаря чему изображение обладает такими геометрическими свойствами, по которым можно судить о свойствах самого оригинала.

Нет ни одного вида человеческой деятельности, где в большей или меньшей степени не применялись бы чертежи.

«Чертеж является языком техники» – говорил один из основателей начертательной геометрии французский геометр Гаспар Монж. «Если чертеж является языком техники, то начертательная геометрия служит грамматикой этого языка. Так как она учит нас правильно читать чужие и излагать наши собственные мысли, пользуясь в качестве слов одними только линиями и точками, как элементами всякого изображения» – дополнил высказывание Монжа профессор В.И.Курдюмов, автор классического русского учебника начертательной геометрии.

Начертательная геометрия развивает у человека пространственное видение, мышление, без чего не может быть никакого инженерного творчества. Она является теоретической базой для выполнения чертежа.

Использование методов начертательной геометрии часто бывает рациональным при конструировании сложных поверхностей технических форм в автомобильной, авиационной и судостроительной промышленности, позволяют решать многие прикладные задачи механики, химии, кристаллографии, картографии, архитектуры, строительства и других инженерных дисциплин.

ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ

ПРОЕКЦИИ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ

Для получения центральных проекций (центральное проецирование) надо задаться плоскостью проекций и центром проекций - точкой, не лежащей в этой плоскости (рис. 1: плоскость и точка S). Взяв некоторую точку А и проведя через S и А прямую линию до пересечения ее с пл. получаем точку А°. Так же поступаем, например, с точками В и С. Точки А°, В°, С° являются центральными проекциями точек А, В, С на пл.: они получаются в пересечении проецирующих прямых (или, иначе, проецирующих лучей SA, SB, SC с плоскостью проекций').

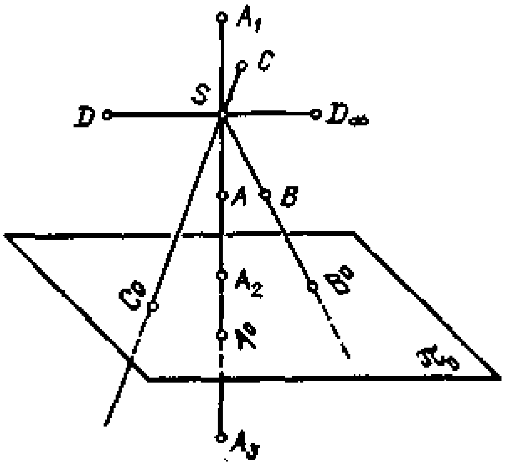


Рис. 1

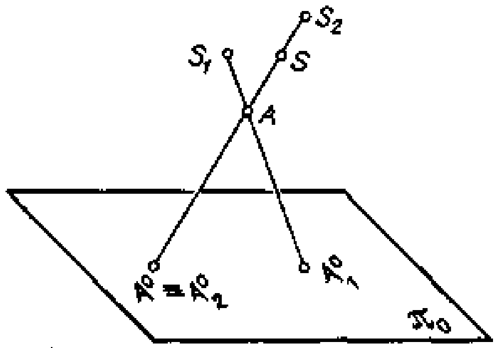


Рис. 2

Если для некоторой точки D (рис. 1.1) проецирующая прямая окажется параллельной плоскости проекций, то принято считать, что они пересекаются, но в бесконечно удаленной точке: точка D также имеет свою проекцию, но бесконечно удаленную (D'').

Не изменяя положения пл. и взяв новый центр S1 (рис. 1.2), получаем новую проекцию точки А точку А°1 Если же взять центр S2 на той же проецирующей прямой SA, то проекция А° останется неизменной (А°'' А°).

Итак, при заданных плоскости проекций и центре проекций (рис. 1) можно построить проекцию точки; но имея проекцию (например, А°), нельзя по ней определить положение самой точки А в пространстве, так как любая точка проецирующей прямой SA проецируется в одну и ту же точку; для единственного решения, очевидно, необходимы дополнительные условия.

Проекцию линии можно построить, проецируя ряд ее точек (рис.1. 3). При этом проецирующие прямые в своей совокупности образуют коническую поверхность.

Центр проекций называют также полюсом проекций, а центральную проекцию - полярной. В связи с этим центральные проекции также называют коническими.

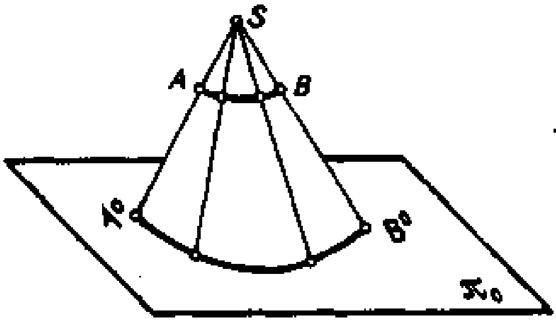


Рис. 3

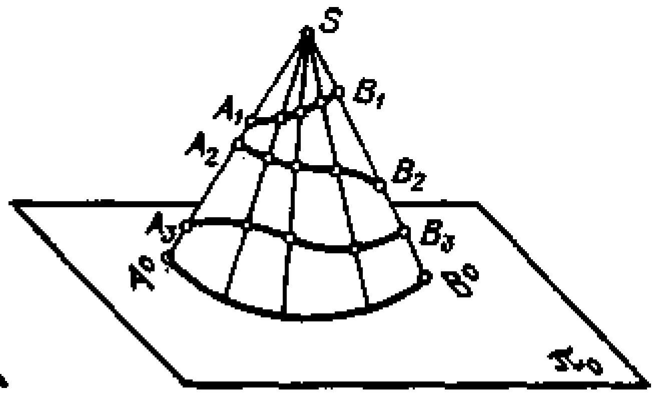


Рис. 4

Очевидно, проекция линии получается в пересечении проецирующей поверхности с плоскостью проекций (рис. 1.3). Но, как показывает рис. 1.4, проекция линии не определяет проецируемую линию, так как на проецирующей поверхности можно разместить ряд линий, проецирующихся в одну и ту же линию на плоскости проекций.

От проецирования точки и линии можно перейти к проецированию поверхности и тела.

2. ПРОЕКЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ

Рассмотрим теперь способ проецирования, называемый параллельным. Условимся считать все проецирующие прямые параллельными. Для их проведения должно быть указано некоторое направление. Так построенные проекции называются параллельными.

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального, если принять, что центр проекций бесконечно удален.

Следовательно, параллельной проекцией точки будем называть точку пересечения проецирующей прямой, проведенной параллельно заданному направлению, с плоскостью проекций.

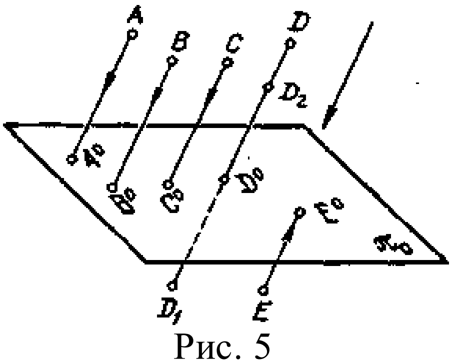


Рис. 5

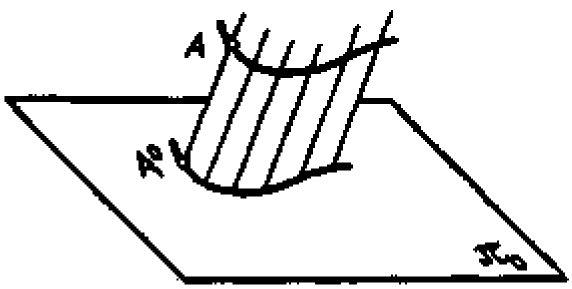


Рис. 6

Чтобы получить параллельную проекцию некоторой линии, можно построить
проекции ряда ее точек и провести через эти проекции линию (рис. 1.6).

При этом проецирующие прямые в своей совокупности образуют цилиндрическую поверхность, поэтому параллельные проекции также называют цилиндрическими.

В параллельных проекциях, так же, как и в центральных:

1) для прямой линии проецирующей поверхностью в общем случае служит плоскость, и поэтому прямая линия вообще проецируется в виде прямой;

2) каждая точка и линия в пространстве имеют единственную свою проекцию;

3) каждая точка на плоскости проекций может быть проекцией множества точек, если через них проходит общая для них проецирующая прямая (рис. 1. 5) точка D° служит проекцией точек D, D1, D2);

4) каждая линия на плоскости проекций может быть проекцией множества линий, если они расположены в общей для них проецирующей плоскости (рис.1.7). Отрезок A°B° служит проекцией отрезков AB и A1B1 и отрезка A2B2 плоской кривой линии); для единственного решения необходимы дополнительные условия;

5) для построения проекции прямой достаточно спроецировать две ее точки и через полученные проекции этих точек провести прямую линию;

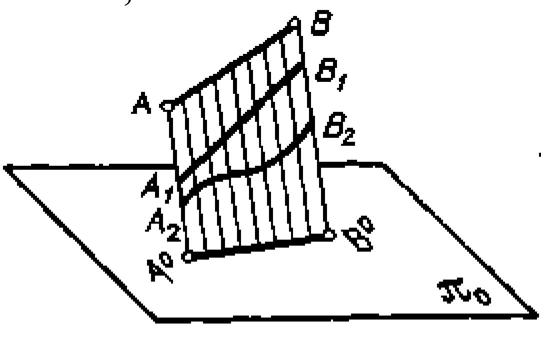


Рис. 7

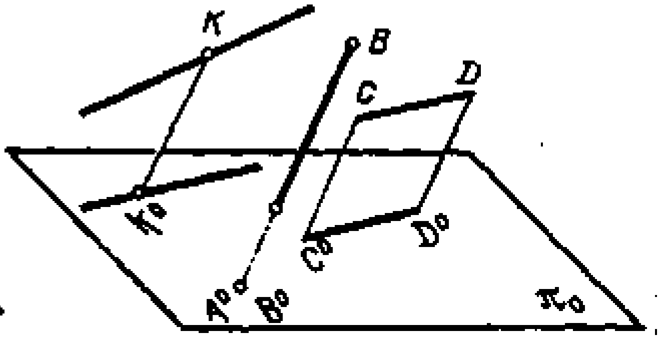


Рис. 8

6) если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой (рис. 1.8): точка K принадлежит прямой, проекция K° принадлежит проекции этой прямой).

Кроме перечисленных свойств для параллельных проекций можно указать еще следующие:

7) если прямая параллельна направлению проецирования (прямая AB на рис 1.7), то проекцией прямой (и любого ее отрезка) является точка (A°, она же B°);

8) отрезок прямой линии, параллельной плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в свою натуральную величину (рис. 1.8) (CD = C°D°, как отрезки параллельных между параллелями).

В дальнейшем будут рассмотрены еще некоторые свойства параллельных проекций, показывающие, какие натуральные соотношения в рассматриваемых предметах сохраняются в проекциях этих предметов.

Применяя приемы параллельного проецирования точки и линии, можно строить параллельные проекции поверхности и тела.

Параллельные проекции делятся на косоугольные и прямоугольные. В первом случае направление проецирования составляет с плоскостью проекций угол, не равный 90°; во втором случае проецирующие прямые перпендикулярны к пл. пр.

При рассмотрении параллельных проекций следовало бы представить себя удаленным на бесконечно большое расстояние от изображения. На самом же деле предметы и их изображения рассматриваются с конечного расстояния; при этом лучи, идущие в глаз зрителя, образуют поверхность коническую, а не цилиндрическую. Следовательно, более естественное изображение получается (при соблюдении определенных условий) центральным проецированием, а не параллельным. Поэтому, когда требуется, чтобы изображение давало такое же зрительное впечатление, как и самый предмет, применяют перспективные проекции, в основе которых лежит центральное проецирование.

ВОПРОСЫ

1. Как строится центральная проекция точки?
2. В каком случае центральная проекция прямой линии представляет собой точку?
3. В чем заключается способ проецирования, называемый параллельным?
4. Как строится параллельная проекция прямой линии?
5. Может ли параллельная проекция прямой линии представлять собой точку?
6. Если точка принадлежит данной прямой, то, как взаимно располагаются их проекции?
7. В каком случае в параллельной проекции отрезок прямой линии проецируется в натуральную свою величину?

ЛЕКЦИЯ № 2

Точка. Прямая линия. Плоскость.

1. Прямоугольное ортогональное проектирование.
2. Проекции точки на плоскости координатной системы.

МЕТОД МОНЖА

Сведения и приемы построений, обусловливаемые потребностью в плоских изображениях пространственных форм, накапливались постепенно еще с древних времен. В течение продолжительного периода плоские изображения выполнялись преимущественно как изображения наглядные. С развитием техники первостепенное значение приобрел вопрос о применении метода, обеспечивающего точность и удобное измерение изображений, т. е. возможность точно установить место каждой точки изображения относительно других точек или плоскостей и путем простых приемов определить размеры отрезков линий и фигур. Постепенно накопившиеся отдельные правила, и приемы построений таких изображений были приведены в систему и развиты в труде французского ученого МОНЖА, изданном в 1799 г. под названием "Geometric' descriptive". Гаспар Монж (1746--1818) вошел в историю как крупный французский геометр конца XVIII и начала XIX вв., инженер, общественный и государственный деятель в период революции 1789--1794 гг. и правления Наполеона I, один из основателей знаменитой Политехнической школы в Париже, участник работы по введению метрической системы мер и весов. Будучи одним из министров в революционном правительстве Франции, Монж много сделал для ее защиты от иностранной интервенции и для победы революционных войск. Монж не сразу получил возможность издать свой труд с изложением разработанного им метода. Учитывая большое практическое значение этого метода, для выполнения чертежей объектов военного значения и не желая, чтобы метод Монжа стал известен вне границ Франции, ее правительство запретило печатание книги. Лишь в конце XVIII столетия это запрещение было снято. После реставрации Бурбонов, Гаспар Монж подвергся гонению, вынужден был скрываться, и кончил свою жизнь в нищете. Изложенный Монжем метод «метод параллельного проектирования» (причем берутся прямоугольные проекции на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций) обеспечивая выразительность, точность и удобную измеримость изображений предметов на плоскости, был и остается основным методом составления технических чертежей.

Слово -«прямоугольный» часто заменяют словом «ортогональный» (образованный из слов древнегреческого языка, обозначающих **"прямой" и "угол"**). В дальнейшем изложении термин «ортогональные проекции» будет применяться для обозначения системы прямоугольных проекций на взаимно перпендикулярных плоскостях.

В данном курсе преимущественно рассматриваются прямоугольные проекции. В случае применения параллельных косоугольных проекций это будет каждый раз оговариваться.

Точка

1. Проекции точки на две плоскости проекций

Рассмотрим проекции точек на две плоскости, для чего возьмем две перпендикулярные плоскости (рис.2.4), которые будем называть горизонтальной фронтальной и плоскостями. Линию пересечения данных плоскостей называют осью проекций. На рассмотренные плоскости спроецируем одну точку А с помощью плоской проекции.

Для этого необходимо опустить из данной точки перпендикуляры А, а и А на рассмотренные плоскости.

Проекцию на горизонтальную плоскость называют **горизонтальной проекцией точки А, а проекцию а́ на фронтальную плоскость называют** фронтальной проекцией.

Точки, которые подлежат проецированию, в начертательной геометрии принято обозначать с помощью больших латинских букв. А, В,С. Для обозначения горизонтальных проекций точек применяют малые буквы а, b, **c… Фронтальные проекции обозначают малыми буквами со штрихом вверху а́, b́, ć**…

Применяется также и обозначение точек римскими цифрами I,II,…а для их п**роекций – арабскими цифрами** 1, 2… **и** 1́, 2́…

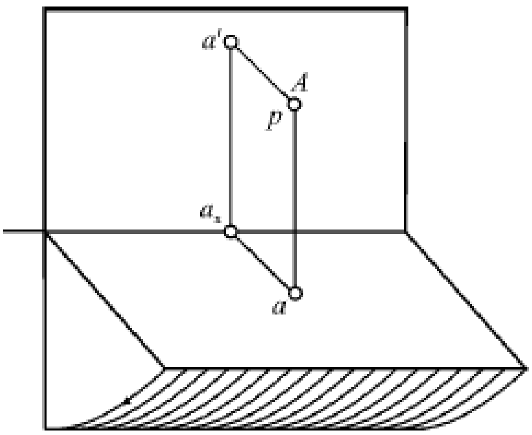


Рис. 4. Проекция точек на две плоскости

При повороте горизонтальной плоскости на 90° можно получить чертеж, в котором обе плоскости находятся в одной плоскости (рис. 2.5).

Данная картина называется эпюром точки.

Через перпендикулярные прямые Аа и Аа́ проведем плоскость (рис. 2.4). Полученная плоскость является перпендикулярной фронтальной и горизонтальной плоскостям, потому что содержит перпендикуляры к этим плоскостям. Следовательно, данная плоскость перпендикулярна линии пересечения плоскостей. Полученная прямая пересекает горизонтальную плоскость по прямой аа$_x$, а фронтальную плоскость – по прямой **а́а**$_x$. Прямые аа$_x$ **и а́а**$_x$ являются перпендикулярными оси пересечения плоскостей. То есть Ааа$_x$а́ **является прямоугольником.**

При совмещении горизонтальной и фронтальной плоскостей **проекции а и а́ будут лежать на** одном перпендикуляре к оси пересечения плоскостей, так как при вращении горизонтальной плоскости перпендикулярность отрезков aa_x **и** $\acute{a}a_x$ не нарушится.

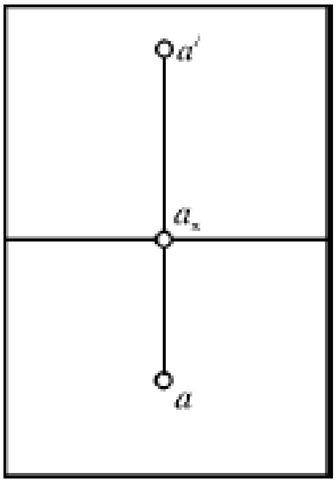


Рис. 5. Эпюр точки

Получаем, что на эпюре **проекции а и а́** некоторой точки А всегда лежат на одном перпендикуляре к оси пересечения плоскостей.

Две проекции а и а́ некоторой точки А могут однозначно определить ее положение в пространстве (рис. 2.4). Это подтверждается тем, что при построении перпендикуляра из проекции а к горизонтальной плоскости он пройдет через точку А. Точно **так же перпендикуляр из проекции а́ к фронтальной** плоскости пройдет через точку А, т. е. точка А находится одновременно на двух определенных прямых. Точка А является их точкой пересечения, т. е. является определенной.

Рассмотрим прямоугольник $Aaa_x\acute{a}$ (**рис**.2.5), для которого справедливы следующие утверждения:

1) Расстояние точки А от фронтальной плоскости равно расстоянию ее горизонтальной проекции а от оси пересечения плоскостей, т. е. $\mathbf{A\acute{a}} = \mathbf{aa_x}$;

2) расстояние точки А от горизонтальной плоскости проекций ра**вно расстоянию ее фронтальной проекции а́ от оси пересечения плоскостей,** т. е. $\mathbf{Aa} = \mathbf{\acute{a}a_x}$.

Иначе говоря, даже без самой точки на эпюре, используя только две ее проекции, можно узнать, на каком расстоянии от каждой из плоскостей проекций находится данная точка.

Пересечение двух плоскостей проекций разделяет пространство на четыре части, которые называют четвертями (рис. 2.6).

Ось пересечения плоскостей делит горизонтальную плоскость на две четверти – переднюю и заднюю, а фронтальную плоскость – на верхнюю и нижнюю четверти. Верхнюю часть фронтальной плоскости и переднюю часть горизонтальной плоскости рассматривают как границы первой четверти.

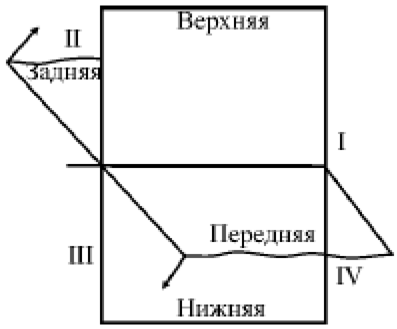


Рис. 6. Четверти

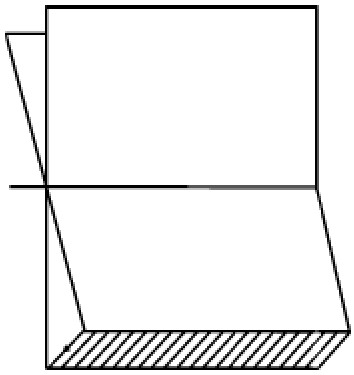


Рис. 7. Совмещение горизонтальной и фронтальной поскостей при получении эпюра

При получении эпюра вращается горизонтальная плоскость и совмещается с фронтальной плоскостью (рис. 2.7). В этом случае передняя часть горизонтальной плоскости совпадет с нижней частью фронтальной плоскости, а задняя часть горизонтальной плоскости – с верхней частью фронтальной плоскости.

На рисунках 2.8-2.11 показаны точки A,B,C, D, располагающиеся в различных четвертях пространства. Точка A расположена в первой четверти, точка B – во второй, точка C – в третьей и точка D – в четвертой.

При расположении точек в первой или четвертой четвертях их горизонтальные проекции находятся на передней части горизонтальной плоскости, а на эпюре они лягут ниже оси пересечения плоскостей. Когда точка расположена во второй или третьей четверти, ее горизонтальная проекция будет лежать на задней части горизонтальной плоскости, а на эпюре будет находиться выше оси пересечения плоскостей.

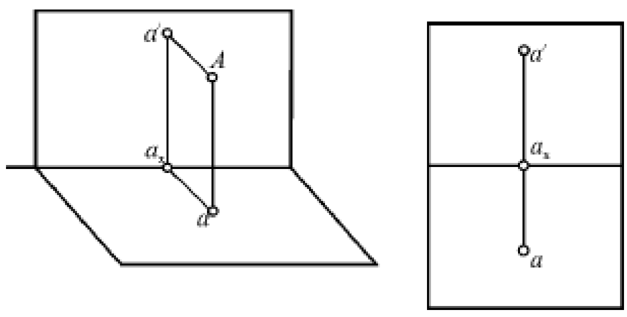


Рис. 8

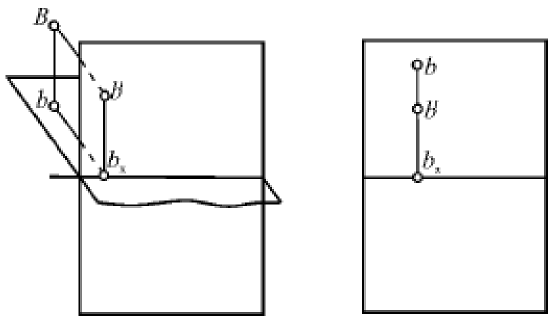


Рис. 9

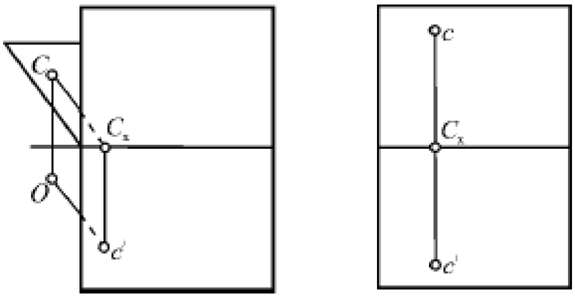


Рис. 10

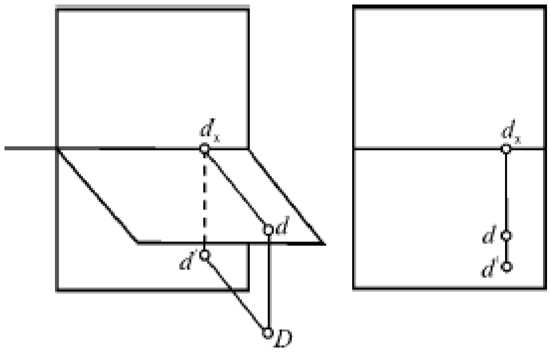


Рис. 11

Фронтальные проекции точек, которые расположены в первой или второй четвертях, будут лежать на верхней части фронтальной плоскости, а на эпюре будут находиться выше оси пересечения плоскостей. Когда точка расположена в третьей или четвертой четверти, ее фронтальная проекция – ниже оси пересечения плоскостей.

Чаще всего при реальных построениях фигуру располагают в первой четверти пространства.

В некоторых частных случаях точка (E) может лежать на горизонтальной плоскости (рис. 2.12). В этом случае ее горизонтальная проекция e и сама точка будут совпадать. Фронтальная проекция такой точки будет находиться на оси пересечения плоскостей.

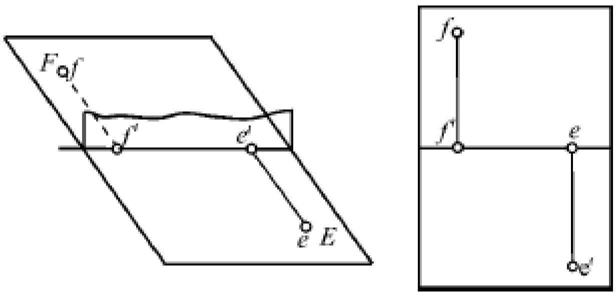


Рис. 12

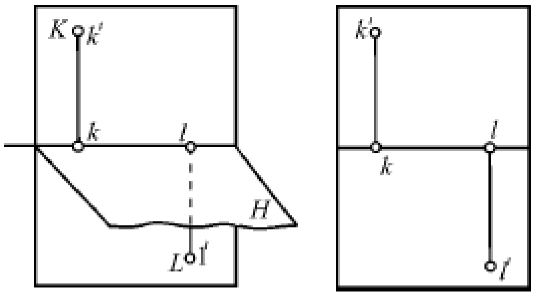


Рис. 13

В случае, когда точка К лежит на фронтальной плоскости (рис. 2.13), ее горизонтальная проекция k лежит на оси пересечения плоскостей, а фронтальная ḱ показывает фактическое местонахождение этой точки.

Для подобных точек признаком того, что она лежит на одной из плоскостей проекций, служит то, что одна ее проекция находится на оси пересечения плоскостей.

Если точка лежит на оси пересечения плоскостей проекций, она и обе ее проекции совпадают.

Когда точка не лежит на плоскостях проекций, она называется точкой общего положения. В дальнейшем, если нет особых отметок, рассматриваемая точка является точкой общего положения.

Конкурирующие точки

Две точки в пространстве могут быть расположены по-разному. В отдельном случае они могут быть расположены так, что проекции их на какой-нибудь плоскости проекций совпадают. Такие точки называются конкурирующими. На рис. 2.14, а приведен комплексный чертеж точек А и В. Они расположены так, что проекции их совпадают на плоскости $П_1$ [A_1 == B_1]. Такие точки называются горизонтально конкурирующими. Если проекции точек А и В совпадают на плоскости

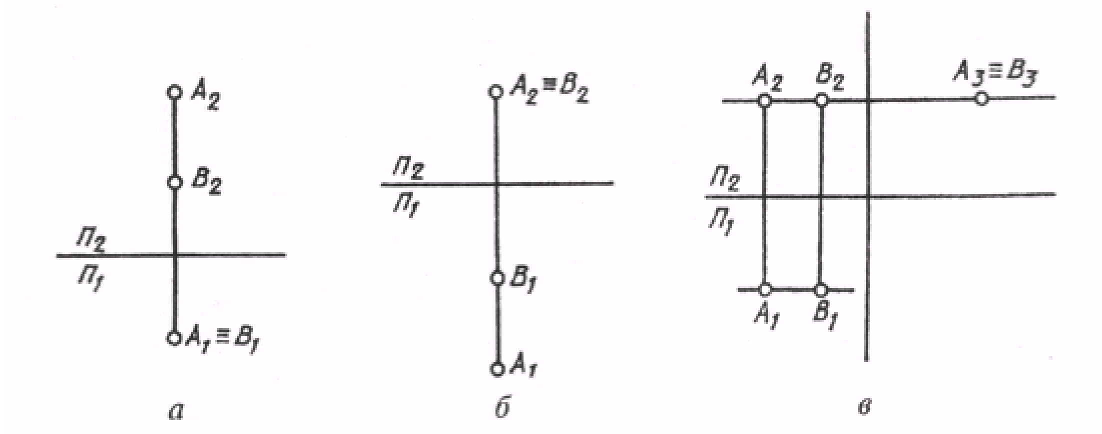
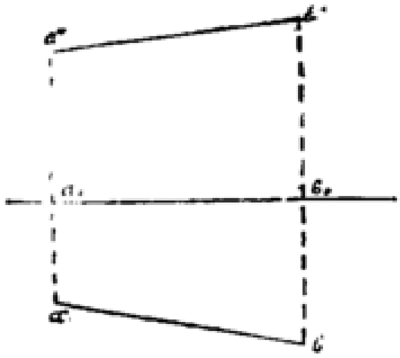


Рис.2.14

$П_2$ (рис. 2.14, б), они называются *фронтально конкурирующими*. И если проекции точек А и В совпадают на плоскости $П_3$ [A_3 == B_3] (рис. 2.14, в), они называются *профильно конкурирующими*.

По конкурирующим точкам определяют видимость на чертеже. У горизонтально конкурирующих точек будет видима та точка , у которой больше высота, у фронтально конкурирующих — та, у которой больше глубина, и у профильно-конкурирующих — та, у которой больше широта.

Проекция прямой



Прямая определяется двумя точками. Следовательно, если имеется план и фасад (совмещённый) двух точек а и b, лежащих на прямой, то прямая a’b' , соединяющая планы точек а и b, будет планом прямой аb и прямая a''b'', соединяющая фасады точек а и b, будет фасадом прямой аb. На чертеже 2.15 изображена прямая аb своими планом и фасадом.

Рисунок 2.15

Определение истинной длины прямолинейного отрезка заданного планом и проекцией

Воспользуемся чертежом, исполненным обыкновенным способом (рис. 2.16).

Пусть ab есть данный прямолинейный отрезок, a’b' его план a"b" его фасад. Повернём плоскость a’abb' около прямой a’b' и отогнём её в положение a’b’BA на плоскость плана. При этом отрезок ab примет положение AB. Следовательно:

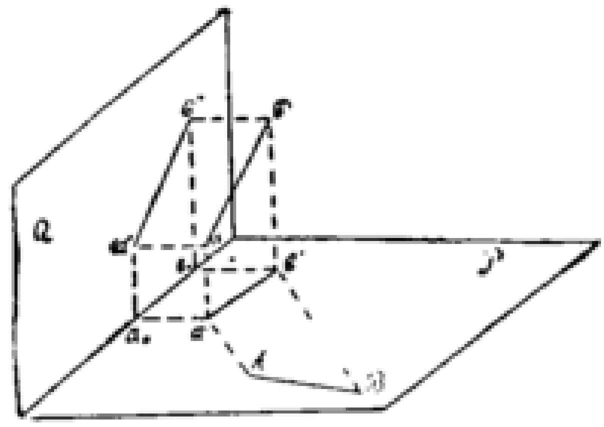


Рисунок 2.16

Aa' = aa' = a"a_0
Bb' = bb' = b"b_0

Перпендикулярность прямых a’a и b’b к a’b' не изменилась, следовательно, чтобы по данному плану и фасаду прямолинейного отрезка на совмещённом чертеже (рис. 2.17) определить истинную его длину, нужно: восставить из a' и b' к плану a’b' перпендикуляры и на них отложить: a’A=a_0a"; b’B=b_0b".

Прямая AB и будет равна истинной длине прямой ab. На этом примере и видим, что на чертеже 2.5, исполненном обыкновенным способом, прямая ab изображена в укороченном виде соответственно тому, как мы её видим, и так как степень этого укорочения неизвестна, то по чертежу 2.5 нельзя определить истинного расстояния ab. Между тем на чертеже 2.6, хотя сама прямая ab и не изображена, а даны только её план a'b' и фасад a"b", то по ним можно совершенно точно определить представляемую ими прямую.

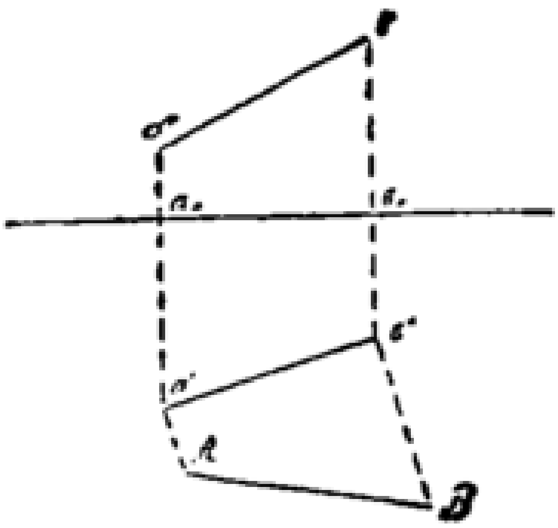


Рисунок 2.17

ПЛОСКОСТЬ

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

Положение плоскости в пространстве определяется:

а) тремя точками, не лежащими на одной прямой линии;
б) прямой и точкой, взятой вне прямой;
в) двумя пересекающимися прямыми;
г) двумя параллельными прямыми.

В соответствии с этим на чертеже плоскость может быть задана:

а) проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой;
б) проекциями прямой и точки, взятой вне прямой;
в) проекциями двух пересекающихся прямых;
г) проекциями двух параллельных прямых.

Каждое из представленных на рис.2.18 заданий плоскости может быть преобразовано в другое из них. Например, проведя через точки А и В (рис. 2.18, 1-ый чертеж) прямую, мы получим задание плоскости, представленное на рис.2.18, 2-ой чертеж; от него мы можем перейти к 4-му чертежу, если через точку С проведем прямую, параллельную прямой АВ.

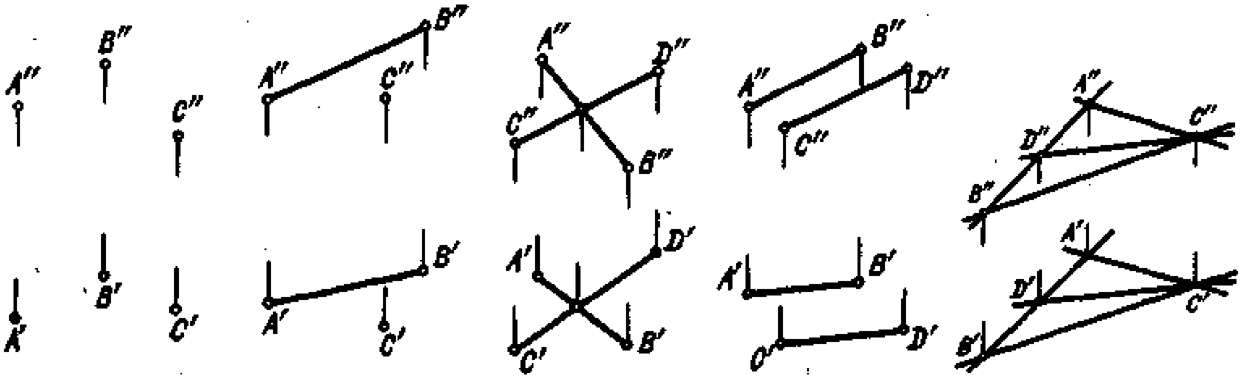


Рис.2.18

Плоскость может быть задана на чертеже и проекциями любой плоской фигуры (треугольника, квадрата, круга и т. д.). Пусть некоторая пл. определена точками А, В и С (рис.2.18, 5-ый чертеж). Проведя прямые линии через одноименные проекции этих точек, получим проекции треугольника АВС. Точка D, взятая на прямой АВ, тем самым принадлежит пл..Проводя прямую через точку D и через другую точку, заведомо принадлежащую пл. (например, через точку С), получаем еще одну прямую в пл.. Аналогично могут быть построены прямые, следовательно, и точки, принадлежащие плоскости, заданной любыми из перечисленных выше способов.

В дальнейшем мы увидим, что плоскость, перпендикулярная к плоскости проекций, может быть задана прямой, по которой эти плоскости пересекаются между собой.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ПРЯМОГО УГЛА

При решении многих задач существенную роль играет знание условий перпендикулярности на чертеже прямых и плоскостей. Выясним свойства ортогональной проекции “прямого угла”.

Если две стороны какого-либо угла (в том числе и прямого) параллельны плоскости проекций, то такой угол проецируется на эту плоскость в натуральную величину. Кроме этого случая прямой угол проецируется без искажения (т.е. в свою натуральную величину) и тогда, когда только одна из его сторон параллельна плоскости проекций. При этом вторая сторона угла должна быть не перпендикулярной плоскости проекций.

Верно и обратное положение: если хотя бы одна из сторон угла, проецирующегося ортогонально в прямой угол, параллельна плоскости проекций, то проецируемый угол также является прямым.

Рассмотренные свойства ортогональной проекции прямого угла распространяются как на угол между пересекающимися прямыми, так и на угол между взаимно-перпендикулярными скрещивающимися прямыми.

Для суждения о перпендикулярности скрещивающихся прямых нужно через произвольно взятую точку пространства провести прямые, параллельные скрещивающимся прямым и по углу между этими прямыми делать вывод о взаимном положении данных скрещивающихся прямых.

Обобщая сказанное выше можно сформулировать следующее:

-для того чтобы две взаимно перпендикулярные прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) проецировались ортогонально в виде двух взаимно перпендикулярных прямых, необходимо и достаточно, чтобы одна из них была параллельна, а вторая не перпендикулярна плоскости проекций.

Если применить это обобщение к комплексному чертежу, получим следующую формулировку:

-две взаимно перпендикулярные прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) только тогда сохраняют свою перпендикулярность на горизонтальной, фронтальной или профильной проекции, когда хотя бы одна из этих прямых является соответственно горизонтальной, фронтальной или профильной прямой.

Расстояние от точки до прямой определяется перпендикуляром, опущенным из этой точки на прямую.

Горизонталь является одной из сторон прямого угла и, следовательно, прямой угол с ней будет сохраняться на виде сверху (на горизонтальной проекции), откуда и начинаем решение задачи. Построим здесь перпендикуляр AB к горизонтали, а затем и на виде спереди (на фронтальной проекции), после чего определяем его истинную величину способом прямоугольного треугольника.

ВОПРОСЫ

1. Что такое прямоугольные декартовы координаты точки?
2. В какой последовательности записываются координаты в обозначении точки?
3. Что такое квадранты или четверти пространства?
4. Что такое октанты?
5. Какие знаки имеют координаты точки, расположенной в седьмомоктанте?
6. В чем различие между "правой" и "левой" системами координат?
7. Чем различаются между собой чертежи точек, из которых одна расположенав первой четверти, а другая в третьей?

ЛЕКЦИЯ №3

Прямая линия.

1. Проекции общей и индивидуальной прямой линии.
2. Определить естественную длину отрезка прямой линии.

Положение прямой линии относительно плоскостей проекций

Прямая по отношению к плоскостям проекций она может занимать как общее, так и частные положения.

1. Прямая не параллельная ни одной плоскости проекций называется прямой общего положения (рис.3.1).

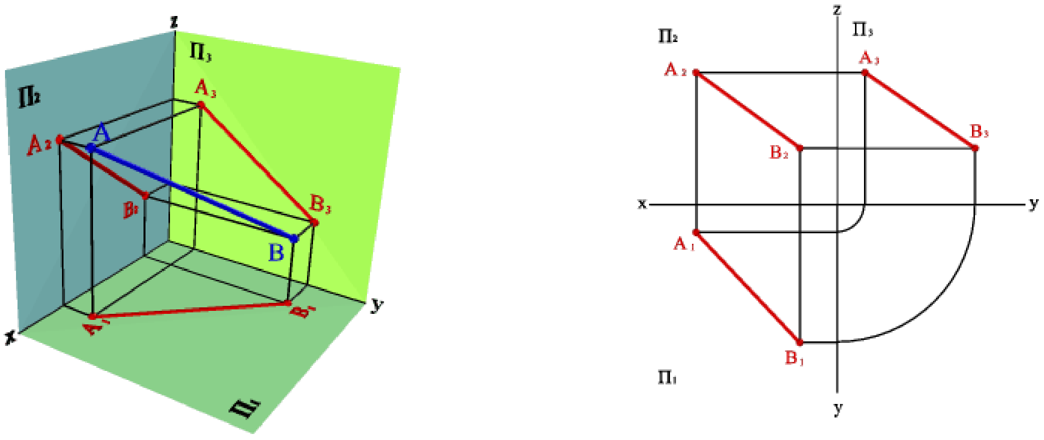


Рисунок 3.1 Прямая общего положения: а) модель; б) эпюр

2. ***Прямые параллельные плоскостям проекций и занимающие частное положение в пространстве называются прямыми уровня.***

В зависимости от того, какой плоскости проекций параллельна заданная прямая, различают:

2.1. *Прямые параллельные горизонтальной плоскости проекций называются горизонтальными или горизонталями (рис.3.2).* Для любой пары точек горизонтали должно быть справедливо равенство

$z_A=z_B$ $A_2B_2//0x$; $A_3B_3//0y$ Þ $x_A–x_B\neq0$, $y_A–y_B\neq0$, $z_A–z_B=0$.

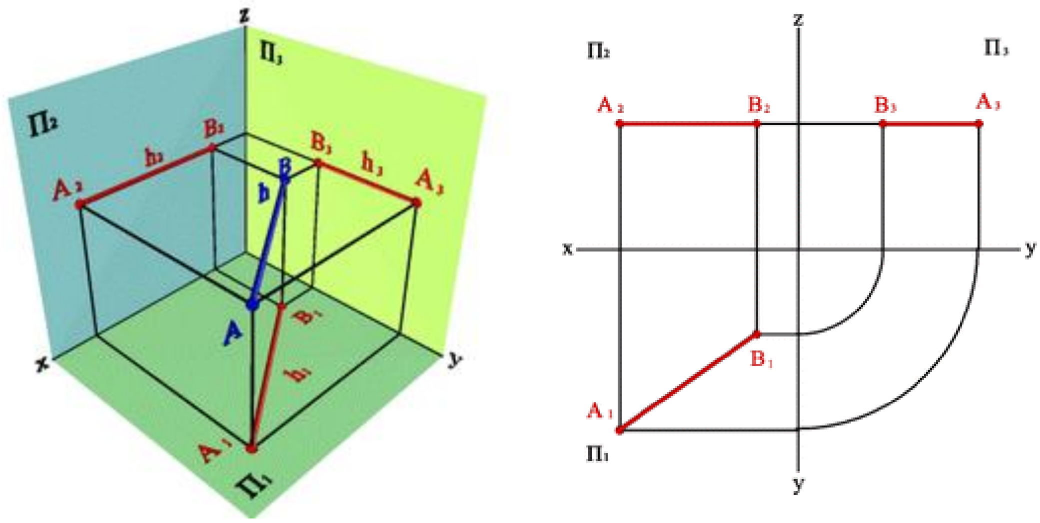


Рисунок 3.2 Горизонтальная прямая: а) модель; б) эпюр

2.2. *Прямые параллельные фронтальной плоскости проекций называются фронтальными или фронталями (рис.3.3).*

$y_A=y_B$ $A_1B_1//0x$, $A_3B_3//0z$ $x_A–x_B\neq0$, $y_A–y_B=0$, $z_A–z_B\neq0$.

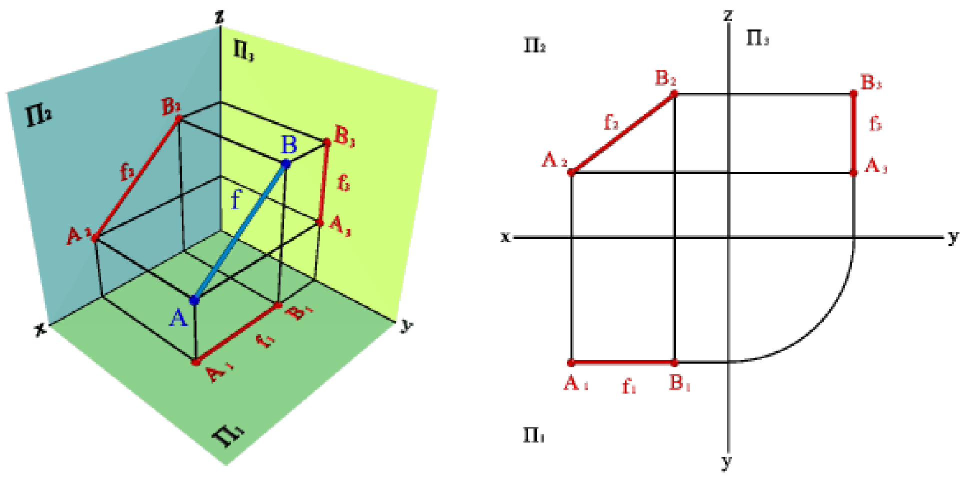


Рисунок 3.3 Фронтальная прямая: а) модель; б) эпюр

2.3. Прямые параллельные профильной плоскости проекций называются профильными (рис. 3.4).

$x_A = x_B$ $A_1B_1 // 0y$, $A_2B_2 // 0z$ $x_A - x_B = 0$, $y_A - y_B \neq 0$, $z_A - z_B \neq 0$.

Различают восходящую и нисходящую профильные прямые. Первая по мере удаления от зрителя поднимается, вторая - понижается.

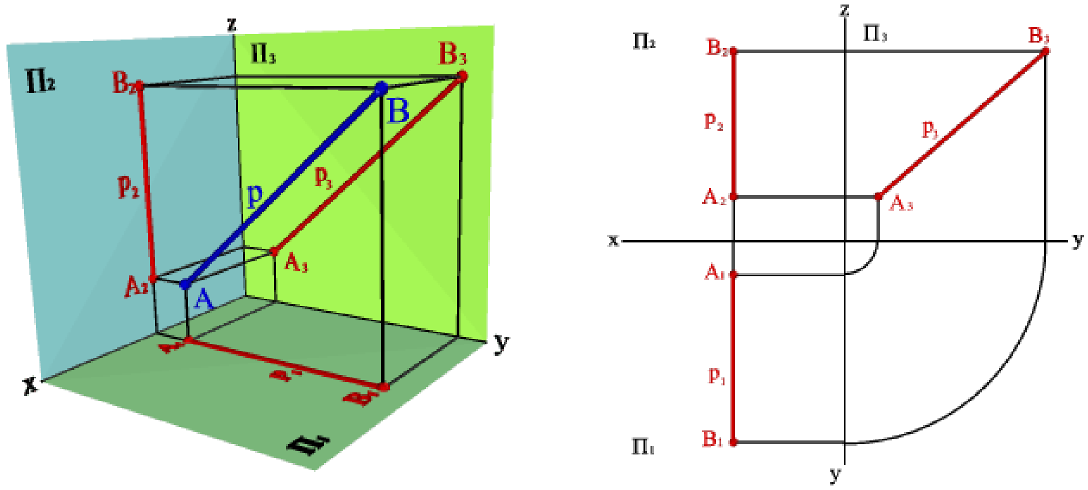


Рисунок 3.4 Профильная прямая а) модель б) эпюр

3. Прямые перпендикулярные плоскостям проекций, занимают частное положение в пространстве и называются проецирующими.

Прямая перпендикулярная одной плоскости проекций, параллельна двум другим. В зависимости от того, какой плоскости проекций перпендикулярна исследуемая прямая, различают:

3.1. Фронтально проецирующая прямая - AB (рис. 3.5)
xA–xB=0ü   yA–yB≠0ý   zA–zB=0þ,

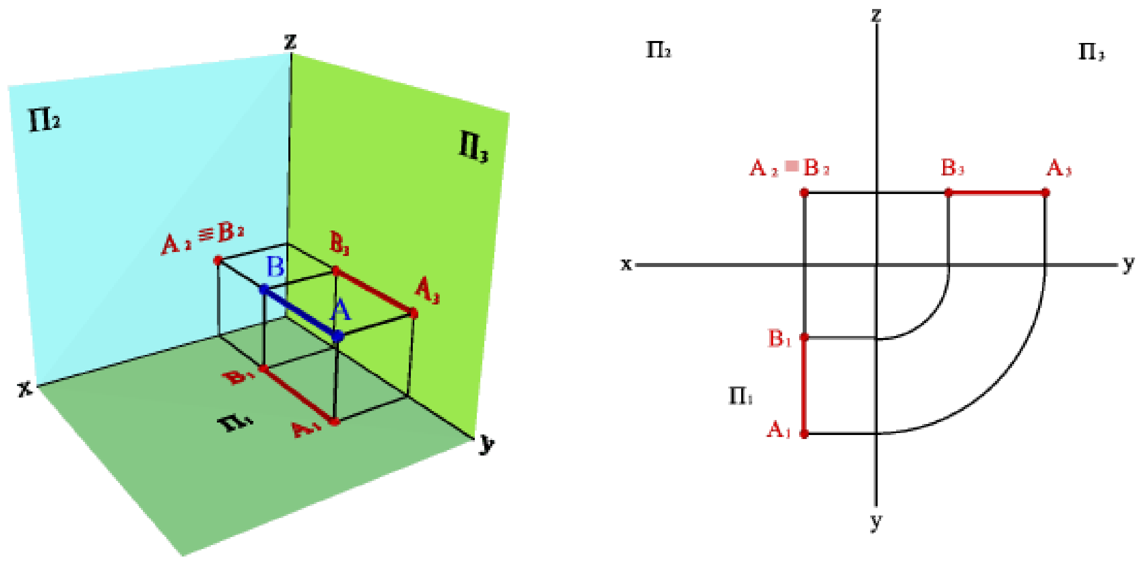


Рисунок 3.5. Фронтально проецирующая прямая а) модель б) эпюр

3.2. Профильно проецирующая прямая - AB (рис. 3.6)

xA–xB≠0y yA–yB=0y zA–zB=0y,

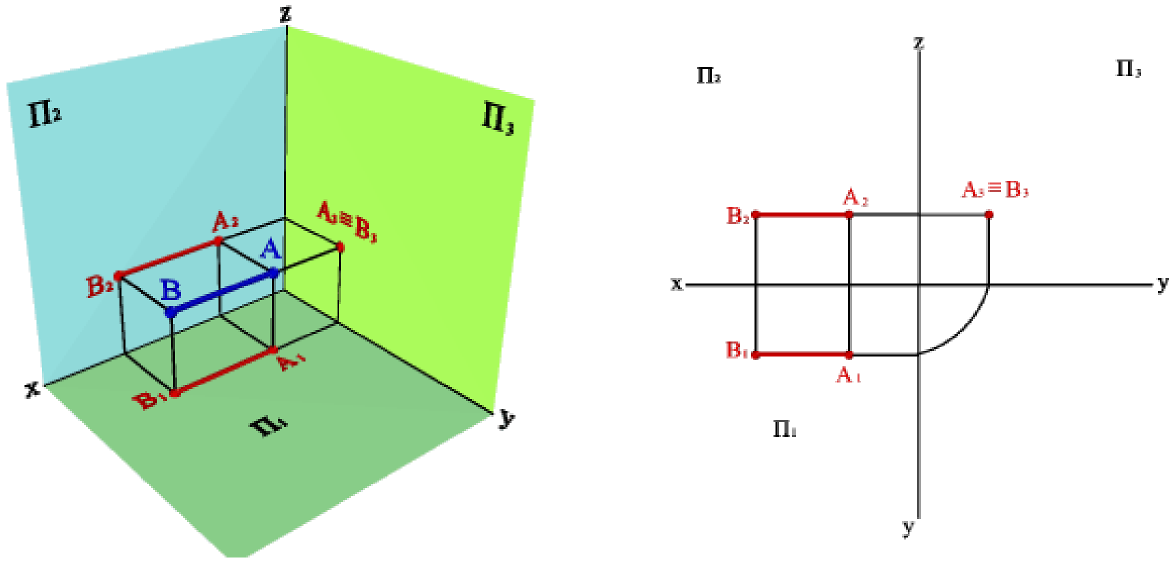


Рисунок 3.6. Профильно-проецирующая прямая а) модель б) эпюр

3.3. Горизонтально проецирующая прямая - AB (рис.3.7)

xA–xB=0ü yA–yB=0ý zA–zB≠0þ.

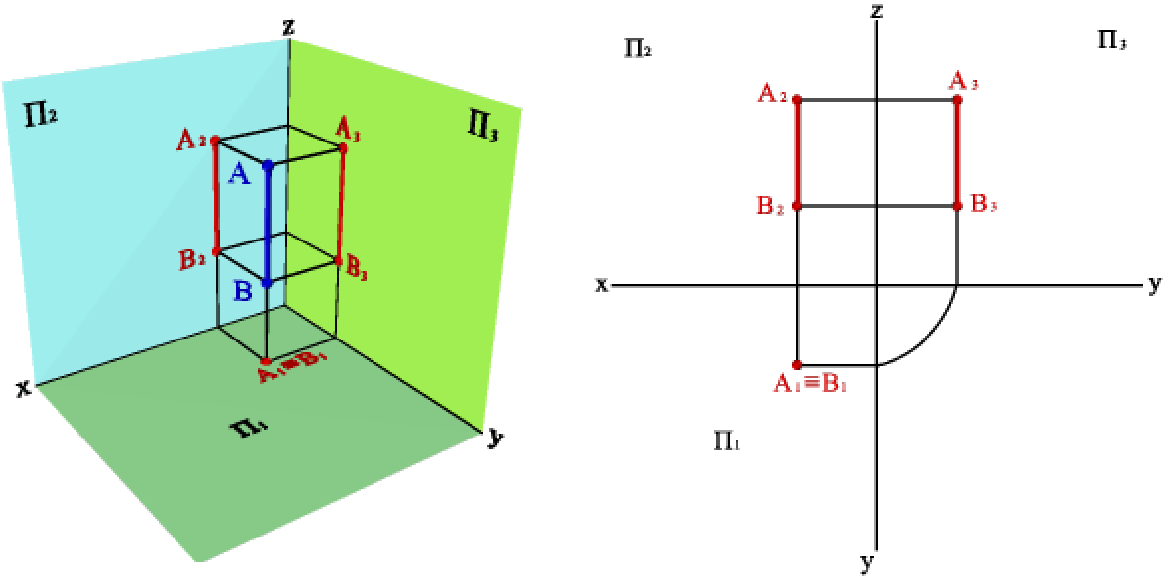
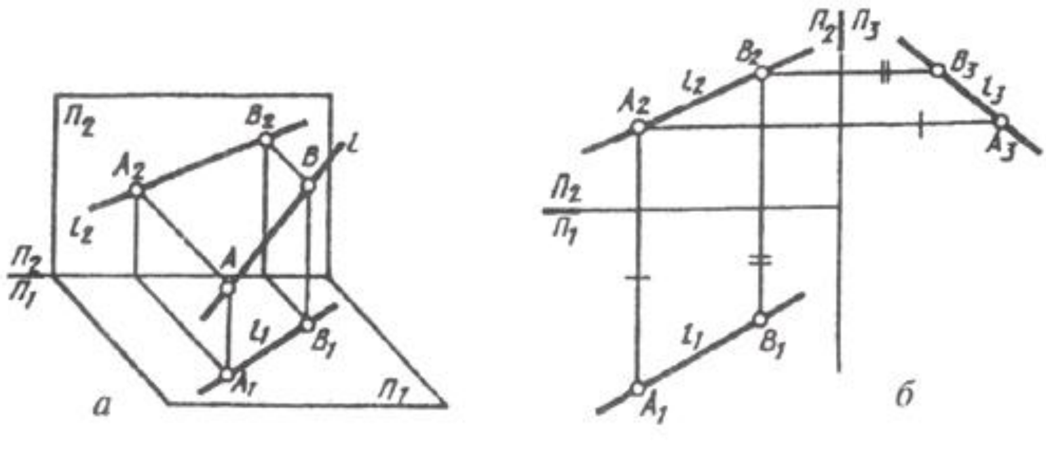


Рисунок 3.7. Горизонтально-проецирующая прямая а) модель б) эпюр

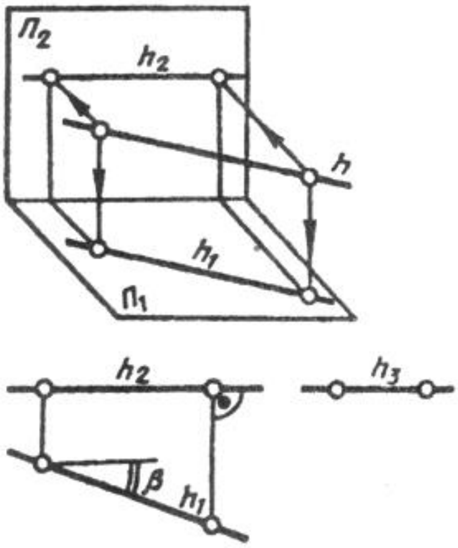
Расположение прямой относительно плоскостей проекций

Прямая, относительно плоскостей проекций, может занимать различные положения. Прямую, не параллельную ни одной из основных плоскостей проекций, называют *прямой общего положения*. Прямую, параллельную или перпендикулярную одной из плоскостей проекций, называют *прямой частного положения.*



Прямые, параллельные одной из плоскостей проекций, называют *прямыми уровня*. Название их зависит от того, какой плоскости они параллельны. Прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций, называют *горизонталью* и обозначают на чертежах h

Прямую, параллельную фронтальной плоскости проекций, называют *фронталью* и обозначают f.



Прямую, параллельную профильной плоскости проекций, называют *профильной* и обозначают p.
У прямой уровня одна проекция параллельна самой прямой и определяет углы наклона этой прямой к двум другим плоскостям проекций.

Параллельность одной из плоскостей проекций определяет расположение двух других проекций прямой уровня:

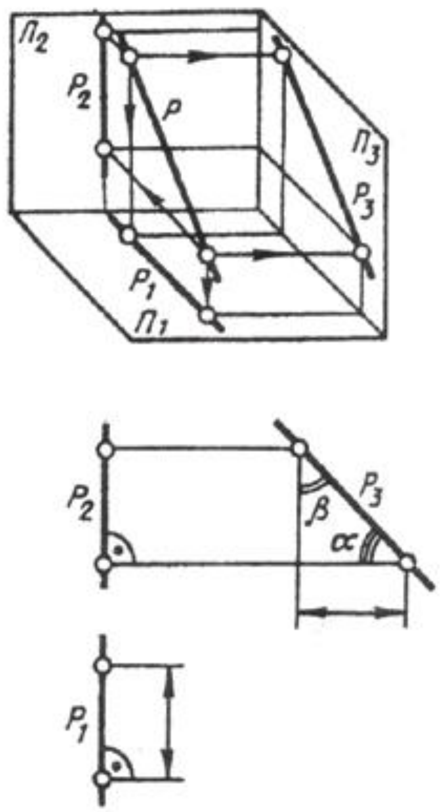
h2 || П2/П1 ;

h3 _|_ П2/П3 ;

f2 || П2/П1;

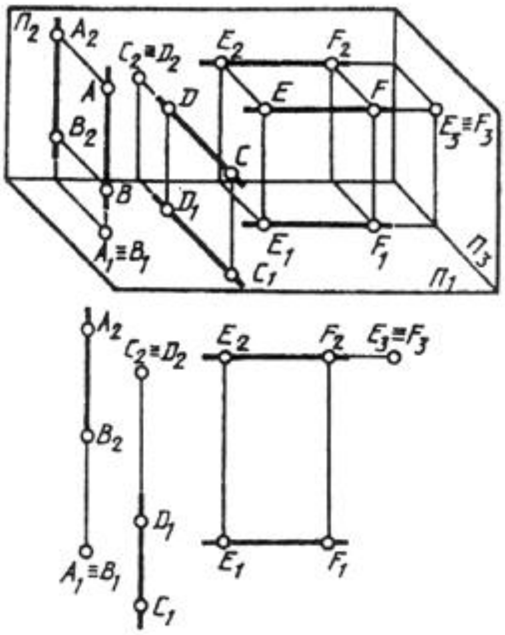
f3 _|_ П2/П3 ;

p1 _|_ П2/П1 ;



p2 _|_ П2/П1 ;

Прямые h2 и f1 перпендикулярны вертикальным линиям связи; p1 и p2 располагаются на одной вертикальной линии связи и при двух проекционном чертеже должны быть определены двумя точками прямой p Прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, называются проецирующими. Эти прямые, будучи перпендикулярными одной плоскости проекций, оказываются параллельными двум другим плоскостям проекций. Поэтому у проецирующих прямых одна проекция превращается в точку, а две другие проекции параллельны самой прямой и совпадают на чертеже с направлением линии связи (рис. 73). Различают горизонтально-проецирующие прямые (AB), фронтально-проецирующие прямые (CD) и профильно-проецирующие прямые (EF).



Положение прямой относительно плоскостей проекций. Следы прямой.

В зависимости от положения прямой по отношению к плоскостям проекций она может занимать как общее, так и частные положения.

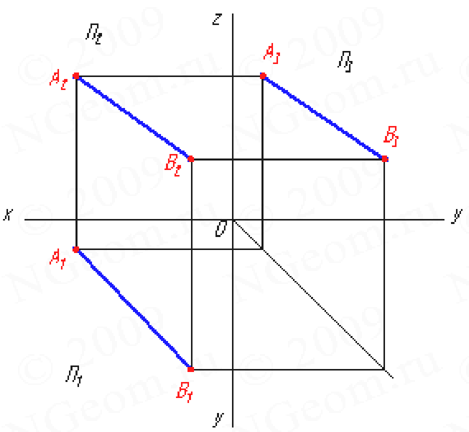


Рисунок 3.1

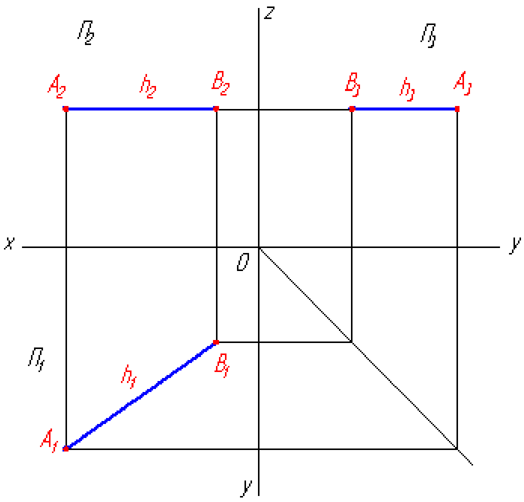
1. Прямая не параллельная ни одной плоскости проекций называется *прямой общего положения* (рис.3.1).

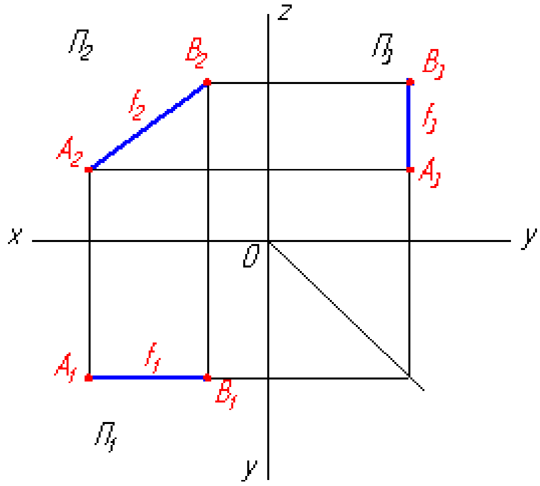
2. Прямые параллельные плоскостям проекций, занимают частное положение в пространстве и называются *прямыми уровня*. В зависимости от того, какой плоскости проекций параллельна заданная прямая, различают:

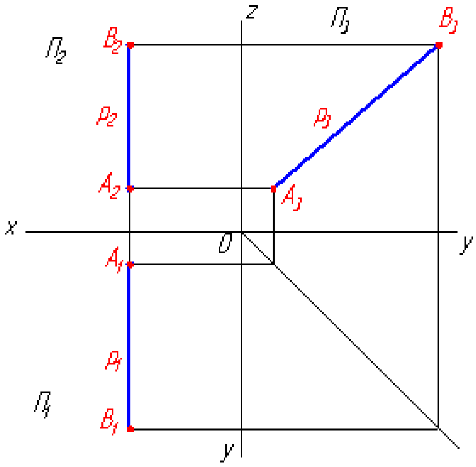
2.1. Прямые параллельные горизонтальной плоскости проекций называются горизонтальными или горизонталями (рис.3.2).

Рис.3.2 Горизонтальная прямая

Рис.3.3 Фронтальная прямая







2.2. Прямые параллельные фронтальной плоскости проекций называются фронтальными или фронталями (рис.3.3).

2.3. Прямые параллельные профильной плоскости проекций называются профильными (рис. 3.4).

Рис. 3.4 Профильная прямая

3. Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называются проецирующими. Прямая перпендикулярная одной плоскости проекций, параллельна двум другим. В зависимости от того, какой плоскости проекций перпендикулярна исследуемая прямая, различают:

3.1. Фронтально-проецирующая прямая - АВ (рис. 3.5).

3.2. Профильно проецирующая прямая - АВ (рис.3.6).

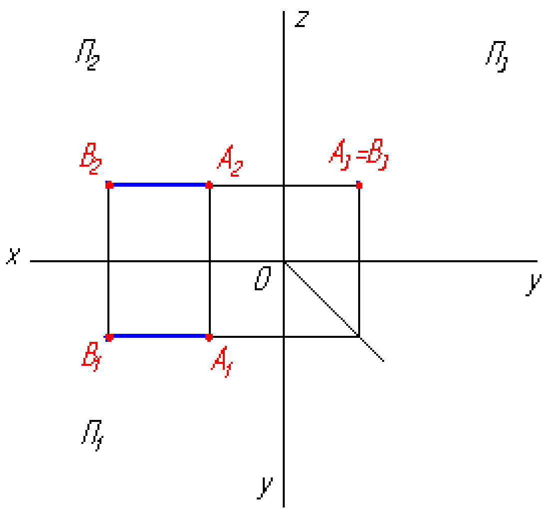


Рис. 3.5 Фронтально-проецирующая прямая

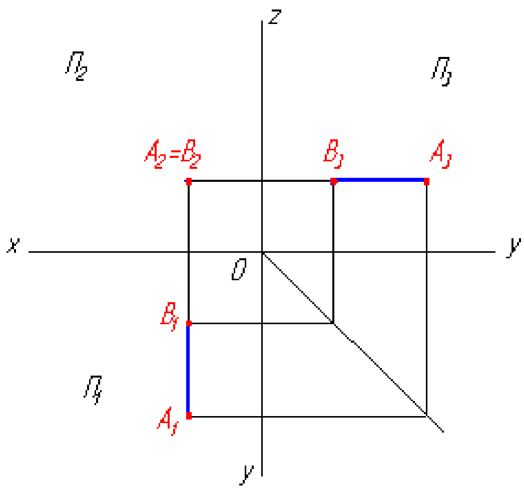


Рис.3.6 Профильно-проецирующая прямая

ВОПРОСЫ

1. При каком положении относительно плоскостей проекций прямая называется прямой общего положения?
2. Как доказывается, что чертеж, содержащий две связанные между собой проекции в виде отрезков прямой линии, выражает именно отрезок прямой линии?
3. Как выражается соотношение между проекцией отрезка прямой и самим отрезком?
4. Как расположена прямая в системе , если все три проекции отрезка этой прямой равны между собой?
5. Как построить профильную проекцию отрезка прямой общего положения по данным фронтальной и горизонтальной проекциям?
6. Как выполнить построение по вопросу 5 на чертеже без осей проекций?
7. Какие положения прямой линии в системе считаются "особыми" (иначе "частными")?
8. Как располагается фронтальная проекция отрезка прямой линии, если его горизонтальная проекция равна самому отрезку?
9. Как располагается горизонтальная проекция отрезка прямой линии,если его фронтальная проекция равна самому отрезку?
10. Какое свойство параллельного проецирования касается отношения отрезков прямой линии?

ЛЕКЦИЯ № 4

Взаимное положение двух прямых.

1. Проектирование прямого угла.

2. Изучение видимости чертежей.

3. Основные свойства ортогонального проектирования.

Взаимное расположение двух прямых

Прямые линии в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися. Рассмотрим подробнее каждый случай.

1. Параллельные прямые линии.

Параллельными называются две прямые, которые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Проекции параллельных прямых на любую плоскость (не перпендикулярную данным прямым) - параллельны. Если AB//CD то $A_1B_1//C_1D_1$; $A_2B_2//C_2D_2$; $A_3B_3//C_3D_3$ (рис.4.1). В общем случае справедливо и обратное утверждение.

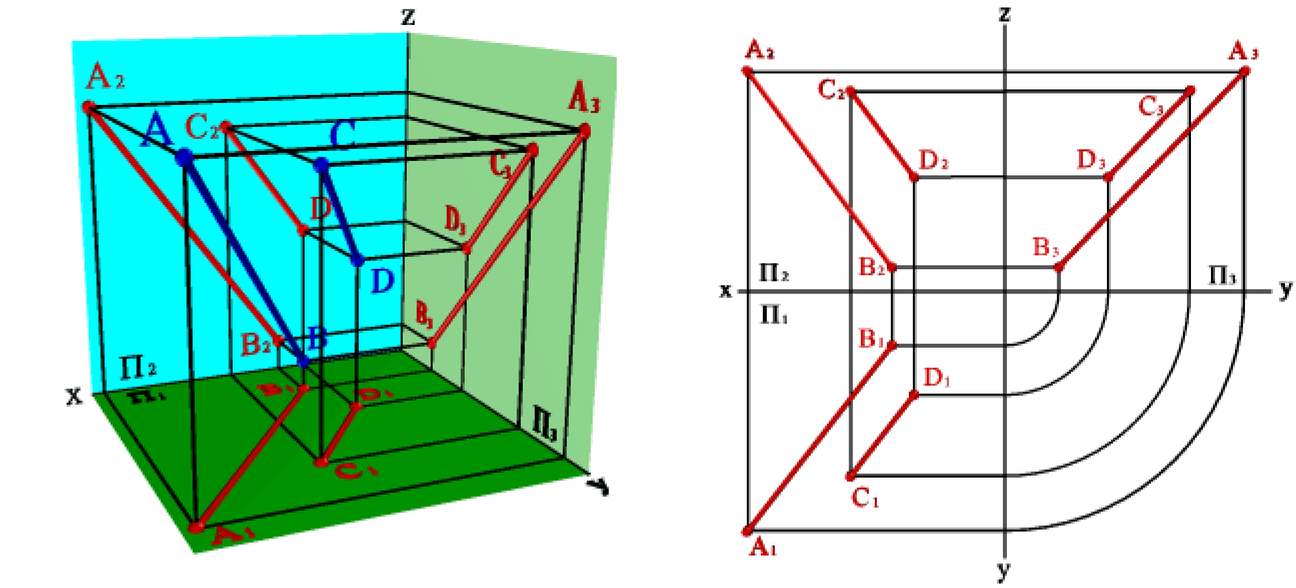


Рис.4.1 Параллельные прямые: а) модель б) эпюр

Особый случай представляют собой прямые, параллельные одной из плоскостей проекций. Например, фронтальные и горизонтальные проекции профильных прямых параллельны, но для оценки их взаимного положения необходимо сделать проекцию на профильную плоскость проекций (рис. 4.2). В рассмотренном случае проекции отрезков на плоскость $П_3$ пересекаются, следовательно, они не параллельны.

Решение этого вопроса можно получить сравнением двух соотношений если:

$A_2B_2/\ A_1B_1 = C_2Д_2/\ C_1Д_1$ AB//CД

$A_2B_2/\ A_1B_1^1\ C_2Д_2/\ C_1Д_1$ AB#CД

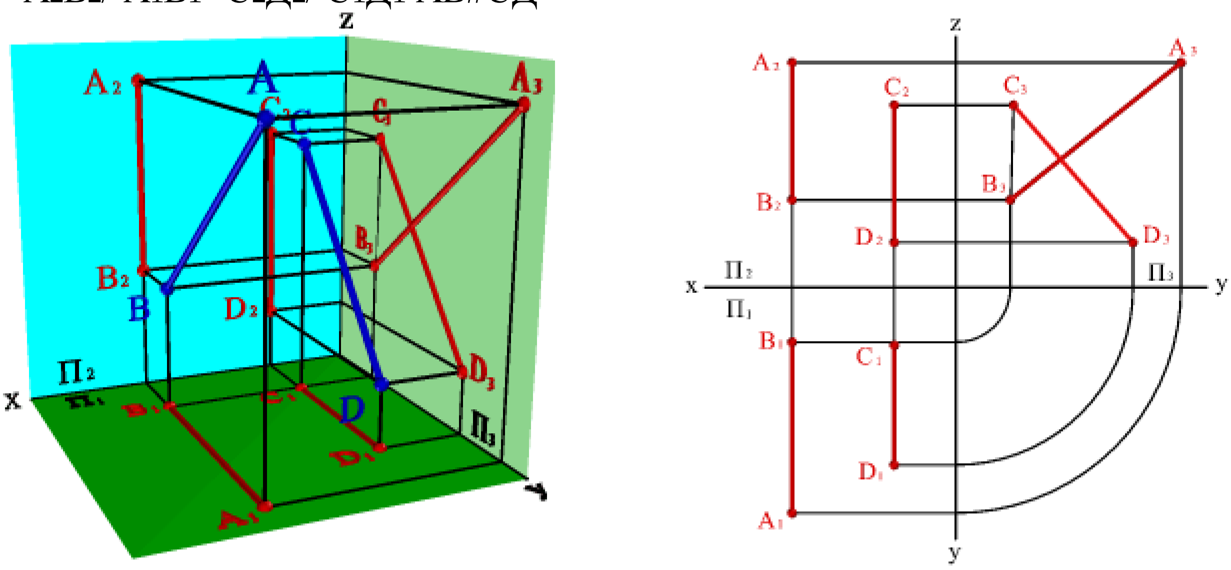
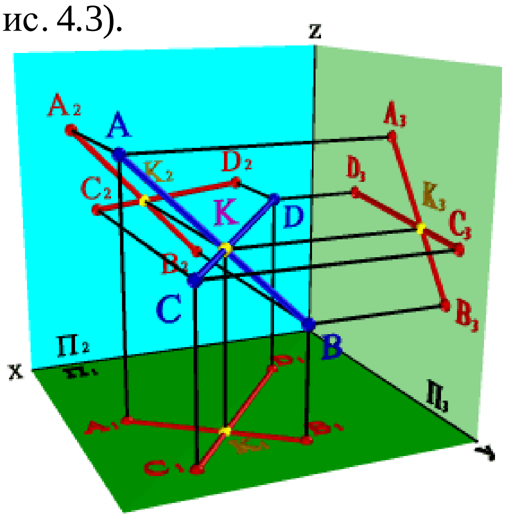


Рис.4.2 Прямые параллельные профильной плоскости проекций: а) модель б) эпюр

2. Пересекающиеся прямые.

Пересекающимися называются две прямые лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку. Если прямые пересекаются, то точки пересечения их одноименных проекций находится на одной линии связи (рис. 4.3).



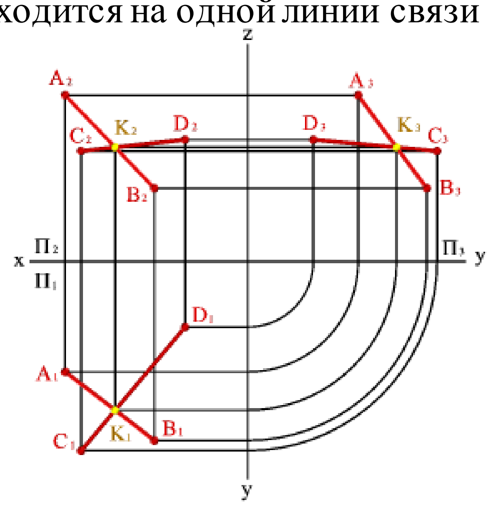
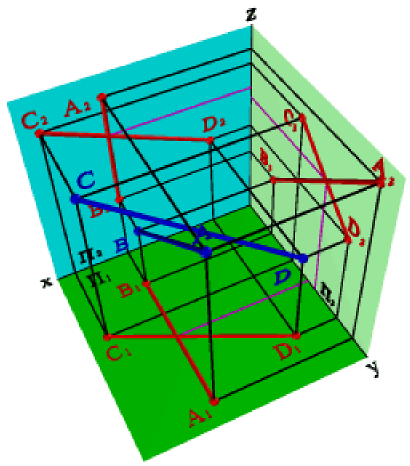
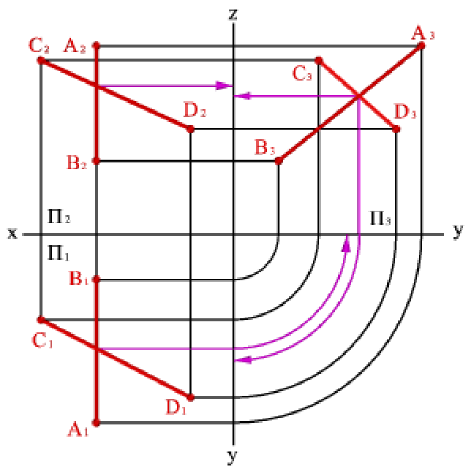


Рис.4.3 Пересекающиеся прямые: а) модель б) эпюр

В общем случае справедливо и обратное утверждение, но есть два частных случая:

1. Если одна из прямых параллельна какой-либо из плоскостей проекций, например, профильной (рис.4.4), то по двум проекциям невозможно судить об их взаимном расположении. Так горизонтальная и фронтальная проекции отрезков АВ и СД пересекаются, причем точка пересечения



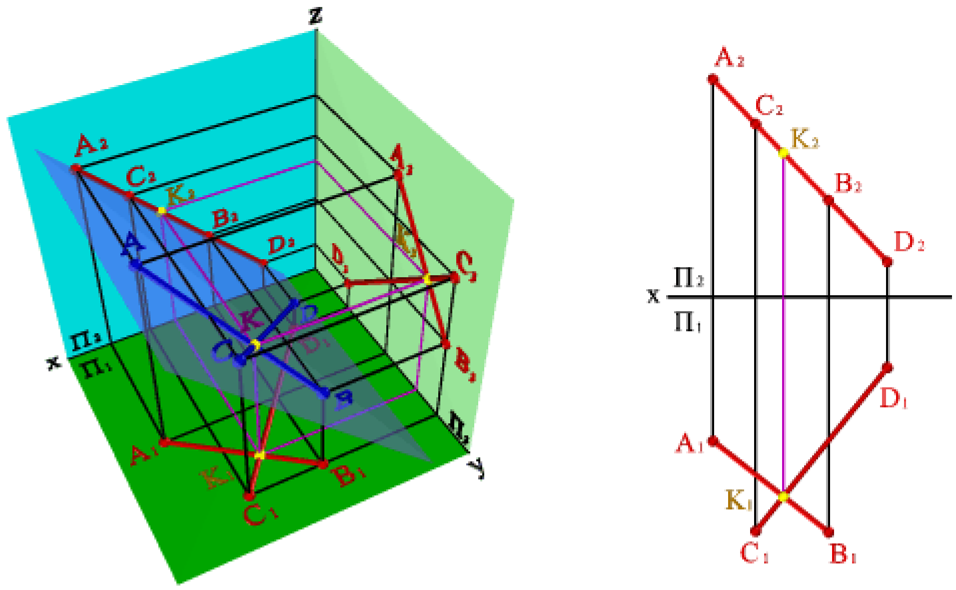


проекций лежит на одной линии связи, однако сами отрезки не пересекаются, потому что точка пересечения профильных проекций этих отрезков не лежит на одной линии связи с точками пересечения их горизонтальной и фронтальной проекций.

Рис. 4.4 Одна из прямых параллельна профильной плоскости проекций а) модель б) эпюр

2. Пересекающие прямые расположены в общей для них проецирующей плоскости, например перпендикулярной фронтальной плоскости проекций (рис. 4.5).

О взаимном расположении прямых, лежащих в этой плоскости, можно судить по одной горизонтальной проекции ($A_1B_1 \cap C_1D_1$Þ $AB \cap CD$).



а) модель б) эпюр

Рис.4.5. Пересекающиеся прямые расположены в фронтально-проецирующей плоскости

3. Скрещивающиеся прямые

Скрещивающимися называются две прямые не лежащие в одной плоскости.

Если прямые не пересекаются и не параллельны между собой, то точка пересечения их одноименных проекций не лежит на одной линии связи.

Точке пересечения фронтальных проекций прямых (рис.4.6) соответствуют две точки А и В, из которых одна принадлежит прямой а, другая в. Их фронтальные проекции совпадают лишь потому, что в пространстве обе точки А и В находятся на общем перпендикуляре к фронтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция этого перпендикуляра, обозначенная стрелкой, позволяет установить, какая из двух точек ближе к наблюдателю. На предложенном примере ближе точка В, лежащая на прямой в, следовательно, прямая в проходит в этом месте ближе прямой а и фронтальная проекция точки В закрывает проекцию точки А. (Для точек С и D решение аналогично).

Этот способ определения видимости по конкурирующим точкам. В данном случае точки А и В- фронтально конкурирующие, а С и D - горизонтально конкурирующие.

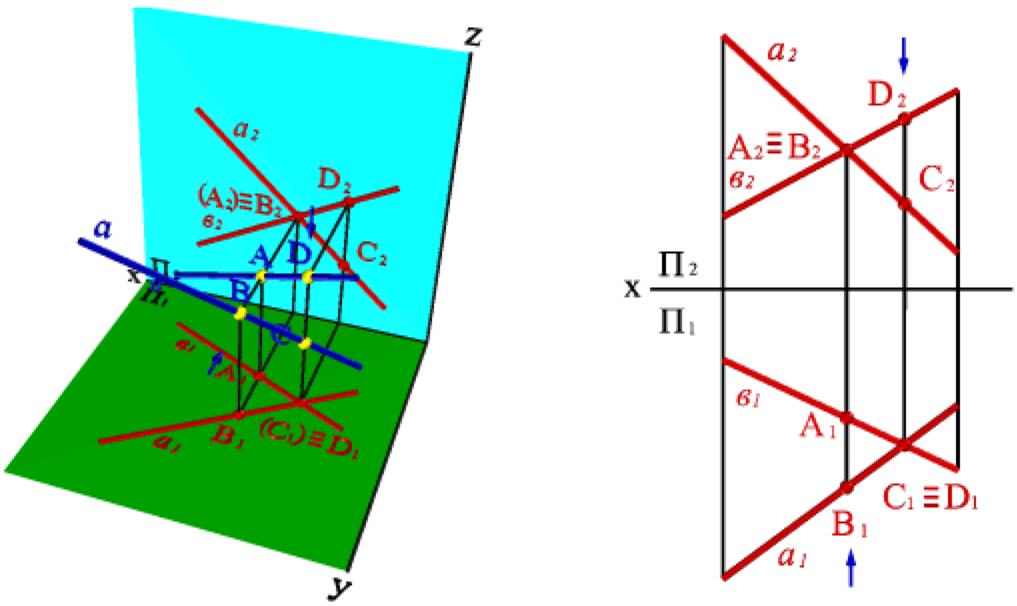
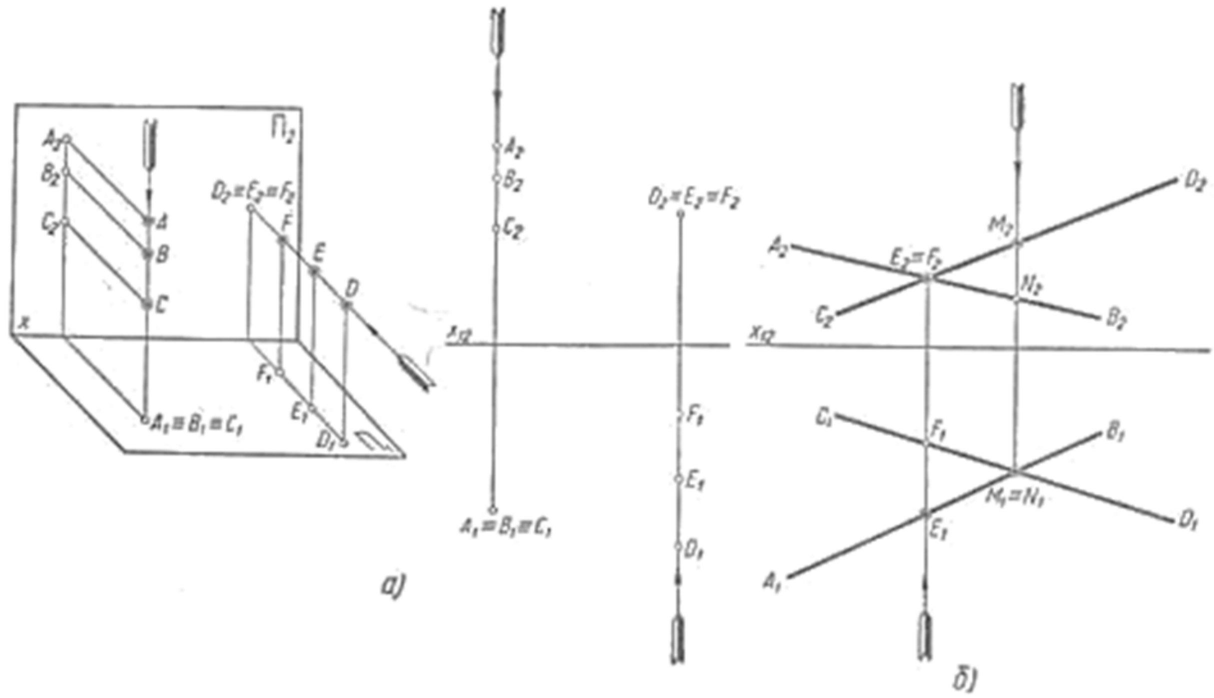


Рис. 4.6 Скрещивающиеся прямые: а) модель б) эпюр

Условия видимости

1. Придание наглядности комплексному чертежу. На комплексном чертеже прямую, пересекающуюся с плоскостью, изображают: сплошной линией - проекции видимой части прямой, расположенной перед или над плоскостью; и штриховой — невидимые части, расположенные за или под плоскостью.
Границей видимой части в каждом случае служит проекция точки пересечения прямой с плоскостью.
Определить видимую часть прямой в каждой проекции следует отдельно.
2. Понятие видимости точек на комплексном чертеже.

3. На (фиг.255,а) на горизонтально-проектирующей прямой лежат точки A, B и C. Наблюдатель, смотрящий «сверху» (показано стрелкой), первой увидит точку A и не может видеть остальные точки B и C, так как они закрыты точкой A.



Фиг 255.

Отсюда видимой точкой из трех будет точка A, как наиболее удаленная от плоскости П1 т.е. имеющая наибольшую высоту; она определяется на комплексном чертеже по наибольшему расстоянию фронтальной проекции от оси x12.

То же можно сказать и о точке D. Наблюдатель, смотрящий «спереди» (показано стрелкой), первой увидит точку D и не может видеть точек E и F, так как они закрыты точкой D; следовательно, из трех данных точек будет видимой только точка D; она наиболее удалена от плоскости П2, так как имеет наибольшую глубину. На комплексном чертеже она определяется по наибольшему расстоянию горизонтальной проекции от оси x12

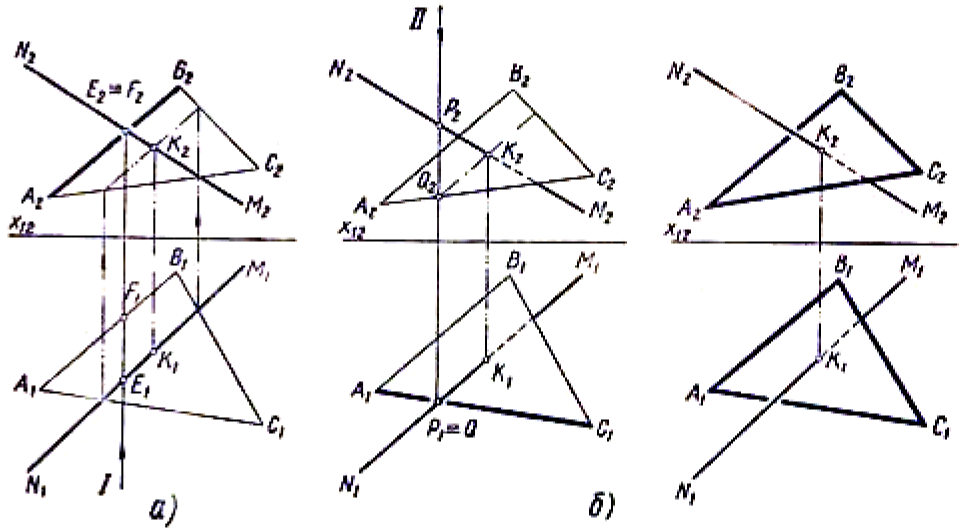
Определив понятие видимости точки, рассмотрим это в применении на двух скрещивающихся прямых (фиг.255,б).

Задача состоит в том, чтобы установить, какая из точек является видимой и какая невидимой.

Рассматривая на комплексном чертеже одноименные горизонтальные проекции E1 и F1 устанавливаем, что точка E1 имеет глубину большую, чем точка F1 т. е. точка E удалена от плоскости П2 дальше, чем точка F. Следовательно, точка E при виде спереди (в плоскости П2) является видимой. По одноименным фронтальным проекциям прямых видно, что прямая AB в точке E расположена перед прямой CD.

По расположению на фронтальных проекциях точек M2 и N2 видно, что высота точки M2 больше высоты точки N2, т.е. точка M находится дальше от плоскости П1 чем точка N. Следовательно, точка M при виде сверху (в плоскости П1) является видимой. Рассматривая одноименные горизонтальные проекции прямых, заключаем, что прямая CD в точке M находится над прямой AB.

Разберем, как на комплексном чертеже пересечения прямой с треугольником следует определять видимые участки прямых (фиг.256).



Фиг. 256.

Точка K пересечения данной прямой с треугольником найдена согласно указаниям, данным в описании к (фиг.251).

а) Точка E принадлежит отрезку NK; точка F - стороне AB треугольник. Надо определить, какой из отрезков, NK или AB, находится перед другим.

Возьмем направление лучей зрения по стрелке 1 (фиг.256,а), горизонтальная проекция - точка E1 - находится дальше от оси x12, чем проекция точки F1 отсюда следует, что точка E является видимой. Следовательно, на виде спереди отрезок, проходящий через точку E, будет находиться перед стороной AB треугольника ABC.

б) Точка P принадлежит отрезку NK; точка Q - стороне AC треугольника. Надо определить, какой из отрезков, NK или AC, находится один над другим. Возьмем направление луча зрения по стрелке 11 (фиг.256,б); фронтальная проекция - точка P2 - находится дальше от оси x12, чем проекция точки Q2, отсюда точка P2 является видимой и, следовательно, отрезок, проведенный через эту точку, будет находиться над стороной AC треугольника ABC.

ЛЕКЦИЯ №5

Плоскость.

1. Вид плоскости.

2. Взаимное положение плоскости и прямой линии.

3. Основные свойства проекционной плоскости.

Плоскость– одно из основных понятий геометрии. При систематическом изложении геометрии понятие плоскость обычно принимается заодно из исходных понятий, которое лишь косвенным образом определяется аксиомами геометрии. Некоторые характеристические свойства плоскости: 1. Плоскость есть поверхность, содержащая полностью каждую прямую, соединяющую любые ее точки; 2. Плоскость есть множество точек, равноотстоящих от двух заданных точек.

Способы графического задания плоскостей Положение плоскости в пространстве можно определить:

1. **Тремя точками, не лежащими на одной прямой линии (рис.5.1).**

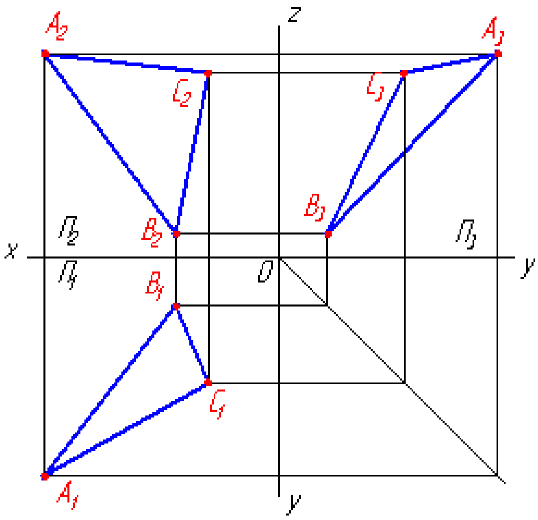


Рис.5.1 Плоскость заданная тремя точками, не лежащими на одной прямой

2. **Прямой линией и точкой, не принадлежащей этой прямой (рис.5.2).**

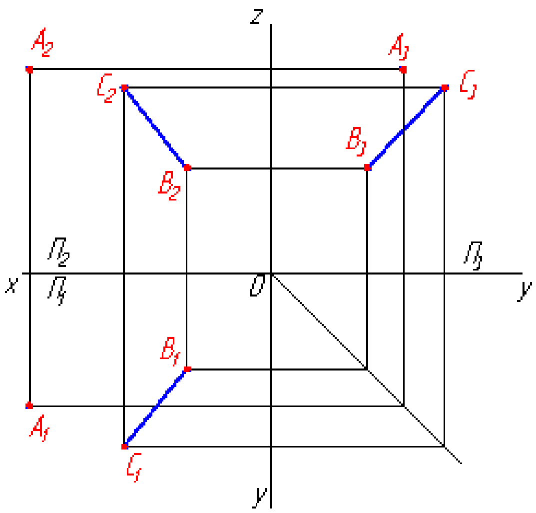


Рис.5.2 Плоскость заданная прямой линией и точкой, не принадлежащей этой линии

3. **Двумя пересекающимися прямыми (рис.5.3).**

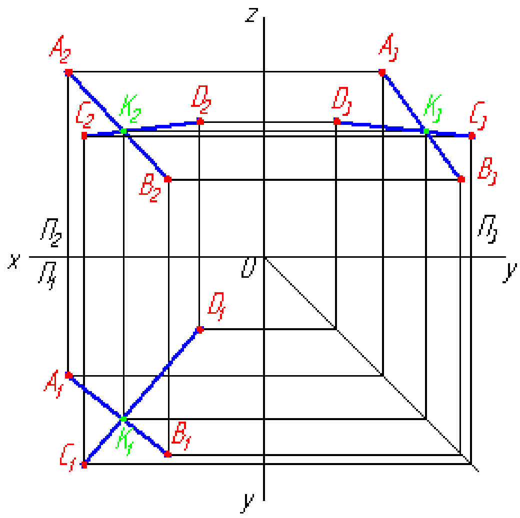


Рис.5.3 Плоскость заданная двумя пересекающимися прямыми линиями.

Положение плоскости. Следы плоскости

Различное положение плоскости относительно плоскостей проекций

В зависимости от положения плоскости по отношению к плоскостям проекций она может занимать как общее, так и частные положения.

1. Плоскость не перпендикулярная ни одной плоскости проекций называется *плоскостью общего положения*. Такая плоскость пересекает все плоскости проекций (имеет три следа: - горизонтальный S1; - фронтальный S2; - профильный S3). Следы плоскости общего положения пересекаются попарно на осях в точках ax,ay,az. Эти точки называются точками схода следов, их можно рассматривать как вершины трехгранных углов, образованных данной плоскостью с двумя из трех плоскостей проекций. Каждый из следов плоскости совпадает со своей одноименной проекцией, а две другие разноименные проекции лежат на осях.

2. Плоскости перпендикулярные плоскостям проекций – занимают частное положение в пространстве и называются *проецирующими*. В зависимости от того, какой плоскости проекций перпендикулярна заданная плоскость, различают:

2.1. Плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (S^П1),называется *горизонтально-проецирующей плоскостью*. Горизонтальная проекция такой плоскости представляет собой прямую линию, которая одновременно является её горизонтальным следом. Горизонтальные проекции всех точек любых фигур в этой плоскости совпадают с горизонтальным следом (рис.5.4).

2.2. Плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций (S^П2) - фронтально-проецирующая плоскость. Фронтальной проекцией плоскости S является прямая линия, совпадающая со следом S2 (рис.5.5).

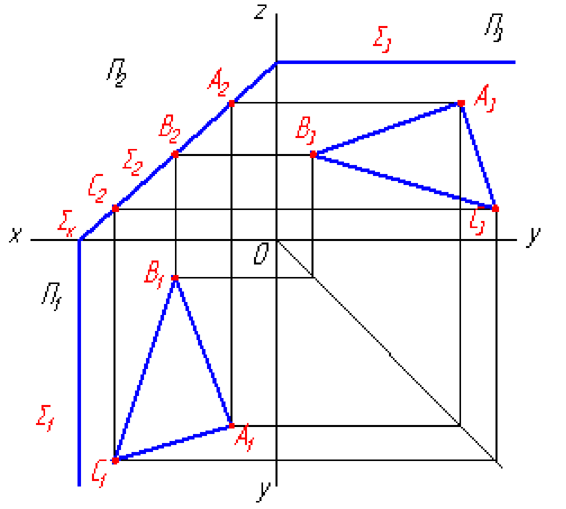


Рис. 5.4 Горизонтально-проецирующая пл.

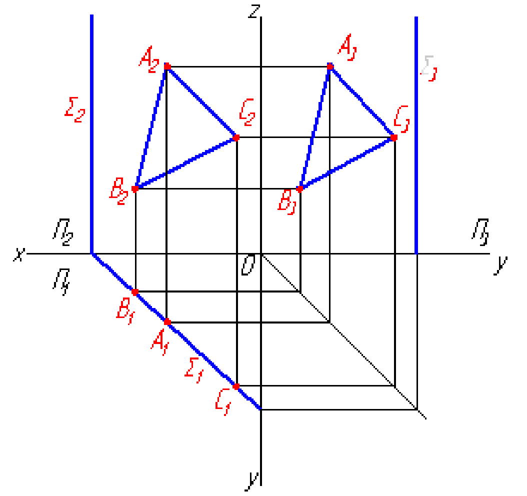
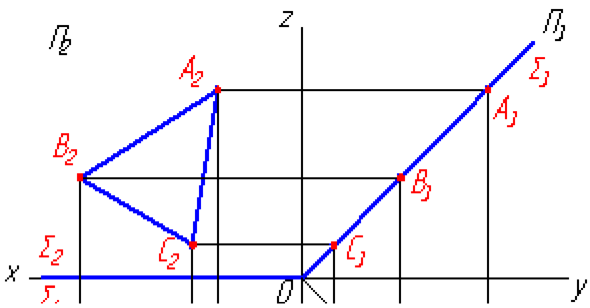


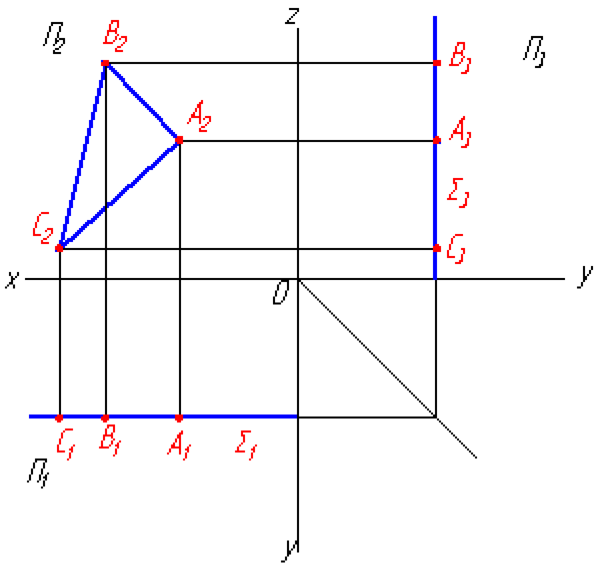
Рис. 5.5 Профильно-проецирующая пл.

2.3. Плоскость, перпендикулярная профильной плоскости (S^П3) - профильно-проецирующая плоскость. Частным случаем такой плоскости является, биссекторная плоскость (Рис.5.6)

3. Плоскости параллельные плоскостям проекций – занимают частное положение в пространстве и называются плоскостями уровня. В зависимости от того, какой плоскости параллельны исследуемая плоскость, различают:

3.1. Горизонтальная плоскость - плоскость параллельная горизонтальной плоскости проекций (S⊥П2, S⊥П3). Любая фигура в этой плоскости проецируется на плоскость П1 без искажения, а на плоскости П2 и П3 в прямые - следы плоскости S2 и S3 (рис.5.7).





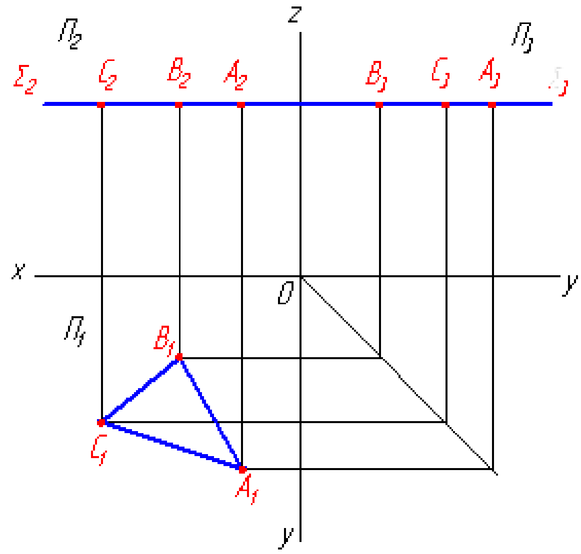


Рис.5.6 Профильно-проецирующая плоскость
Рис. 5.7 Горизонтальная плоскость

3.2.Фронтальная плоскость - плоскость параллельная фронтальной плоскости проекций (S//П2), (S^П1, S^П3). Любая фигура в этой плоскости проецируется на плоскость П2 без искажения, а на плоскости П1 и П3 в прямые - следы плоскости S1 и S3 (рис.5.8).

Рисунок 5.8 Фронтальная плоскость

Следы плоскости

Следом плоскости называется линия пересечения плоскости с плоскостями проекций. В зависимости от того с какой из плоскостей проекций пересекается данная, различают: горизонтальный, фронтальный и профильный следы плоскости.

Каждый след плоскости является прямой линией, для построения которых необходимо знать две точки, либо одну точку и направление прямой(как для построения любой прямой). На рисунке 5.8 показано нахождение следов плоскости S (ABC). Фронтальный след плоскости S2, построен, как прямая соединяющая две точки 12 и 22, являющиеся фронтальными следами соответствующих прямых, принадлежащих плоскости S. Горизонтальный следS1 – прямая, проходящая через горизонтальный след прямой AB и Sx. Профильный след S3 – прямая соединяющая точки (Sy и Sz) пересечения горизонтального и фронтального следов с осями.

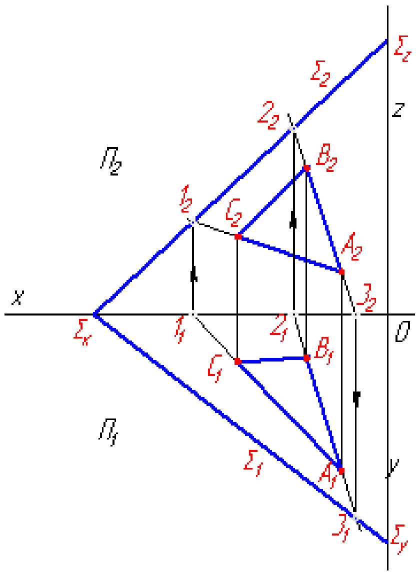


Рис. 5.9 Построение следов плоскости

Определение взаимного положения прямой и плоскости - позиционная задача, для решения которой применяется метод вспомогательных секущих плоскостей. Сущность метода заключается в следующем. Через прямую проведем вспомогательную секущую плоскость Q. И установим относительное положение двух прямых a и b. Последняя, из которых является линией пересечения вспомогательной секущей плоскости Q и данной плоскости T(рис.5.10).

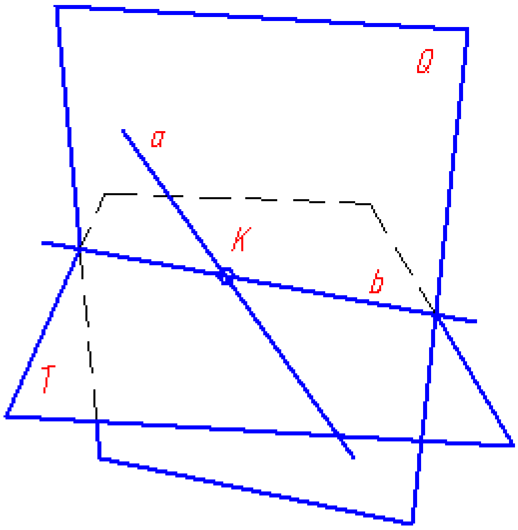


Рис.5.10 Метод вспомогательных секущих плоскостей

Каждому из трех возможных случаев относительного расположения этих прямых соответствует аналогичный случай взаимного расположения прямой и плоскости. Так, если обе прямые совпадают, то прямая а лежит в плоскости Т, параллельность прямых укажет на параллельность прямой и плоскости и, наконец, пересечение прямых соответствует случаю когда прямая а пересекает плоскость Т. Таким образом возможны три случая относительного расположения прямой и плоскости: Прямая принадлежит плоскости; Прямая параллельна плоскости; Прямая пересекает плоскость, частный случай – прямая перпендикулярна плоскости. Рассмотрим каждый случай.

Прямая линия, принадлежащая плоскости

Аксиома1. Прямая принадлежит плоскости, если две её точки принадлежат той же плоскости (рис.5.12).

Задача. Дана плоскость (n,k) и одна проекция прямойm2. Требуется найти недостающие проекции прямой m если известно, что она принадлежит плоскости, заданной пересекающимися прямыми n и k. Проекция прямой m2 пересекает прямые n и k в точках B2 и C2, для нахождения недостающих проекций прямой необходимо найти недостающие проекции точек B и C как точек лежащих на прямых соответственно n и k. Таким образом точки B и C принадлежат плоскости заданной пересекающимися прямыми n и k, а прямая m проходит через эти точки, значит согласно аксиоме прямая принадлежит этой плоскости.

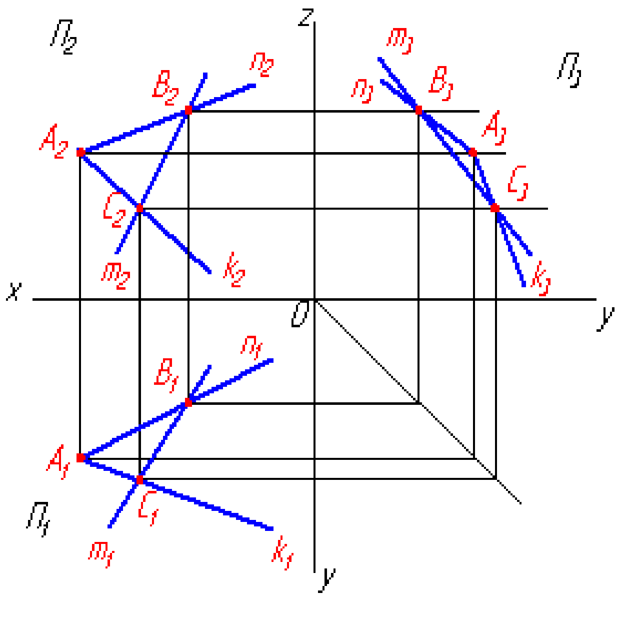


Рис.5.12 Прямая и плоскость имеют две общие точки

Аксиома 2. Прямая принадлежит плоскости, если имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой расположенной в этой плоскости (рис.5.13).

Задача. Через точку В провести прямую m если известно, что она принадлежит плоскости заданной пересекающимися прямыми n и k. Пусть В принадлежит прямой n лежащей в плоскости заданной пересекающимися прямыми n и k. Через проекцию В2 проведем проекцию прямой m2 параллельно прямой k2, для нахождения недостающих проекций прямой необходимо построить проекцию точки В1, как точки лежащей на проекции прямой n1 и через неё провести проекцию прямой m1 параллельно проекции k1. Таким образом точки. В принадлежат плоскости заданной пересекающимися прямыми n и k, а прямая m проходит через эту точку и параллельна прямой k, значит согласно аксиоме прямая принадлежит этой плоскости.

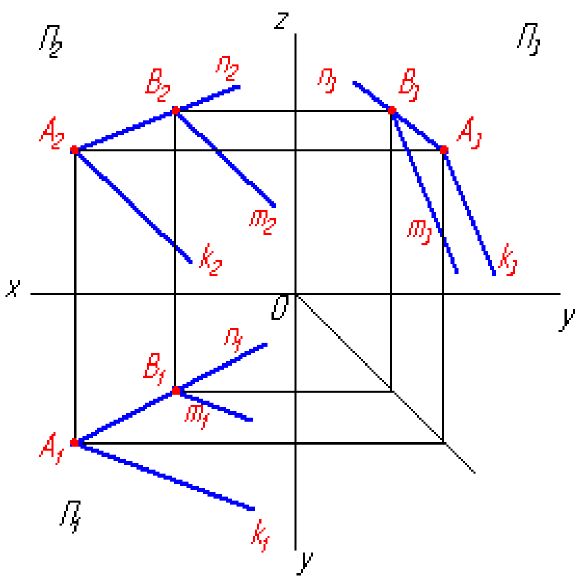


Рис.5.13 Прямая имеет одну общую точку с плоскостью и параллельна какой-либо прямой из плоскости

Взаимное расположение точки и плоскости

Возможны два варианта взаимного расположения точки и плоскости: либо точка принадлежит плоскости, либо нет. Если точка принадлежит плоскости то из трех проекций, определяющих положение точки в пространстве, произвольно задать можно только одну. Рассмотрим пример (рис.5.14): Построение проекции точки А принадлежащей плоскости общего положения заданной двумя параллельными прямыми а(а//b).

Задача. Дано: плоскость Т(а,в) и проекция точки А2. Требуется построить проекцию А1 если известно, что точка А лежит в плоскости в,а. Через точку А2 проведем проекцию прямой m2, пересекающую проекции прямых а2 и b2 в точках С2 и В2. Построив проекции точек С1 и В1, определяющие положение m1, находим горизонтальную проекцию точки А.

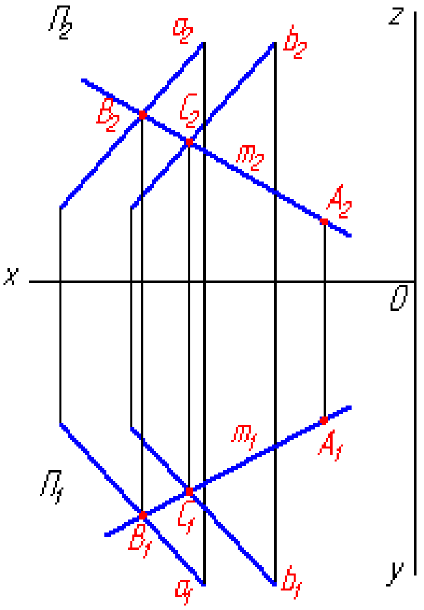


Рис5.14 Точка, принадлежащая плоскости

ЛЕКЦИЯ № 6

Взаимоположение двух плоскостей.

1. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ.
2. ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

Две плоскости могут быть параллельными или пересекаться между собой.

Рассмотрим случай взаимной параллельности плоскостей. Если плоскости α и β параллельны (рис. 6.1), то всегда в каждой из них можно построить по две пересекающиеся между собой прямые линии так, чтобы прямые одной плоскости были соответственно параллельны двум прямым другой плоскости.

Это служит основным признаком для определения, параллельны плоскости между собой или не параллельны. Такими прямыми могут служить, например, следы обеих плоскостей: если два пересекающихся между собой следа одной плоскости параллельны одноименным с ними следам другой плоскости, то обеплоскости параллельны между собой (рис. 6.2).

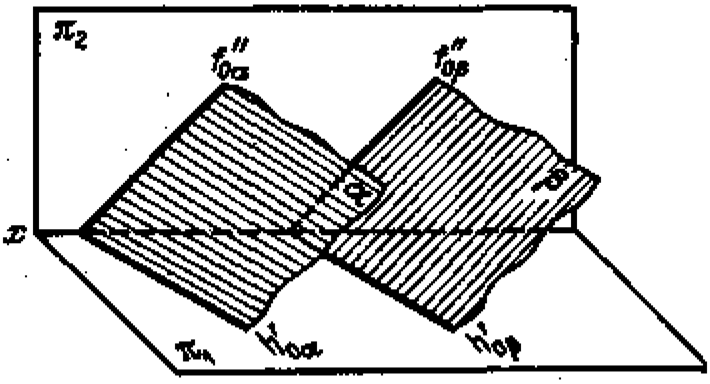


Рис.6.1

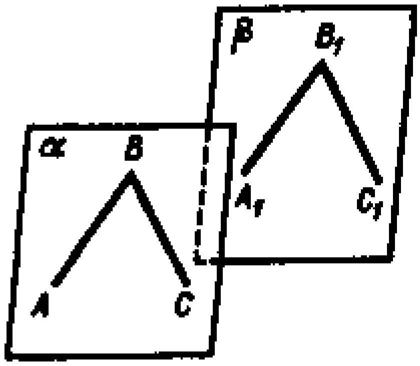


Рис.6.2

Очевидно, если известно, что параллельные между собой плоскости фронтально-проецирующие, то на чертеже можно в некоторых случаях ограничиться только приведением их фронтальных следов так, как это показано далее на рис.6.3.Для горизонтально-проецирующих плоскостей (если известно, что они. взаимно параллельны) в аналогичных случаях достаточно провести их горизонтальные следы -- один параллельно другому.

Рассмотрим случай взаимного пересечения плоскостей. В случае задания плоскостей их следами легко установить, что эти плоскости пересекаются: если хотя бы одна пара одноименных следов пересекается, то плоскости пересекаются: плоскости γ и β пересекаются между собой.

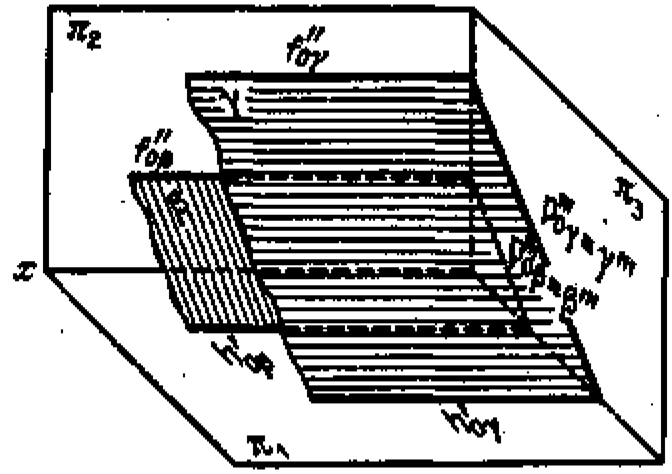


Рис.6.3

Изложенное относится к плоскостям, заданным пересекающимися следами.

Если же обе плоскости имеют следы, параллельные оси x, то эти плоскости могут или пересекаться, или быть параллельными. Для решения вопроса о взаимном положении таких плоскостей можно построить третий след: если следы обеих плоскостей на третьей плоскости проекций также параллельны друг другу, то плоскости параллельны; если же третьи следы пересекаются, то плоскости пересекаются.

Так решается вопрос о взаимном положении двух плоскостей, заданных следами. Если же плоскости заданы не следами, а каким-либо другим способом, и надо узнать, пересекаются ли эти плоскости, то вообще следует прибегать к некоторым вспомогательным построениям. Примеры этих построений будут даны при дальнейшем изложении.

Рассмотрим случаи взаимного положения прямой линии и плоскости.

Взаимное положение прямой линии и плоскости в пространстве может быть следующим: а) прямая лежит в плоскости, б) прямая пересекает плоскость, в) прямая параллельна плоскости.

Если на чертеже непосредственно нельзя установить взаимного положения прямой и плоскости, и то прибегают к некоторым вспомогательным построениям, в результате которых от вопроса о взаимном положении прямой и плоскости переходят к вопросу о взаимном положении данной прямой и некоторой вспомогательной прямой. Для этого (рис. 6.4) проводят через данную прямую AB некоторую вспомогательную плоскость и рассматривают взаимное положение прямой пересечения плоскостей и прямой AB.

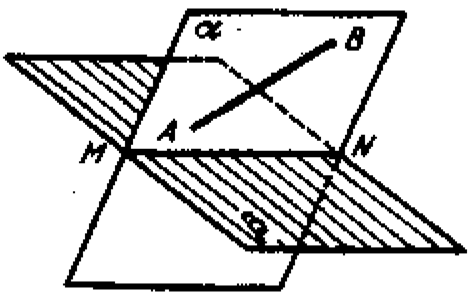


Рис.6.4

При этом возможны три случая:

1) ПрямаяMN сливается с прямой AB; это соответствует тому, что прямая AB принадлежит пл.

2) ПрямаяMN пересекает прямую AB; это соответствует тому, что прямая AB пересекает пл.

3) ПрямаяMN параллельна прямой АВ; это соответствует тому, что прямая АВ параллельна пл..

Итак, указанный прием определения взаимного положения прямой и плоскости заключается в следующем:

1) через данную прямую проводят вспомогательную плоскость и строят линию пересечения этой плоскости и данной плоскости;

2) устанавливают взаимное положение данной прямой и прямой пересечения плоскостей; найденное положение определяет взаимное положение данных прямой и плоскости.

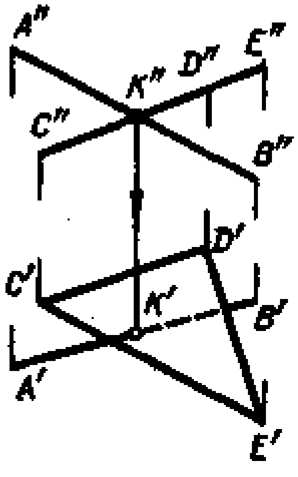
Для решения вопроса о взаимном положении плоскости и прямой мы применили способ вспомогательных плоскостей, которым часто пользуются при построениях, связанных со взаимным расположением различных поверхностей и линий с поверхностями.

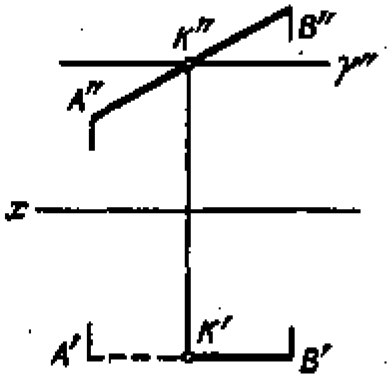
Подбор вспомогательных плоскостей обычно производят с таким расчетом, чтобы построения были как можно более простыми. Может оказаться, например, что плоскости горизонтальные или фронтальные, горизонтально и фронтально проецирующие, вообще весьма удобные в качестве вспомогательных, нельзя будет применить совсем или их применение вызовет усложнение построения даже по сравнению с плоскостями общего положения, взятыми в качестве вспомогательных. Решая ту или иную задачу с применением вспомогательных плоскостей, необходимо выбирать эти плоскости так, чтобы все возникающие при этом построения были возможно проще и чтобы этих построений было как можно меньше.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПЛОСКОСТЬЮ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ОДНОЙ ИЛИ К ДВУМ ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ

Плоскость, перпендикулярная к плоскости проекций, проецируется на последнюю в виде прямой линии. На этой прямой (проекции плоскости) должна находиться соответствующая проекция точки, в которой некоторая прямая пересекает такую плоскость1).

На рис.6.5 фронтальная проекция К" точки пересечения прямой АВ с треугольником СОЕ определяется в пересечении проекций А"В" и С"Е", так как треугольник проецируется на пл. в виде прямой линий. Найдя точку К", определяем положение проекции К'. Так как





прямая АВ в направлении от К к В находится под Рис.6.5

точку пересечения прямой с плоскостью называют также *точкой встречи прямой с плоскостью*.

Для большей наглядности изображают проекции отрезков прямой линии, пересекающей плоскость, одни -- сплошными линиями, другие штриховыми, руководствуясь при этом следующими соображениями:

1. Условно считают, что данная плоскость непрозрачна и точки и линии, лежащие хотя бы и в первой четверти, расположенные для зрителя за плоскостью, будут невидимыми; видимыми же будут точки и линии, расположенные по одну сторону плоскости со зрителем, который, как мы будем считать, находится в первом октанте и бесконечно далеко от соответствующей плоскости проекций.
2. Видимые отрезки линий вычерчиваются сплошными линиями, а невидимые штриховыми.
3. При пересечении прямой с плоскостью часть этой прямой делается для зрителя невидимой; точка пересечения прямой с плоскостью служит границей видимости линии.
4. Вопрос о видимости линии всегда можно свести к вопросу о видимости точек. При этом не только плоскость может закрывать точку, но и точка может закрывать другую точку.
5. Если несколько точек расположены на общей для них проецирующей прямой, то видимой будет только одна из них:
6. Если чертеж содержит оси проекций, то для определения видимости точек, расположенных на общей для них проецирующей прямой, служат расстояния их соответствующих проекций от оси проекций:

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости в пространстве могут совпадать, быть параллельными или пересекаться.

Если плоскости Б и Д совпадают или параллельны, то соответственно этим случаям для любой прямой l плоскости Б всегда найдется такая прямая т плоскости Д, которая будет совпадать с прямой l, или будет параллельна ей. Если же плоскости пересекаются, то любая прямая l плоскости Б будет пересекаться с какой-нибудь прямой т плоскости Д в некоторой точке К, принадлежащей линии пересечения плоскостей. Может оказаться, что прямые l и m будут параллельны, при этом они будут параллельны и линии пересечения плоскостей k.

Поскольку плоскость определяется двумя прямыми (пересекающимися или параллельными), то для определения взаимного расположения двух плоскостей Б и Д необходимо определить взаимное расположение двух пар прямых этих плоскостей. Обычно в качестве таких прямых выбирают конкурирующие прямые.

Нужно отметить, что при определении взаимного расположения двух плоскостей по двум параллельным прямым каждой плоскости не всегда удается однозначно решить задачу – плоскости могут оказаться или параллельными или пересекаться. Поэтому, если прямые первой пары оказались параллельными, то вторую пару прямых следует проводить не параллельно прямым первой пары.

Условие параллельности плоскостей лучше выразить так:

- Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Это служит основным признаком для определения параллельности плоскостей, а также для построения двух параллельных плоскостей. Рассмотрим применение этого признака на конкретных примерах.

Отсюда: чтобы найти линию пересечения двух плоскостей общего положения, надо на этих плоскостях провести две пары конкурирующих прямых и найти их точки пересечения, которые и определяют положение линии пересечения.

- Если при определении взаимного положения двух плоскостей одна или обе плоскости являются проецирующими, следует воспользоваться «вырождением» их проекций в прямую.

Способ конкурирующих прямых, с помощью которого определялось взаимное расположение плоскостей, является (как и в случае определения взаимного расположения прямой и плоскости) упрощенным толкованием способа посредников. Здесь мы вначале проводим две проецирующие плоскости, затем находим прямые пересечения этих плоскостей с данными плоскостями, после чего определяем относи тельные положения прямых пересечения заданных плоскостей с каждой из проецирующих.

Взаимное положение плоскостей

Две плоскости в пространстве могут быть либо взаимно параллельны, в частном случае совпадая друг с другом, либо пересекаться. Взаимно перпендикулярные плоскости, представляют собой частный случай пересекающихся плоскостей.

1. **Параллельные плоскости**. Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Это определение хорошо иллюстрируется задачей, через точку «В» провести плоскость параллельную плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми ab (рис.6.6). Задача. Дано: плоскость общего положения, заданную двумя пересекающимися

прямыми ab и точка B. Требуется через точку «B» провести плоскость, параллельную плоскости ab и задать её двумя пересекающимися прямыми c и d. Согласно определению если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны между собой. Для того чтобы провести на эпюре параллельные прямые необходимо воспользоваться свойством параллельного проецирования - проекции параллельных прямых - параллельны между собой d||a, c||b; d1||a1,c1||b1; d2||a2 ,c2||b2; d3||a3,c3||b3.

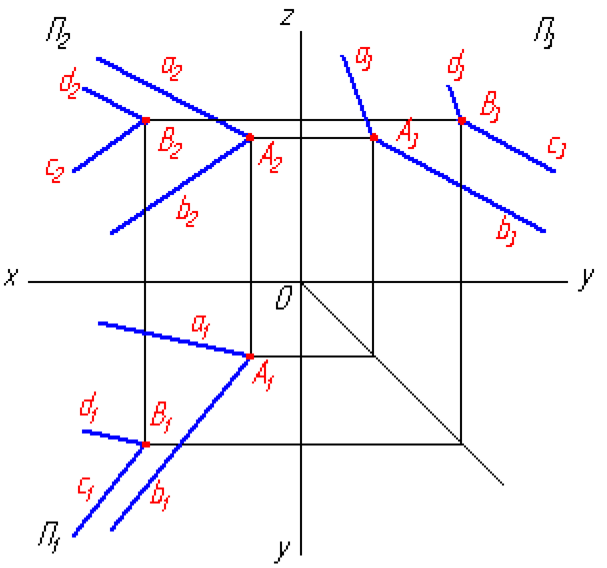


Рис.6.6. Параллельные плоскости

2. **Пересекающиеся плоскости**, частный случай – взаимно перпендикулярные плоскости. Линия пересечения двух плоскостей является прямая, для построения которой достаточно определить две её точки, общие обеим плоскостям, либо одну точку и направление линии пересечения плоскостей. Рассмотрим построение линии пересечения двух плоскостей, когда одна из них проецирующая (рис.6.7)

Задача. Дано: плоскость общего положения задана треугольником ABC, а вторая плоскость - горизонтально проецирующая T. Требуется построить линию пересечения плоскостей. Решение задачи заключается в нахождении двух точек общих для данных плоскостей, через которые можно провести прямую линию. Плоскость, заданная треугольником ABC можно представить, как прямые линии (AB), (AC), (BC). Точка пересечения прямой (AB) с плоскостью T - точка D, прямой (AC) -F. Отрезок [DF] определяет линию пересечения плоскостей. Так как T - горизонтально проецирующая плоскость, то проекция D1F1 совпадает со следом плоскости T1, таким образом остается только построить недостающие проекции [DF] на П2 и П3.

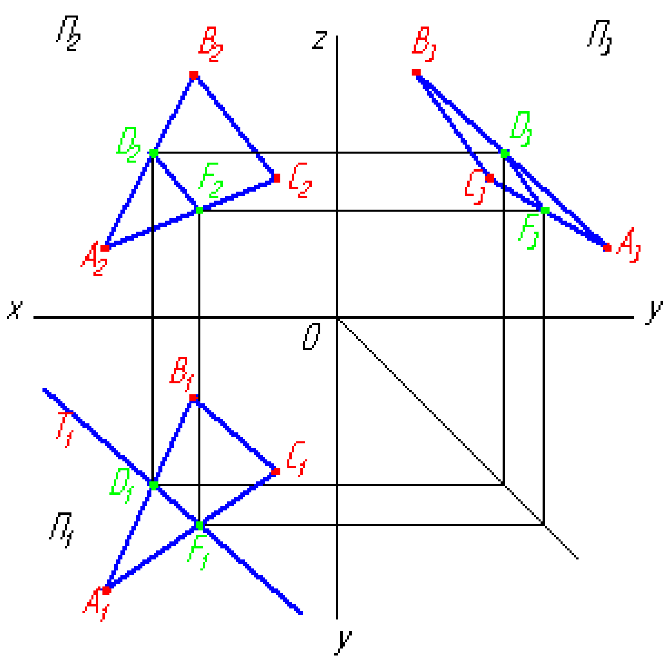


Рис.6.7. Пересечение плоскости общего положения с горизонтально проецирующей плоскостью

Плоскопараллельное перемещение. Вращение. Замена плоскостей проекций.
Метод плоскопараллельного перемещения.

Изменение взаимного положения проецируемого объекта и плоскостей проекций методом плоскопараллельного перемещения осуществляется путем изменения положения геометрического объекта так, чтобы траектория движения её точек находилась в параллельных плоскостях. Плоскости носители траекторий перемещения точек параллельны какой-либо плоскости проекций (рис. 6.8). Траектория произвольная линия. При параллельном переносе геометрического объекта относительно плоскостей проекций, проекция фигуры хотя и меняет свое положение, но остается конгруэнтной проекции фигуры в ее исходном положении.

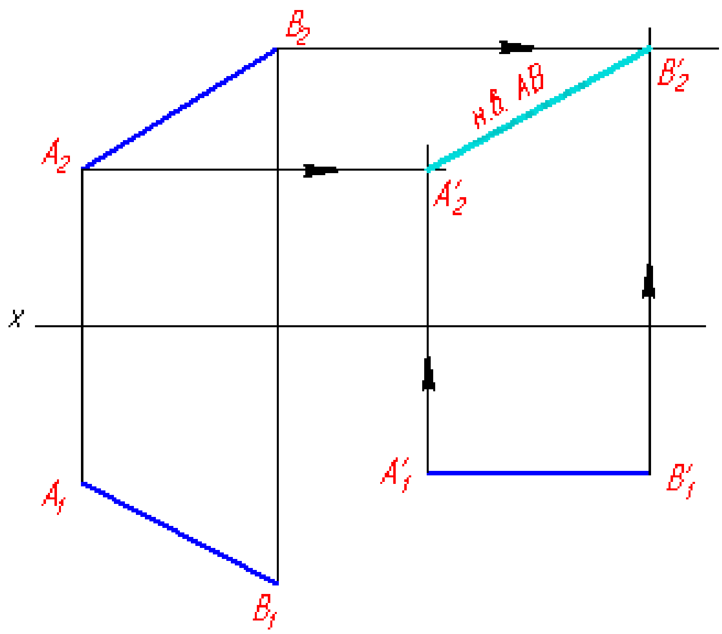


Рисунок 6.8 Определение натуральной величины отрезка методом плоскопараллельного перемещения

ВОПРОСЫ

1. Как образуются системы плоскостей проекций?
2. Какому условию должна отвечать плоскость?
3. Как строится проекция точки?
4. Устанавливаются ли расстояния точки от плоскостей проекций при наличии оси проекций?
5. Как следует понимать чертеж точки при отсутствии оси проекций?
6. Какое назначение имеют оси ?
7. Как устанавливается на чертеже в системе расстояние точки от пл. и от пл.?

ЛЕКЦИЯ № 7

Основной способ проектирования ортогональной проекции.

1. **Вращение по перпендикулярной оси проекционной плоскости.**
2. **Метод вращения вокруг оси перпендикулярной плоскости проекций**

Плоскости носитель траекторий перемещения точек параллельны плоскости проекций. Траектория - дуга окружности, центр которой находится на оси перпендикулярной плоскости проекций. Для определения натуральной величины отрезка прямой общего положения АВ (рис. 7.1), выберем ось вращения (i) перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций и проходящую через В1. Повернем отрезок так, чтобы он стал параллелен фронтальной плоскости проекций (горизонтальная проекция отрезка параллельна оси х). При этом точка А1 переместиться в «А'1», а точка «В» не изменит своего положения. Положение точки «А'2» находится на пересечении фронтальной проекции траектории перемещения точки «А» (прямая линия параллельная оси х) и линии связи проведенной из точки «А'1». Полученная проекция «В2» «А'2» определяет натуральную величину самого отрезка.

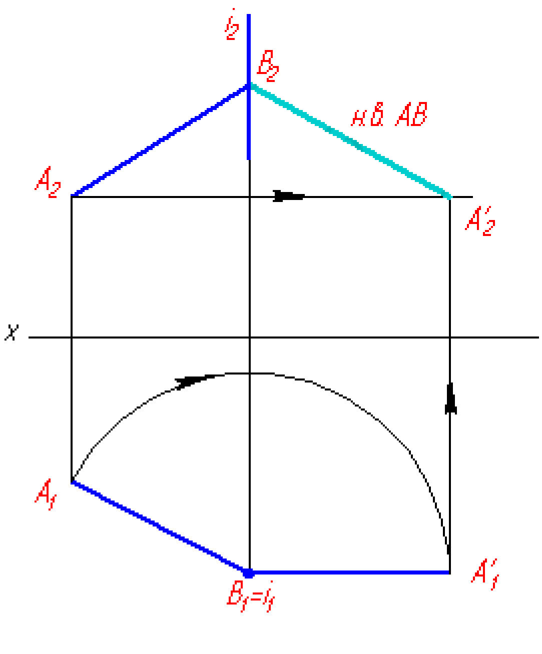


Рис 7.1 Определение натуральной величины отрезка методом вращения вокруг оси перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций

Проекция (лат. projectio — выбрасывание вперёд) — изображение трёхмерной фигуры на так называемой картинной (проекционной) плоскости.

Термин проекция также означает метод построения такого изображения и технические приёмы, в основе которых лежит этот метод.

Проекционный метод изображения предметов основан на их зрительном представлении. Если соединить все точки предмета прямыми линиями (проекционными лучами) с постоянной точкой О (центр проекции), в которой предполагается глаз наблюдателя, то на пересечении этих лучей с какой-либо плоскостью получается проекция всех точек предмета. Соединив эти точки прямыми линиями в том же порядке, как они соединены в предмете, получим на плоскости перспективное изображение предмета или центральную проекцию.

Если центр проекции бесконечно удалён от картинной плоскости, то говорят о параллельной проекции, а если при этом проекционные лучи падают перпендикулярно к плоскости — то об ортогональной проекции.

Проекция широко применяется в инженерной графике, архитектуре, живописи и картографии. Изучением проекций и методов проектирования занимается начертательная геометрия.

Как уже было сказано выше ортогональное проецирование - это частный случай параллельного проецирования. При ортогональном проецировании проецирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекций.

Аппарат такого проецирования состоит из одной плоскости проекций.

Ортогональное проектирование

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Параллельное проектирование, при котором проектирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекций, называется ортогональным проектированием.

Теорема: Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции: $S_{пр} = S \cos\varphi$.

Доказательство

Заметим, что проекции фигуры на произвольные из параллельных плоскостей равны, так как могут быть совмещены параллельным переносом в направлении проектирования. Теперь рассмотрим теорему для случая, когда проектируется треугольник.

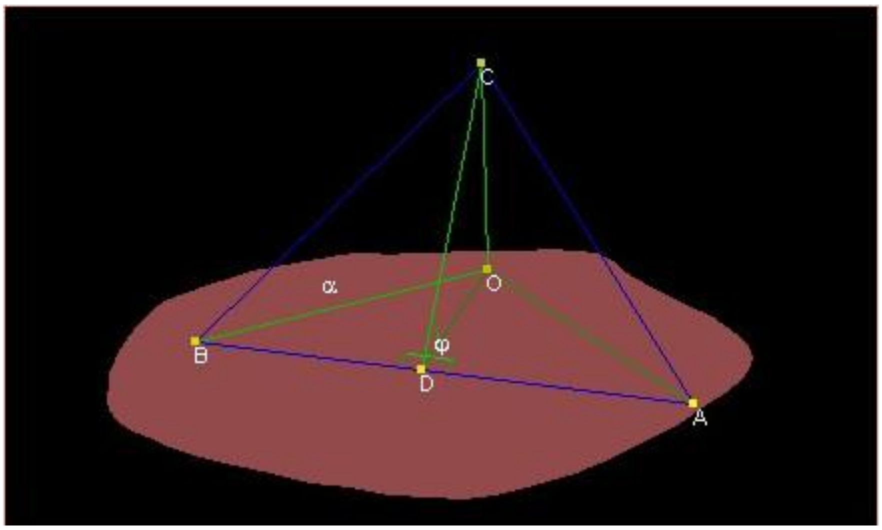


Рис.7.2.

Первый случай. Плоскость проекции проходит через сторону треугольника (Рис.7.2), Прα (ΔABC) = ΔABO , CD – высота ΔABC . По теореме о трех перпендикулярах ODAB , то есть OD – высота ΔABO . Плоскость CDO перпендикулярна прямой AB , поэтому CDO – линейный угол двугранного угла AB . Пусть CDO = φ, тогда OD = CDcosφ,
что и требовалось доказать.

Если сторона AB не лежит в плоскости проекции, но параллельна ей, доказательство аналогично.

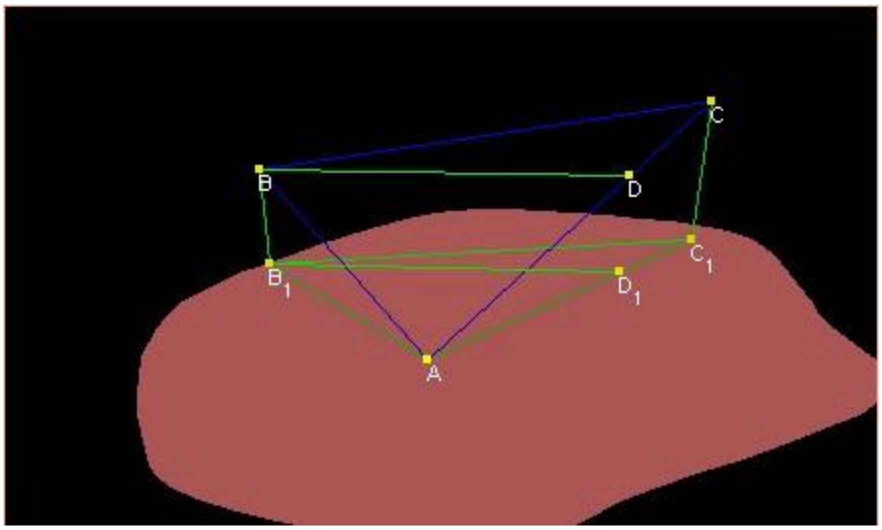


Рис.7.3

Второй случай. Ни одна сторона ΔABC не параллельна плоскости проекции (Рис.7.3). Проведем отрезок BD параллельно плоскости проекции. Тогда в каждом из треугольников ABD и BCD существует сторона BD , параллельная плоскости проекции. В соответствии с первым случаем получаем:

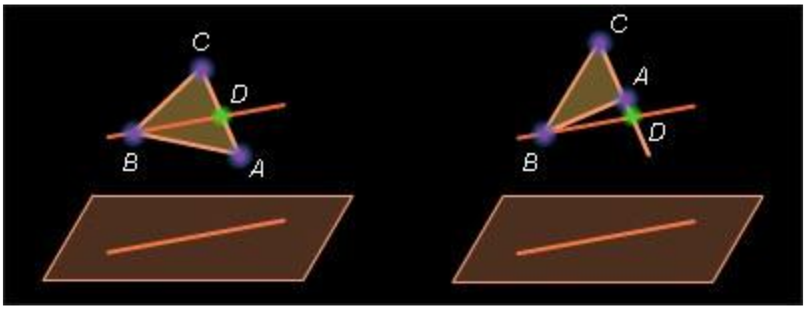
$S\Delta AB_1D_1 = S\Delta ABD\cos\varphi$, $S\Delta B_1C_1D_1 = S\Delta BCD\cos\varphi$.

Складывая или вычитая эти равенства в зависимости от того принадлежит точка D отрезку AC или лежит вне его, имеем $S\Delta AB_1C_1 = S\Delta ABC\cos\varphi$, что и требовалось доказать.

Третий случай. Плоскость Δ перпендикулярна плоскости проекции. Проекцией Δ в этом случае является отрезок, площадь которого равна нулю. Косинус угла между плоскостью проекции и плоскостью Δ равен так же нулю. Значит формула Sпр = также формально верна.
Если проектируется многоугольник, то разбиваем его на треугольники и для каждого применяем доказанную теорему.

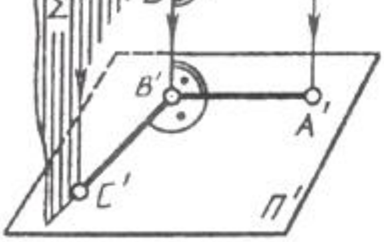
Ортогональные проекции

При прямоугольном проецировании прямой угол проецируется в натуральную величину, когда обе стороны его параллельны плоскости проекций, и тогда, когда лишь одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая сторона не перпендикулярна этой плоскости проекций. Ортогональное (прямоугольное) проецирование есть частный случай проецирования параллельного, когда все проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций. Ортогональным проекциям присущи все свойства параллельных проекций, но при прямоугольном проецировании проекция отрезка, если он не параллелен плоскости проекций, всегда меньше самого отрезка. Это объясняется тем, что сам отрезок в пространстве является гипотенузой прямоугольного треугольника, а его проекция — катетом: A'B' = ABcosα.



Теорема о проецировании прямого угла.

Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а вторая ей не перпендикулярна, то при ортогональном проецировании прямой угол проецируется на эту плоскость в прямой же угол.



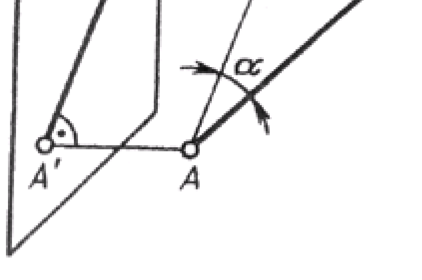


Рис.7.4 Рис.7.5

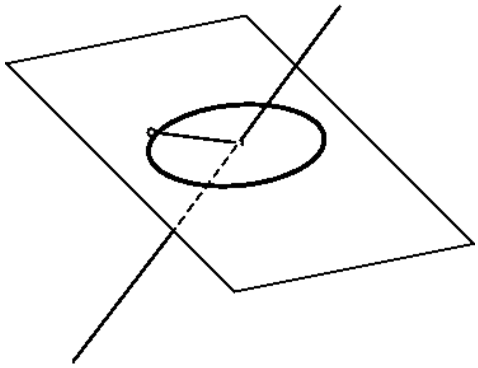
Пусть дан прямой угол ABC, у которого сторона AB параллельна плоскости п' (рис. 59). Проецирующая плоскость перпендикулярна плоскости п'. Значит, AB _|_S, так как AB _|_ BC и AB _|_ BB, отсюда AB _|_ B'C'. Но так как AB ‖ A'B' _|_ B'C', т. е. на плоскости п' угол между A'B' и B'C равен 90°.

Обратимость чертежа. Проецирование на одну плоскость проекций дает изображение, которое не позволяет однозначно определить форму и размеры изображенного предмета. Проекция A не определяет положение самой точки в пространстве, так как не известно, на какое расстояние она удалена от плоскости проекций п'. Любая точка проецирующего луча, проходящего через точку A, будет иметь своей проекцией точку A'. Наличие одной проекции создает неопределенность изображения. В таких случаях говорят о необратимости чертежа, так как по такому чертежу невозможно воспроизвести оригинал. Для исключения неопределенности изображение дополняют необходимыми данными. В практике применяют различные способы дополнения одно проекционного чертежа. В данном курсе будут рассмотрены чертежи, получаемые ортогональным проецированием на две или более взаимно перпендикулярные плоскости проекций (комплексные чертежи) и путем пере проецирования вспомогательной проекции предмета на основную аксонометрическую плоскость проекций (аксонометрические чертежи).

ЛЕКЦИЯ№ 8

Вращения вокруг проецирующей оси

1. **Вращение по параллельной оси проекционной плоскости.**
2. **Вращение в проекционной плоскости.**



Суть способа заключается в том, что все точки геометрического объекта, занимающего общее положение, перемещаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, до положения, когда заданный элемент займет частное положение. То есть в отличие от способа замены плоскостей проекций, в данном способе остается неизменной система плоскостей П1 и П2, а сам объект

Рис.8.1

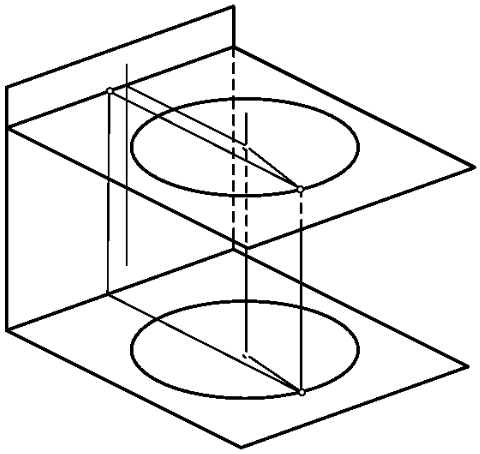


Рис.8.2

меняет свое положение в пространстве.

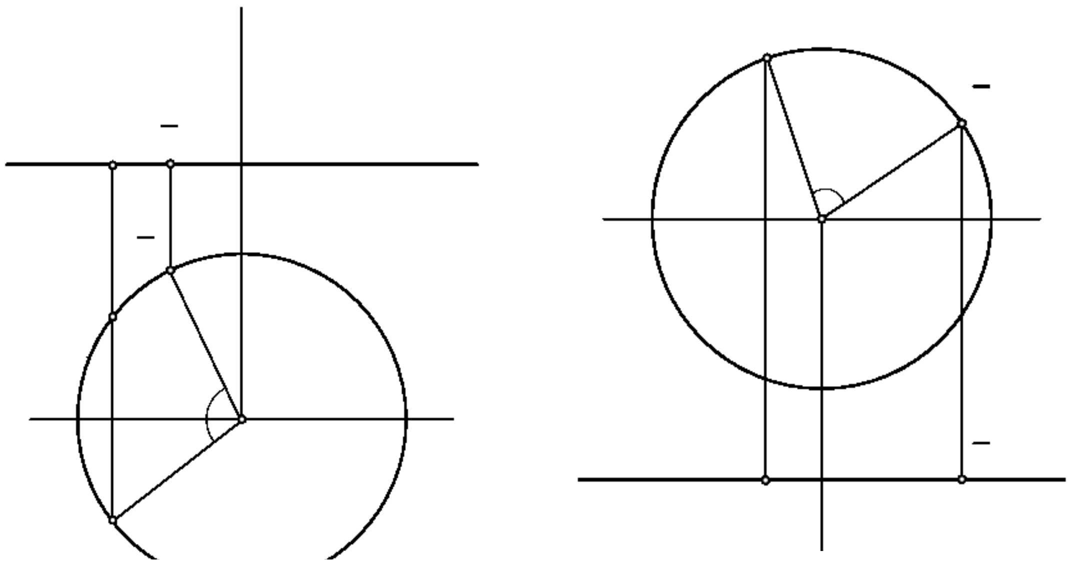
Точка А, вращаясь вокруг оси i, опишет окружность, которая находится в плоскости α перпендикулярно i (рис. 8.1).

Центр окружности О расположен в точке пересечения оси вращения i с плоскостью α (в которой вращается точка), а величина радиуса R определится как расстояние от точки А до оси вращения.

На рис. 8.2 дано наглядное изображение точки А, вращающейся вокруг оси iП1. В этом случае точка перемещается по окружности, плоскость которой параллельна П1. На плоскость П1 эта окружность проецируется без искажения, а на плоскость П2 - в виде отрезка прямой, параллельной оси x (рис. 8.3) и перпендикулярной линиям связи.

Наоборот, если ось вращения расположена перпендикулярно плоскости П2 (рис. 8.4), то горизонтальная проекция точки будет перемещаться по прямой, перпендикулярной линиям связи, а фронтальная - по окружности.

На рис. 8.3 и 8.4 через обозначено новое положение точки А, которое она занимает после поворота на угол Ж.



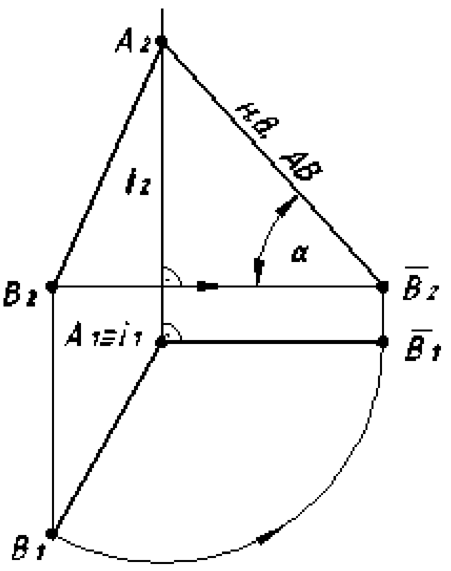


Рис.8.3

Рис.8.4

Если прямая параллельна плоскости П1 или П2, то одна из ее проекций должна быть параллельна оси x12. Следовательно, решая задачу, нам придется повернуть горизонтальную проекцию отрезка АВ так, чтобы она стала перпендикулярна линиям связи. Для реализации такого поворота ось вращения i нужно выбрать перпендикулярно плоскости П1. На рис. 8.5 ось вращения (i) проведена через точку А, которая при вращении прямой будет неподвижна.

Что касается любой другой точки (на рис. 8.5 точка В), то она и ее горизонтальная проекция опишут дуги окружности. В результате такого поворота на плоскость П2 без искажения проецируются и отрезок АВ, и угол α, который отрезок АВ составляет с плоскостью П1.

Рис.8.5

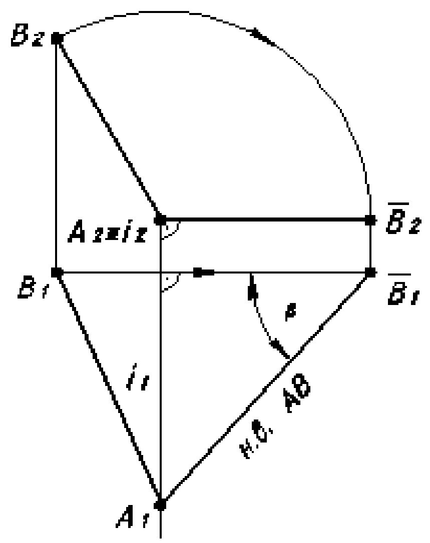
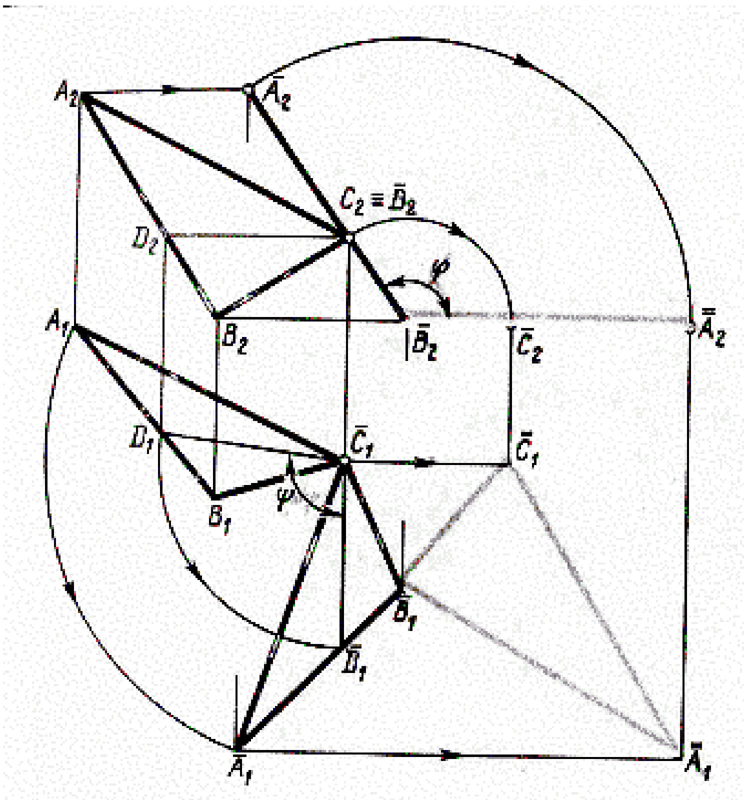


Рис.8.6

Вращением вокруг оси, перпендикулярной плоскости П2, отрезок АВ можно повернуть до положения, параллельного плоскости П1 (рис. 8.6). В этом случае фронтальная проекция прямой после ее поворота должна быть перпендикулярна линиям проекционной связи. На плоскость П1 без искажения проецируются отрезок АВ и угол β, образуемый этой прямой с плоскостью П2.

Просмотреть демонстрационный материал "Определение натуральной величины отрезка АВ и углов наклона к плоскостям проекций способом вращения вокруг проецирующей оси"

Пример: Определить натуральную величину треугольника АВС.



Первый поворот треугольника АВС был сделан вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину С (рис. 8.7). Горизонтальные проекции всех вершин треугольника будут перемещаться по концентрическим дугам, проведенным из точки 1 как из центра, а фронтальные - по прямым, перпендикулярным линиям связи.

В результате плоскость общего положения стала фронтально-проецирующей. Далее выполнен второй поворот вокруг оси, проходящей через вершину

Рис.8.7 перпендикулярно плоскости П2. После поворота плоскость треугольника оказалась параллельной П1. Следовательно, горизонтальная проекция треугольника без искажения определяет его форму.

Способ плоскопараллельного перемещения

Суть способа заключается в том, что система плоскостей П1 и П2 остается неизменной, а сам геометрический элемент изменяет свое положение в пространстве.

Этот способ называют частным способом вращения вокруг проецируемой оси, или вращением без указания оси вращения.

Основным недостатком способа вращения является то, что новые проекции накладываются на старые - теряется наглядность комплексных чертежей.

Способ плоскопараллельного перемещения дает возможность устранить этот недостаток, сохраняя основные принципы вращения вокруг проецирующей оси:

- одна проекция фигуры не меняет своей формы и размеров, а меняет лишь свое положение в пространстве;
- все точки второй проекции перемещаются по прямым, параллельным оси X до пересечения с линиями связи, проведёнными из нового положения фигуры.

<u>Пример1: Определить натуральную величину отрезка АВ (рис. 8.8).</u>

Если ось вращения перпендикулярна П1, то горизонтальная проекция отрезка, не меняя своих размеров, меняет свое положение относительно оси проекции. Фронтальная проекция точек перемещается по прямым, параллельным оси X12.

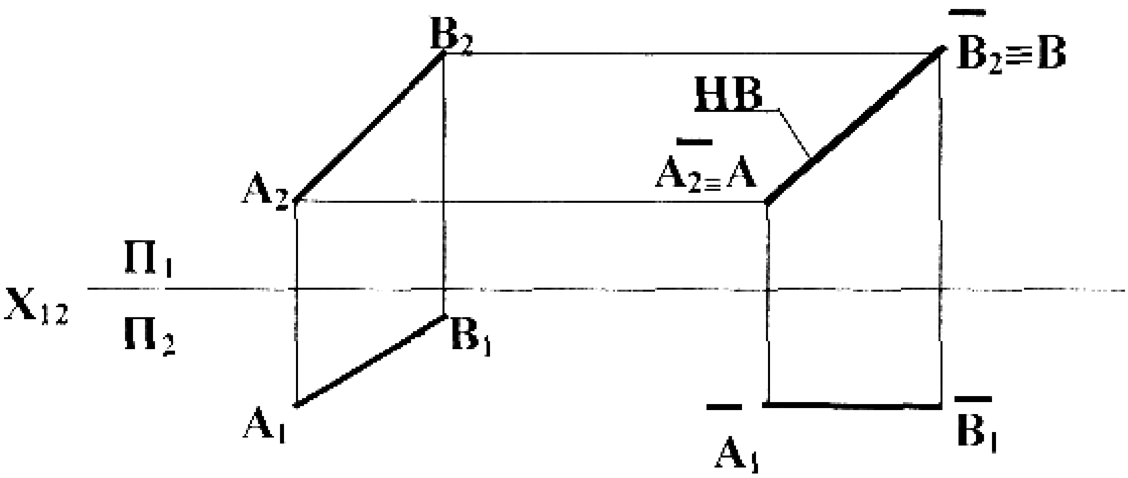


Рис8.8

Используя это свойство, располагаем горизонтальную проекцию АВ параллельно оси Х12 (11). Для построения фронтальной проекции достаточно из точек А2 и В2 провести линии, параллельные оси Х12, до пересечения с линиями связи из точек 1 и 1.

Просмотреть демонстрационный материал "Определение натуральной величины отрезка АВ и углов наклонов к плоскостям проекций способом плоскопараллельного переноса"

Пример 2: Определить натуральную величину треугольника АВС (рис. 8.9).

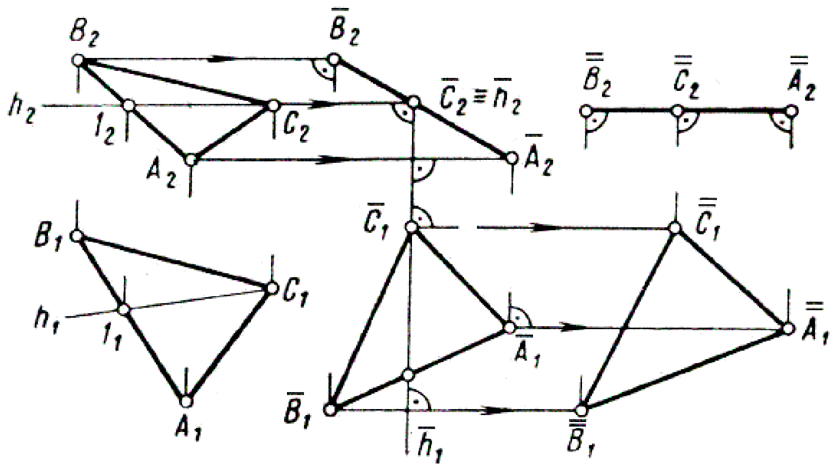


Рис 8.9

Треугольник АВС приводим из общего положения во фронтально-проецирующее. С этой целью, как и при вращении вокруг горизонтально-проецирующей оси, в треугольнике проводим горизонталь, с помощью которой и выбираем новое положение горизонтальной проекции треугольника (h1X). Проекция 111 на данном этапе построений является <ведущей>. После вычерчивания ее на произвольно выбранном месте на пересечении проекционных связей и линий, по которым смещаются точки фронтальной проекции, находим точки , 2 и 2, которые определяют новую фронтальную проекцию данной фигуры, проецировавшуюся в отрезок прямой.

Далее из промежуточного фронтально-проецирующего положения перемещаем заданную фигуру в окончательное положение - в плоскость горизонтального уровня. На этом этапе построений <ведущей> является фронтальная проекция 222, которую вычерчивают параллельно оси Х. В соответствии с ней строим горизонтальную проекцию 111, показывающую натуральную величину фигуры.

Описанный метод позволяет избежать наложения одноименных проекций в исходном и повернутом положениях, что особенно важно при двукратном преобразовании комплексного чертежа.

Вращение вокруг линии уровня

Любую геометрическую фигуру можно повернуть вокруг горизонтали или фронтали до положения, когда она станет параллельной П1 или П2, т.е. будет проецироваться на П1 или П2 в натуральную величину. Если вращение осуществляется вокруг горизонтали, то:

каждая точка фигуры перемещается по дугам окружностей, расположенных в плоскостях, перпендикулярных оси вращения и проецирующихся на П1 в отрезки прямой, перпендикулярной горизонтальной проекции горизонтали; центр окружности вращения лежит на горизонтали, и горизонтальная проекция его определяется в пересечении горизонтальной проекции горизонтали и окружности вращения;
величина радиуса вращения равна расстоянию от точки до оси вращения.

<u>Пример 3: Определить натуральную величину треугольника ABC способом вращения вокруг линии уровня (см. рис. 8.10).</u>

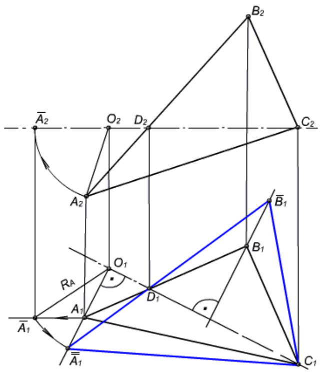


Рис.8.10

В данном примере осью вращения является горизонталь. Для определения натуральной величины треугольника ABC вращением вокруг горизонтали необходимо выполнить следующие построения:

В треугольнике ABC проводим горизонталь (CD).

Определяем центр радиуса вращения (O1 и O2) точки A. Он находится на перпендикуляре к горизонтали.

Определяем натуральную величину радиуса вращения (способом вращения).

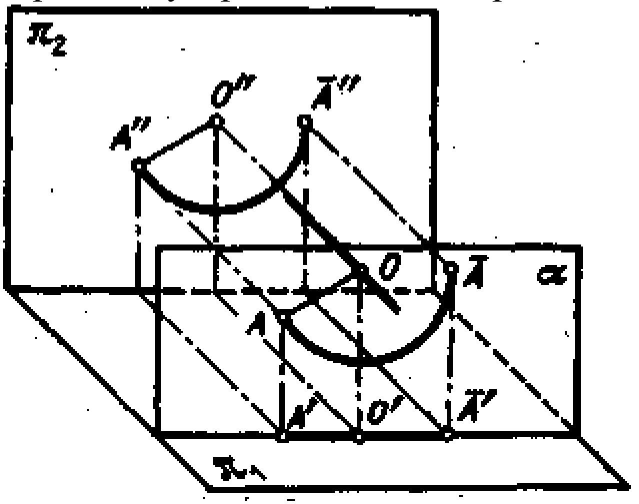
Из точки O1 радиусом O11 проводим дугу до пересечение с прямой A1O1. Пересечение даст искомую точку 1.

Для определения нового положения точки B достаточно провести прямую, соединяющую точки 1 и D1, до пересечения с перпендикуляром, проведённым из B1 на h1.

Горизонталь проведена через точки C и D - они не изменяют свое положение. Следовательно, соединив C1, 1 и 1 получим натуральную величину треугольника ABC.

ОСНОВЫ СПОСОБА ВРАЩЕНИЯ

При вращении вокруг некоторой неподвижной прямой (ось вращения) каждая точка вращаемой фигуры перемещается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (плоскость вращения). Точка перемещается по окружности, центр которой находится в точке пересечения оси с плоскостью вращения (центр вращения), а радиус окружности равняется расстоянию от вращаемой точки до центра (это радиус



вращения). Если какая-либо из точек данной системы находится на оси вращения, то при вращении системы эта точка считается неподвижной.

Ось вращения может быть задана или выбрана; в последнем случае выгодно расположить ось
перпендикулярно к одной из
Рис.8.11
плоскостей проекций, так как при этом упрощаются построения.

Действительно, если ось вращения перпендикулярна, например, к пл. $\pi 2$,то плоскость, в которой происходит вращение точки, параллельна пл. $\pi 2$.
Следовательно, траектория точки проецируется на пл. $\pi 2$ без искажения, а на пл. $\pi 1$ в виде отрезка прямой линии.

ВРАЩЕНИЕ ТОЧКИ, ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ ВОКРУГ ОСИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Вращение вокруг заданной оси.

1. Пусть точка А вращается вокруг оси, перпендикулярной к пл. $\pi 1$ (рис. 8.12). Через точку А проведена пл. π, перпендикулярная к оси вращения и, следовательно, параллельная пл. $\pi 1$. При вращении точка А описывает в пл. і окружность радиуса R; величина радиуса выражается длиной перпендикуляра, проведенного из точки А на ось. Окружность, описанная в пространстве точкой А, проецируется на пл. π 1 без искажения. Так как пл. π перпендикулярна к пл. $\pi 2$, то проекции точек окружности на пл. $\pi 2$ расположатся на , т. е. на прямой, перпендикулярной к фронтальной проекции оси вращения. Чертеж дан на рис. 8.12 справа: окружность, описанная точкой А при вращении ее вокруг оси, спроецирована без искажения на пл. $\pi 1$ Из точки O', как из центра, проведена окружность радиуса; на пл.$\pi 2$ эта окружность изображена отрезком прямой, равным 2R.

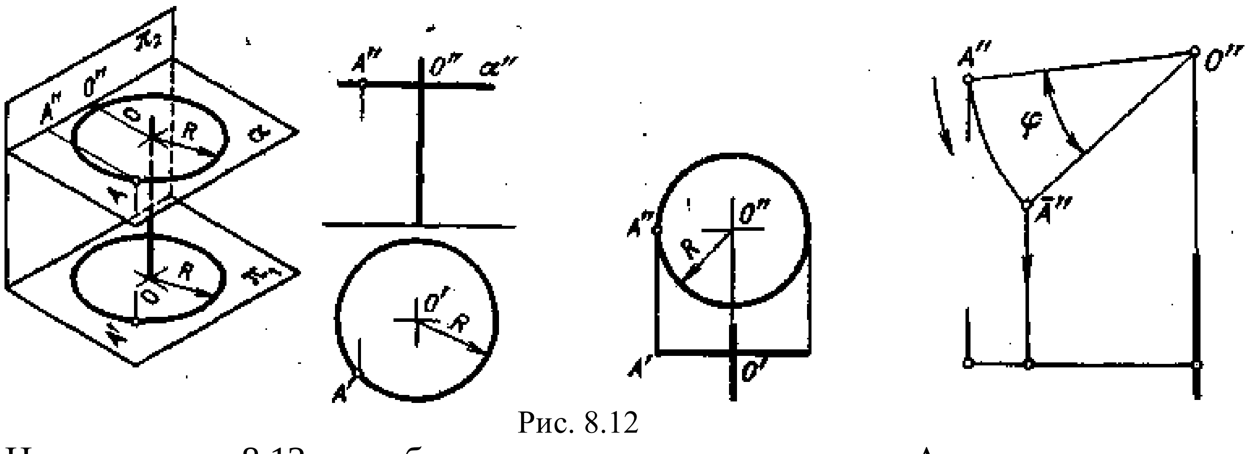


Рис. 8.12

На рис. 8.12 изображено вращение точки А вокруг оси, перпендикулярной к пл. $\pi 2$. Окружность, описанная точкой А, спроецирована без искажения на пл. $\pi 2$. Из точки 0", как из центра, проведена окружность радиуса R= O'A'; на пл. эта окружность изображена отрезком прямой, равным 2R.

Из рассмотрения рис. 8.12 отчетливо видно, что при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к какой-нибудь из плоскостей проекций, одна из проекций вращаемой точки перемещается по прямой, перпендикулярной к проекции оси вращения.

На рис. 8.12 показан поворот точки А против движения часовой стрелки на угол π вокруг оси, проходящей через точку О перпендикулярно к пл. $\pi 2$. Из точки О", как из центра, проведена дуга радиуса О"А", соответствующая углу φ и направлению ращения. Новое положение фронтальной проекции точки А точка.

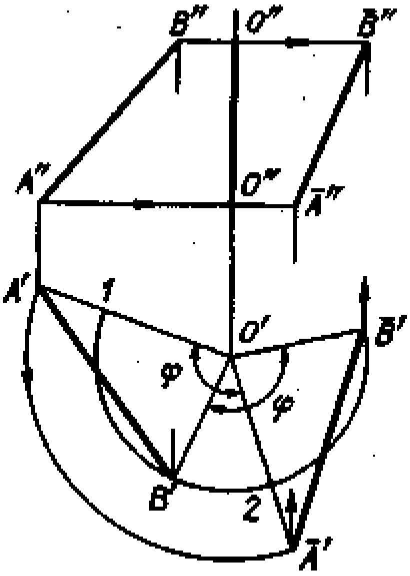


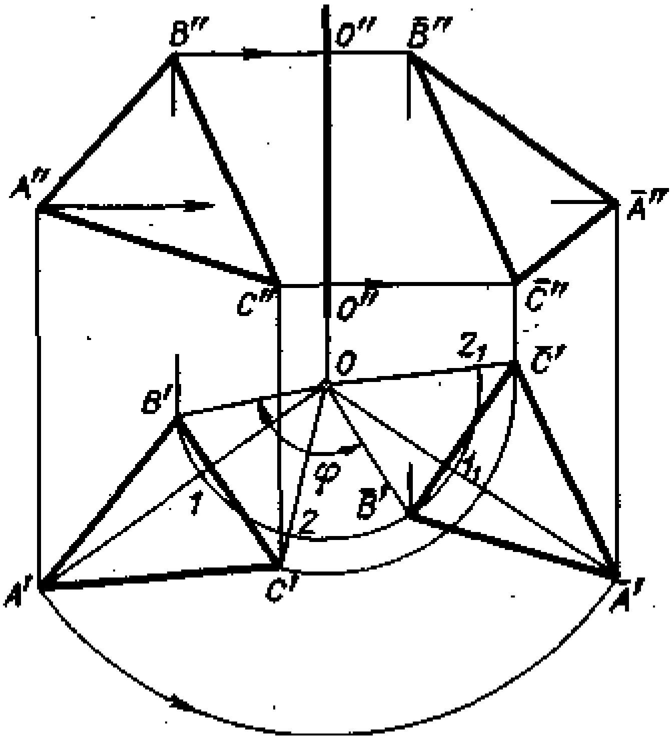
Рис. 8.13

2. Теперь рассмотрим поворот отрезка прямой линии вокруг заданной оси.

Отрезок АВ (рис. 8.13) повернут.Очевидно, дело свелось к повороту точек А и В на заданный угол φ по заданному направлению. Пути перемещения фронтальных проекций этих точек указаны прямыми, проведенными через А" и В" перпендикулярно к фронтальной проекции оси вращения

Новое положение горизонтальной проекции точки А (точка) получено при повороте радиуса O'A' на заданный угол φ. Для нахождения точки В' (положение горизонтальной проекции точки В после поворота) проведена дуга радиусом О'В"

3. Поворот плоскости вокруг заданной оси сводится к повороту ей точек и прямых линий.



Пример дан на рис. 8.14: треугольник АВС, определяющий плоскость, в положение АВС согласно заданным углу φ и направлению, стрелкой. Построение подобно показанному на рис. 8.13: там были две точки А и В, здесь же три точки вершины А, В и С, а , и вся фигура. Треугольники А'В'С и А'В1С' равны между собой по построению: при оси, перпендикулярной к пл.

горизонтальная проекция величины своей не изменяет.

Рис. 8.14

Это соответствует тому, что угол наклона пл. АВС по отношению к пл. $\pi 1$ не изменяется, если ось вращения перпендикулярна к пл. π 1. Очевидно, при повороте вокруг оси, перпендикулярной к пл. $\pi 2$, не изменяется угол наклона вращаемой плоскости к пл. $\pi 2$ и сохраняется величина фронтальных проекций.

При вращении, плоскости, выраженной ее следами, обычно поворачивают один из следов и горизонталь (или фронталь) плоскости.

Для нахождения фронтального следа плоскости после ее поворота найти, помимо найденной точки $X\pi$ на оси x, еще одну точку, следу. В пл. взята горизонталь N'F', N"F", пересекающая ось (N'F1 проходит через горизонтальную проекцию оси вращения). Конечно, можно взять горизонталь и не пересекающую ось вращения.

Так как горизонталь и при новом положении плоскости останется параллельной ее горизонтальному следу, то надо провести через O' прямую, параллельную $h'0\pi$; получится новое положение горизонтальной проекции горизонтали. Фронтальная ее проекция не изменит своего направления, а поэтому легко найти новый фронтальный след горизонтали точку N". Теперь можно построить фронтальный след ($f''o\pi$).

Вращение вокруг выбранной оси. В ряде случаев ось вращения может быть выбрана. При этом, если ось вращения выбрать проходящей через один из концов отрезка, то построение упростится, так как точка, через которую проходит ось, будет "неподвижной" и для поворота отрезка надо построить новое положение проекций только одной точки -- другого конца.

На рис. 8.15 показан случай, когда для поворота отрезка АВ выбрана ось вращения, перпендикулярная к пл. π 1 и проходящая через точку А. При повороте вокруг такой оси можно, например, расположить отрезок параллельно пл. $\pi 2$.

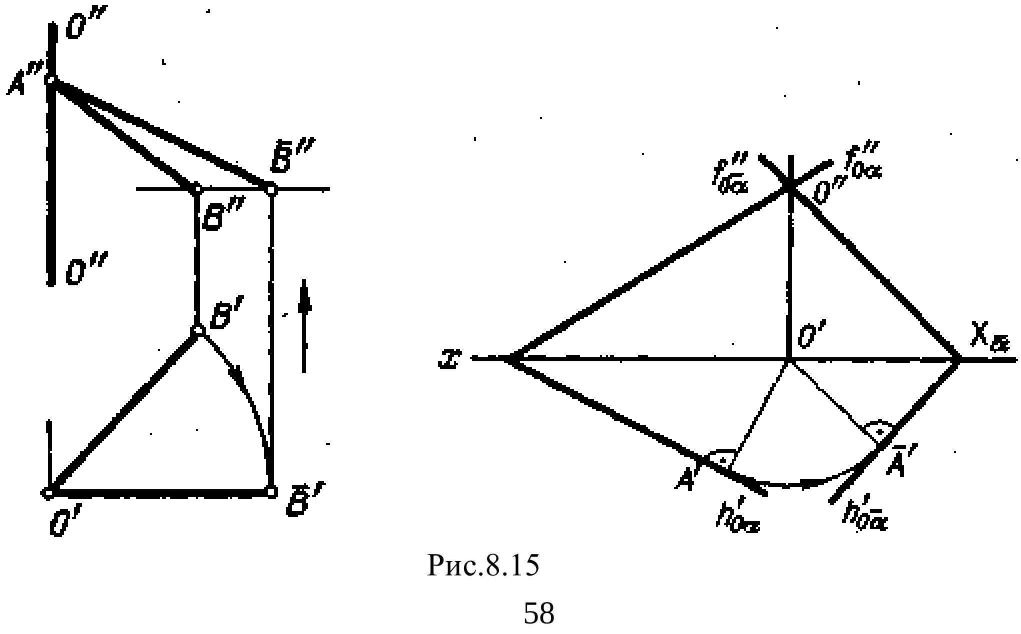


Рис.8.15

Именно такое положение показано на рис. 8.15. Горизонтальная проекция отрезка в своем новом положении перпендикулярна к линии связи A'A". Найдя точку B" и построив отрезок A"B", получаем фронтальную проекцию отрезка AB в его новом положении. Проекция A"B" выражает длину отрезка AB. A"B"B" равен углу между прямой AB и пл. π 1. Если поставить перед собой цель -- определить угол наклона прямой положения к пл. $\pi 2$, то надо провести ось вращения перпендикулярно кпл. $\pi 2$ и повернуть прямую так, чтобы она стала параллельной пл. читателю выполнить такое построение.

Если при повороте плоскости, выраженной следами, можно выбрать ось , то ее целесообразно расположить в плоскости проекций; построения в случае упрощаются. Пример дан на рис. 8.15. Положим, что ось вращения быть перпендикулярна к пл. π 1. Если ее взять, в пл. $\pi 2$, то на следеf"
оπ , оказывается "неподвижная" точка O (в пересечении с осью вращения).
поворота плоскости фронтальный след должен пройти через эту точку.
, найдя положение горизонтального следа (h'0π) после поворота,
провести след f"оπ через точку Xπ и через точку O". По сравнению с рис.
упрощение состоит в том, что отпала горизонталь. Она понадобилась бы в
"ухода" точки X"π за пределы чертежа; но в аналогичном случае на рис.
пришлось бы взять две вспомогательные линии.
На рис. 8.15 плоскость общего положения повернута в положение
-проецирующей; при этом определился угол наклона пл. π к пл.$\pi 2$

Если взять ось вращения, перпендикулярную к пл. π 1 то можно пл. π в положение фронтально-проецирующей, определив при этом угол плоскости к пл. π 1.

Сравнивая между собой плоскости до и после поворота, замечаем, что, образуемый следами f"оπ и h'0π на чертеже, вообще изменяется.
Если представить себе круговой конус с вершиной в точке O и с на рис. 8.15 в пл. $\pi 1$ в пл. π 2 и .касательную к пл. π, то поворот пл. π вокруг оси вращения, совпадающей с осью, представляет собой как бы "обкатку" конуса касательной к нему

Метод замены плоскостей проекций

Изменение взаимного положения изучаемого объекта и плоскостей проекций достигается путем замены одной из плоскостей П1 или П2 новой плоскостями П4 (рис. 8.16). Новая плоскость всегда выбирается перпендикулярно оставшейся плоскости проекций.

Для решения некоторых задач может потребоваться двойная замены плоскостей проекций (рис. 8.17). Последовательный переход от одной системы плоскостей проекций к другой необходимо осуществлять, выполняя следующее правило: расстояние от новой проекции точки до новой оси должно равняться расстоянию от заменяемой проекции точки до заменяемой оси.

<u>Задача 1: Определить натуральную величину отрезка АВ прямой общего положений (рис. 8.16).</u> Из свойства параллельного проецирования известно, что отрезок проецируется на плоскость в натуральную величину, если он параллелен этой плоскости.

Выберем новую плоскость проекций П4, параллельно отрезку АВ и перпендикулярно плоскости П1. Введением новой плоскости, переходим из системы плоскостей П1П2 в систему П1П4 , причем в новой системе плоскостей проекция отрезка А4 В4 будет натуральной величиной отрезка АВ.

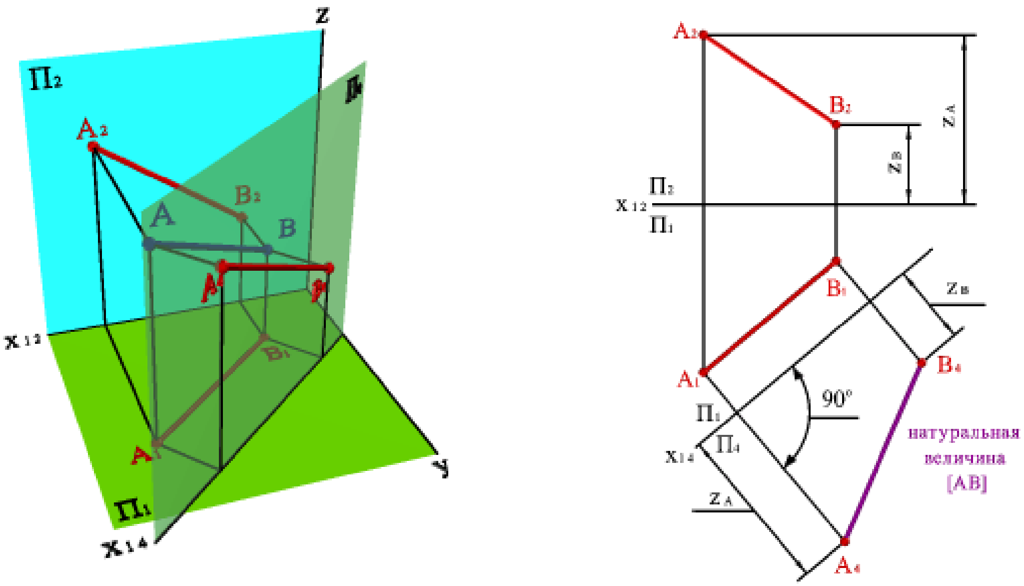


Рис.8.16. Определение натуральной величины отрезка прямой методом замены плоскостей проекций а) модель б) эпюр

<u>Задача 2: Определить расстояние от точки А до прямой общего положения, заданной отрезком ВС (рис.8.17).</u>

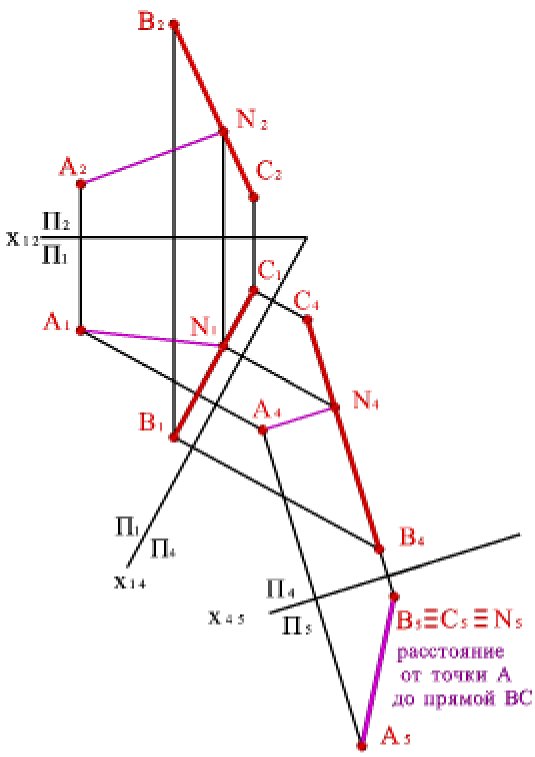


Рис. 8.17. Определение расстояния от точки до прямой общего положения методом замены плоскостей проекций: эпюр

Способ перемены плоскостей проекций.

1. Способ вращения вокруг проецирующей оси.
2. Способ плоскопараллельного перемещения.
3. Вращение вокруг линии уровня.

Методы преобразования изображений на комплексном чертеже соответствуют образу действий наблюдателя, рассматривающего какой-либо объект. Чтобы составить наиболее полное представление о геометрических особенностях объекта (его форме, размерах), наблюдатель нередко рассматривает объект в различных направлениях или, как говорят, под разными углами. Для этого либо сам наблюдатель меняет положение относительно неподвижного объекта, либо поворачивает объект разными сторонами. В том и другом случае меняется направление взгляда. Для выполнения аналогичных действий, но не с самим объектом, а с его изображениями, на комплексном чертеже существуют методы преобразования последнего.

Изменению положения наблюдателя относительно объекта соответствуют методы замены плоскостей проекций, а перемещению объекта относительно наблюдателя (поворачиванию объекта) - методы вращения.

Комплексный чертеж всегда преобразуют с четко поставленной целью (задачей преобразования), в зависимости от которой выбирают метод и порядок преобразования. Эта задача всегда сводится к приведению каких-либо элементов объекта в частное положение.

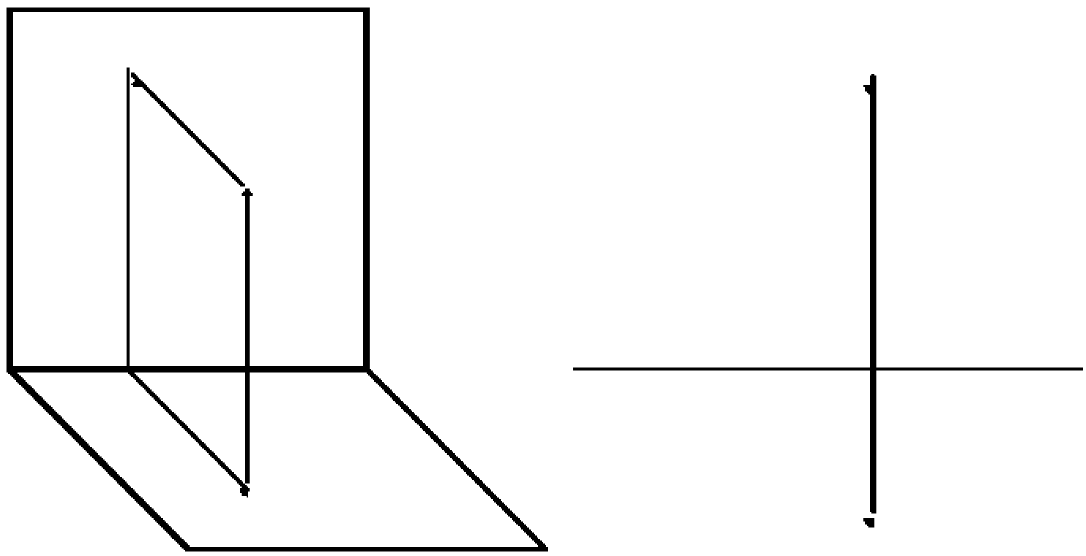
Рассмотрим закономерности и особенности указанных методов, а также типичные случаи их применения в зависимости от поставленной задачи.

<u>1 Способ перемены плоскостей проекций</u>

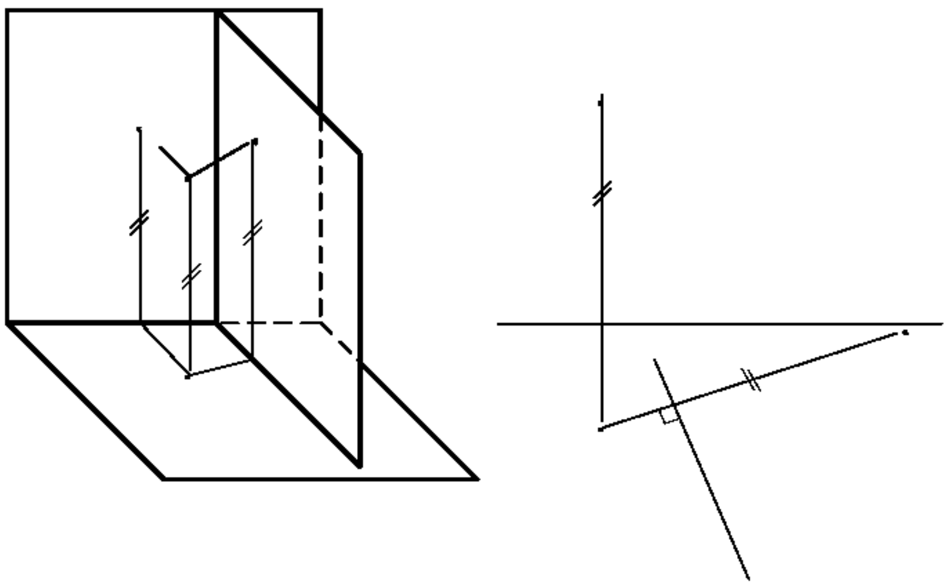
Суть способа заключается в том, что геометрический объект остается в пространстве неподвижным, а система плоскостей П1 и П2 дополняется плоскостями, образующими с П1 или П2 или между собой системы двух взаимно перпендикулярных плоскостей, по отношению к которым элементы геометрического объекта - частные положения.

Существующие при этом закономерности весьма не сложны и их можно проследить на примере одной точки (рис. 8.18).

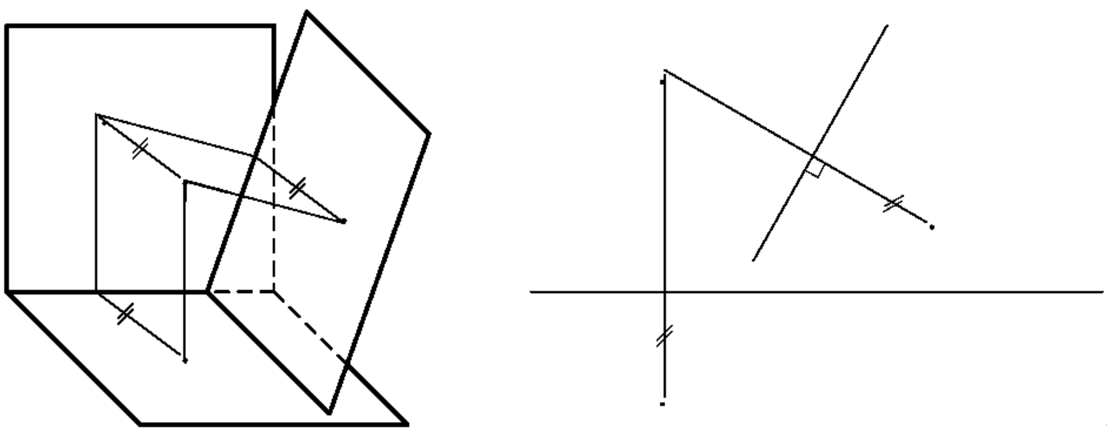
Первоначальный комплексный чертеж точки А образован ее проекциями на взаимно перпендикулярные плоскости П1 и П2, называемые в дальнейшем системой П1-П2 (рис. 8.18 а). На комплексном чертеже наличие этой системы отмечено осью x12, по обе стороны от которой обозначены поля проекций соответствующих плоскостей.



а)



б)



в)

Рис.8.18

Введем плоскость П4, перпендикулярную плоскости П1 (обозначение П3 относится к профильной, плоскости в первоначальной системе). Плоскости П1 и П4 образуют новую систему П1-П4, а на комплексном чертеже появляется новая ось x14(рис. 8.18 б). Проекция A1, оставшаяся при этом, как и плоскость П1, неизменной, с новой проекцией П4 связана проекционной связью, перпендикулярной новой оси x14. Положения проекционных связей соответствуют направлениям проецирования на плоскости П1 и П4, отмеченным стрелками. Высота точки А над плоскостью П1, т. е. ее координата za, остается неизменной и в новой системе, поскольку осталась неизменной плоскость П1. Это позволяет отложить на новой проекционной связи координату za, измеренную на прежней проекционной связи, и получить проекцию А4 на введенную плоскость П4.

Аналогичным образом можно получить проекцию точки А на плоскость П5, введенную вместо горизонтальной плоскости П1 (рис. 8.18, в). В этом случае остаются неизменными фронтальная плоскость П2 и расстояние до нее от точки А, измеряемое координатой ya. На комплексном чертеже новая система П2-П5 определяется осью x25, проведенной перпендикулярно направлению проецирования точки А на плоскость П5. На новой проекционной связи, отложив координату ya, получаем проекцию А5. Построение по проекциям точки на плоскости П1 и П2 третьей проекции на плоскость П3 является, по существу, заменой плоскости П1 на плоскость П3.

Рассмотренные закономерности можно сформулировать таким образом. Любая плоскость проекций первоначальной системы может быть заменена новой плоскостью, перпендикулярной основной плоскости. На комплексном чертеже первоначальную и вновь образованную системы плоскостей проекций обозначают осями проекций, имеющими соответствующие обозначения (например, x12).
Оставшуюся проекцию точки с новой ее проекцией соединяет линией проекционная связь, которая перпендикулярна новой оси проекций. Направление новой проекционной связи соответствует новому направлению проецирования, выбираемому в зависимости от поставленной задачи.

Расстояние от заменяемой плоскости проекции точки до оси проекций в первоначальной системе равно расстоянию от новой проекции точки до оси проекций в новой системе (оно остается "памятью" о заменяемой проекции).

Исходный комплексный чертеж, очевидно, будет безосным, поскольку положение оси проекций не влияет на воспроизводилось комплексного чертежа. Вводимая при замене ось проекций первоначальной системы, как и новая ось проекций, нужна лишь как база для отсчета расстояний от них до заменяемой и новой проекций точки, а также для обозначения полей соответствующих проекций. Поэтому на исходном чертеже каждая из этих осей может быть проведена произвольно. Но при этом первоначальная ось должна быть, разумеется, перпендикулярна к проекционным связям исходного чертежа, а новая ось - перпендикулярна к выбранному новому направлению проецирования.

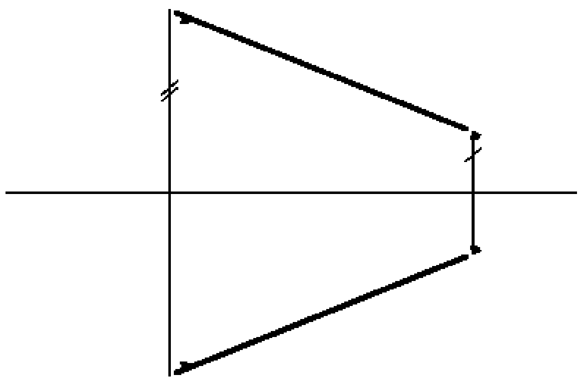


Рис 8.19

Пример 1 Определить натуральную величину отрезка АВ(рис. 8.19).

Для определения натуральной величины отрезка АВ вводится дополнительная плоскость проекции П4, которая перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций П1 и параллельна отрезку АВ. Значит на плоскость проекций П4 отрезок АВ проецируется в натуральную величину. Плоскость П4 вводится на любом удалении от отрезка АВ, для чего на комплексном чертеже необходимо ввести новую ось, параллельную горизонтальной проекции отрезка А1В1. Решение задачи приведено на рисунке 8.20

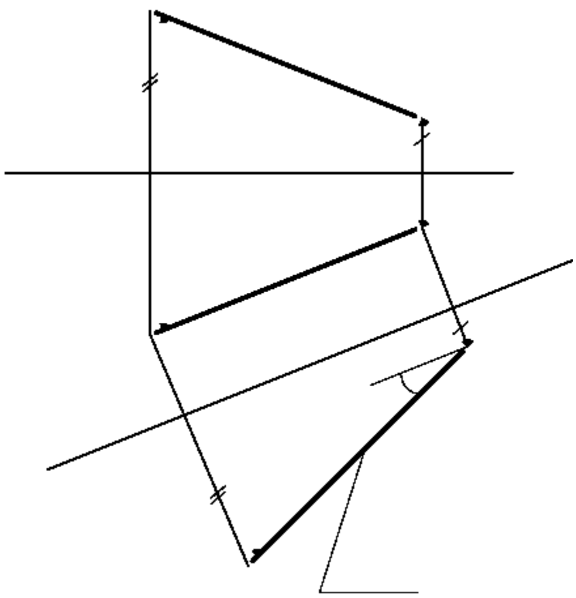


Рис 8.20

Порядок решения:

Ось Х14 проводят параллельно А1В1.

Из А1 и В1 проводят линии проекционной связи, перпендикулярные Х14.

Удаления, откладываемые на линиях связи от оси Х14, измеряются на плоскости П2.

А4В4 - натуральная величина отрезка АВ.

α - угол наклона отрезка АВ к П1.

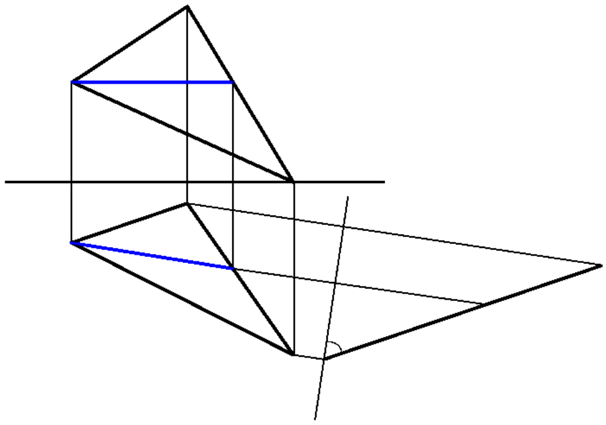
Для определения угла наклона прямой к П2 необходимо ввести плоскость, перпендикулярную плоскости П2, и выполнить действия аналогичные описанным выше.

Просмотреть демонстрационный материал "Определение натуральной величины отрезка АВ и углов наклона к плоскостям проекций способ замены плоскостей проекций"

Пример 2 Определить углы наклона треугольника АВС к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций.

Для определения угла наклона плоскости треугольника к горизонтальной плоскости проекций необходимо ввести дополнительную плоскость П4, перпендикулярную П1 и перпендикулярную плоскости треугольника АВС(см. рис. 8.21 а). Новая ось х14 перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали (h1).

Для определения угла наклона плоскости треугольника к фронтальной плоскости проекций необходимо ввести дополнительную плоскость П4, перпендикулярную П2 и перпендикулярную плоскости треугольника АВС (см. рис. 8.21 б). Новая ось х24 перпендикулярна фронтальной проекции фронтали (f2).



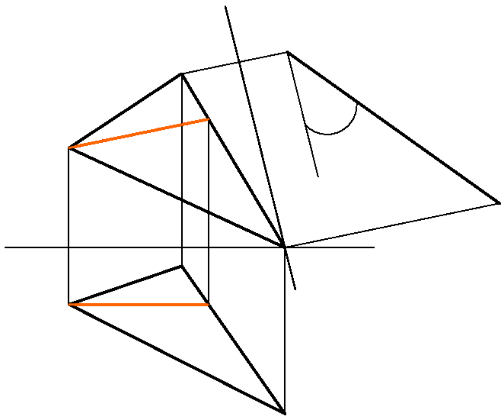


Рис.8.21 а) б)

Пример 3 Определить натуральную величину треугольника АВС.

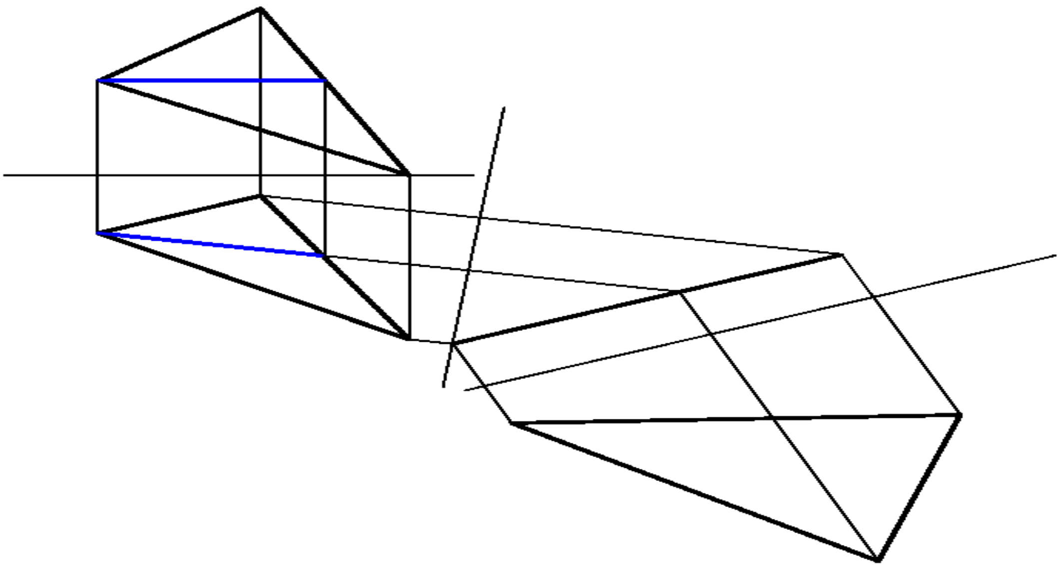


Рис.8.22

Пусть дан треугольник АВС в плоскости общего положения (рис. 8.22). Нужно создать такую новую ортогональную систему плоскостей проекций, в которой одна из них должна быть параллельной треугольнику. В системе П1/П2 такую плоскость построить нельзя. Действительно, плоскость, параллельная треугольнику, не будет перпендикулярна ни П1, ни П2, т. е. она не образует с плоскостями проекций ортогональной системы.

Решение задачи требует двойной замены плоскостей проекций. Смысл первой замены П2 на П4 заключается в преобразовании плоскости треугольника в проецирующую.

Второй этап решения задачи заключается в переходе от системы П1/П4 к системе П4/П5. Новая плоскость П5 устанавливается параллельно треугольнику: П4 треугольнику АВС (на П4 - треугольник проецируется в отрезок С4А4В4); П5 ∥ треугольнику АВС (на П5 - треугольник проецируется в натуральную величину - А5В5С5);

ЛЕКЦИЯ № 9

Многогранник.

1. Понятие о многограннике.
2. Пересечение многогранника с плоскостью.
3. Пересечение многогранника с прямой линией.
4. Построение развертки многогранника.
5. Взаимное пересечение двух многогранников.

Общая информация о многогранниках

Многогранником называется тело, граница которого является объединением конечного числа многоугольников.

Первые упоминания о многогранниках известны еще за три тысячи лет до нашей эры в Египте и Вавилоне. Но теория многогранников является и современным разделом математики. Она тесно связана с топологией, теорией графов, имеет большое значение как для теоретических исследований по геометрии, так и для практических приложений в других разделах математики, например, в алгебре, теории чисел, прикладной математики - линейном программировании, теории оптимального управления.

Многогранники имеют красивые формы, например, правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. Они обладают богатой историей, которая связана с именами таких ученых, как Пифагор, Евклид, Архимед. Многогранники выделяются необычными свойствами, самое яркое из которых формулируется в теореме Эйлера о числе граней, вершин и ребер выпуклого многогранника: для любого выпуклого многогранника справедливо соотношение Г+В-Р=2, где Г-число граней, В-число вершин, Р-число ребер данного многогранника. Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой топологии - крупного раздела современной математики.

С древнейших времен наши представления о красоте связаны с симметрией. Наверное, этим объясняется интерес человека к многогранникам удивительным символам симметрии, привлекавшим внимание выдающихся мыслителей.

История правильных многогранников уходит в глубокую древность. Правильными многогранниками Пифагор и его ученики. Их поражала красота, совершенство, гармония этих фигур. Пифагорейцы считали правильные многогранники божественными фигурами и использовали в своих философских сочинениях: первоосновам бытия - огню, земле, воздуху, воде придавалась форма соответственно тетраэдра, куба, октаэдра, икосаэдра, а вся Вселенная имела форму додекаэдра. Позже учение пифагорейцев о правильных многогранниках изложил в своих трудах другой древнегреческий ученый, философ - идеалист Платон. С тех пор правильные многогранники стали называться *Платоновыми телами.*

Существует пять видов правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Почему правильные многогранники получили такие имена? Это связано с числом их граней. Тетраэдр имеет 4 грани, в переводе с греческого "тетра" - четыре, "эдрон" - грань.гексаэдр (куб) имеет 6 граней, "гекса" - шесть; октаэдр - восьмигранник, "окто" - восемь; додекаэдр - двенадцатигранник, "додека" - двенадцать; икосаэдр имеет 20 граней, "икоси" - двадцать.

Правильным многогранником называется многогранник, у которого все грани правильные равные многоугольники, и все двугранные углы равны. Но есть и такие многогранники, у которых все многогранные углы равны, а грани - правильные, но разноименные правильные многоугольники. Многогранники такого типа называются равноугольно-полуправильными многогранниками. Впервые многогранники такое типа открыл Архимед. Им подробно описаны 13 многогранников, которые позже в честь великого ученого были названы телами Архимеда. Это усеченный тетраэдр, усеченный оксаэдр, усеченный икосаэдр, усеченный куб, усеченный додекаэдр, кубооктаэдр, икосододекаэдр, усеченный кубооктаэдр усеченный икосододекаэдр, ромбокубооктаэдр, ромбоикосододекаэдр, "плосконосый" (курносый) куб, "плосконосый" (курносый) додекаэдр.

Кроме полуправильных многогранников из правильных многогранников - Платоновых тел, можно получить так называемые правильные звездчатые многогранники. Их всего четыре, они называются также телами Кеплера-Пуансо. Кеплер открыл малый додекаэдр, названный им колючим или ежом, и большой додекаэдр. Пуансо открыл два других правильных звездчатых многогранника, двойственных соответственно первым двум: большой звездчатый додекаэдр и большой икосаэдр.

Пирамидой называется тело, образованное плоским многоугольником (основание), точкой, не лежащей в плоскости этого многоугольника (вершина), и всех отрезков, соединяющих точки основания с вершиной.
Стороны многоугольника есть ребра основания. Прямые, соединяющие вершины основания с вершиной трапеции, есть боковые ребра.

Совокупности прямых, соединяющих каждую по отдельности сторону основания с вершиной, называются боковыми гранями.

Пирамиды классифицируются по числу сторон многоугольника, лежащего в их основании. Говорят о треугольной, четырехугольной и вообще n-угольной пирамидах.

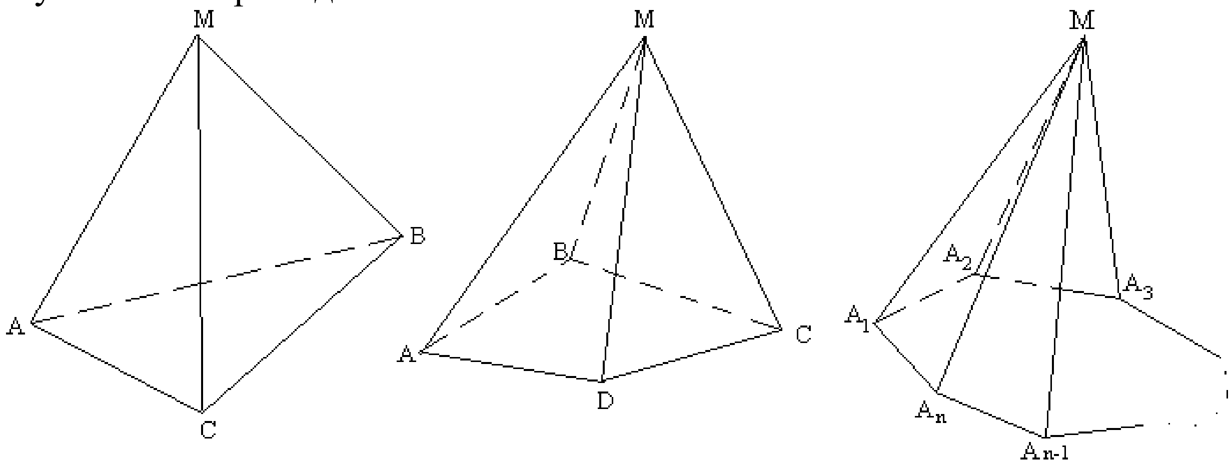


Рис.9.1

Заметим, что n-угольная пирамида имеет n+1 граней: n боковых граней и основание. При вершине пирамиды мы имеем n-гарный угол с n плоскими и n двугранными углами. Они соответственно называются плоскими углами при вершине и двугранными углами при боковых ребрах. При вершинах основания мы имеем n трехгранных углов; их плоские углы, образованные боковыми ребрами и сторонами основания, называются плоскими углами при основании, двугранные углы между боковыми гранями и плоскостью основания - двугранными углами при основании.

Треугольная пирамида иначе называется тетраэдром (т.е. четырехгранником). Особенность тетраэдра в том, что любая из его граней может быть принята за основание.

Пирамида называется правильной, если в её основании лежит правильный многоугольник, а высота, опущенная из вершины пирамиды на основание, пересекает его в центре этого многоугольника (иначе говоря, вершина пирамиды проектируется в центр основания).

Заметим, что правильная пирамида не является, вообще говоря, правильным многогранником.

Отметим некоторые свойства правильной n-угольной пирамиды на примере треугольной пирамиды. Как известно центр правильного треугольника совпадает с центром вписанной и описанной около него окружности. Поэтому отрезки АО, ВО и СО равны как радиусы.

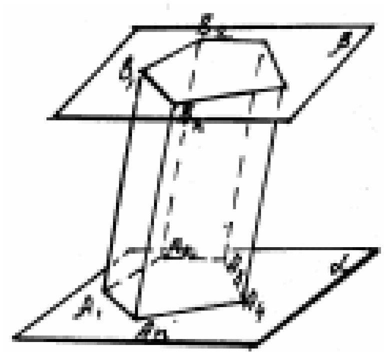
Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть *многогранником*. Тетраэдр и параллелепипед - примеры многогранников. Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его гранями.

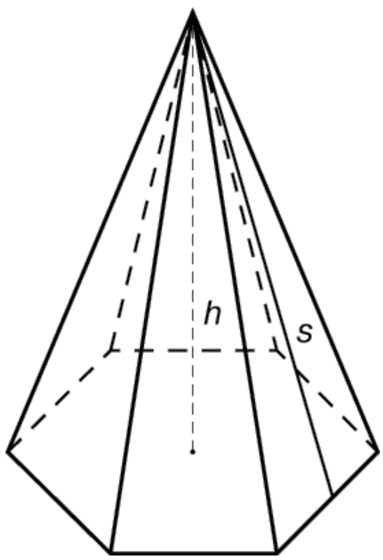
Стороны граней называются рёбрами, а концы рёбер - вершинами многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю многогранника.

Многогранники бывают *выпуклые* и *невыпуклые*. Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360о.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников A1A2...An и B1B2...Bn, расположенных в параллельных плоскостях, и n-параллелограммов, называется *призмой*.



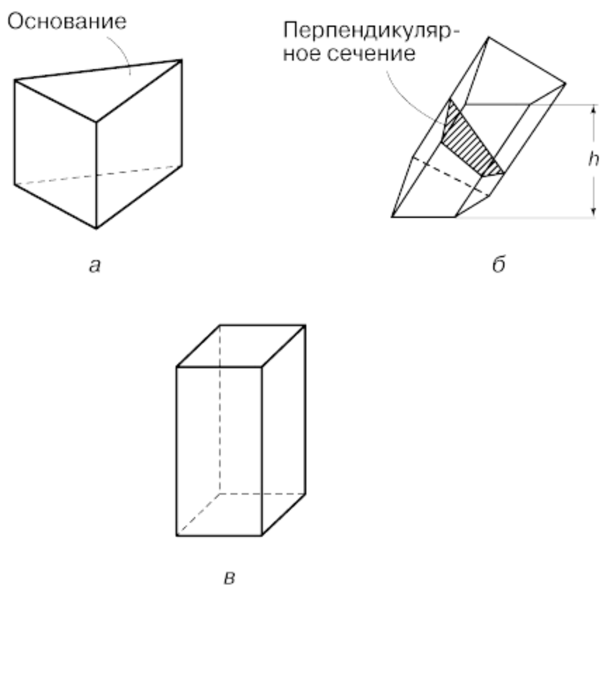


Пирамида.

Пирамидой называется многогранник, основанием которого служит плоский многоугольник, а боковые грани имеют форму треугольников с общей вершиной. Площадь боковой поверхности правильной прямой пирамиды равна 1/2 произведения периметра основания на высоту боковой грани s (рис. 9.2). Объем любой пирамиды равен 1/3 произведения площади основания на высоту h.

Рис.9.2

Призма.



Призмой называется многогранник, у которого две грани лежат в параллельных плоскостях и имеют форму конгруэнтных многоугольников, а остальные грани имеют форму параллелограммов. Параллелепипед (рис. 9.3) - это призма, основаниями которой служат параллелограммы. Площадь боковой поверхности любой призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра. Объем равен произведению площади основания на высоту. Рис.9.3

Развертка поверхности

Разверткой называется плоская фигура, полученная при совмещении поверхности геометрического тела с одной плоскостью (без наложения граней или иных элементов поверхности друг на друга).

Приступая к изучению развертки поверхности, последнюю целесообразно рассматривать как гибкую, нерастяжимую пленку. Некоторые из представленных таким образом поверхностей можно путем изгибания совместить с плоскостью. При этом, если отсек поверхности может быть совмещен с плоскостью без разрывов и склеивания, то такую поверхность называют развертывающейся, а полученную плоскую фигуру – ее разверткой.

Мастер Жан Гужон Жизненный путь Жана Гужона - одного из самых талантливых мастеров французского Ренессанса - до сих пор окутан тайной. Достоверно не известно, где и когда он родился, какое образование получил. Вероятно, он бывал в Италии, занимался там раскопками, изучал древние памятники. Гужон — прежде всего скульптор, но с не меньшим успехом он участвовал в возведении архитектурных сооружений и часто рекомендовался заказчикам как зодчий.

Основные свойства развертки

- Длины двух соответствующих линий поверхности и ее развертки равны между собой;
- Угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими им линиями на развертке;
- Прямой на поверхности соответствует также прямая на развертке;
- Параллельным прямым на поверхности соответствуют также параллельные прямые на развертке;
- Если линии, принадлежащей поверхности и соединяющей две точки поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта линия является геодезической.

Развертка поверхности многогранников

Разверткой многогранной поверхности называется плоская фигура, получаемая последовательным совмещением всех граней поверхности с плоскостью(Рис.9.4).

Так как все грани многогранной поверхности изображаются на развертке в натуральную величину, построение ее сводится к определению величины отдельных граней поверхности – плоских многоугольников.

Существует три способа построения развертки многогранных поверхностей:

1. Способ нормального сечения;

2. Способ раскатки;

3. Способ треугольника.

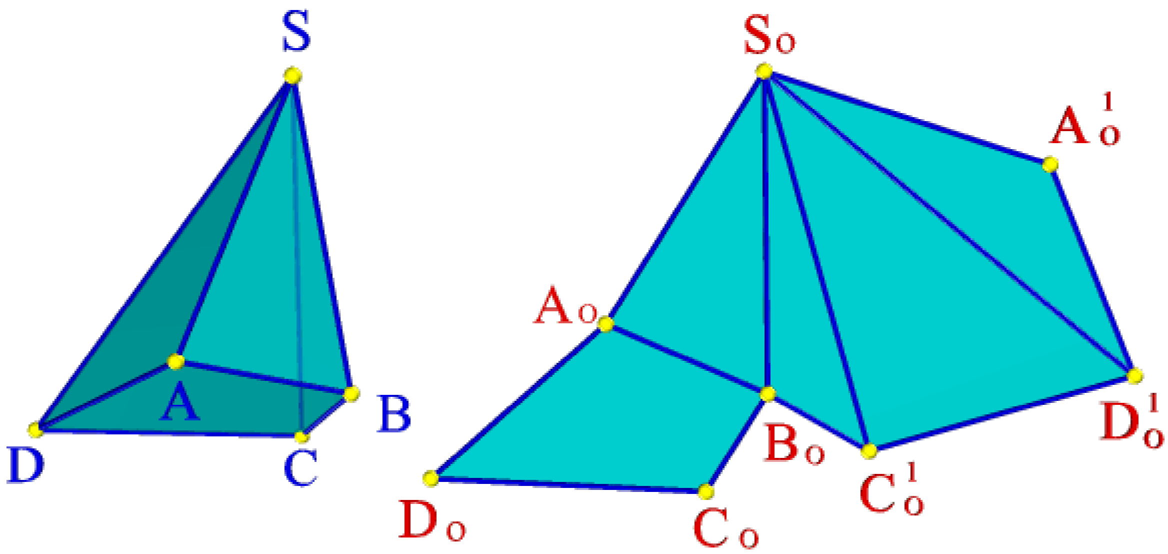


Рис.9.4 Пирамида и её развертка

При построении развертки пирамида применяется способ треугольника. Развертка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников – граней пирамиды и многоугольника - основания. Поэтому построение развертки пирамиды сводится к определению натуральной величины основания и граней пирамиды. Грани пирамиды можно построить по трем сторонам треугольников, их образующих. Для этого необходимо знать натуральную величину ребер и сторон основания.

Многогранник - геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками, называемыми гранями. Стороны граней называются ребрами многогранника, а концы ребер — вершинами многогранника (Рис.9.5). По числу граней различают четырехгранники, пятигранники и т. д. Многогранник называется выпуклым, если он весь расположен по одну сторону от плоскости каждой из его граней. Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани — правильные одинаковые многоугольники и все многогранные углы при вершинах равны. Существует 5 видов правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

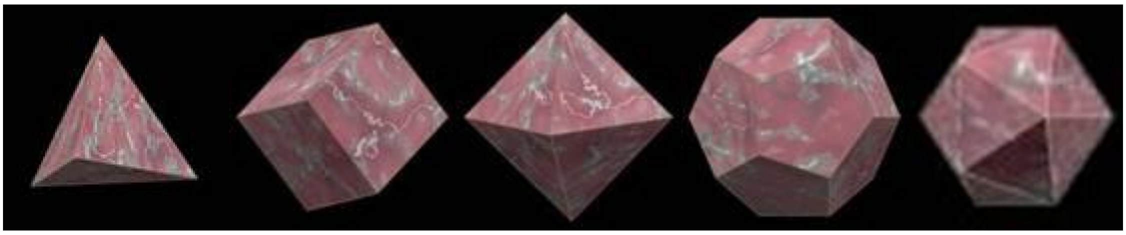
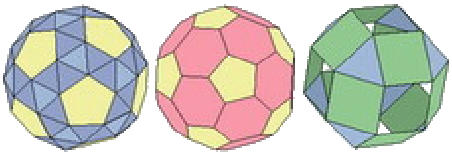


Рис.9.5

Платоновы тела - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников. Однако между двумерным и трехмерным случаями есть важное отличие: существует бесконечно много различных правильных многоугольников, но лишь пять различных правильных многогранников. Доказательство этого факта известно уже более двух тысяч лет; этим доказательством и изучением пяти правильных тел завершаются Начала Евклида.

Существует семейство тел, родственных Платоновым - это полуправильные выпуклые многогранники, или Архимедовы тела. У них все многогранные углы равны, все грани - правильные многоугольники, но нескольких различных типов. Называют 13 или 14 архимедовых тел (число неточное, поскольку псевдоромбокубоктаэдр иногда не причисляют к этому семейству).

Кроме того, имеют равные многогранные углы и правильные грани нескольких типов тела из двух бесконечных семейств - призмы и анти призмы.



Следующий серьезный шаг в науке о многогранниках был сделан в XVIII веке Леонардом Эйлером (1707-1783), который без преувеличения «поверил алгеброй гармонию».

Теорема Эйлера о соотношении между числом вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, доказательство которой Эйлер опубликовал в 1758 г. в «Записках Петербургской академии наук», окончательно навела математический порядок в многообразном мире многогранников.

Вершины + Грани - Рёбра = 2.

Многогранник	Вершины	Грани	Рёбра	Оси симметрии	Плоскости симметрии
Тетраэдр	**4**	**4**	**6**	**3**	**6**
Куб	**8**	**6**	**12**	**9**	**9**
Октаэдр	**6**	**8**	**12**	**9**	**7**
Додекаэдр	**20**	**12**	**30**	**15**	**15**

Икосаэдр	**12**	**20**	**30**	**15**	**15**

Основные положения

Для изготовления деталей, получаемых путем свертывания и изгиба листового или полосового материала, необходимо иметь заготовки – развертки будущих деталей.

Разверткой (выкройкой) поверхности тела называется плоская фигура, полученная путем совмещения всех точек данной поверхности с плоскостью без разрывов и складок.

Построение разверток выполняется обычно графическими приемами, с применением способов, предлагаемых начертательной геометрией.

Поверхности деталей, ограниченных плоскостями или развертывающимися кривыми поверхностями, могут быть развернуты и совмещены с плоскостью точно. В этом случае на развертке сохраняются точки (отрезки), лежащие на поверхности, причем каждой точке (отрезку прямой) на развертке соответствует вполне определенная и единственная точка (отрезок прямой) на поверхности детали и наоборот.

Развертки деталей, ограниченных не развёртывающимися поверхностями, строят приближенно.

На рис.9.6 изображены развертки поверхностей многогранных тел и тел вращения.
Построение развертки поверхности многогранника сводится к определению натуральной величины каждой его грани. Сначала вычерчивают развертку боковой поверхности, затем к одной из граней присоединяют основания многогранника (одно или два – в зависимости от того, призма это или пирамида).

При построении развертки линейчатых развертывающихся поверхностей их рассматривают как состоящие из очень большого числа бесконечно малых плоских элементов, иначе говоря, заменяют эту поверхность многогранной. При такой замене стороны ломаной следует выбирать, возможно, мало отличающимися от длины дуг кривой.

Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра представляет собой прямоугольник, а конуса – сектор круга. Высота прямоугольника равна высоте цилиндра, радиус сектора–образующей конуса. Длина основания прямоугольника и дуги сектора равна D (где D – диаметр основания цилиндра и конуса). К основанию прямоугольника пристраивают два круга (основания цилиндра), а к дуге сектора – круг (основание конуса).

ЛЕКЦИЯ № 10

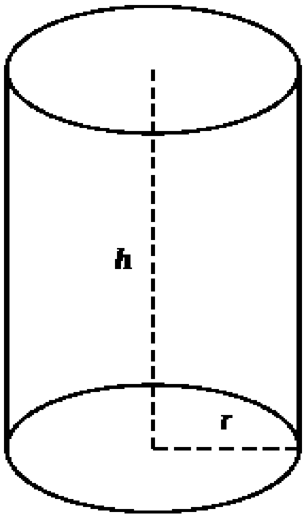
Поверхность.

1. Основные виды поверхности.

2. Винтовые поверхности.

Цилиндр

Цилиндр (др.-греч. κύλινδρος — валик, каток) — геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью (называемой боковой поверхностью цилиндра) и не более чем двумя поверхностями (основаниями цилиндра); причём если оснований два, то одно получено из другого параллельным переносом вдоль образующей боковой поверхности цилиндра; и основание пересекает каждую образующую боковой поверхности ровно один раз.



Бесконечное тело, ограниченное замкнутой бесконечной цилиндрической поверхностью, называется бесконечным цилиндром; ограниченное замкнутым цилиндрическим лучом и его основанием, называется открытым цилиндром. Основание и образующие цилиндрического луча называют соответственно основанием и образующими открытого цилиндра.

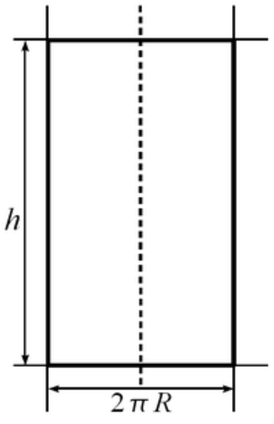
Конечное тело, ограниченное замкнутой конечной цилиндрической поверхностью и двумя выделившими её сечениями, называется конечным цилиндром, или собственно цилиндром. Сечения называются основаниями цилиндра. По определению конечной цилиндрической поверхности, основания цилиндра равны.

Очевидно, образующие боковой поверхности цилиндра — равные по длине (называемой высотой цилиндра) отрезки, лежащие на параллельных прямых, а концами лежащие на основаниях цилиндра. К математическим курьёзам можно отнести определение любой конечной трёхмерной поверхности без самопересечений как цилиндра нулевой высоты (данную поверхность считают одновременно обоими основаниями конечного цилиндра).

<u>Основания цилиндра качественно влияют на цилиндр:</u>

- если основания цилиндра плоские (и, следовательно, содержащие их плоскости параллельны) — цилиндр называют стоящим на плоскости;

- если основания стоящего на плоскости цилиндра перпендикулярны образующей — цилиндр называется прямым; в частности, если основание стоящего на плоскости цилиндра — круг, то говорят о круговом (круглом) цилиндре; если эллипс — то эллиптическом.



Площадь боковой поверхности, к вычислению площади боковой поверхности цилиндра.

Площадь боковой поверхности тел вращения вычисляется по их развёртке. Развёртка цилиндра представляет собой прямоугольник с высотой h и длиной 2πR, следовательно площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его развёртки и вычисляется по формуле: $Sb = 2\pi Rh$

Площадь полной поверхности

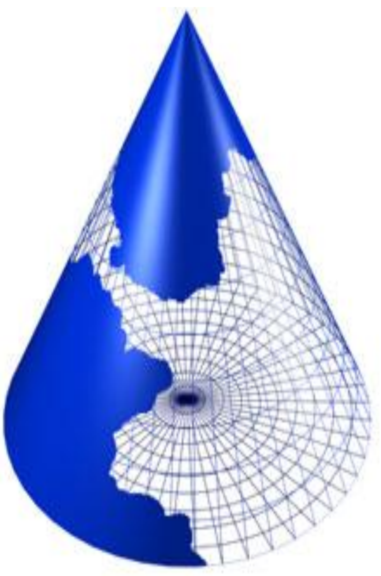
Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площадей его боковой поверхности и его оснований: $Sp = 2\pi R(h + R)$

Объём прямого кругового цилиндра

Возьмём плоскую фигуру, образованную следующими прямыми: $y = R, x = 0, x = h, y = 0$ и будем вращать её вокруг оси Ox. Таким образом мы получаем тело вращения, образованное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон, то есть цилиндр.

Конус

Конус — тело, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (вершины конуса) и проходящих через плоскую поверхность. Иногда конусом называют часть такого тела, полученную объединением всех отрезков, соединяющих вершину и точки плоской поверхности (последнюю в таком случае называют основанием конуса, а конус называют опирающимся на данное основание). Далее будет рассматриваться именно этот случай, если не оговорено обратное. Если основание конуса представляет собой многоугольник, конус становится пирамидой.



Отрезок, соединяющий вершину и границу основания, называется *образующей конуса*. Объединение образующих конуса называется образующей (или боковой) *поверхностью конуса*. Образующая поверхность конуса является конической поверхностью.

Отрезок, опущенный перпендикулярно из вершины на плоскость основания (а также длина такого отрезка), называется *высотой конуса*.

Если основание конуса имеет центр симметрии (например, является кругом или эллипсом) и ортогональная проекция вершины конуса на плоскость основания совпадает с этим центром, то конус называется прямым. При этом прямая, соединяющая вершину и центр основания, называется *осью конуса*.

Косой (наклонный) конус — конус, у которого ортогональная проекция вершины на основание не совпадает с его центром симметрии.

Круговой конус — конус, основание которого является кругом.

Прямой круговой конус (часто его называют просто конусом) можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (эта прямая представляет собой ось конуса).

Конус, опирающийся на эллипс, параболу или гиперболу, называют соответственно *эллиптическим, параболическим и гиперболическим конусом* (последние два имеют бесконечный объём).

Часть конуса, лежащая между основанием и плоскостью, параллельной основанию и находящейся между вершиной и основанием, называется *усечённым конусом.*

Если площадь основания конечна, то объём конуса также конечен и равен трети произведения высоты на площадь основания. Таким образом, все конусы, опирающиеся на данное основание и имеющие вершину, находящуюся на данной плоскости, параллельной основанию, имеют равный объём, поскольку их высоты равны.

Центр тяжести любого конуса с конечным объёмом лежит на четверти высоты от основания.

Пересечение плоскости с прямым круговым конусом является одним из конических сечений (в невырожденных случаях — эллипсом, параболой или гиперболой, в зависимости от положения секущей плоскости).

Образование поверхности

Мир поверхностей разнообразен и безграничен. Он простирается от элементарной, отличающейся простотой и математической строгостью плоскости, до сложнейших, причудливых форм криволинейных поверхностей, не поддающихся точному математическому описанию.

Без преувеличения можно сказать, что по разнообразию форм и свойств, по своему значению при формировании различных геометрических фигур, по той роли, которую они играют в науке, технике, архитектуре, изобразительном искусстве, поверхности не имеют себе равных среди других геометрических фигур.

В начертательной геометрии геометрические фигуры задаются графически, поэтому целесообразно рассматривать поверхность как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии.

Для получения наглядного изображения поверхности на чертеже (эпюре Монжа) закон перемещения линии gj целесообразно задавать графически в виде совокупности линий { d, . . .} и указаний о характере перемещения линии gj , при этом указания могут быть заданы также графически, в частности, с помощью направляющей поверхности i.

В процессе образования поверхности линия gj может оставаться неизменной или менять свою форму. Подвижная линия gj называется образующей, неподвижные линии {d, ...} и поверхность i - направляющими.

Процесс образования поверхности может быть легко уяснен на примере, показанном на рисунке 9.5. Здесь в качестве образующей взята плоская кривая gj. Закон перемещения кривой gj задан двумя направляющими d1 и d2 и плоскостью i, при этом имеется в виду, что образующая gj скользит по направляющим d1 и d2 , все время оставаясь параллельной плоскости i, а точка A, принадлежащая образующей gj, перемещается по кривой d1. Описанный способ образования поверхности называется кинематическим. Кинематическим способом можно образовать и с его помощью задать на чертеже разнообразные поверхности.

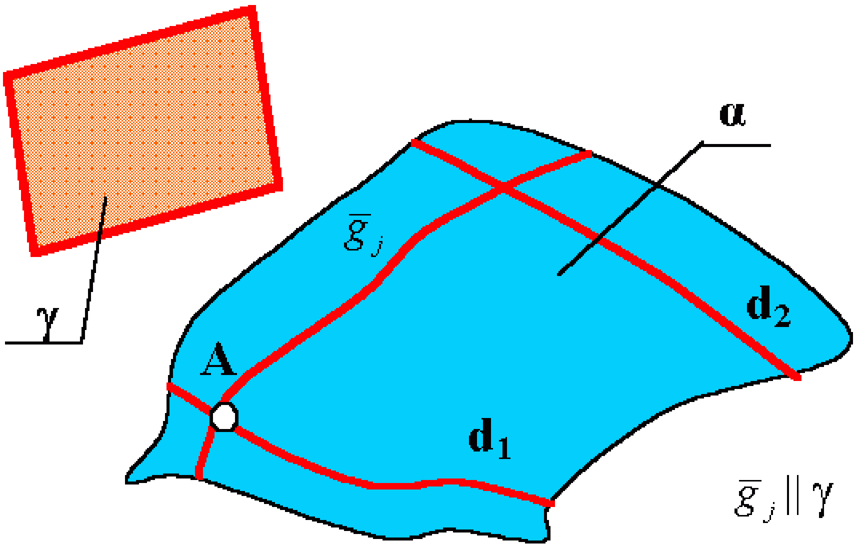


Рис.9.6

Классификация поверхностей

Многообразие форм поверхностей создает большие трудности при их изучении. Для того чтобы облегчить процесс изучения поверхностей, целесообразно осуществить их систематизацию, распределив все поверхности по классам, подклассам, группам и подгруппам.

При делении поверхностей на классы, подклассы, группы, подгруппы следует к одной классификационной категории относить поверхности, обладающие характерным признаком, который у поверхностей, входящих в другую категорию, отсутствует.

Все многообразие поверхностей можно отнести к двум классам: (рис. 9.5).

Класс I составляют поверхности, образующие gi которых - кривые линии.

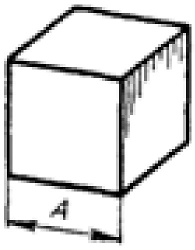
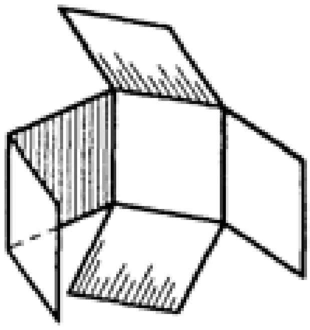
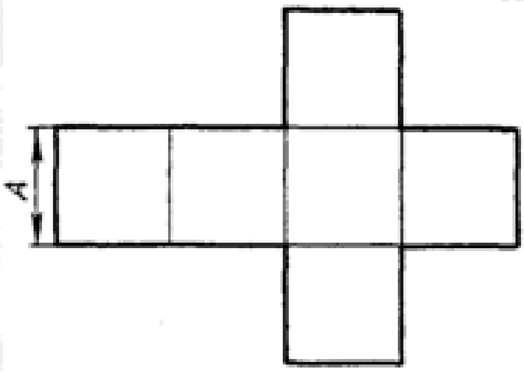
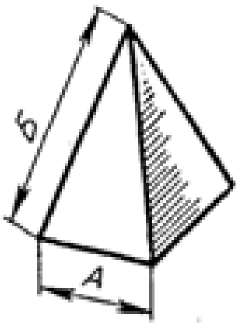
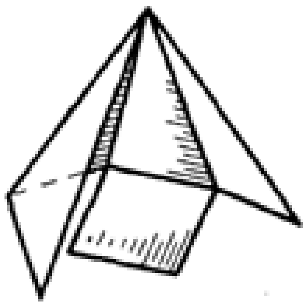
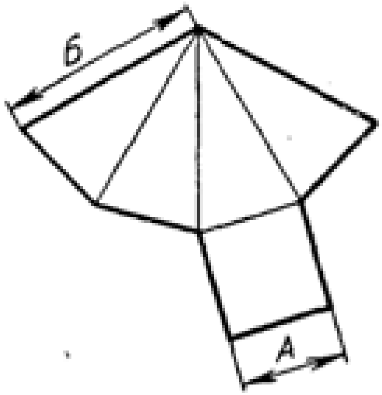
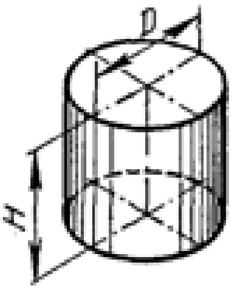
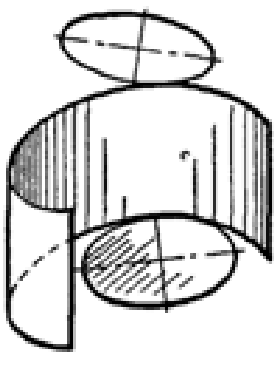
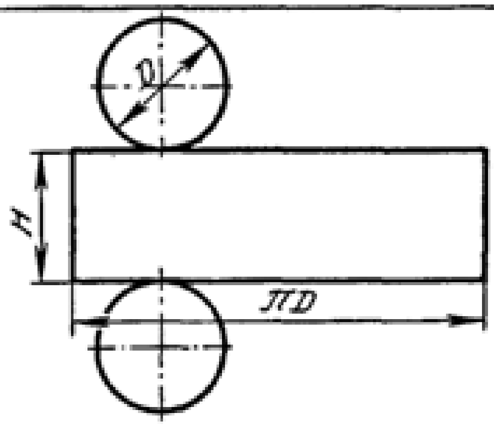
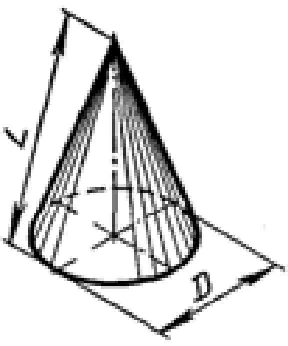
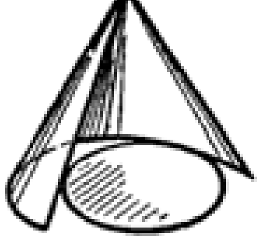
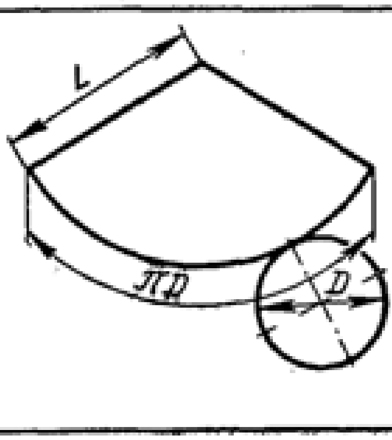
Класс II объединяет поверхности, образованные прямой линией, т.е. gi - прямая.

Поверхности, входящие в класс I, называются *нелинейчатыми*, в отличие от поверхностей класса II, которые считаются *линейчатыми*.

Подкласс 1 содержит поверхности, образованные поступательным перемещением образующей линии. Такие поверхности называют поверхностями параллельного переноса.

Подкласс 2 составляют поверхности, образованные вращением образующей линии - поверхности вращения.

Подкласс 3 включает поверхности, образованные винтовым перемещением образующей, - винтовые поверхности.

Геометрические тела	Начало развертывания	Развертка поверхности
 Куб		
 Пирамида		
 Цилиндр		
 Конус		

Содержание