

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI SOG'LIQNI SAQLASH VAZIRLIGI
TIBBIY TA'LIMNI RIVOJLANTIRISH MARKAZI
TOSHKENT FARMATSEVTIKA INSTITUTI

OLIY MATEMATIKADAN USLUBIY QO'LLANMA

Farmatsiya va sanoat farmatsiyasi fakultetlari 1-bosqich talabalari uchun

Oliy matematika fanidan “Matematik tahlil” bo’limi bo’yicha
o’quv-uslubiy qo’llanma

Toshkent-2014

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI SOG'LIQNI SAQLASH VAZIRLIGI
TIBBIY TA'LIMNI RIVOJLANTIRISH MARKAZI
TOSHKENT FARMATSEVTIKA INSTITUTI

“TASDIQLAYMAN”

O'z R SSV Fan va o'quv yurtlari
Bosh boshqarmasining boshlig'i:
_____prof. Sh. E. Ataxonov

2014 y “___” _____

№ _____ bayonnoma

“KELISHILDI”

O'z R SSV Tibbiy ta'limni
rivojlantirish markazi
direktori v/v/b

_____ H. A. Abdullayeva

2014 yil “___” _____

№ _____ bayonnoma

OLIY MATEMATIKADAN USLUBIY QO'LLANMA

Farmatsiya va sanoat farmatsiyasi fakultetlari 1-bosqich talabalari uchun

Oliy matematika fanidan “Matematik tahlil” bo'limi bo'yicha
o'quv-uslubiy qo'llanma

Tuzuvchilar:

Sunatova D. A.- ToshFarmi “Fizika, matematika va AT” kafedrası katta o’qituvchisi;

Samigova N. X. ToshFarmi “Fizika, matematika va AT” kafedrası katta o’qituvchisi;

Tursunova Z. B. ToshFarmi “Fizika, matematika va AT” kafedrası katta o’qituvchisi;

Temirova B. E. ToshFarmi “Fizika, matematika va AT” kafedrası o’qituvchisi;

Taqrizchilar:

1. O’zMU Oliy matematika kafedrası katta o’qituvchisi B. Xodjayev

2. ToshFarmi “Biotexnologiya” kafedrası dots. F. O. Po’latova

O’quv-uslubiy qo’llanma Toshkent Farmatsevtika instituti
Markaziy uslubiy kengshashida muhokama qilindi.

2014 yil “_____” _____ № bayonnoma.

O’quv-uslubiy qo’llanma Toshkent Farmatsevtika instituti Ilmiy
kengashida tasdiqlandi.

2014 yil “_____” _____ № bayonnoma.

Ilmiy kengash kotibi

Z. O. Yuldashev

KIRISH

Hozirgi kunda ta'lim jarayonida interaktiv uslublar, innovatsion texnologiyalar, pedagogik va axborot texnologiyalarni qo'llashga, ya'ni o'qitishning noan'anaviy turiga, bo'lgan talab borgan sari ortib bormoqda.

Innovatsiya (inglizcha innovation) – yangilik kiritish, yangilikdir.

Innovatsiyani amalga oshirishda asosan interaktiv uslublardan to'liq foydalaniladi. Ular juda xilma-xildir. Bu usullarnig o'ziga xosligi shundaki, ular faqat pedagog va o'quvchi – talabalarning birgalikda faoliyat ko'rsatishi orqali amalga oshiriladi.

Zamonaviy usullar yoki o'qitishning samarasini oshirishga yordam beruvchi texnologik treninglar talabalarda mantiqiy, aqliy, ijodiy, tanqidiy, mustaqil fikrlashni shakllantirishga, qobiliyatlarini rivojlantirishga, izlanishga ilmiy adabiyotlardan unumli foydalanishga, raqobatdor yetuk mutaxassis bo'lishlariga hamda kasbiy fazilatlarni tarbiyalashga yordam beradi.

Kutilayotgan natija:

O'qituvchi: Talabalar o'zlashtirish ko'rsatkichini ko'tarishda, fanni o'qitishda, laboratoriya mashg'ulotlarini yanada mazmunli, qiziqarli va tushunarli o'tkazishda va talaba faoliyatiga yangilik kiritib, interaktiv metodlardan foydalanib, talabalarni tez va samarali baholashga erishadi.

Talaba: O'quv jarayonida talabalar mustaqil fikrlashni, ijodiy yondashishni, izlanishni, tahlil eta olishni, o'zlari xulosa qilib, o'z-o'zini hamda guruhni va guruh talabani baholay olishni o'rganadi.

MASHG'ULOT BOSQICHLARI

Kirish qismi:

Vazifangni angla!

Vazifa	Asosiy maqsad

Bunda talabalar mustaqil, individual ravishda daftarlariga mavzuga oid o'z fikr va mulohazalarini yozadilar. Bajarish uchun 2 minut vaqt beriladi, fikrlar o'rtada muhokama qilinadi.

O'quv jarayonini amalga oshirish texnologiyasi.	Uslub: - og'zaki bayon qilish, suhbat-munozara. - «aqliy hujum», «3x5» uslubi, SWOT- analiz, tahlil uslubi, «yelpig'ich» texnologiyasi. Shakl: -Amaliy mashg'ulot; kichik guruhlarda va jamoa bo'lib ishlash. Vosita: -tarqatma materiallar, tayyor yozma materiallar va misollar; Nazorat: - savol-javob, kuzatish. Baholash: - umumiy va o'z-o'zini baholash.
---	---

Mashqulotning asosiy qismi.

Bilgandan > Bilmaganga

Sonlar ketma–ketligi

O'qituvchi o'quv jarayonida tashabbusni o'z qo'liga olgan tarzda, guruhning barcha talabalariga mavzuga oid savollar beradi. Bu mashqni «Aqliy hujum» shaklida o'tkazish mumkin.

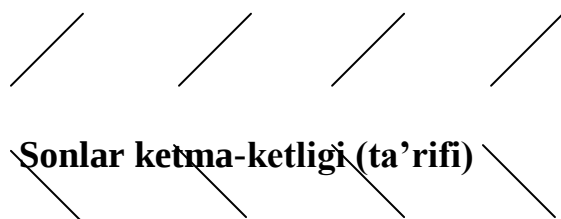
Aqliy hujum guruhlararo ishlarda qo'llaniladigan, ko'plab g'oyalarni ishlab chiqish mumkin bo'lgan usuldir. Aqliy hujum shuning uchun ham faollashtirishning muqim usuliki, unda tanho ishlash mumkin emas, birgina g'oya guruhning barcha ishtirokchilarini bir xilda o'ziga jalb etadi.

O'qituvchi mavzu yoki savolni ajratib olishi va to'g'ri savol qo'yishi zarur. Bunda g'oyani taqdim etayotgan paytda so'zlovchining gapini bo'lmaslik, barcha g'oyalarni aytishga (bildirishga) ruxsat berish va fikrini sharxlamagan holda doskaga yozib borish kerak. Fikrlarni doskada ikki xil ko'rinishda ifoda etish mumkin:

«Baliq suyagi» shaklida;

Har bir talaba bildirgan fikrni doskada ustun shaklida qayd etib yozib borish ham mumkin.

1)



1. Sonlar ketma-ketligi (ta'rifi)

Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Hayotdagi barcha munosabatlar to'plamlar orasida amalga oshiriladi. Matematik to'plamlar sonli to'plamlar ustiga quriladi.

Vazifalar: Sonli ketma ketlik haqida ma'lumot berish.

Talaba bilishi lozim:

- Sonli ketma ketliklar orasidagi munosabatlar haqida tusunchaga ega bo'lishi kerak.
- O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar haqida tusunchaga ega bo'lishlari kerak.

Talaba bajara olishi lozim: O'suvchi va kamayuvchi sonli ketma ketliklarni aniqlay olishi kerak. Sonli ketma ketliklarning biror songa intilishini aniqlay

olishi kerak. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Ularning farqlarini ajrata olishi kerak.

Motivasiya: Funksiya tushunchasini ma'nosini tushunish uchun sonli ketma-ketliklar haqida to'liq tushunchaga ega bo'lishi kerak.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Maxsus fanlarni o'rganishda, jumladan kimyoviy va fizik jarayonlarda kattaliklar orasidagi bog'lanishlarni tushunish uchun bu kattaliklarni aks ettiruvchi sonlar orasidagi bog'lanishni bilish kerak.

Mashg'ulotning mazmuni: Sonlar ketma-ketligi. Sonli ketma-ketliklarning limiti. To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari bilan tanishtirish.

Nazariy qism:

1-ta'rif: Agar biror qonunga ko'ra $1, 2, 3, \dots, n, \dots (n \in \mathbb{N})$ natural sonlarga $x_1, x_2, x_3, \dots$ haqiqiy sonlar mos keltirilgan bo'lsa, u holda $x_1, x_2, x_3, \dots$ sonlar ketma-ketligi berilgan deyiladi.

Qisqacha ketma-ketlik $\{x_n\}$ ko'rinishda yoki $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ ko'rinishda yoziladi.

x_i -larga ($i=1, 2, \dots, n, \dots$) $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari, x_n -ga esa ketma-ketlikning umumiy hadi deyiladi.

Misol: $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ $\{n^2+1\} = \{2, 5, 10, 17, \dots\}$ $\{1+(-1)^n\} = \{0, 2, 0, 2, \dots\}$

2-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning istalgan x_n elementi uchun $x_n \leq M$ (yoki $x_n \geq m$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi M (yoki m) soni mavjud bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni yuqoridan (pastdan) chegaralangan deyiladi.

M va m larga yuqori va quyi chegaralari deyiladi. Ham pastdan, ham yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n \leq x_{n+1}$ (yoki $x_n \geq x_{n+1}$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni kamaymaydigan (o'smaydigan) ketma-ketlik deyiladi.

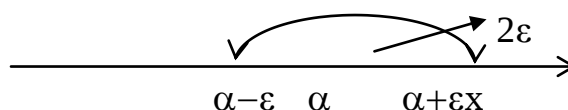
4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n < x_{n+1}$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi ketma-ketlik, agar $x_n > x_{n+1}$ bo'lsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikni kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklarga monoton ketma-ketliklar deyiladi.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son mavjud bo'lsaki, $n > N$ bo'lgan barcha n lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

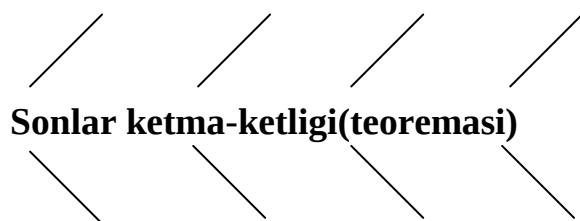
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ yoki } x_n \rightarrow a \text{ ko'rinishlarda yoziladi } |x_n - a| < \varepsilon$$

$a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga a nuqtaning ε atrofi deyiladi.



Ta'rifning geometrik ma'nosi quyidagicha: agar a berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lsa, u holda a nuqtaning ε atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashgan bo'ladi. Shunday hadlarning nomerlari N dan katta bo'lib, bu atrofdan tashqarida esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_1 dan x_n gacha bo'lgan chekli hadlari bo'ladi.

6-ta'rif. Limiti mavjud bo'lgan ketma-ketliklarga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar deyiladi. Aks holda uzoqlashuvchi ketma-ketliklar deyiladi.



1-teorema. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklar faqat bitta limitga ega bo'ladi.

2-teorema. Har qanday yuqoridan chegaralangan kamaymaydigan va quyidan chegaralangan o'smaydigan sonli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, limitga ega bo'ladi.

3-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u albatta chegaralangan bo'ladi. Lekin aksi harvaqt to'g'ri emas, ya'ni zarur lekin kifoya emas.

4-teorema. (Bolsiano Veyershtrass). Ixtiyoriy cheksiz, chegaralangan va monoton bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'ladi.

Agar cheksiz $\{x_n\}$ ketma-ketliklar yuqoridan yoki quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u albatta uzoqlashuvchi bo'ladi, ya'ni chekli limitga ega bo'lmaydi.

Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi. Boshqa so'z bilan aytganda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topish mumkin bo'lsaki, barcha $n > N$ lar uchun $|x_{n-a}| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar.

Biz amaliy faoliyatimizda mazmun jixatidan turlicha bo'lgan uzunlik, yuza, hajm, temperatura, tezlik kabi turli raiqdorlarga duch kelamiz. Bu miqdorlar aniq sharoitda ba'zan turli qiymatlarni qabul qilsa, ba'zan bir xil qiymatga teng bo'ladi. Masalan, tasodifiy 10 ta mashinaning tezligi tekshirilsa, ular har xil bo'lishi mumkin. Demak tezlik o'zgaruvchi miqdor.

Ma'lumki har qanday aylana uzunligi l ning diametri $2R$ ga nisbati har doim o'zgarmas son (miqdor) $\pi = 3,14...$ ga tengdir. Jismlarning erkin tushish tezlanishi ham o'zgarmas miqdordir.

Shunday qilib ikki xil o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar bo'ladi. Odatda o'zgaruvchi miqdorlar $x, y, z, ...$ o'zgarmas miqdorlar esa $a, b, c, ...$ harflar orqali belgilanadi. Agar x o'zgaruvchi miqdor berilgan bo'lsa, bu miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamiga x o'zgaruvchi miqdorning

o'zgarish sohasi deyiladi. X o'zgaruvchi miqdorning o'zgarish sohasini sonlar o'qida tasvirlasak, $a < x < b$ yoki $a \leq x \leq b$ tengsizliklardan x ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari (a,b) , $[a,b[$ oraliqda yoki $[a,b]$ kesmalarda bo'lishi ravshan.

O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlarni quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif. Har xil son qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan har qanday x miqdorga o'zgaruvchi miqdor deyiladi. Barcha qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bir xil bo'lgan miqdorga o'zgarmas miqdor deyiladi.

2. Funksiya ta'rifi, aniqlanish sohasi, berilish usullari.

Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Hayotdagi munosabatlar turli miqdorlarni orasida amalga oshiriladi. Bu munosabatlarni funksiyalar orqali ifodalaymiz. Buning uchun funksiyalar ustida bajariladigan amallarni bilishimiz kerak.

Vazifalar: Talabalarni funksiya tushunchasi, funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi, funksiyaning juft-toqligi, ularni aniqlash usullarini o'rgatish.

Talaba bilishi lozim:

- Funksional bog'lanishlar va funksiya tushunchasi.
- Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini topa olish .
- Funksiyaning juft-toqligini aniqlay olishi kerak

Talaba bajara olishi lozim: Funksional bog'lanishni aniqlay olishi kerak. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini topa olishi kerak. Funksiyaning juft-toqligi ajrata olishi kerak.

Motivasiya: Funksional bog'lanishni tushunish uchun Funksiya tushunchsi bilan kengroq tanishish kerak.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Maxsus fanlardagi turli kattaliklar orasidagi bog'lanishlarni tushunish uchun funksiyaga doir asosiy kattaliklarni bilishi kerak.

Mashg'ulotning mazmuni: Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi. Funksiyaning juft-toqligi.

Nazariy qism:

Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan D va E to'plamlar berilgan bo'lib, o'zgaruvchi x miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari D to'plamda, y o'zgaruvchi miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari E to'plamda bo'lsin.

1-Ta'rif. Agar x o'zgaruvchining D to'plamdagi har bir qiymatiga biror qoida yoki qonunga ko'ra y o'zgaruvchining E to'plamdagi faqataniq bitta qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, u holda o'zgaruvchi y ni o'zgaruvchi x ning funksiyasi deyiladi va odatda $y = f(x)$ ko'rinishda yoziladi.

x ga erkli o'zgaruvchi yoki argument, y ga esa erksiz o'zgaruvchi yoki x o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

Misollar. Quyidagi funksiyalarni x_0 nuqtadagi qiymatini hisoblang.

1. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ $x_0 = 1$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 8 = 2 - 5 + 7 - 8 = -4$$

2. $y = 2\sqrt{x} - 2\sqrt[5]{x-4}$ $x_0 = 4$

$$f(4) = 2 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot \sqrt[5]{4-4} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 4$$

3. $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ $x_0 = -1$

$$f(-1) = \frac{-1-1}{(-1)^2+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi.

x o'zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlar to'plamiga funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(f)$ yoki $D(y)$ ko'rinishda belgilanadi.

Aniqlanish sohasining har bir x elementiga mos kelgan $f(x)$ elementlar to'plami berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi deyiladi va $E(f)$ yoki $E(y)$ ko'rinishda yoziladi.

Misol. $y = \sqrt{1-x^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1,1]$ to'plamdan ya'ni $D(y)=[-1; 1]$ iborat bo'ladi. O'zgarish sohasi esa $E(y)=[0; 1]$ bo'ladi.

2-Ta'rif. Funksiyaning aniqlanish sohasi D dagi har qanday x_1, x_2 lar uchun $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_1) \leq f(x_2)$ kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiyaning D da o'suvchi deyiladi, agar $f(x_1) \geq f(x_2)$ kelib chiqsa, funksiyaning D sohada kamayuvchi deyiladi.

Funksiyaning berilish usullari.

- a) x va y o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanish matematik formulalar orqali berilishi mumkin, u holda funksiya analitik usulda berilgan deyiladi;
- b) o'zgaruvchi x va y lar orasidagi bog'lanish grafik usulda berilishi mumkin;
- v) x va y lar orasidagi bog'lanish jadval usulida ya'ni argument x ning qiymatlariga mos keluvchi y ning qiymatini jadval ko'rinishda berilishi mumkin.

Misollar.

Amaliy mashg'ulotlar uchun mashqlar.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatini hisoblang.

- | | | |
|--|---------------------|-----------------------|
| 1. $y = 5x^2 - \frac{6}{x} + 2^{-x}$ | $x_0 = 2$ | Javob: 17.25 |
| 2. $y = 3x^3 + \frac{1}{x+1} + \sqrt{x+3}$ | $x_0 = 1$ | Javob: 5.5 |
| 3. $y = x^{-2} + \frac{4}{x+3} + 2x + 3$ | $x_0 = \frac{1}{2}$ | Javob: $9\frac{1}{7}$ |
| 4. $y = 2x + 3\sqrt{x+4} + \frac{1}{x+13}$ | $x_0 = 12$ | Javob: 36.04 |
| 5. $y = x^2 - 3x + \sqrt{4+x}$ | $x_0 = -3$ | Javob: 19 |
| 6. $y = 6x^2 - 7x + \frac{1}{x-3}$ | $x_0 = \frac{1}{2}$ | Javob: -2.4 |
| 7. $y = 5x^3 - 7x^2 + 6x + 1$ | $x_0 = -4$ | Javob: -455 |

8. $y = 3\sqrt{x^2 + 2} + 4x + 1$	$x_0 = -0.5$	Javob: 3.5
9. $y = (3x^2 + 1)^2 - 4x + 6$	$x_0 = -3$	Javob: 802
10. $y = 4x^7 + 3x + 6(x + 7)$	$x_0 = -1$	Javob: 29
11. $y = 2x^3 + 8x - 6(2x + \frac{1}{2})$	$x_0 = 1$	Javob: 1
12. $y = 4\sqrt{x^2 - 4} + 6x - \frac{1}{x}$	$x_0 = 2.5$	Javob: 20.6
13. $y = \frac{4x^2}{5} - 6x - \frac{5}{x}$	$x_0 = -5$	Javob: 51
14. $y = 3x^2 - \sqrt{x^2 + 5} - 4(x - 1)$	$x_0 = 2$	Javob: 5
15. $y = 5x + 6 - 4\sqrt{3x - 1}$	$x_0 = \frac{1}{3}$	Javob: $7\frac{2}{3}$

Funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

1. $f(x) = \frac{3x^2 - \cos x}{x^2 - 1}$	Javob: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$
2. $f(x) = \frac{3x^2 + 6\cos x}{\sqrt{5x - 1}}$	Javob: $(0.2; \infty)$
3. $f(x) = \sqrt{x + 5} + \ln(x - 2)$	Javob: $(2; \infty)$
4. $f(x) = \ln(x - 2) + \sqrt{x^2 - 1}$	Javob: $(2; \infty)$
5. $f(x) = \frac{2}{x - 5} - \ln(x - 1)$	Javob: $(1; 5) \cup (5; \infty)$
6. $f(x) = \lg(x + 3) + \sqrt{x}$	Javob: $[0; \infty)$
7. $f(x) = x^2 - 6x + 5$	Javob: $(-\infty; \infty)$
8. $f(x) = \frac{x}{x - 3}$	Javob: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$
9. $f(x) = \lg(x^2 - 4)$	Javob: $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
10. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x + 2}}$	Javob: $(-2; \infty)$
11. $f(x) = \frac{5}{x^2 + 5x + 6}$	Javob: $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; \infty)$
12. $f(x) = \frac{3x^2 - 6}{5}$	Javob: $(-\infty; +\infty)$

13. $f(x) = 5\sqrt{x^2 - 1}$ Javob: $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
14. $f(x) = \lg(x+3) + \sqrt{x}$ Javob: $[0; \infty)$
15. $f(x) = \lg(x^2 - 9) + \sqrt{x}$ Javob: $(3; \infty)$
16. $f(x) = \frac{5x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ Javob: $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
17. $f(x) = \frac{3x^2-6}{3x-1}$ Javob: $(-\infty; 1/3) \cup (1/3; \infty)$
18. $f(x) = \lg(x^2 - 1) + \sin 3x$ Javob: $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
19. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-25}$ Javob: $(-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; \infty)$
20. $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sin 4x$ Javob: $[-1; 1]$

Mustaqil yechish uchun misollar.

- | | | |
|--|----------------------|-------------------------|
| 1. $y = 4x^2 - 7x + 6$ | $x_0 = -2$ | Javob: 36 |
| 2. $y = 4x^7 - 3x - 2(x+6)$ | $x_0 = -1$ | Javob: -11 |
| 3. $y = x^3 - 7x - \sqrt{5-x^2}$ | $x_0 = -2$ | Javob: 5 |
| 4. $y = 2x + 3x^2 - \sin(x+2)$ | $x_0 = -2$ | Javob: 8 |
| 5. $y = x - 3 + 7\cos(3x+1)$ | $x_0 = -\frac{1}{3}$ | Javob: $4\frac{1}{3}$ |
| 6. $y = 3(x+2) - \ln \frac{x+1}{x-1}$ | $x_0 = -2$ | Javob: $12 - \ln 3$ |
| 7. $y = \ln(2x-1) + 3\cos(3-x)$ | $x_0 = 3$ | Javob: $\ln 5 + 3$ |
| 8. $y = 3x^2 - \sqrt{x-5} + 2(x-1)$ | $x_0 = 21$ | Javob: 1339 |
| 9. $y = \frac{x^2+1}{5} - 6x - \frac{5}{3x}$ | $x_0 = 3$ | Javob: $-11\frac{5}{6}$ |
| 10. $y = \frac{4x+5}{\sqrt{x-1}}$ | $x_0 = 5$ | Javob: 12.5 |
-
- | | |
|--------------------------------------|-----------------------|
| 1. $f(x) = \lg(1-x) + \sin(3x+1)$ | Javob: $(-\infty; 1)$ |
| 2. $f(x) = \lg(x+3) + \sqrt{x^2-25}$ | Javob: $[5; \infty)$ |
| 3. $f(x) = 1 - \lg x$ | Javob: $(0; \infty)$ |
| 4. $f(x) = \lg(x+3)$ | Javob: $(-3; \infty)$ |

- | | | |
|-----|---|--|
| 5. | $f(x) = \sqrt{5-2x}$ | Javob: $(-\infty; 2.5]$ |
| 6. | $f(x) = x^2 + 3x + 5$ | Javob: $(-\infty; \infty)$ |
| 7. | $f(x) = 2^x$ | Javob: $(-\infty; \infty)$ |
| 8. | $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{1}{(x^2-4)}$ | Javob: $[3; \infty)$ |
| 9. | $f(x) = \sqrt{x^2-9} + \lg(x-2)$ | Javob: $[3; \infty)$ |
| 10. | $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$ | Javob: $[-3; 7]$ |
| 11. | $f(x) = \sqrt{x^2-25} + \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}$ | Javob: $(-10; -5] \cup [5; 10)$ |
| 12. | $f(x) = \frac{\sin x}{x^2-5x+4}$ | Javob: $(-\infty; 1) \cup (1; 4) \cup (4; \infty)$ |
| 13. | $f(x) = \sin 3x$ | Javob: $(-\infty; \infty)$ |
| 14. | $f(x) = \sqrt{2-3x} + \lg x$ | Javob: $(0; 2/3)$ |
| 15. | $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ | Javob: $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ |
| 16. | $f(x) = \sqrt{3+x}$ | Javob: $[-3; \infty)$ |

Adabiyotlar

1. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent " " 2013y
2. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. " " 2014 y
3. Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent "O'qituvchi", 1992 y
4. Fixtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
5. Lobatskaya N. L. "Osnovi visshey matematiki" Moskva 1987 g

Funksiyaning juft-toqligi.

Ta'rif: Agar x argumentning $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan barcha qiymatlarida $f(-x) = f(x)$ (1) tenglik o'rinli bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya juft funksiya deyiladi.

Ta'rif: Agar x argumentning $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan barcha qiymatlarida $f(-x) = -f(x)$ (2) tenglik o'rinli bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya toq funksiya deyiladi.

Agar berilgan funksiya uchun (1) va (2) tengliklar bajarilmasa, u holda funksiya juft ham, toq ham emas deyiladi.

Misollar: Quyidagi funksiyalarni juft- toqlikka tekshiring

1. $y = x^2$

$$f(-x) = (-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x^2 = f(x) - \text{funksiya juft}$$

2. $y = x^3 - x$

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) - \text{funksiya toq.}$$

“CHARXPALAK” TEXNOLOGIYASI.

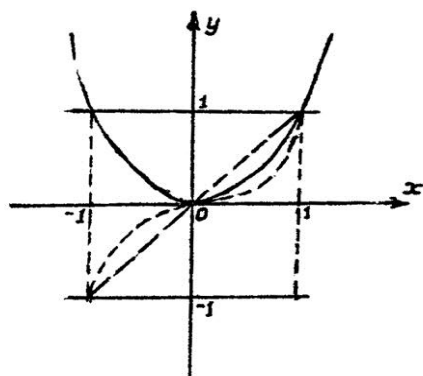
Talabalarning mavzuga tayyorgarlik darajasini tekshirish uchun “CHARXPALAK” metodidan foydalanish. Bunda talabaga mavzuga oid misollar beriladi. Bu misollar funksiyaning qaysi turiga tegishli ekanligini topishga, mantiqiy fikr-lashga, o'tilayotgan mazular asosida ko'p, xilma – xil fikr va ma'lumotlardan kerakligini tanlab olishni o'rgatishga qaratilgan. Buning uchun talabalarga tarqatilgan qog'ozlarda ko'rsatilgan misollar ketma – ketligi aralashtirib beriladi. Talaba esa avval yakka holda, mustaqil ravishda, so'ngra esa kichik guruhda, bu ketma – ketlikni tartibga solib, aynan qaysi turga tegishli ekanini belgilab chiqishi, o'z fikrini boshqalarga yoritib bera olishi lozim. Qog'ozda to'g'ri javob ustuni bo'ladi. O'qituvchi talabaga to'g'ri javobni o'qib eshittiradi, talaba esa to'g'ri javob bilan o'zining javobini solishtirib, to'g'ri javoblar sonini hisoblagan holda, berilgan baholash mezonidan kelib chiqib o'z-o'zini baholaydi.

Baho	Xato	Funksiyajuft ham toq ham emas	Juft funksiya	Toq funksiya	Misollar
					$f(x) = \sin x^2$ $f(x) = x \operatorname{tg} x$ $f(x) = x^2 \sin x$ $f(x) = x^3 - x$ $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{ctg} x$ $f(x) = 3x^2 \cos x$ $f(x) = x^3 \operatorname{tg} x$ $f(x) = x^2 + x^3 \operatorname{tg} x$ $f(x) = \sin 2x^2$ $f(x) = x $ $f(x) = 3x^2 + 4$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ $f(x) = \sin x \cos x + x$ $f(x) = 4x^2 \operatorname{tg} x$

Asosiy elementar funksiyalar.

Oshkor funksiyalar ikki sinfga bo'linadi: algebraik va transcendent funksiyalar.

Argument x ustida chekli sonda algebraik funksiya bo'ladi (ayirish, qo'shish va



I-pachm

h.k)

Masalan: $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{x}{x^3 + 4}$

va h.k.

Algebraik bo'lmagan barcha funksiyalar transcendent funksiyalar deyiladi.

Masalan: $y = a^x$ $y = \log_a x$ $y = \sin x$

Bu funksiyalrning eng soddalarini ko'rib chiqamiz.

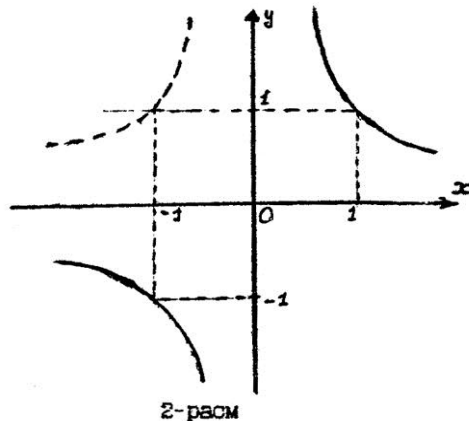
1) Darajali funksiya

$y = ax^n$ yerda x, y – o'zgaruvchilar, a va n ixtiyoroy o'zgarmas sonlar.

Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi daraja ko'rsatkichi n -ning ishorasiga bog'liq.

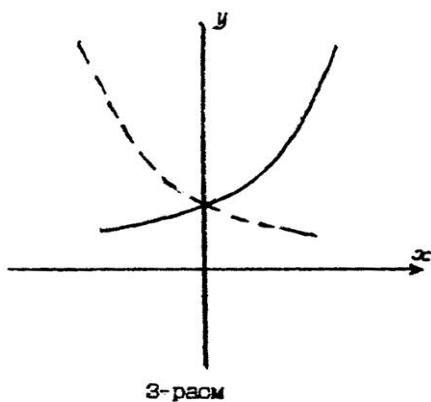
a) $n \geq 0$ butun bo'lganda funksiyaning aniqlanish sohasi $-\infty < x < +\infty$

b) $n < 0$ butun bo'lganda funksiyaning aniqlanish sohasi ikkita $]-\infty, 0[$ va $]0, +\infty[$ intervaldan iborat bo'lib, unga sonlar o'qining $x = 0$ dan boshqa barcha nuqtalar kiradi.



$n > 0$, II, III tartibli parabola $n < 0$, turli tartibdagi parabolalar

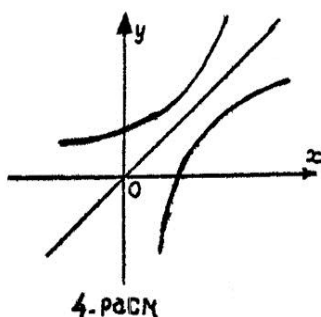
2) Ko'rsatkichli funksiya: $y = a^x$, bu yerda $a \neq 1$ - musbat o'zgarmas son ($a > 0, a \neq 1$).



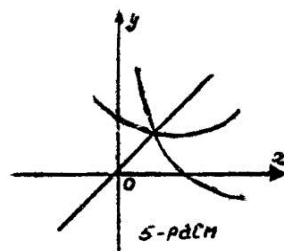
Ko'rsatkichli funksiyaning aniqlanish sohasi $]-\infty, +\infty[$ dan iborat. Agar $0 < a < 1$ bo'lsa, u holda $y = a^x$ funksiya qat'iy kamayuvchi.

3) Logarifmik funksiya. Ko'rsatkichli funksiya $y = a^x$ ga teskari funksiya a asosga ko'ra logarifmik funksiya deyiladi va $x = \log_a y$ deb yoziladi.

x ni y bilan almashtirilsa, $y = \log_a x$ hosil bo'ladi, bu yerda $a \neq 1, a > 0$. Boshqacha aytganda $y = \log_a x$ sonini hosil qilish uchun a sonini ko'tarish kerak bo'lgan daraja ko'rsatkichi u bo'lib, $a^u = x$ deb tushuniladi.



Logarifmik funksiyaning asosiy xossalari: 1^0 . Logarifmik funksiya faqat $]0, +\infty[$ interval-da aniqlangan, ya'ni haqiqiy sonlar



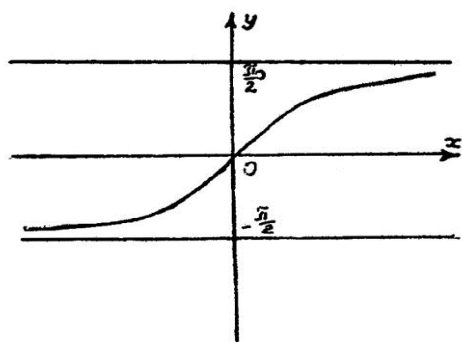
sohasida faqat musbat qiymatlar uchun aniqlanadi, ya'ni manfiy sonning logarifmi bo'lmaydi. Uning grafigi 0 y o'qining o'ng tomonida joylashgan.

2⁰. Bir sonning logarifmi o ga teng: $\log_a 1 = 0$. Asosning logarifm 1 ga teng $\log_a a = 1$.

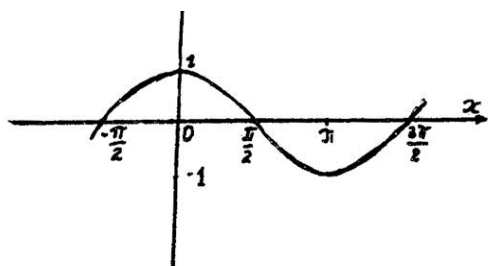
3⁰. Musbat sonlar ko'paytmasining logarifmi ko'paytuvchilar logarifmlarining yig'indisiga teng:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

4) Trigonometrik funksiyalar. To'g'ri burchakli uchburchak turli tomonlarining nisbat-lari o'tkir burchakning trigonometrik funksiyalarini beradi.

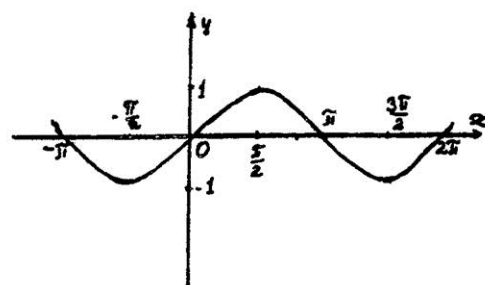


12-рasm



7-рasm

$f(x) = \sin x$ bu
funksiyaning
sinusoida, u
koordinata
boshiga nisbatan
simmetrik.



6-рasm

$f(x) = \cos x$ grafigi kosinusoida bo'lib, u ordinata o'qiga nisbatan simmetrik. Uning grafigini sinusoida o'x o'qi bo'yicha chapga $\frac{\pi}{2}$

surish bilan hosil qilish umkin.

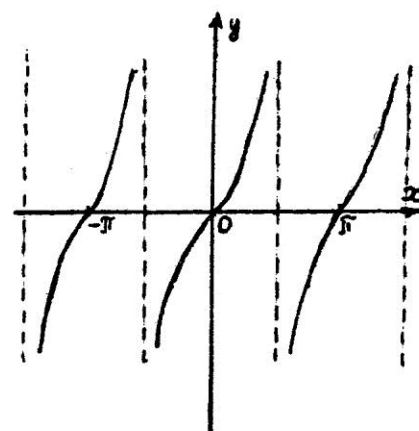
y funksiyalar uchun:

1⁰. aniqlanish sohasi $]-\infty; +\infty[$ intervaldan iborat.

2⁰. $[-1;1]$ oraliq $\sin x$ va $\cos x$ lar uchun qiymatlar to'plami bo'ladi, ya'ni $|\sin x| \leq 1$ va $|\cos x| \leq 1$, ular chegaralangan.

3⁰. Bular davriy funksiya va davri 2π ga teng, ya'ni

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x; \cos(x + 2\pi) = \cos x$$



8-рasm

4⁰. $\sin(-x) = -\sin x$ -toq funksiya

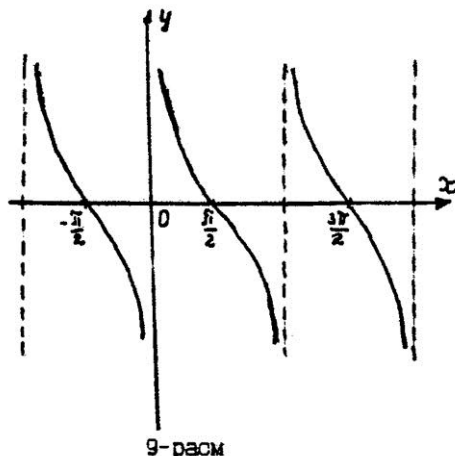
$\cos(-x) = \cos x$ -juft funksiya

5. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ lar ham toq funksiyalardir. Bular ham davriy funksiyalar

bo'lib, davri π ga teng, ya'ni

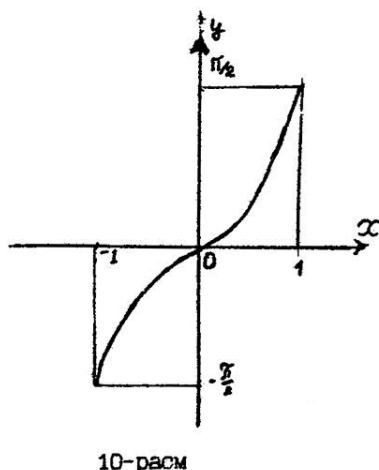
$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \quad , \quad \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$$

Bu funksiyalar grafigi tangensoida va kotangensoida bo'lib, ular koordinata boshiga nisbatan simmetrik.



5) Teskari trigonometrik funksiyalar

a) $y = \arcsin x$. Bu funksiya $[-1;1]$ oraliqda

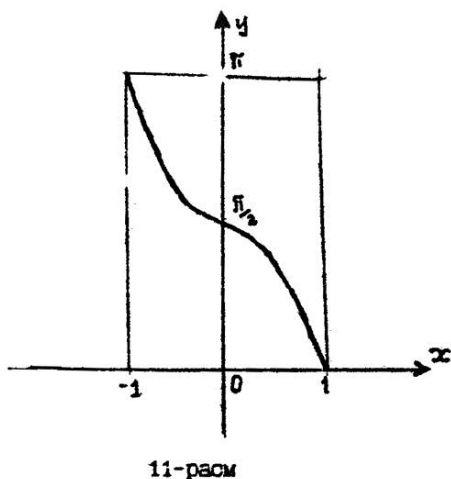


monoton

bo'lib, $[-\pi/2; +\pi/2]$ qiymatlar sohasidagi har bir qiymatni bir martadan qabul qilib chiqadi. Demak, bu funksiya $[-\pi/2; +\pi/2]$ sohada teskarilanuvchi funksiya bo'lib, unga teskari funksiya $x = \arcsin y$ bo'ladi. Agar x va y lar o'zni almashtirilsa $y = \arcsin x$ teskari trigonometrik

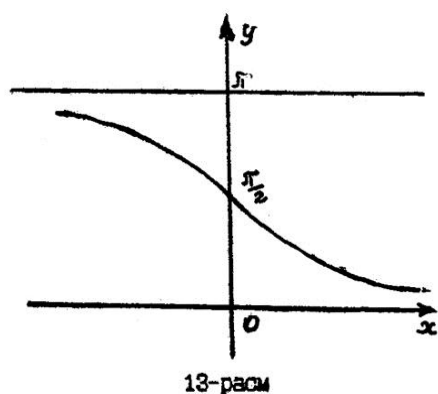
funksiya hosil bo'ladi.

$f(-x) = -f(x)$ shart bajarilgani uchun bu funksiya toqdir. Bu funksiyaning grafigi $y = \sin x$ ning $[-\pi/2; +\pi/2]$ oraliqdagi grafigini $y = x$ to'g'ri chizig'iga nisbatan sim-metrik yasash bilan hosil qilinadi.



b) $y = \arccos x$ funksiya. $[0; \pi]$ oraliqda $y = \cos x$ funksiya monoton bo'lib, $[-1;1]$ qiymatlar sohasidagi har bir qiymatiga bir martadan qabul qilib chiqadi. Demak, bu funksiya $[0; \pi]$ sohada teskarilanuvchi funksiya bo'lib, unga almashtirilsa, $y = \arccos x$ bo'ladi. Agar x va y

lar o'zni almashtirilsa, $y = \arccos x$ teskari trigonometrik funksiya hosil bo'la-di. Bu funksiya toq ham emas, juft ham emas. Bu funksiya grafigi $y = \cos x$ ning $[0; \pi]$ oraliqdagi grafigini $y = x$ to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetrik yasash bilan hosil qilinadi.



c) $y = \arctg x$ funksiya. U $[-\pi/2; +\pi/2]$ oraliqda $y = \tg x$ teskari funksiya $x = \arctg y$ bo'lib, bu yerda x va y lar o'zni almashtirilsa quyidagi $y = \arctg x$ ko'rinishda yoziladi. Bu funksiya toq funksiya bo'lib, grafigi $y = \tg x$ ning $[-\pi/2; \pi/2]$ oraliqda $y = x$ to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetrik yasash bilan qilinadi.

d) $y = \text{arccotg} x$ funksiya. U $[0; \pi]$ oraliqda $y = \text{ctg} x$ ga teskari funksiya $x = \text{arccotg} y$ mavjud bo'lib, bu yerda x va y lar o'zni almashtirilsa, quyidagi $y = \text{arccotg} x$ ko'rinishda yoziladi. Bu funksiyaning grafigi $y = \text{ctg} x$ ning $[0; \pi]$ oraliqda chizilgan grafigini $y = x$ to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetrik yasash yasash bilan hosil qilinadi.

Baho	Xato	Teskari elementar funksiya	elementar funksiya	Misollar
				$f(x) = \sin x$ $f(x) = \arcsin x$ $f(x) = x^2 \cdot \text{ctg} x$ $f(x) = 3x^2 \cos x$ $f(x) = x^3 \text{tg} x$ $f(x) = x^2 + x^3 \text{tg} x$ $f(x) = \text{arctg} x$

				$f(x) = \sqrt{x^3}$ $f(x) = \sin 2x^2$ $f(x) = x $ $f(x) = 3x^2 + 4$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ $f(x) = \sin x \cos x + x$ $f(x) = 4x^2 \operatorname{tg} x$ $f(x) = x^5$
--	--	--	--	--

3. Funksiya limiti. $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklar. Ajoyib limitlar.

Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Funksiya limiti asosiy tushunchalardan biri. Aniqmasliklarni turlari va ularni yechish usullari o'rganish muhim ahamiyatga ega.

Vazifalar: Talabalarni Funksiya limiti, aniqmasliklarni turlari va ularni yechish usullari bilan tanishtirish.

Talaba bilishi lozim:

- Funksiya limiti.
- Aniqmasliklarni turlari.
- Aniqmasliklarni yechish usullari.

Talaba bajara olishi lozim: Funksiya limiti va funksiyaning uzluksizligini aniqlay olishi kerak. Aniqmasliklarni turlari va ularni yechish usullarini o'rganishlari kerak.

Motivasiya: Miqdorlar orasidagi bog'lanishlarni o'rganishda turli aniqmasliklarni yechishga to'g'ri keladi. Jarayonni kechishini to'g'ri talqin qilish uchun bu aniqmasliklarni to'g'ri yechish kerak bo'ladi.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Maxsus fanlardagi turli kattaliklar orasidagi bog'lanishlar orasidagi aniqmasliklarni to'g'ri yechish.

Mashg'ulotning mazmuni: Funksiya limiti. Aniqmasliklarni turlari. Ularni yechish usullari.

Nazariy qism:

Ta'rif: x argument x_0 nuqtaga intilganda uning funksiyasi $f(x)$ biror A soniga intilsa, A soni $y = f(x)$ funksiyasining x_0 nuqtadagi limiti deyiladi va u

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada aniqlangan bo'lsa, u holda $y(x_0)$ ifoda funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati bo'ladi. Agarda funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti A , shu x_0 nuqtadagi funksiya qiymatiga teng bo'lsa, ya'ni

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa, shu x_0 nuqtada funksiya uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning limiti haqidagi teoremlar:

1. O'zgarmas $y = C$ funksiyaning limiti shu o'zgarmasning o'ziga teng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

3. Funksiyalar yig'indisining (ayirmasining) limiti shu funksiyalar limitlarining yig'indisi (ayirmasiga) teng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \pm \dots \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

4. Funksiyalar ko'paytmasining limiti shu funksiyalar limitlarinng ko'paytmasiga teng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Natija: Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = A^n$ bo'ladi,

$A \geq 0$ da $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = A^{1/n}$ bo'ladi.

5. Agar bo'luvchi $f_2(x)$ ning limiti 0 ga teng bo'lmasa, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ikki funksiya nisbatining limiti shu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)}$$

Misollar. Quyidagi limitlarni hisoblang

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 5)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 3x + \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 6$$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 1 + 1 + 2 = 4$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{x}{\sin x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} x}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x} = \frac{\pi/6}{1/2} = \frac{\pi}{3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 10} (x^2 \cdot \lg x) = \lim_{x \rightarrow 10} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 10} \lg x = 100 \cdot 1 = 100$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = (\text{kasrning surat mahrajini } (x-1) \text{ bo'lamiz}) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

6. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x - 6}$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x - 6} = (\text{kasrni surat mahrajini suratining qo'shmasiga ko'paytiramiz}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x-2} - 2)(\sqrt{x-2} + 2)}{(x-6)(\sqrt{x-2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-2-4}{(x-6)(\sqrt{x-2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x-2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{\sqrt{x-2} + 2} = \frac{1}{\sqrt{6-2} + 2} = \frac{1}{4}$$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x + 3}{3x^3 + 2x^2 - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x + 3}{3x^3 + 2x^2 - 1} = (\text{kasrning surat mahrajini } x \text{ ning eng yuqori darajasiga bo'linadi}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{x^3}{x^3} - 4 \frac{x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{3 \frac{x^3}{x^3} + 2 \frac{x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3}$$

Ish sharti.	I -guruh	II - guruh	III - guruh
$\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi limitga oid 5 ta misol			
$\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi limitga oid 5 ta misol			
Misollar farqi			

Amaliy mashg'ulotlar uchun mashqlar.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 7x + 6)$ javob: 3

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 6x + 4}$ javob: 2

3. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6}$ javob: $\frac{4}{5}$

4. $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^2 - 1}{z + 1}$ javob: -2

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ javob: 5

6. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$ javob: $\frac{1}{4}$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x-2}$$

$$\text{javob: } -\frac{1}{6}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2}}{x}$$

$$\text{javob: } -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$$

$$\text{javob: } -2$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$$

$$\text{javob: } \frac{1}{4}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 25}$$

$$\text{javob: } -\frac{1}{40}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+9x} - 1}{x}$$

$$\text{javob: } 2$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 5}{3x^2 + 2x + 6}$$

$$\text{javob: } \frac{1}{3}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - x - 12x^2}{3x^2 + 2x + 9}$$

$$\text{javob: } -4$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{1-x+3x^2}$$

$$\text{javob: } 0$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{5x^2 + x + 7}$$

$$\text{javob: } \frac{1}{5}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 5x}{2x+1}$$

$$\text{javob: } -\frac{5}{2}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 5x + 1}{3 + 14x^2 + 2x}$$

$$\text{javob: } \frac{1}{2}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x^2+2}$$

$$\text{javob: } 0$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+1} - x}{3x+5}$$

$$\text{javob: } \frac{1}{3}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

$$21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + 6x - 20}.$$

$$\text{javob:}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 2x - 15}.$$

$$\text{javob:}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{-x^2 - 2x + 15}.$$

$$\text{javob: } \frac{7}{8}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}. \quad \text{javob: } \frac{3}{2}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9x + 18}. \quad \text{javob: } -\frac{4}{3}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 6x - 7}. \quad \text{javob: } \frac{3}{4}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 10x + 5}{3x^2 + 2x + 6}. \quad \text{javob: } -\frac{4}{11}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}. \quad \text{javob: } \frac{3}{4}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{3 - x}. \quad \text{javob: } -6$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 1}. \quad \text{javob: } \frac{7}{2}$$

Ba'zi bir muhim limitlar:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{yoki} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e \quad \text{yoki} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

Limitlarning yuqoridagi teoremlardan foydalanib, ba'zi funksiyalar limitlarini hisoblaymiz:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \sin 4x}{4 \cdot x} = (\text{ajoyib limitga ko'ra}) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x = \left(\begin{array}{c} \text{belgilash kiritamiz} \\ t = 7x \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{t}\right)^{7t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right)^7 = e^7$$

Amaliy mashg'ulotlar uchun mashqlar.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad \text{javob: } 3$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad \text{javob: } 1$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan x} \quad \text{javob: } 5$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} \quad \text{javob: } 2/3$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 2x - 2\sin x}{x} \quad \text{javob: } 4$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+9} - 3} \quad \text{javob: } 6$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} \quad \text{javob: } 2$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{x+1} - 1} \quad \text{javob: } 14$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1} \quad \text{javob: } e$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{10}{x} \right)^x \quad \text{javob: } e^{10}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-2} \right)^x \quad \text{javob: } e^7$$

Adabiyotlar:

1. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent " " 2013y
2. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. " " 2014 y
3. Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent "O'qituvchi", 1992 y
4. Fixtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
5. Lobatskaya N. L. "Osnovi visshey matematiki" Moskva 1987 g

“CHARXPALAK” TEXNOLOGIYASI.

“CHARXPALAK” texnologiyasi talabalarda mantiqni shakllantirishga imkoniyat yaratadi; xotirani, g’oyalarni, fikrlarni dalillarni bayon qilish ko’nikmalarini rivojlantiradi.

Bunda talabalar o’zlarining kichik guruhlariga berilgan tarqatma materiallarida mavzuga oid bir nechta misollar keltiradilar. So’ngra bu qog’ozlar boshqa guruhlar bilan almashtirilib, ular bir – birining xatosini tuzatadilar va

belgilangan qog'ozlar bir necha marta guruhlarga almashtirilib, yana boshlang'ich holiga qaytariladi. Guruhlarga o'qituvchi to'g'ri javobni o'qiydi, talabalar qog'ozlarida to'g'ri javobni belgilaydilar va ular o'z baholarini o'zlari chiqara oladilar.

Funksiya hosilasi	1-misol	2-misol	3-misol
1. Teskari funksiya hosilasi.			
2. Asosiy elementar funksiya hosilasi.			
3. Murakkab funksiya hosilasi.			
4. Oshkormas funk-siya hosilasi.			
5. Yuqori tartibli hosila			

4. Hosilaning ta'rifi. Uning geometrik va mexanik ma'nosi. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari

Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Funksiyaning hosilasi. Hosilaning mexanik va geometric ma'nolari. Hosilaolish qoidalari. Sodda funksiyalarning hosila jadvali bilan tanishtirish.

Vazifalar: Funksiyaning hosilasi. Hosilaning mexanik va geometric ma'nolari. Hosila olish qoidalari. Sodda funksiyalarning hosila jadvali bilan tanishtirish.

Talaba bilishi lozim:

- Funksiyaning hosilasining ta'rifini.
- Hosilaning mexanik va geometric ma'nosini
- Hosila olish qoidalari.

- Sodda funksiyalarning hosila jadvali.

Talaba bajara olishi lozim: Funksiyaning hosilasini ta'rifini. Hosilaning mexanik va geometric ma'nolarini. Hosila olish qoidalari. Sodda funksiyalarning hosila jadvalini o'rganishlari kerak.

Motivasiya: Miqdorlarni asosiy kattaliklarini o'rganishda hosila tushunchasi asosiy o'rinni egallaydi. Miqdorni eng katta qiymati, o'sish oralig'i, kamayish oralig'ini aniqlash jarayonni to'g'ri kechishi haqida ma'lumot beradi.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Kimyo va fizikadagi turli jarayonlarni o'rganishda ishlatiladi.

Mashg'ulotning mazmuni: Funksiyaning hosilasi. Hosilaning mexanik va geometric ma'nolari. Hosila olish qoidalari.

Nazariy qism:

Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining Δx nolga intilganda chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi va y' yoki $y'(x_0)$ yoki $f'(x_0)$ yoki $\frac{dy}{dx}$ yoki $\frac{df}{dx}$ ko'rinishlarda belgilanadi.

Demak ta'rifga ko'ra $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Misollar.

1. $y = f(x) = c = \text{const}$ bo'lsin.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0 \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

2. $y = f(x) = x$ bo'lsin

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1; \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

3. $y = x^2$ funksiyaning $x = 3$ nuqtadagi hosilasini toping;

$$y_0 = 9; \quad y_0 + \Delta y = (3 + \Delta x)^2 = 9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(6 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6 + \Delta x) = 6$$

$$4. y=f(x)=\sqrt{x}, (x>0)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Hosilaning geometrik ma'nosi.

Funksiya hosilasi deb, funksiya grafigining x_0 nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentiga aytiladi:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

Agar $M_0(x_0, y_0)$ ya'ni $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtaga o'tkazilgan urinma tenglamasini $y=kx+b$ ko'rinishda olsak, urinma shu $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtadan o'tgani uchun $f(x_0)=kx_0+b \Rightarrow b=f(x_0)-kx_0$.

Bu holda

$$y=kx+b \Rightarrow y=kx+f(x_0)-kx_0 \Rightarrow y=f(x_0)+k(x-x_0) \Rightarrow y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \text{ -urinma tenglamasi.}$$

Misol. $y=\frac{1}{x}$ giperbolaning $x=x_0=1$ ya'ni $(1;1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

$$y(x_0)=f(1)=1; f'(x)=-\frac{1}{x^2}; f'(1)=-1$$

$$y=1-1(x-1) \Rightarrow y=2-x.$$

Hosilaning mexanik ma'nosi.

Hosilaning mexanik ma'nosi harakatlanayotgan moddiy nuqtaning ma'lum momentdagi oniy tezligini ifodaydi.

Teskari funksiyaning hosilasi.

Teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremani isbotsiz keltirib o'taylik.

1-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu kesmada o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, bu funksiya teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo'ladi. $y=f(x)$ ga teskari bo'lgan funksiyaning topish uchun tenglamani x ga nisbatan yechish kerak.

2-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiyaga teskari bo'lgan $x = \varphi(y)$ funksiya ham shu nuqtada $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ hosilaga ega bo'ladi.

Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning hosilasi.

Teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $X \in (a, b)$ nuqtada $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va bo'linmasi shu x nuqtada hosilaga ega bo'lib, quyidagi formulalar bo'yicha topiladi:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0)$$

Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari.

1. $y = x^n$ ($x > 0$) darajali funksiyamng hosilasini topaylik. Funksiya hosilasining

$$\text{ta'rifiga ko'ra } \Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1 \right],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1 \right]}{\Delta x} = \frac{x^{n-1} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1 \right]}{\frac{\Delta x}{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1 \right]}{\frac{\Delta x}{x}} = n \text{ ajoyib limitni e'tiborga olsak,}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1 \right]}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot x^{n-1} = nx^{n-1} \quad y' = (x^n)' = nx^{n-1}.$$

2. $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) ko'rsatkichli funksiyaning hosiJasi.

$$\Delta y = a^{\Delta x + x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1); \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ ajoyib limitga ko'ra} \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a \quad \text{Demak, } y' = (a^x)' = a^x \ln a$$

3. $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) logarifmik funksiyaning hosilasi ham $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ formula bilan topiladi.

Agar $\log_a e = \frac{1}{\ln e}$; $\log_e a = \ln a$; $\log_e x = \ln x$; $\log_x e = \frac{1}{\ln x}$. ekanligini

e'tiborga olsak $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ kelib chiqadi.

Agar $a = e$ desak $\ln a = \ln e = 1$ bo'lib, $y = \ln x$; $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ bo'ladi.

4. $y = \sin x$ funksiyaning hosilasini topish uchun x ga Δx orttirma bersak y ham Δy orttirma olib $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left[\frac{(2x + \Delta x)}{2}\right]$,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \right] = \cos x. \quad y' = (\sin x)' = \cos x$$

xuddi shuningdek o'rta maktab dasturidan bizga ma'lum bo'lgan boshqa trigonometrik funksiyalarning hosilalarini hisoblash mumkin:

$$(\cos x)' = -\sin x; \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5. Endi $y = \arcsin x$ teskari trigonometrik funksiyaning hosilasini hisoblashni ko'raylik.

$y = \arcsin x$ funksiya $x = \sin y$ funksiyaga teskari funksiya bo'lgani uchun, teskari funksiyalarning hosilalariga ko'ra

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (-1 < x < 1).$$

Xuddi shuningdek $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arccctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

6. $y = \ln x$ bo'lsa, $y' \cdot \frac{1}{x} \cdot x' = \frac{1}{x}$; Agar $y = \ln u$ bo'lib $u = f(x)$

bo'lsa, $y' = (ln u)' = \frac{u'}{u} \cdot \frac{f(x)'}{f(x)}$;

Agar $y = u^{v(x)}(x)$ bo'lsa, $\ln y = v \ln u$ - bundan hosila olsak,

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}, \quad y' = u^v \left[v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right].$$

Misollar yechish namunasi:

1. $y = 3x^2 + 4\sqrt{x} + 5\cos x - 4$ $y' = ?$

$$y' = 3 \cdot 2x^{2-1} + 4 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + 5 \cdot (-\sin x) = 6x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 5\sin x$$

2. $y = 3x^2 \sin x$ $y' = ?$

$$y' = 6x \cdot \sin x + 3x^2 \cdot \cos x = 3x(2\sin x + x \cos x)$$

3. $y = \frac{x^2}{\cos x}$ $y' = ?$

$$y' = \frac{2x \cdot \cos x - x^2 (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{x(2\cos x + x \sin x)}{\cos^2 x}$$

Adabiyotlar

1. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent " " 2013y

2. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. " " 2014 y

3. Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent "O'qituvchi", 1992 y

4. Fikhtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.

5. Lobatskaya N. L. "Osnovi visshey matematiki" Moskva 1987 g
год.

5. Murakkab funksiyaning hosilasi. Oshkormas funksiya hosilasi.
Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Oshkormas va murakkab funksiyalar haqida tushuncha hosil qilish va ularning hosilasini olish qoidalari bilan tanishtirish.

Vazifalar: Oshkormas va murakkab funksiyalar haqida tushuncha hosil qilish va ularning hosilasini olish qoidalari bilan tanishtirish. Misollar yordamida tushuntirish.

Talaba bilishi lozim:

- Oshkormas funksiyaning hosilasini olishni.
- murakkab funksiyalar hosilasini olishni
- Yuqori tartibli hosilalarni topishni.

Talaba bajara olishi lozim: Oshkormas va murakkab funksiyalar haqida tushuncha hosil qilib va ularning hosilasini olishni bilishlari kerak.

Motivasiya: Ba'zi jarayonlarni kechishi nostandard ko'rinishda bo'lib, ularni miqdoriy xarakteristikasini o'rganishda oshkormas yoki murakkab funksiyalarga duch kelamiz. Bunday jarayonlarni to'g'ri talqin qilishda bu mavzuni o'rni katta.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Kimyo va fizik jarayonlarni o'rganishda ishlatiladi.

Mashg'ulotning mazmuni: Oshkormas va murakkab funksiyaning hosilasi. Yuqori tartibli hosilalar.

Nazariy qism:

Agar y o'zgaruvchi u o'zgaruvchining $y=f(u)$ funksiyasi bo'lib, u esa o'z navbatida x ning funksiyasi $u=\varphi(x)$ bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ funksiyani x ning murakkab funksiyasi deyiladi.

Teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya o'zgaruvchi x nuqtada $u'_x=\varphi'(x)$ hosilaga, $y=f(u)$ funksiya esa o'zgaruvchi u bo'yicha $y'_u=f'(u)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya ham shu x nuqtada

$$y'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'(x)$$

hosilaga ega bo'ladi.

Oshkormas funksiya hosilasi.

$F(x, y) = 0$ ko'rinishida berilgan oshkormas funksiyaning hosilasini hisoblashda, tenglikning chap tomonini x argumentning murakkab funksiyasi deb qaraladi va tenglikning ikkala tomonidan hosila olinadi. Bunda y ning murakkab funksiyasi deb qaraymiz.

Misol. Oshkormas ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini hisoblang. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Yechish. Tenglikning ikkala tomonidan x bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0, \quad \text{bundan,} \quad y'_x = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Yuqori tartibli hosila.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi $f'(x)$ umuman aytganda yana x ning funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun undan x bo'yicha hosila olsak, hosil bo'lgan hosilaga berilgan funksiya olingan ikkinchi tartibli hosila deyiladi va y'' yoki $f''(x)$ lar bilan belgilanadi. Shunday qilib $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi

$$y'' = f''(x) = (y')' = (f'(x))'.$$

$y'' = f''(x)$ ikkinchi tartibli hosiladan olingan hosilaga $y=f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi deyiladi:

$$y''' = f'''(x) = (f''(x))'$$

Shu jarayonni n marta davom ettirsak $y=f(x)$ funksiyaning n tartibli hosilasi $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (y^{(n-1)})' = (f^{(n-1)}(x))'$ ko'rinishda bo'ladi.

Misol. $y=f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6x - 8$

$$y' = 8x^3 + 9x^2 - 10x + 6$$

$$y'' = 24x^2 + 18x - 10$$

$$y''' = 48x + 18$$

Agar $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lib, $u^{(n)}(x)$, $v^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$1. (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)} \quad (C - o'zgarmas \text{ son})$$

$$2. (u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$$

$$3. (uv)^{(n)} = u^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)u^{(n-2)}v''}{1 \cdot 2} + \dots + uv^{(n)}.$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglikka Leybnis formulasi deyiladi.

Hosilalar jadvali

№	Funksiya	Hosilasi
1	$y = C$	$C' = 0$
2	$y = x$	$x' = 1$
3	$y = u + v - \omega$	$(u + v - \omega)' = u' + v' - \omega'$
4	$y = uv$	$(uv)' = u'v + v'u$
5	$y = Cu$	$(Cu)' = C \cdot u'$
6	$y = x^n$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
7	$y = u^n$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
8	$y = \frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
9	$y = \frac{u}{C}$	$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$
10	$y = \frac{C}{v}$	$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$
11	$y = \sqrt{u}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
12	$y = f[\phi(x)]; \phi(x) = u$	$y' = f'_u(u) \phi'_x(x)$
13	$y = \log_a x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$
14	$y = \log_a u$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$
15	$y = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$y = \ln u$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

17	$y = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
18	$y = a^u$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
19	$y = e^x$	$(e^x)' = e^x$
20	$y = e^u$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
21	$y = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
22	$y = \sin u$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
23	$y = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
24	$y = \cos u$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
25	$y = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
26	$y = \operatorname{tg} u$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
27	$y = \operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
28	$y = \operatorname{ctg} u$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
29	$y = \arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
30	$y = \arcsin u$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
31	$y = \arccos x$	$(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
32	$y = \arccos u$	$(\arccos u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
33	$y = \operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
34	$y = \operatorname{arctg} u$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
35	$y = \operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
36	$y = \operatorname{arcctg} u$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$

Amaliy mashg'ulotlar uchun mashqlar.

1. $y = \sqrt{x} + \frac{2}{x} - 2.$

javob: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$

2. $y = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 2.$

javob: $y' = -\frac{6}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

3. $y = \frac{1}{x^2} - x + 1.$

javob: $y' = -\frac{2}{x^3} - 1$

4. $y = x^4 - 3x^2 + 1.$

javob: $y' = 4x^3 - 6x$

6. $y = \cos x + 7x.$

javob: $y' = -\sin x + 7$

7. $y = \operatorname{tg} x - \ln x.$

javob: $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x}$

8. $y = \sin x - \ln x.$

javob: $y' = \cos x - \frac{1}{x}$

9. $y = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sqrt{x}}.$

javob: $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

10. $y = e^x + 3x^2.$

javob: $y' = e^x + 6x$

11. $y = x^2 + 3x^3 - 1.$

javob: $y' = 2x + 9x^2$

12. $y = 2^x + \sin x.$

javob: $y' = 2^x \ln 2 + \cos x$

13. $y = 1 - \sqrt{x} + \ln x.$

javob: $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

14. $y = \cos x - \frac{1}{x} + 2.$

javob: $y' = -\sin x + \frac{1}{x^2}$

15. $y = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}.$

javob: $y' = -\frac{3}{2\sqrt{x^3}} + \frac{2}{x^3}$

16. $y = \sin x - 3^x + \frac{1}{x^2}.$

javob: $y' = \cos x - 3^x \ln 3 - \frac{2}{x^3}$

17. $y = \sin x - e^x + \frac{2}{x}.$

javob: $y' = \cos x - e^x - \frac{2}{x^2}$

18. $y = \sqrt[3]{x^2} - e^x.$

javob: $y' = \frac{2}{3\sqrt{x}} - e^x$

19. $y = \frac{1}{x^3} - e^x.$

javob: $y' = -\frac{3}{x^4} - e^x$

$$20. y = \ln x + \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{javob: } y' = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$$

$$21. y = 3^x - \frac{1}{x} + 1.$$

$$\text{javob: } y' = 3^x \ln 3 + \frac{1}{x^2}$$

$$22. y = e^x - \sin x.$$

$$\text{javob: } y' = e^x - \cos x$$

$$23. y = 7 \ln x - \frac{1}{x}.$$

$$\text{javob: } y' = \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$24. y = 3x^2 \sin x$$

$$\text{javob: } y' = 3x(2 \sin x + x \cos x)$$

$$25. y = 3x^2(e^x - 1)$$

$$\text{javob: } y' = 6x(e^x - 1) + 3x^2 e^x$$

$$26. y = \frac{5x^7}{\cos x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{5x^6(7 \cos x + x \sin x)}{\cos^2 x}$$

$$27. y = 3x^3(\sin x + 1)$$

$$\text{javob: } y' = 9x^2(\sin x + 1) + 3x^3 \cos x$$

$$28. y = 7^x \operatorname{tg} 3x$$

$$\text{javob: } y' = 7^x \ln 7 \operatorname{tg} 3x + 7^x \frac{3}{\cos^2 x}$$

$$29. y = \frac{5x^2 - 2}{\cos x + 5}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{10x(\cos x + 5) + (5x^2 - 2)\sin x}{(\cos x + 5)^2}$$

$$30. y = \frac{7 \ln x}{x^3}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{7(1 - 3 \ln x)}{x^4}$$

$$31. y = 3 \cos(5x^2 - 1)$$

$$\text{javob: } y' = -30x \sin(5x^2 - 1)$$

$$32. y = 2 \ln(5x^3 - 4)$$

$$\text{javob: } y' = \frac{30x^2}{5x^3 - 4}$$

$$33. y = \operatorname{tg}^3(5x - 1)$$

$$\text{javob: } y' = 15 \operatorname{tg}^2(5x - 1) \frac{1}{\cos^2(5x - 1)}$$

$$34. y = \operatorname{ctg}^2(3x - 6)$$

$$\text{javob: } y' = 2 \operatorname{ctg}(3x - 6) \left(\frac{1}{\sin^2(3x - 6)} \right) 3$$

$$35. y = 5 \sin^2(4x + x^2)$$

$$\text{javob: } y' = 5(4 + 2x) \sin 2(4x + x^2)$$

$$36. y = 2 \cos^7(3 - 2x)$$

$$\text{javob: } y' = 28 \cos^6(3 - 2x) \sin(3 - 2x)$$

$$37. y = 5 \operatorname{tg}^2 6x$$

$$\text{javob: } y' = 60 \operatorname{tg} 6x \frac{1}{\cos^2 6x}$$

$$38. y = \ln(1 - 3x)$$

$$\text{javob: } y' = -\frac{3}{1 - 3x}$$

$$39. y = \ln(\cos x - 1)$$

$$\text{javob: } y' = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$40. y = \sin^2(3x^3 - 1)$$

$$\text{javob: } y' = 9x^2 \sin 2(3x^3 - 1)$$

$$41. y = 6 \cos(3x^2 - 7x)$$

$$\text{javob: } y' = 6(7 - 6x) \sin(3x^2 - 7x)$$

$$42. y = (5x^2 - 6x + 4)^3$$

$$\text{javob: } y' = 3(5x^2 - 6x + 4)^2 (30x - 18)$$

$$43. y = e^{4x^2-1}$$

$$\text{javob: } y' = e^{4x^2-1} 8x$$

$$44. y = 8 \log_2 3x$$

$$\text{javob: } y' = \frac{8}{x \ln 2}$$

$$45. y = 9 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{javob: } y' = -9xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$46. y = 16 \sin(2x - 4)$$

$$\text{javob: } y' = 32 \cos(2x - 4)$$

$$47. y = 5 \sin^3(1 - 2x)$$

$$\text{javob: } y' = -30 \sin^2(1 - 2x) \cos(1 - 2x)$$

$$48. y = 2 \cos(3x^2 - 4)$$

$$\text{javob: } y' = -12x \sin(3x^2 - 4)$$

$$49. y = 3 \operatorname{tg}(6x^2 - 1)$$

$$\text{javob: } y' = \frac{36x}{\cos^2(6x^2 - 1)}$$

$$50. y = 2 \sin^2(5x - 1)$$

$$\text{javob: } y' = 20 \sin 2(5x - 1)$$

Mustaqil yechish uchun misollar

$$51. y = 3x^2(\sin x + 8x)$$

$$\text{javob: } y' = 6x(\sin x + 8x) + 3x^2(\cos x + 8)$$

$$52. y = x^2 \operatorname{ctgx}$$

$$\text{javob: } y' = 2x \operatorname{ctgx} - \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$53. y = \frac{5x^2 - 8}{\cos x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{10x \cos x + (5x^2 - 8) \sin x}{\cos^2 x}$$

$$54. y = 2x^3 \cos x$$

$$\text{javob: } y' = 2x^2(3 \cos x - x \sin x)$$

$$55. y = 3^x \sin x$$

$$\text{javob: } y' = 3^x (\ln 3 \sin x + \cos x)$$

$$56. y = 5x^3 \sin x$$

$$\text{javob: } y' = 5x^2(3 \sin x + x \cos x)$$

$$57. y = \frac{5^x + 1}{x + 2}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{5^x \ln 5(x + 2) + (5^x + 1)}{(x + 2)^2}$$

$$58. y = 4x^2 e^x$$

$$\text{javob: } y' = 4xe^x(2 + x)$$

$$59. y = 7^x(\sin x + 2)$$

$$\text{javob: } y' = 7^x(\ln 7 \cdot (\sin x + 2) + \cos x)$$

$$60. y = \frac{5x^2 + 2x}{\cos x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{(10x + 2) \cos x + (5x^2 + 2x) \sin x}{\cos^2 x}$$

$$61. y = \frac{2x^3}{\cos x - 4}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{6x^2(\cos x - 4) + 2x^3 \sin x}{(\cos x - 4)^2}$$

$$62. y = \frac{2x^3 - 2x}{\sin x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{(6x^2 - 2)\sin x - (2x^3 - 2x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$63. y = (3x + 1) \sin x$$

$$\text{javob: } y' = 3 \sin x + (3x + 1) \cos x$$

$$64. y = \frac{5x^3 - 1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{15x^2 \operatorname{tg} x - \frac{(5x^3 - 1)}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$65. y = \frac{5 + x^2}{\sin x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{2x \sin x - (5 + x^2) \cos x}{\sin^2 x}$$

$$66. f(x) = \frac{x^4}{4 + 3x^2 - 6x}$$

$$\text{javob: } f'(x) = \frac{4x^3 \cdot (4 + 3x^2 - 6x) - 6x^4(x - 1)}{(4 + 3x^2 - 6x)^2}$$

$$67. s = \frac{v_0 t + at^2}{2}$$

$$\text{javob: } s' = \frac{v_0}{2} + at$$

$$68. y = 3x^{-4} + 2x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}$$

$$\text{javob: } f'(x) = -\frac{12}{x^5} - \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

$$69. y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{javob: } f'(x) = -\frac{3}{2^4 \sqrt{x^7}} - \frac{5}{4\sqrt{x^3}}$$

$$70. y = (3x + 2)(x^2 + 4x - 1)$$

$$\text{javob: } f'(x) = 3 \cdot (x^2 + 4x - 1) + (3x + 2)(2x + 4)$$

$$71. y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$$

$$\text{javob: } f'(x) = 12x^2(1 + 2x^2) + (1 + 4x^3) \cdot 4x$$

$$72. y = \frac{5x}{x + 1}$$

$$\text{javob: } f'(x) = \frac{5}{(x + 1)^2}$$

$$73. y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

$$\text{javob: } f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + x^{\frac{1}{2}}) - 1 - x^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}})}{(1 + x^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$74. f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$$

$$\text{javob: } f'(x) = \frac{1 - \ln x + 2}{x^2}$$

$$75. y = \frac{7 \ln x}{e^x}$$

$$\text{javob: } f'(x) = \frac{7(1 - x \ln x)}{xe^x}$$

$$76. y = \frac{5x}{\ln x}$$

$$\text{javob: } f'(x) = \frac{5(\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$77. y = x^2(\operatorname{ctg} x - x)$$

$$\text{javob: } f'(x) = 2x \cdot (\operatorname{ctg} x - x) - \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1\right) \cdot x^2$$

$$78. y = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$$

$$\text{javob: } f'(x) = \frac{-\sin x - 2}{(1 + 2 \sin x)^2}$$

$$79. y = \frac{e^x 2^x}{1 + \ln x}$$

$$\text{javob: } f'(x) = \frac{e^x \cdot 2^x (x(1 + \ln 2)(1 + \ln x) - 1)}{x(1 + \ln x)^2}$$

$$80. y = 3x^2 + 2x - 1$$

$$\text{javob: } y' = 6x + 2$$

$$81. y = \sqrt[3]{x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$82. y = (x^3 + 1)(2x - 1)$$

$$\text{javob: } y' = 8x^3 - 3x^2 + 2$$

$$83. y = \frac{x + 2}{x}$$

$$\text{javob: } y' = -\frac{2}{x^2}$$

$$84. y = 2\sqrt{x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$85. y = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{7}{3}\sqrt[6]{x}$$

$$86. y = \frac{2}{x} - 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{javob: } y' = \left(-\frac{2}{x^2} - \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)$$

$$87. y = \frac{x^2 + x - 3}{2x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{x^2 + 3}{2x^2}$$

$$88. y = \frac{2}{2n+1} x^{2n+1} - \frac{1}{2n} x^{2n}$$

$$\text{javob: } y' = 2x^{2n} - x^{2n-1}$$

$$89. y = \frac{x^2}{2-x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}$$

$$90. y = (x^3 - 2x + 5)^4$$

$$\text{javob: } y' = 4(x^3 - 2x + 5)^3(3x^2 - 2)$$

$$91. y = 2 \ln(5x - \sin x)$$

$$\text{javob: } y' = \frac{10 - 2 \cos x}{5x - \sin x}$$

$$92. y = 3 \sin^3(2x^4 + 1)$$

$$\text{javob: } y' = 72x^3 \sin^2(2x^4 + 1) \cos(2x^4 + 1)$$

$$93. y = \sin 4x$$

$$\text{javob: } y' = 4 \cos 4x$$

$$94. y = \cos^3 2x$$

$$\text{javob: } y' = -6 \cos^2 2x \cdot \sin 2x$$

$$95. y = \operatorname{ctg}^2 4x$$

$$\text{javob: } y' = -\frac{8 \operatorname{ctg} 4x}{\sin^2 4x}$$

$$96. y = 4 \operatorname{tg}^2 3x$$

$$\text{javob: } y' = \frac{24 \operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x}$$

$$97. y = x^2 \ln(1 - 2x)$$

$$\text{javob: } y' = 2x(\ln(1 - 2x) - \frac{x}{1 - 2x})$$

$$98. y = 2e^{-\frac{x}{2}+1}$$

$$\text{javob: } y' = -e^{-\frac{x}{2}+1}$$

$$99. y = x^2 \ln(1-3x)$$

$$\text{javob: } y' = 2x \ln(1-3x) - \frac{3x^2}{1-3x}$$

$$100. y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6-3x}\right)$$

$$\text{javob: } y' = -\frac{6\pi}{(6-3x)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6-3x}\right)$$

$$101. y = \frac{e^{3x}}{\cos 2x}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{e^{3x}(3\cos 2x + 2\sin 2x)}{\cos^2 2x}$$

$$102. y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{javob: } y' = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$103. y = \arccos x * \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{javob: } y' = -(1 + \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$104. y = \arctg \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$$

$$\text{javob: } y' = \frac{a+x}{x^2 + a^2}$$

$$105. y = 5tg^4(x^2 + 1)$$

$$\text{javob: } y' = \frac{40xtg^3(x^2 + 1)}{\cos^2(x^2 + 1)}$$

$$106. y = 2^{x^2+x^3}$$

$$\text{javob: } y' = 2^{x^2+x^3} \ln 2 \cdot (2x + 3x^2)$$

$$107. y = \ln(\ln x^2)$$

$$\text{javob: } y' = \frac{2}{x \ln x^2}$$

$$108. y = 5 \sin(3x + 2)$$

$$\text{javob: } y' = 15 \cos(3x + 2)$$

$$109. y = \sin 2^x$$

$$\text{javob: } y' = 2^x \ln 2 \cdot \cos 2^x$$

$$110. x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

$$\text{javob: } y' = -\frac{x}{y}$$

$$112. e^y + x = y$$

$$\text{javob: } y' = \frac{1}{1-e^y}$$

$$113. x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$\text{javob: } y' = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$$

$$114. \cos(xy) = x$$

$$\text{javob: } y' = -\frac{1 + y \sin(xy)}{x \sin(xy)}$$

$$115. 2xy - y^2 = \sin x$$

$$\text{javob: } y' = \frac{\cos x - 2y}{2(x-y)}$$

Adabiyotlar

- 1.Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent “” 2013y
- 2.Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. “” 2014 y
- 3.Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent “O’qituvchi”, 1992 y
- 4.Fixtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
- 5.Lobatskaya N. L. “Osnovi visshey matematiki” Moskva 1987 g

“CHARXPALAK” TEXNOLOGIYASI.

Talabalarning mavzuga tayyorgarlik darajasini tekshirish uchun “CHARXPALAK” metodidan foydalanish. Bunda talabaga mavzuga oid misollar beriladi. Bu misollar funksiyaning qaysi turiga tegishli ekanligini topishga, mantiqiy fikr-lashga, o’tilayotgan mazular asosida ko’p, xilma – xil fikr va ma'lumotlardan kerakligini tanlab olishni o’rgatishga qaratilgan. Buning uchun talabalarga tarqatilgan qog’ozlarda ko’rsatilgan misollar ketma – ketligi aralashtirib beriladi. Talaba esa avval yakka holda, mustaqil ravishda, so’ngra esa kichik guruhda, bu ketma – ketlikni tartibga solib, aynan qaysi turga tegishli ekanini belgilab chiqishi, o’z fikrini boshqalarga yoritib bera olishi lozim. Qog’ozda to’g’ri javob ustuni bo’ladi. O’qituvchi talabaga to’g’ri javobni o’qib eshittiradi, talaba esa to’g’ri javob bilan o’zining javobini solishtirib, to’g’ri javoblar sonini hisoblagan holda, berilgan baholash mezonidan kelib chiqib o’z-o’zini baholaydi.

Baho	Xato	Birinchi tartibli differensial	Yuqori tartibli differensial	Misollar
				$f(x) = \sin^2(x + 1)$ $f(x) = x \operatorname{tg} x$ $f(x) = x^2 \sin x$ $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{ctg} x$

				$f(x) = 3x^2 \cos x$ $f(x) = x^3 \operatorname{tg} x$ $f(x) = x^2 + x^3 \operatorname{tg} x$ $f(x) = \sin 2x^2$ $f(x) = x $ $f(x) = 3x^2 + 4$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ $f(x) = \sin x \cos x + x$ $f(x) = 4x^2 \operatorname{tg} x$ $f(x) = \sin^3 6x$
--	--	--	--	---

6. Funksiyaning to'la tekshirish sxemasi. Funksiyaning differensiali. Yuqori tartibli differensial. Differensialni taqribiy hisoblash.

Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Funksiyaning differensiali. Differensial yordamida taqribiy hisoblash qoidalari bilan tanishtirish. Hosila yordamida funktsiyani to'la tekshirish sxemasini tushuntirish orqali funksiya grafigini chizish. Egri chiziqning asimptotalarini aniqlash va chizish qoidalari bilan tanishtirish. Misollar yordamida tushuntirish

Vazifalar: Funksiyaning differensiali. Differensial yordamida taqribiy hisoblash qoidalari bilan tanishtirish. Misollar yordamida tushuntirish.

Talaba bilishi lozim:

- Funksiyaning differensiali.
- Differensial yordamida taqribiy hisoblash
- Yuqori tartibli differensiallarni hisoblash.

- Funksiyaning ekstremumlarini topishi.
- Funksiyani o`lish va kamayish oralig`ini topish.
- Egilish nuqtasini hisoblash.
- Botqlik va qavariqlik oralig`ini aniqlay olishi kerak.
- Funksiya asimptotalarini aniqlay olishi kerak
- Funksiya grafigini chiza olishi kerak

Talaba bajara olishi lozim: Funksiyaning differensial. Differensial yordamida taqribiy hisoblashni o`rganish. Misollar yecha olish. Funksiyani hosila yordamida tekshirishirib, uni grafigini chiza olishi kerak.

Motivasiya: ma`lum vaqt oralig`ida funksiyaning o`zgarishi jarayonni kechishini to`g`ri talqin qilishda katta ahamiyatga ega. Jarayonlarni grafik ko`rinishda tasvirlash orqali uni qanday keshishini holatini aniqlash mumkin

**Fanlararo va fan ichidagi bog`liqlik:** Kimyo va fizik jarayonlarni o`rganishda ishlatiladi.

**Mashg`ulotning mazmuni:** Funksiyaning differensial. Hosila yordamida funksiyaning to`la tekshirish sxemasi. Egri chiziqning asimptotalari.

**Mashg`ulotning maqsadi:** Funksiyaning differensial. Differensial yordamida taqribiy hisoblash. Hosila yordamida funksiyaning to`la tekshirish va grafigini chizish.

Nazariy qism:

Agar $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx}$ chekli limit mavjud bo`lsa,

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$ ($\Delta x \rightarrow 0$ da $\alpha \rightarrow 0$ cheksiz kichik funksiya) yoki

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha\Delta x}{dy} = 1 + \frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1 + \frac{\alpha}{f'(x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\alpha}{f'(x)}\right) = 1 \quad \Delta y \approx dy \Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

yoki $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$

1. $y = 4x^2 + 2x - 1$ da $x = 2$ va $\Delta x = dx = 0,001$ bo`lsa, Δy ni toping.

Yechish. $\Delta y \approx dy = d(4x^2 + 2x - 1) = (8x + 2) \cdot dx = (8 \cdot 2 + 2) \cdot 0,001 = 18 \cdot 0,001 = 0,018$.

Δy ning haqiqiy qiymati quyidagicha bo'ladi :

$$\Delta y = 4 \cdot 2,001^2 + 2 \cdot 2,001 - 1 - (4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1) = 16,016004 + 3,002 - 19 = 19,018004 - 19 = 0,018004$$

2. Radiusi 20 sm li bir jinsli metal shar qizdirilgach uning radiusi 20,01 sm bo'lib qoldi. Sharning hajmi qanchaga oshganq

Yechish. $R = x = 20\text{sm}$ $\Delta R = \Delta x = dx = 0.01\text{sm}$.

$$V_{shar} = y = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot x^3.$$

$$\Delta y = dy = \dots q$$

$$\Delta y \approx dy = d\left(\frac{4}{3} \pi \cdot x^3\right) = \left(\frac{4}{3} \pi \cdot x^3\right) \cdot dx = dx = \frac{4}{3} \pi \cdot x^2 \cdot dx.$$

$$\Delta y \approx dy = 4\pi \cdot x^2 \cdot dx = 4\pi \cdot 20^2 \cdot 0,01 = 4 \cdot \pi \cdot 4,00(\text{sm}^3) = 16 \cdot \pi(\text{sm}^3).$$

$$\Delta y = \frac{4}{3} \pi \cdot (20,01^3 - 20^3) = \frac{4}{3} \pi \cdot (8012,006 - 8000) = 4 \cdot 4,002 \cdot \pi = 16,008\pi.$$

$$1. d(u + v - \omega) = (u' + v' - \omega') dx = u' dx + v' dx - \omega' dx = u du = v dv - \omega d\omega.$$

$$2. d(u \cdot v) = u du + v dv.$$

$$12. d(\sin x) = \cos x dx.$$

$$3. d(C \cdot u) = C du.$$

$$13. d(\cos x) = -\sin x dx.$$

$$4. d\left(\frac{u}{C}\right) = \frac{du}{C}.$$

$$14. d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$5. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$15. d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$6. dC = 0. (C - \text{o'zgarмас}).$$

$$16. d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7. d(x^n) = nx^{n-1} dx.$$

$$17. d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$8. d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e dx.$$

$$18. d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$9. d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

$$19. d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$10. d(a^x) = a^x \ln a dx.$$

$$20. d f(u) = f'(u) du.$$

$$11. d(e^x) = e^x dx.$$

Misol.

$$\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right); \Delta x = \frac{\pi}{180}; \quad x + \Delta x = 30^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180};$$

$$\sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right); \approx \sin = \frac{\pi}{180} + (\sin x)'_{x=\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,515.$$

Yuqori tartibli differensial.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi $f'(x)$ umuman aytganda yana x ning funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun undan x bo'yicha hosila olsak, hosil bo'lgan hosilaga berilgan funksiya olingan ikkinchi tartibli hosila deyiladi va y'' yoki $f''(x)$ lar bilan belgilanadi. Shunday qilib $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi

$$y''=f''(x)=(y')'=(f'(x))'.$$

$y''=f''(x)$ ikkinchi tartibli hosiladan olingan hosilaga $y=f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi deyiladi:

$$y'''=f'''(x)=(f''(x))'$$

Shu jarayonni n marta davom ettirsak $y=f(x)$ funksiyaning n tartibli hosilasi $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=(y^{(n-1)})'=(f^{(n-1)}(x))'$ ko'rinishda bo'ladi.

Misol. $y=f(x)=2x^4+3x^3-5x^2+6x-8$

$$y'=8x^3+9x^2-10x+6$$

$$y''=24x^2+18x-10$$

$$y'''=48x+18$$

Agar $u(x), v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lib, $u^{(n)}(x), v^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$1. (Cu)^{(n)}=Cu^{(n)} \quad (C-\text{o'zgarmas son})$$

$$2. (u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$$

$$3. (uv)^{(n)}=u^{(n)}+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)u^{(n-2)}v''}{1 \cdot 2} + \dots + uv^{(n)}.$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglikka Leybnis formulasi deyiladi.

Endi yuqori tartibli qosila tushunchasi kabi, yuqori tartibli differensial tushunchasini kiritaylik. Agar $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, uning differensialli $dy=f'(x)dx=y'dx$ formula bilan hisoblanishini ko'rgan edik. Bu yerda x ga faqat $f'(x)$ bog'liq bo'lib, dx bog'liq bo'lmaydi, chunki $dx=\Delta x$ bo'lib argument orttirmasini ifodalaydi. Shuning uchun dy differensialidan yana

differentensial olsak, hosil bo'lgan differentensialga $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differentiali deyiladi va d^2y yoki $d^2f(x)$ lar bilan belgilanadi:

$$d^2y=d(dy)=d(y'dx)=d(y')dx=(y'')dx dx=y''dx^2$$

$$d^2y=y''dx^2$$

$$\text{yoki } d^2y=f''(x)dx^2.$$

Xuddi shuningdek uchinchi, to'rtinchi va xokazo tartibli differentiallarni topish mumkin:

$$d^3y=y'''dx^3, d^4y=y^{IV}dx^4, \dots, d^ny=y^{(n)}dx^n.$$

Misol. $y=4x^5-3x^2+6, \quad d^4y=q$

$$dy=(20x^4-6x)dx, \quad d^2y=(80x^3-6)dx^2, \quad d^3y=240x^2dx^3,$$

$$d^4y=480xdx^4;$$

$y = f(x)$ egri chiziq berilgan, uning $M(x_0; y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini topish talab qilinadi. $M(x_0; y_0)$ dano'tuvchi har qanday to'g'ri chiziq tenglamasi $y - y_0 = k(x - x_0)$ ko'rinishda edi. Bu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ ning urinmasi bo'lgan holda $k = y' = f'(x)$ bo'ladi. Shunday qilib, $M(x_0; y_0)$ nuqtadagi urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$.

Urinish nuqtasi (urinmaga) perpendikulyar bo'lib o'tadigan to'g'ri chiziqqa egri chiziqning shu nuqtadagi *normali* deb ataladi. Normal tenglamasi $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x)} \cdot (x - x_0)$ kabi bo'ladi.

Misol. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipsining absissa 3 bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini toping.

$$\text{Yechish } \left. \begin{array}{l} x=3 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{array} \right\} \frac{3^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{9}{25}; y^2 = \frac{25-9}{25} \cdot 16; y^2 = \frac{16^2}{25}; y = \pm \frac{16}{5} \cdot x=3 \text{ bo'ladigan nuqta } A\left(3; 3\frac{1}{5}\right) \text{ va}$$

$$B\left(3; -3\frac{1}{5}\right) \text{ ekan.}$$

$A\left(3;3\frac{1}{5}\right)$ ni olaylik.

$$b) \left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}\right)' = (1)' \rightarrow \frac{2x}{25} + \frac{2y \cdot y'}{16} = 0; \text{ yoki } \frac{y \cdot y'}{8} = -\frac{2x}{25}; y' = -\frac{16}{25} \cdot \frac{x}{y}; A \text{ nuqtada:}$$

$$y' = -\frac{16}{25} \cdot \frac{3}{16} = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 16}{25 \cdot 16} = -\frac{3}{5}; \text{ v) } y - \frac{16}{25} = -\frac{3}{5}(x - 5); 5y - 16 = -3x + 15 \text{ yoki}$$

$3x + 5y - 31 = 0$. Bu egri chiziqqa $A\left(3;3\frac{1}{5}\right)$ nuqtada urinma tenglamasidir.

g) Normalning tenglamasini topamiz:

$$y - \frac{16}{25} = -\frac{1}{3}(x - 3); y - \frac{16}{5} = \frac{5}{3}(x - 3)$$

$$15y - 48 = 25x - 75; 25x - 15y - 27 = 0.$$

Funksiyaning o'sishi va kamayishi

Bu mavzuda $[a, b]$ kesmaning ichki ($a < x < b$ bo'ladigan) nuqtasida chekli hosilaga ega bo'lgan $y=f(x)$ funksiya xosslarini o'rganamiz.

1- teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o'zgarmas bo'lishi uchun (a, b) oraliqda bo'lishi zarur va yetarlidir.

2-teorema. $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda kamayadigan (o'smaydigan) bo'lishi uchun uning $f'(x)$ hosilasi (a, b) intervalning har bir nuqtasida manfiy (musbat), yani $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] bo'lishi zarur va yetarlidir.

Funksiyaning ekstremumlari

Tarif. Agar x_0 ning yetarlicha kichik atrofidagi hamma nuqtalar uchun $f(x_0) > f(x)$ bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya uchun $x = x_0$ maksimum nuqta deb ataladi; agar x_0 ning yetarlicha kichik atrofidagi hamma nuqtalar uchun $f(x_0) < f(x)$ bo'lsa, $x = x_0$ minimum nuqta deb ataladi.

Funksiyaning yoki maksimumi va minimumi uning ekstremal qiymatlari yoki qisqacha ,*ekstremumlari* deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki , ekstremum tushunchasi funksiyaning lokal (kichik uchastkaga xos) xususiyati ekan.

1-teorema. *Differensiallanuvchi funksiyaning ekstremum nuqtadagi hosilasi nolga tengdir.*

Funksiyaning max va min topishning 1-qoidasi

$y=f(x)$ funksiyaning maksimum va minimumini topishning quyidagi sxemasini keltiramiz.

1) $y' = f'(x)$ topiladi.

2) $f'(x) = 0$ tenglama yechilib, kritik (urinmasi O_x ga $\parallel$ bo'ladigan)

nuqtalarning $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ absissalari topiladi.

3) har bir kritik nuqta alohida- alohida tekshiriladi. $x = x_i$ ning yaqin atrofida $h < 0$ uchun ekstremumlar quyidagicha aniqlanadi:

f'(x) hosilaning x_1 kritik nuqtadan o'tishdagi ishorasi			Kritik nuqtaning harakteri
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	$f'(x)=0$ yoki mavjud emas	-	Maksimum
-	$f'(x)=0$ yoki mavjud emas	+	Minimum
+	$f'(x)=0$ yoki mavjud emas	+	Funksiya o'sadi
-	$f'(x)=0$ yoki mavjud emas	-	Funksiya kamayadi

Misollar. **1.** $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ funksiyaning ekstremumlari topilsin.

Yechish. 1. $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 2x + 2)$;

2. $y' = 5 \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2};$$

$x_1 = 1; \quad x_2 = 2$ kritik nuqtalar absissalari.

3.a) $x = x_1 = 1$ atrofida y' ning ishorasi qanday uzgarishini tekshiramiz, 1 dan kichikroq qiymat olamiz.

$y' = f'(0,8) = 0; \quad (x^2 - 2x + 2) = 6(x-1)(x-2) = (0,8-1)(0,8-2) > 0$ va 1 dan kattaroq qiymatda:

$y' = f'(1,2) = 6(1,2-1)(1,2-2) < 0$.

Hosila ishorasini (+) dan (-) ga o'zgartiryapti , demak, $x=1$ kritik nuqta ekan.

b) $x=x_2=2$ atrofida:

$$\left. \begin{aligned} y' &= f'(1,8) = 6 \cdot (1,8 - 1)(1,8 - 2) < 0 \\ y' &= f'(2,2) = 6 \cdot (2,2 - 1) \cdot (2,2 - 2) > 0 \end{aligned} \right\} \text{va}$$

Demak , $x=x_2=2$ minimum nuqta ekan.

$$4)y_{\max}=f(1)=2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 2 = 2 - 9 + 12 - 2 = 3$$

$$y_{\min} = f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 2 = 16 - 36 + 24 - 2 = 2$$

Egri chiziqning qavaqriqligi va botiqligi. Bukilish(egilish) nuqtasi.

Agar $y=f(x)$ egri chiziq $[a,b]$ oraliqda usuvchi bo'lsa, u xolda bu oraliqda $y'>0$ bo'ladi. Bunda ikki hol ro'y berishi mumkin. M nuqtaning kichik atrofida o'tkazilgan urinmalar egri chiziq *botiq* (pastga qavariq) deb ataladi.Yani M nuqtada o'tkazilgan urinmalar egri chiziq ustida yotgan holda egri chiziq *qavariq* (pastga botiq) deb ataladi.

Agar egri chiziq $x=x_0$ nuqtaning kichik atrofida chap tomonida urinma ustida, ung tomonida esa urinma ostida joylashsa , yoki aksincha bo'lsa , $x=x_0$ nuqta egri chiziqning *bukilish (egilish)* nuqtasi deyiladi. Boshqacha aytganda $y=f(x)$ egri chiziqning qavariqlik botiqlikdan ajralgan nuqtasi egri chiziqning bukilish nuqtasi deyiladi.

1-teorema. $x=x_0$ nuqtada $y''=f''(x_0)$ chekli son bo'lib , $y''=f''(x_0)<0$ bo'lsa, bu nuqtada egri chiziq yuqoriga qavariq;, $y''=f''(x_0)>0$ bo'lsa , bu nuqtada pastga qavariq bo'ladi.

$f'(x_1) > f'(x_2) > f'(x_3) > \dots$ bo'ladi, yani $y'=\phi(x)$ kamayuvchi funksiya

bo'lib, $y''=\phi'(x)$ kamayuvchi funksiya bo'lsa, $y''=\phi'(x)<0$ bo'ladi.

Bu teoremadan bukilish nuqtani topish qoidasi kelib chiqadi: $y=f(x)$ ning bukilishi nuqtasini topish uchun:

1) $y''=f''(x)$ topiladi; 2) $f''(x)=0$ tenglama yechilib , uning $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$

yechimlari topiladi;

3) $x=x_1$ atrofida

$$\text{va} \left. \begin{aligned} f''(x < x_1) &< 0 \\ f''(x > x_1) &> 0 \end{aligned} \right\}$$

yoki

va $\left. \begin{array}{l} f''(x < x_1) < 0 \\ f''(x > x_1) > 0 \end{array} \right\}$ bo'lsa, yani $f''(x)$ hosilax₁ nuqtadan o'tishida ishorasini

o'zgartirsa $x=x_1$ bukilish nuqtasi bo'ladi va h.k.

Agar $f(x)$ o'z ishorasini o'zgartirmasa, bukilish nuqtasi bo'lmaydi.

Misollar. 1. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ ning bukilish nuqtasini toping.

Yechish. a) $y' = -3x^2 + 6x$; $y'' = -6x + 6$. b) $-6x + 6 = 0$; $6x = 6$; $x = 1$

v) $\left. \begin{array}{l} y'' = f''(0,9) = 6 \cdot (1 - x) = 6 \cdot (1 - 0,9) > 0, \\ y'' = f''(1,1) = 6 \cdot (1 - 1,1) = -6 \cdot 0,1 < 0. \end{array} \right\}$

$f''(x)$ hosila ishorasini o'zgartiryapti, demak, bukilish nuqtasi $x=1$ ekan.

2. $y' = 4x^3$ ning bukilish nuqtaini toping.

Yechish. a) $y' = 4x^3$, $y'' = f''(x) = 12x^2$;

b) $12x^2 = 0$, $x = 0$;

v) $\left. \begin{array}{l} y'' = f''(-0,1) = 12 \cdot (0,1) = 12 \cdot (-1)^2 = 12 > 0. \\ y'' = f''(+0,1) = 12 \cdot (+1)^2 = 12 > 0. \end{array} \right\}$

$f''(x)$ ishorasini o'zgartirmayapti, demak, $x=0$ bukilish nuqta emas.

Funksiya maksimumi va minimumini topishining 2-qoidasi

Teorema . $y=f(x)$ ning ikkinchi tartibli hosilasi $y''=f''(x)$ maksimum nuqtada manfiy, minimum nuqtada bo'ladi.

Chindan ham, $x=x_0$ maksimum nuqta bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya qavariq (quyiga botiq) bo'lib bu nuqtada (1-chi teoremaga ko'ra) $y''=f''(x_0) < 0$, minimum nuqtada $y''=f''(x_0) > 0$ bo'ladi.

1. $y'=f'(x)$ va $y''=f''(x)$ lar topiladi.

2. $y'=f'(x)=0$ tenglama yechilib ekstremal nuqtalarning absissalari

$x_1, x_2, \dots, x_k$ lar topiladi.

3. $y''=f''(x)$ ning har bir kritik nuqtadagi ishorasi topiladi.

4. Agar $f''(x_i) > 0$ bo'lsa, funksiya minimumga, $f''(x_i) < 0$ bo'lsa funksiya maksimumga ega bo'ladi.

Misollar. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ ning ekstremumlarini toping.

Yechish :

$$a) y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2 \cdot (x^2 - 4x + 3),$$

$$y'' = 20x^3 - 60x^2 + 30x,$$

$$y'' = 10x(2x^2 - 6x + 3),$$

$$b) 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0,$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 3.$$

$$v) y'' = f''(0) = 0;$$

$$y'' = f''(1) = 10 \cdot (2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3) = 10(-1) < 0.$$

$$y' = f''(3) = 10 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3) = 10 \cdot 3^2 \times (6 - 6 + 3) = 270 > 0;$$

$x=1$ maksimum

$x=3$ minimum

Egri chiziqlarning asimptotalari

Egri chiziqlarni cheksiz shaxobchali va bunday shaxobchalarga ega bo'lmagan deb ikkiga ajratsa bo'ladi. Masalan parabola ikkita cheksiz shaxobchali, giperbola to'rtta cheksiz shaxobchali bo'lib, ellips bunday shaxobchaga ega emas.

Ta'rif. Agar $y=f(x)$ egri chiziqdagi M nuqtadan birorta m to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa tinimsiz kamaya borib M cheksiz uzoqlashgan bu masofa nolga intilsa, m to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning *asimptotasi* deyiladi.

Endi berilgan egri chiziq asimptotasi tenglamaini tuzish usulini ko'rsatamiz.

Asimptotlar 3 xil: vertikal, og'ma, gorizontal bo'ladi. Faraz qilaylik, $y=f(x)$ egri chiziq berilgan bo'lsin. $y=kx+b$ uning og'ma asimptomasi bo'lsin. k va b ni topamiz, $M(x,y)$ -egri chiziqning biror nuqtasi, MN egri chiziqdan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa.

Ta'rifga ko'ra $x \rightarrow \infty$ yoki $y \rightarrow \infty$ da $MN \rightarrow 0$ bo'lishi kerak. $M(x,y)$ nuqtada $kx-y+b=0$ to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa.

Funksiyani tekshirishni umumiy sxemasi

Yuqorida bayon etilganlarga ko'ra funksiyani tekshirish quyidagi taxminiy planini tavsiya etish mumkin.

- 1) $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi, uzluksilik sohasi va uzulishi nuqtalari topiladi. Uzilish nuqtalarida funksiyaning bir tomonlama limitlari topiladi.
- 2) Funksiyaning simmetrikligi va davriyligi aniqlanadi,
- 3) $y=f(x)$ grafigining O_x va O_y uqlar bilan kesishish nuqtalari topiladi hamda funksiya ishorasi uzgarmaydigan soxalar belgilanadi;
- 4) Funksiyaning ekstremum nuqtalari hamda o'sish va kamayish sohalari, funksiyaning ekstremal qiymatlari topiladi;
- 5) Funksiyaning bukilish nuqtalari, botiq va qavariq bo'lish sohalari topiladi,
- 6) Tekshirilayotgan funksiyaning asimptotalari topiladi;
- 7) Funksiya grafigi chiziladi.

Misol $y = x^3 - 3x$ funksiyaning to'liq tekshiring.

Yechish .

1.1. Funksiya $x \in (-\infty; +\infty)$ oraliqda aniqlangan;

1.2.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x) - (x^3 - 3x)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{x^3 + 3x(\Delta x)^2 + 3x^2\Delta x + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x - x^3 + 3x\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{3x(\Delta x)^2 + 3x^2\Delta x + (\Delta x)^3 - 3\Delta x\} = 0$$

Demak, funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzluksiz.

1.3. Oraliqning chetki nuqtalarida: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x) = \infty$

2. $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$ -funksiya toq, funksiya davriy emas;

3. Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini aniqlaymiz. Buning uchun funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqta olinadi va uning atrofida ishora tekshiriladi:

$$y' = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y'_{x < -1} =$$

“CHARXPALAK” TEXNOLOGIYASI.

Talabalarning mavzuga tayyorgarlik darajasini tekshirish uchun “CHARXPALAK” metodidan foydalanish. Bunda talabaga mavzuga oid misollar beriladi. Bu misollar funksiyaning urinmasi, normali va asimtotalarini tegishli ko'rinishda yozishga, mantiqiy fikrlashga, o'tilayotgan mazular asosida ko'p, xilma – xil fikr va ma'lumotlardan kerakligini tanlab olishni o'rgatishga qaratilgan. Buning uchun talabalarga tarqatilgan qog'ozlarda ko'rsatilgan misollar ketma – ketligi aralashtirib beriladi. Talaba esa avval yakka holda, mustaqil ravishda, so'ngra esa kichik guruhda, bu ketma – ketlikni tartibga solib, aynan qaysi tenglamasi ekanini belgilab chiqishi, o'z fikrini boshqalarga yoritib bera olishi lozim. Qog'ozda to'g'ri javob ustuni bo'ladi. O'qituvchi talabaga to'g'ri javobni o'qib eshittiradi, talaba esa to'g'ri javob bilan o'zining javobini solishtirib, to'g'ri javoblar sonini hisoblagan holda, berilgan baholash mezonidan kelib chiqib o'z-o'zini baholaydi.

Baho	Xato	Asimtota tenglamasi	Normal tenglamasi	Urinma tenglamasi	Misollar
					$y = x^2 + x + 1$ $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ $y = 2x^2 - x^4$ $y = 2x^3 - 3x^2$ $y = 4x - \frac{x^3}{3}$ $y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$ $y = x(2 - x)^2$ $y = x^3 - \frac{x^4}{4}$ $y = \frac{x^3}{6} - x^2$

					$y = \frac{4x}{1+x^2}$
--	--	--	--	--	------------------------

«Baliq suyagi» shaklida;

Har bir talaba bildirgan fikrni doskada ustun shaklida qayd etib yozib borish ham mumkin. Masalan, “Funksiya grafigini to’la tekshirish” mavzusi bo’yicha ustunlarga funktsiyani aniqlanish sohasi, juft-toqligi, davriyligi, asimtotalari, urinma va normal tenglamalari, o’sish va kamayish oraliqlari, eng katta va eng kichik qiymatlari, egilish nuqtalari, botiqlik va qabariqlik oraliqlarini yoritib berishlari mumkin.



Funksiya grafigini to’la tekshirish sxemasi

Amaliy mashg’ulotlar uchun misollar

Quyidagi funksiyalarning o’sish va kamayish oraliqlarini aniqlang:

1. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

4. $y = x \ln x$

2. $y = 3x - 3x^2$

5. $y = x^2 - 5x + 6$

3. $y = x - e^x$

Quyidagi funksiyalarni ekstremumga tekshiring:

6. $y = x^2 + x + 1$

7. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$

8. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

9. $y = 2x^2 - x^4$

10. $y = 2x^3 - 3x^2$

Quyidagi funksiyalarni tekshiring va grafigini yasang:

$$11. y = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$14. y = x^3 - \frac{x^4}{4}$$

$$12. y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$$

$$15. y = \frac{x^3}{6} - x^2$$

$$13. y = x(2-x)^2$$

$$16. y = \frac{4x}{1+x^2}$$

Mustaqil yechish uchun misollar.

1) $x^2 + y^2 = 5$ egri chiziqqa $M(-1,2)$ nuqtadan utkazilgan urinma va normal tenglamasini toping.

Javob: $2y-x=5$ va $y+2x=0$

2) $y = \sqrt{2x+1}$ egri chiziqqa $x_0=4$ nuqtadagi normal tenglamasini tuzing.

Javob: $3x+y-15=0$

3) $y = \frac{x}{x^2-1}$ egri chiziqqa $x_0=2$ nuqtada utkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

Javob: $y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$

Quyidagi funksiyalarning ushish va kamayish oraligini toping:

$$4) y = x^3 - 3x^2 + 5.$$

Javob: $(-\infty, 0), (2, +\infty)$ da usadi; $(0, 2)$ da kamayadi.

$$5) y = x^4 + 4x - 6$$

Javob: $(-1, +\infty)$ oraliqda usadi, $(-\infty, -1)$ oraliqda kamayadi.

$$6) y = x^2 - 3x + 1$$

Javob: $(-\infty, \frac{3}{2})$ oraliqda kamayadi, $(\frac{3}{2}, +\infty)$ oraliqda usadi.

$$7) y = 2x^2 + 8x - 1.$$

Javob: $(-\infty, -2)$ oraliqda kamayadi, $(-2, +\infty)$ oraliqda usadi.

Quyidagi funksiyalarni maksimum va minimumlarini toping.

$$8) y = x^2 - 2x$$

Javob: $x=1$ nuqtada minimum.

$$9) y = 2x^2 + 3x + 4$$

Javob: $x = -\frac{3}{4}$ nuqtada minimum.

$$10) y = \frac{1}{3}x^3 - x$$

Javob: $x = -1$ nuqtada maksimum, $x = 1$ nuqtada minimum.

$$11) y = x^3$$

Javob: Maksimumi ham minimumi ham yoq.

$$12) y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6$$

Javob: $x = -1$ nuqtada maksimum, $x = 4$ nuqtada minimum.

$$13) y = x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

Javob: $x = 1$, $x = 3$ nuqtalarida minimum, $x = 2$ nuqta maksimum.

Quyidagi funksiyalarning ekstremumlarini aniqlang

$$1. y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5$$

$$2. y = 2x^2 - 4x + 1$$

$$3. y = -x^2 - 6x - 1$$

Quyidagi funksiyalarning grafigini yasang:

$$1. y = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

$$7. y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$$

$$2. y = x^2 - 6x + 5$$

$$8. y = x + \frac{1}{x}$$

$$3. y = \frac{1}{3}x^3 - 4$$

$$9. y = \frac{1}{1-x^2}$$

$$4. y = \frac{1}{4}x^4 - 8x$$

$$10. y = x^3 - 5x^2 + 8x$$

$$5. y = 2 - x - x^3$$

$$6. y = e^x$$

Adabiyotlar

1. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent
“” 2013y

- 2.Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. “” 2014 y
- 3.Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent “O'qituvchi”, 1992 y
- 4.Fixtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
- 5.Lobatskaya N. L. “Osnovi visshey matematiki” Moskva 1987 g

8. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Integrallash jadvali ***Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.***

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Funksiyaning boshlang'chini hisoblash.

Vazifalar: Funksiyaning boshlang'chini topish. Aniqmas integralni hisoblashni o'rganish. Misollar yordamida tushuntirish.

Talaba bilishi lozim:

- Funksiyaning boshlang'chini topishi.
- Aniqmas integral xossalarini bilishi.
- Aniqmas integralni hisoblashi
- Elementar funksiyalar integrallash jadvalini bilishi kerak.

Talaba bajara olishi lozim: Funksiyaning boshlang'ichini hisoblashi kerak.

Motivasiya: Jarayonlarni grafik ko'rinishda tasvirlash orqali uni qanday keshishini holatini aniqlash mumkin.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Kimyo va fizik jarayonlarni o'rganishda ishlatiladi.

Mashg'ulotning mazmuni: Boshlang'ich funksiya. Aniqmas integral.

Mashg'ulotning maqsadi: Funksiya boshlang'ichini hisoblash.

Nazariy qism:

Bizga biror funksiya berilgan bo'lsa, ma'lum formulaga yoki qoidaga ko'ra bu funksiyaning hosilasini topishni bilamiz.

Masalan $f(x) = x^3$ bo'lsa, $f'(x) = 3x^2$; $f(x) = \sin x$ bo'lsa, $f'(x) = \cos x$.

Endi bu masalaning teskarisini ya'ni hosilasiga ko'ra funksiyani o'zini topish masalasini ko'raylik. Boshqacha aytganda differensiallash amaliga teskari bo'lgan masalani yechishga to'g'ri keladi.

1-ta'rif. Agar $F(x)$ funksiya (a,b) oraliqda uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lib, $\forall x \in (a,b)$ nuqtada $F'(x)=f(x)$ (yoki $dF(x)=f(x)dx$) tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiyani shu oraliqda $f(x)$ funksiyani boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Yuqoridagi misollardan x^3 funksiya $3x^2$ ning, $\sin x$ esa $\cos x$ funksiyani boshlang'ich funksiyasidir.

Boshlang'ich funksiyani ta'rifga ko'ra quyidagi ikkita savol tug'iladi:

1. Qanday funksiyalarning boshlang'ich funksiyalari mavjud bo'ladi?
2. Agar berilgan funksiyani boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lsa, u yagona bo'ladimi?

1-teorema. $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $\forall f(x)$ funksiyani shu kesmada boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'ladi (teoremaning isboti Nyuton-Leybnis formulasida ko'riladi).

Agar $f(x)$ funksiya boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, uning boshlang'ich funksiyasi cheksiz ko'p bo'lishini misolda osongina ko'rish mumkin:

$$F_1(x)=\frac{x^4}{4}, F_2(x)=\frac{x^4}{4}+7, F_3(x)=\frac{x^4}{4}+C \quad (C\text{-o'zgarmas}) \quad \text{funksiyalar} \quad f(x)=x^3$$

funksiyani boshlang'ich funksiyasidir.

2-teorema. Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyaJar $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiyalar bo'lsa, u holda $F_1(x)$, $F_2(x)$ lar bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi:

$$F_2(x)-F_1(x)=C, \quad C\text{- ixtiyoriy o'zgarmas.}$$

3-teorema. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyani $[a,b]$ dagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyani shu kesmadagi har qanday boshqa boshlang'ich funksiyasi $F(x)+C$ ko'rinishda bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyani $[a,b]$ dagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyani shu kesmadagi barcha boshlang'ich funksiyalari to'plami $F(x)+C$ ga funksiyani shu kesmadagi aniqmas integrali deyiladi va odatda $\int f(x)dx$ simvol bilan belgilanadi.

Shunday qilib ta'rifga ko'ra $F'(x)=f(x)$ bo'lsa $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo'ladi. Bu yerda $f(x)$ ga - integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ ga integral ostidagi ifoda deyiladi. Berilgan $f(x)$ funksiyani aniqmas integralini topish integrallash amali deyiladi.

Shunday qilib berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $y=F(x)+C$ funksiyalar to'plamidan iborat bo'lib, geometrik nuqtai nazardan esa aniqmas integral egri chiziqlar to'plamidan (oilasidan) iborat bo'lib, ularning hammasi bir-biridan ixtiyoriy C masofaga farq qilib o'zaro parallel joylashgan bo'ladi.

Aniqmas integralning xossalari.

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $\int dF(x) = F(x) + C$
3. $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ k -o'zgarmas.
5. $\int [f(x) \pm \phi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \phi(x)dx$

Aniqmas integrallarni hisoblaganda yuqoridagi xossalardan tashqari quyidagi uchta muhim qoidani nazarda tutish amaliy mashg'ulotlar uchun katta ahamiyatga ega.

Agar $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo'lsa

1. $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$
2. $\int f(x+b) dx = F(x+b) + C$
3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$

Aniqmas integrallar jadvali

Bu formulalarning to'g'riligini ularning o'ng tomonidagi ifodalarni bevosita differensiallash bilan ko'rsatish mumkin.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\text{arctg} x + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$	17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + C$	

9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	a, c –lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.
10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	

Misollar. 1-misol sifatida 14-formulani ko'raylik

$$\left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \right)' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x-a}{x+a} \cdot \frac{x+a-x+a}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2 - a^2}$$

2-misol. $\int (2x^3 + 5\sqrt{x}) dx = \frac{1}{2}x^4 + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C$

3-misol. $\int \frac{dx}{3x+6} = \frac{1}{3} \ln |3x+6| + C$

4-misol. $\int \cos 10x dx = \frac{1}{10} \sin 10x + C$

Bevosita integrallash usuli.

Aniqmas integralni bevosita integrallar jadvalidan va aniqmas integralning xossalaridan foydalanib integrallashga bevosita integrallash usuli deyiladi. Ba'zi hollarda integral ostidagi funktsiyani iloji boricha yig'indiga yoyib so'ngra bevosita integrallash maqsadga muvofiq bo'ladi.

1-misol. $\left(3 - 4x^3 + 7\cos x - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = 3 \int dx - 4 \int x^3 dx + 7 \int \cos x dx - 6 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2+1} =$
 $= 3x - x^4 + 7\sin x - 6 \ln |x| - \operatorname{arctg} x + C$

2-misol. $\int (x^2 - 2x)^2 dx = \int (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \int x^4 dx - 4 \int x^3 dx + 4 \int x^2 dx = \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 + C$

3-misol $\int (2x^3 - 3x^2 + 2x - 7) dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx - 7 \int dx =$
 $= 2 \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2 \frac{x^{1+1}}{1+1} - 7x + C = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 7x + C$

Differensial belgisi ostiga kiritib integrallash

Differensial belgisi ostiga kiritib integrallash usuli esa integral ostidagi ifodani almashtirishdan iboratdir.

1-misol. $\int e^{\sin x} \cos x dx = |\cos x dx = d(\sin x), \text{ desak}| = \int e^{\sin x} \cdot d(\sin x) = e^{\sin x} + C$

2-misol. $\int \sin^8 x \cos x dx = |\cos x dx = d(\sin x)| = \int \sin^8 x d(\sin x) = \frac{1}{9} \sin^9 x + C$

3-misol. $\int e^{\arctg x} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \left| \frac{dx}{1+x^2} = d(\arctg x) \right| = \int e^{\arctg x} d(\arctg x) = e^{\arctg x} + C$

4-misol. $\int x e^{x^2} dx = \left| x dx = \frac{1}{2} d(x^2) \right| = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

5-misol. $\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln |x+5| + C$

6-misol. $\int (x+2)^{35} dx = \int (x+2)^{35} d(x+2) = \frac{(x+2)^{36}}{36} + C$

7-misol. $\int \cos 5x dx = \left| \begin{array}{l} 5x = t, \\ d(5x) = dt, \\ dx = \frac{dt}{5} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} \int \cos t dt = \frac{1}{5} \sin t + C =$

$= \int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x + C$

8-misol. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{1+t^2} 2t dt = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = 2 \left(\int \frac{t^2 + 1}{1+t^2} dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt \right) =$
 $= 2(t - \arctg t) + C = 2(\sqrt{x} - \arctg \sqrt{x}) + C$

Amaliy mashg'ulotlar uchun mashqlar.

Funksiyaning boshlang'ichini toping.

- | | |
|--|--|
| 1) $\int (x^2 + 5x + \cos x) dx$ | javob: $\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + \sin x + C$ |
| 2) $\int (3x^2 + 4\sin x + 6) dx$ | javob: $x^3 - 4\cos x + 6x + C$ |
| 3) $\int (5x^3 + \sqrt{x} + 6) dx$ | javob: $\frac{5x^4}{4} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 6x + C$ |
| 4) $\int (6\sqrt{x^3} + 5\sin x) dx$ | javob: $\frac{12\sqrt{x^5}}{5} - 5\cos x + C$ |
| 5) $\int (3\sqrt{x^5} + 4\sin x + 2) dx$ | javob: $\frac{6\sqrt{x^7}}{7} - 4\cos x + 2x + C$ |
| 6) $\int (8 + 2\sqrt{x} - \sin x) dx$ | javob: $8x + \frac{4\sqrt{x^3}}{3} - \cos x + C$ |
| 7) $\int (\frac{1}{x} + 3\sin x) dx$ | javob: $\ln x - 3\cos x + C$ |

$$8) \int \left(\frac{1}{x^3} + 4x^2 + \sqrt{x} \right) dx$$

$$\text{javob: } -\frac{1}{2x^2} + \frac{4x^3}{3} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

$$9) \int \left(\frac{3}{x} + 5 \cos x + \sqrt[3]{x} \right) dx$$

$$\text{javob: } 3 \ln|x| + 5 \sin x + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$$

$$10) \int \left(\frac{4}{x} + 6 \sin x + \sqrt[3]{x^2} \right) dx$$

$$\text{avob: } 4 \ln|x| - 6 \cos x + \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + C$$

$$11) \int (3x^2 + \sqrt{x}) dx$$

$$\text{javob: } x^2 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

$$12) \int (4x^2 + 6x + \sin x) dx$$

$$\text{javob: } \frac{4x^3}{3} + 3x^2 - \cos x + C$$

$$13) \int (5x^7 - x\sqrt{x^3}) dx$$

$$\text{javob: } \frac{5x^8}{8} - \frac{x^2\sqrt{x^5}}{5} + C$$

$$14) \int \left(4x^2 - 7 \sin x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\text{javob: } \frac{4x^3}{3} + 7 \cos x + \ln|x| + C$$

$$15) \int \left(6x^3 - 4x^{-4} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\text{javob: } \frac{3x^4}{2} + \frac{4}{3x^3} - \ln|x| + C$$

$$16) \int \left(\frac{1}{x^2} + e^x - \cos 2x + 3 \right) dx$$

$$\text{javob: } -\frac{1}{x} + e^x - \frac{\sin 2x}{2} + 3x + C$$

$$17) \int \left(3x^2 - \frac{4}{x^5} + \frac{1}{x} + \cos x - e^x \right) dx$$

$$\text{javob: } x^2 + \frac{1}{x^4} + \ln|x| + \sin x - e^x + C$$

$$18) \int \frac{5x}{\sqrt{x}} + 6x - \cos x dx$$

$$\text{javob: } \frac{10\sqrt{x^3}}{3} + 3x^2 - \sin x + C$$

$$19) \int \left(\frac{2x - x^2}{x^2} + e^x - \sin x \right) dx$$

$$\text{javob: } 2 \ln|x| - x + e^x + \cos x + C$$

$$20) \int \left(\frac{1}{x} + e^x - 2 \sin x \right) dx$$

$$\text{javob: } \ln|x| + e^x + 2 \cos x + C$$

Mustaqil yechish uchun misollar

$$21) \int \left(\frac{2+x}{x^2} - 3^x + \sin x \right) dx$$

$$\text{javob: } -\frac{2}{x} - \ln|x| - \frac{3^x}{\ln 3} - \cos x + C$$

$$22) \int \left(\cos x + \frac{1}{2+x} \right) dx$$

$$\text{javob: } \sin x + \ln|2+x| + C$$

$$23) \int (x+5)^8 dx$$

$$\text{javob: } \frac{(x+5)^9}{9} + C$$

$$24) \int \cos x e^{\sin x} dx$$

$$\text{javob: } e^{\sin x} + C$$

$$25) \int \sqrt{x+5} dx$$

$$\text{javob: } \frac{2\sqrt{(x+5)^3}}{3} + C$$

$$26) \int x^2 e^{x^3} dx$$

$$\text{javob: } \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

$$27) \int \sin x e^{\cos x} dx$$

$$\text{javob: } -e^{\cos x} dx$$

$$28) \int x e^{x^2} dx$$

$$\text{javob: } \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

$$29) \int (x^2 - 1)^3 x dx$$

$$\text{javob: } \frac{(x^2 - 1)^7}{8} + C$$

$$30) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{javob: } \frac{1}{\cos x} + C$$

Mustaqil yechish uchun misollar

$$1. \int 4x^6 dx$$

$$\text{javob: } \frac{4x^7}{7} + C$$

$$2. \int (x+1)^3 dx$$

$$\text{javob: } \frac{(x+1)^4}{4} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

$$\text{javob: } \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

$$4. \int (5x^2 + 2x - 3) dx$$

$$\text{javob: } \frac{5x^3}{3} + x^2 - 3x + C$$

$$5. \int \frac{x^4 - \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{x} dx$$

$$\text{javob: } \frac{x^4}{4} - \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$6. \int \frac{x^6 - x^4 + x^2 + 1}{x^4} dx$$

$$\text{javob: } \frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{3x^3} + C$$

$$7. \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) dx$$

$$\text{javob: } \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{3}{4} \sqrt{x^4} + \frac{4}{5} \sqrt{x^5} + C$$

$$8. \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$$

$$\text{javob: } 2 \sin x + C$$

$$9. \int \frac{\sin^3 x + 2}{\sin^2 x} dx$$

$$\text{javob: } -\cos x - 2 \operatorname{ctgx} + C$$

$$10. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$\text{javob: } -\operatorname{ctgx} + \operatorname{tgx} + C$$

$$11. \int \frac{x^3 + \sqrt{x^3} - 2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{javob: } \frac{2}{7} \sqrt{x^7} + \frac{1}{2} x^2 - 4\sqrt{x} + C$$

$$12. \int (x^4 + 7^x) dx$$

$$\text{javob: } \frac{x^5}{5} + \frac{7^x}{\ln 7} + C$$

$$13. \int (x^2 + 1)^8 x dx$$

$$\text{javob: } \frac{(x^2 + 1)^9}{18} + c$$

$$14. \int \frac{t^2 dt}{(1 + 2t^3)^2}$$

$$\text{javob: } -\frac{1}{6(1 + 2t^3)} + c$$

$$15. \int \sqrt{(2+x)^3} dx$$

$$\text{javob: } \frac{2\sqrt{(2+x)^5}}{5} + c$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}}$$

$$\text{javob: } \frac{\sqrt{4x-3}}{2} + c$$

$$17. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\text{javob: } \sqrt{a^2 + x^2} + c$$

$$18. \int \sin 3x dx$$

$$\text{javob: } -\frac{\cos 3x}{3} + c$$

$$19. \int \sin(2x-1)dx$$

$$\text{javob: } -\frac{\cos(2x-1)}{2} + c$$

$$20. \int e^{2\cos x} \sin x dx$$

$$\text{javob: } -\frac{e^{2\cos x}}{2} + c$$

Adabiyotlar

- 1.Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent " " 2013y
- 2.Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. " " 2014 y
- 3.Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent "O'qituvchi", 1992 y
- 4.Fixtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
- 5.Lobatskaya N. L. "Osnovi visshey matematiki" Moskva 1987 g

9. O'zgaruvchilarni alnashtirib va bo'laklab integrallash.

Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Funksiyaning boshlang'chini hisoblash usullari bilan tanishish.

Vazifalar: Aniqmas integtalni hisoblashning usullarini o'rganish. Misollar yordamida tushuntirish.

Talaba bilishi lozim:

- O'zgaruvchini almashtirib integrallash.
- Bo'laklab integrallash.

Talaba bajara olishi lozim: Aniqmas integralni hisoblashing turli usullarini bilishi kerak.

Motivasiya: Jarayonlarni grafik ko'rinishda tasvirlash orqali uni qanday keshishini holatini aniqlash mumkin.

Fanlararo va fan ichidagi bogʻliqlik: Kimyo va fizik jarayonlarni oʻrganishda ishlatiladi.

Mashgʻulotning mazmuni: Aniqmas integralda oʻzgaruvchini almashtirib va boʻlaklab integrallash.

Mashgʻulotning maqsadi: Aniqmas integralni hisoblash usullari bilan tanishtirish.

Nazariy qism:

Integrallar jadvaliga kirmagan $\int f(x)dx$ integralni hisoblash uchun, ya'ni $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish uchun $x=\varphi(t)$ (1) almashtirish bajarib, $\varphi(t)$ funksiyani uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega hamda unga teskari boʻlgan $t=\psi(x)$ funksiya mavjud deb faraz qilamiz. Bu holda (1) dan $dx=\varphi'(t)dt$ ekanligini e'tiborga olsak berilgan integral

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt \quad (2)$$

koʻrinishda boʻladi. (2) ga aniqmas integralda oʻzgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

Bu yerda $\varphi(t)$ ni shunday tanlash kerakki natijada (2) ning oʻng tomonidagi integral chap tomonidagi integraldan soddaroq boʻlsin. Aniqmas integralni oʻzgaruvchilarni almashtirib integrallaganda chiqqan natijada yangi oʻzgaruvchidan dastlabki oʻzgaruvchiga qaytish shart.

1-misol.

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{dt} = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

2-misol.

$$J = \int \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = R \sin t \\ dx = R \cos t dt \\ \sqrt{R^2 - x^2} = R \cos t \end{array} \right| = R^2 \int \cos^2 t dt = R^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{R^2}{2} [t + \int \cos 2t dt] =$$

$$= \frac{R^2}{2} t + \frac{R^2 \sin 2t}{4} + C$$

Eski oʻzgaruvchi x ga qaytsak $x = R \sin t \Rightarrow \frac{x}{R} = \sin t \Rightarrow$

$$R^2 \sin 2t = 2(R \sin t)(R \cos t) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

$$t = \arcsin \frac{x}{R} \quad J = \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} + C.$$

Bo'laklab integrallash.

Agar x bo'yicha differensiallanuvchi bo'lgan $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsa, u holda uv ko'paytmaning differensialini quyidagi formula bilan hisoblanar edi:

$$d(uv) = u dv + v du \quad (3)$$

(3) ning har ikkala tomonini integrallasak:

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du \Rightarrow \int u dv = uv - \int v du \quad (4)$$

(4) formulaga bo'laklab integrallash formulasi deyiladi. (4) formula $\int v du$ integralni hisoblash $\int u dv$ integralni hisoblashdan osonroq bo'lgan holda foydalaniladi.

Bo'laklab integrallash usuli bilan hisoblanadigan ayrim integrallarni ko'rib o'taylik.

I. $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int p(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, ($P(x)$ - ko'phad, k esa biror o'zgarmas son) ko'rinishdagi integrallarni bo'laklab integrallaganda $u=P(x)$, qolganlarini dv deb olish maqsadga muvofiq bo'ladi.

II. $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\text{arcctg } x dx$, ko'rinishdagi integrallarni integrallaganda u deb $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arcctg } x$ larni olish kerak.

III. $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, ko'rinishdagi integrallar ikki marta bo'laklab integrallanadi.

1-misol. $\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$

2-misol.

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx, v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

3-misol. $J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx =$

$$= \int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \Rightarrow 2 \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) + C$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

4-misol. $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$

5- misol.

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \sin 3x dx, \\ du = 2x dx, \quad v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3 \cos 3x} \end{array} \right| = -\frac{x^2}{3} \cos 3x + \int \frac{1}{3} \cos 3x \cdot 2x dx = \\ &= -\frac{x^2}{3} \cos 3x + \frac{2}{3} \int x \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin 3x dx, \\ du = dx, \quad v = \int \cos 3x dx = -\frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = -\frac{x^2}{3} \cos 3x + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x dx \right) = \\ &= -\frac{x^2}{3} \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C \end{aligned}$$

6-misol.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1-x^2}, \quad dv = dx, \\ du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad v = x \end{array} \right| = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \arcsin x + C \\ 2 \int \sqrt{1-x^2} dx &= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C, \\ \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C \end{aligned}$$

Amaliy mashg'ulotlar uchun mashqlar.

1 $\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x} dx$

javob: $\frac{tg^3 x}{3} + C$

2 $\int (2x+1)^3 dx$

javob: $\frac{(2x+8)}{8} + C$

3 $\int (x^3+5)^4 x^2 dx$

javob: $\frac{(x^3+5)^5}{15} + C$

4 $\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x} dx$

javob: $\frac{ctg^2 x}{4} + C$

5 $\int x\sqrt{2x^2-1} dx$

javob: $\frac{\sqrt{(2x^2-1)^3}}{6} + C$

6 $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$

javob: $-\frac{1}{9x+3} + C$

7 $\int \frac{dx}{x^2-25}$

javob: $\frac{1}{10} \ln \frac{x-5}{x+5} + C$

8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

javob: $\ln(x+\sqrt{x^2-2}) + C$

$$9 \int \sin^2 x \cos x dx$$

$$\text{javob: } \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$10 \int e^{x^3} x^2 dx$$

$$\text{javob: } \frac{e^{x^3}}{3} + c$$

$$11. \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\text{javob: } \ln|\ln x| + c$$

$$12 \int (2x^4 + 3)x^3 dx$$

$$\text{javob: } \frac{(2x^4 + 3)^2}{16} + C$$

$$13. \int x \cos x dx$$

$$\text{javob: } x \sin x + \cos x + c$$

$$14. \int x e^{-x} dx$$

$$\text{javob: } -(x+1)e^{-x} + c$$

$$15. \int x \arctg x dx$$

$$\text{javob: } \frac{x^2 + 1}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + c$$

$$16. \int e^x \sin x dx$$

$$\text{javob: } \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

$$17. \int x^2 \cos x dx$$

$$\text{javob: } x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

$$18. \int x \ln x dx$$

$$\text{javob: } \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$19. \int x^2 e^x dx$$

$$\text{javob: } x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

$$20. \int (x+1)e^x dx$$

$$\text{javob: } x e^x + c$$

Mustaqil yechish uchun misollar

$$21. \int \ln x dx.$$

$$j : x \ln|x| - x + c$$

$$22. \int x e^{2x} dx.$$

$$j : \frac{1}{2} e^{2x} (x - \frac{1}{2}) + c$$

$$23. \int \sqrt{x^2 + k} dx$$

$$j : \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 + k} + k \ln(x + \sqrt{x^2 + k}) \right] + c$$

$$24. \int x \ln(x-1) dx.$$

$$j : \frac{x^2}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right) + c$$

$$25. \int (\ln x)^2 dx$$

$$j : x[(\ln|x| - 1)^2 + 1] + c$$

$$26. \int \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

$$j : -x \ctg x + \ln|\sin x| + c$$

$$27. \int \frac{\ln x dx}{x^2}$$

$$j : -\frac{\ln|x| + 1}{x} + c$$

$$28. \int x^4 e^{x^5} dx$$

$$\text{javob: } \frac{e^{x^5}}{5} + C$$

$$29. \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\text{javob: } \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$30. \int \frac{dx}{\sin^2 2x}$$

$$\text{javob: } -\frac{\ctg 2x}{2} + c$$

$$31. \int \tg 2x dx$$

$$\text{javob: } -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| + c$$

$$32. \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\text{javob: } \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$$

$$33. \int \frac{ctgx}{\sin^2 x} dx$$

$$\text{javob: } \frac{ctg^2 x}{2} + c$$

$$34. \int \frac{1+tgx}{1-tgx} dx$$

$$\text{javob:}$$

$$35. \int \cos^3 x \sin x dx$$

$$\text{javob: } -\frac{\cos^4 x}{4} + c$$

$$36. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

$$\text{javob: } \frac{2\sqrt{x^3+1}}{3} + c$$

$$37. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$\text{javob: } \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

$$38. \int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$$

$$\text{javob: } \frac{1}{4} \ln|3+4e^x| + c$$

$$39. \int \arcsin x dx.$$

$$j : x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$40. \int \ln(x^2+1) dx$$

$$j : x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctg x + c$$

$$41. \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$j : 2\sqrt{1+x} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + c$$

$$42. \int x^3 e^{-x} dx.$$

$$j : -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6) + c$$

$$43. \int \cos(\ln x) dx.$$

$$j : \frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x) + c$$

$$44. \int \sqrt{x} \ln x dx$$

$$j : \frac{2}{3} \sqrt{x^3} (\ln|x| - \frac{2}{3}) + c$$

$$45. \int \arctg x dx$$

$$j : x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

$$46. \int e^x \cos x dx$$

$$j : \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

$$47. \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$$

$$j : -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + ctgx \right) + c$$

$$48. \int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$j : -2e^{-\frac{x}{2}} (x^2 + 4x + 8) + c$$

$$49. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$j : x tg x + \ln|\cos x| + c$$

$$50. \int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$j : 4\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \arcsin \frac{x}{2} + c$$

Adabiyotlar

1. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent
 “” 2013y

- 2.Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. “” 2014 y
- 3.Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent “O'qituvchi”, 1992 y
- 4.Fixtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
- 5.Lobatskaya N. L. “Osnovi visshey matematiki” Moskva 1987 g

10. Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga yoyib integrallash:
Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Ratsional kasrli funksiyalarni sodda kasrlarga yoyib integrallash.

Vazifalar: Ratsional kasrli funksiyalarni sodda kasrlarga yoyib integrallashni o'rganish. Misollar yordamida tushuntirish.

Talaba bilishi lozim:

- Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga ajratish.
- Umumiy mahrajga keltirish.
- Sodda kasrlarni integrallash.

Talaba bajara olishi lozim: Kasrlarni integrallashi kerak.

Motivasiya: Jarayonlarni grafik ko'rinishda tasvirlash orqali uni qanday keshishini holatini aniqlash mumkin.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Kimyo va fizik jarayonlarni o'rganishda ishlatiladi.

Mashg'ulotning mazmuni: Ratsional kasrli funksiyalarni sodda kasrlarga yoyib integrallash.

Mashg'ulotning maqsadi: Sodda kasrlarga yoyib integrallash.

Nazariy qism:

I va II turdagi oddiy kasrlarni integrallash jadval integrallariga oson keltiriladi:

$$\text{I. } \int \frac{A dx}{x - \alpha} = A \int \frac{d(x - \alpha)}{x - \alpha} = A \ln|x - \alpha| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A dx}{(x - \alpha)^k} = A \int (x - \alpha)^{-k} d(x - \alpha) = A \frac{(x - \alpha)^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ = \frac{A}{(1-k)(x - \alpha)^{k-1}} + C.$$

III. turdagi integrallarni ko'rib chiqamiz:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx, \text{ bunda } D = \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

Suratda kasrning mahrajidan olingan hosilani ajratamiz:

$$(x^2 + px + q)' = 2x + p.$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2 + px + q} dx = \\ = \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \cdot \int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$$

Integrallardan birinchisi $\ln|x^2 + px + q|$ ga teng. Ikkinchi integralni hisoblash uchun mahrajda to'liq kvadratni ajratiladi:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

bu yerda $q - \frac{p^2}{4} > 0$, chunki shartga ko'ra diskriminant $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$.

Demak, ikkinchi jadval integraliga keladi. Yuqorida aytilganlarni hisobga olib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2} \right)}{\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \\ = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

Shuni aytib o'tish kerakki, agar III turdagi kasrni integrallashda $A=0$ bo'lsa, suratda mahrajning hosilasini ajratish shart emes, mahrajda darhol to'liq kvadrat ajratish kerak.

Misol $\int \frac{(x^3 - 3)dx}{x^4 + 10x^2 + 25}$ hisoblansin.

Yechish. Mahrajni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^4 + 10x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2$$

$$\frac{x^3 - 3}{x^4 + 10x^2 + 25} = \frac{Ax + B}{x^2 + 5} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 5)^2}$$

$$x^3 - 3 = (Ax + B)(x^2 + 5) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (5A + C)x + (5B + D)$$

$$\begin{cases} A = 1 & A = 1 \\ B = 0 & B = 0 \\ 5A + C = 0 & C = -5 \\ 5B + D = -3 & D = -3 \end{cases}$$

$$\frac{x^3 - 3}{x^4 + 10x^2 + 25} = \frac{x}{x^2 + 5} - \frac{5x + 3}{(x^2 + 5)^2}$$

Buni integrallaymiz:

$$J = \int \frac{x^3 - 3}{x^4 + 10x^2 + 25} dx = \underbrace{\int \frac{xdx}{x^2 + 5}}_{J_1} - 5 \underbrace{\int \frac{xdx}{(x^2 + 5)^2}}_{J_2} - 3 \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2 + 5)^2}}_{J_3}$$

$$J_1 = \int \frac{xdx}{x^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 5)}{x^2 + 5} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5)$$

$$J_2 = \int \frac{xdx}{(x^2 + 5)^2} = \frac{1}{2} \int (x^2 + 5)^{-2} d(x^2 + 5) = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 5)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2(x^2 + 5)}$$

J_3 integralda o'zgaruvchini almashtiramiz:

$$x = \sqrt{5} \operatorname{tg} z, dx = \sqrt{5} \sec^2 z dz$$

$$J_3 =$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 5)^2} = \int \frac{\sqrt{5} \sec^2 z dz}{25 \sec^4 z} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \int \cos^2 z dz = \frac{1}{10\sqrt{5}} \int (1 + \cos 2z) dz = \frac{1}{10\sqrt{5}} \left(z + \frac{1}{2} \sin 2z \right) = \frac{1}{10\sqrt{5}}$$

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x\sqrt{5}}{x^2 + 5} \right).$$

Berilgan integral quyidagiga teng bo'ladi:

$$I = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) + \frac{5}{2(x^2 + 5)} - \frac{3}{10\sqrt{5}} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x\sqrt{5}}{x^2 + 5} \right) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) + \frac{25 - 3x}{10(x^2 + 5)} - \frac{3}{10\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar

$$1. \int \frac{x^3}{x-2} dx;$$

$$j: \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8 \ln|x-2| + c$$

$$2. \int \frac{x^4}{x^2 + a^2} dx;$$

$$j: \frac{x^3}{3} - a^2 x + a^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$3. \int \frac{x^5}{x^3 - a^3} dx;$$

$$j: \frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3} \ln|x^3 - a^3| + c$$

$$4. \int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx.$$

$$5. \int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx.$$

$$6. \int \frac{3x^2+2x-3}{x^2-x} dx$$

$$7. \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx;$$

$$8. \int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx;$$

$$9. \int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx; \Rightarrow$$

$$10. \int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$$

$$j: \ln \frac{c(x-2)^2}{x-3}$$

$$j: \ln \left| \frac{(x-1)^3}{x+2} \right| + c$$

$$j: \ln \frac{cx^3(x-1)}{x+1}$$

$$j: \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + c$$

$$j: \ln cx(x-1) + \frac{2}{x-1}.$$

$$j: \frac{5}{2} \ln(x^2+2x+10) - \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + c$$

$$j: 2 \ln \left| \frac{x-2}{x-3} \right| + c$$

Mustaqil yechish uchun misollar

$$11. \int \frac{x^4}{x+1} dx;$$

$$12. \int \frac{x^3+2x-1}{x-1} dx;$$

$$13. \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx;$$

$$14. \int \frac{3x+2}{2x^2+x-3} dx;$$

$$15. \int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx;$$

$$16. \int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x} dx;$$

$$17. \int \frac{dx}{x^3-8};$$

$$18. \int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx;$$

$$19. \int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x} dx;$$

$$20. \int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2};$$

$$j: \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$$

$$j: \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x-1| + c$$

$$j: \ln \frac{C(x-2)^3}{x-1}$$

$$j: \ln C(x-1)\sqrt{2x+3}$$

$$j: 3 \ln \frac{C(x-1)}{x+2} - \frac{2}{x+2}$$

$$j: 2 \ln \frac{C(x-2)}{x} - \frac{1}{x-2}$$

$$j: \frac{1}{24} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$j: 3 \ln \frac{c(x-1)}{x+2} - \frac{2}{x+2}.$$

$$j: \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2-2x+2}} + 2 \operatorname{arctg}(x-1) + c.$$

$$j: \frac{1}{3} \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

Adabiyotlar

1. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent
“” 2013y

2. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. " " 2014 y
3. Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent "O'qituvchi", 1992 y
4. Fixtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
5. Lobatskaya N. L. "Osnovi visshey matematiki" Moskva 1987 g

11. Trigonometrik ifodalar qatnashgan integrallarni integrallash:

Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Trigonometrik ifodalar qatnashgan integrallarni integrallash.

Vazifalar: Trigonometrik ifodalar qatnashgan integrallarni integrallash. Misollar yordamida tushuntirish.

Talaba bilishi lozim:

- Trigonometrik ayniyat va formulalarini.
- Trigonometrik ifodalarni integrallashni.

Talaba bajara olishi lozim: Trigonometrik ifodalar qatnashgan integrallarni integrallash.

Motivasiya: Jarayonlarni grafik ko'rinishda tasvirlash orqali uni qanday keshishini holatini aniqlash mumkin.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Kimyo va fizik jarayonlarni o'rganishda ishlatiladi.

Mashg'ulotning mazmuni: Trigonometrik ifodalar qatnashgan integrallar

Mashg'ulotning maqsadi: Trigonometrik ifodalar qatnashgan integrallarni integrallash.

Nazariy qism:

Faraz qilaylik, faqat trigonometric funksiyalarga ratsional bog'liq bo'lgan ifoda berilgan bo'lsin, uni doim $\sin x$ va $\cos x$ ning ratsional funksiyasi deb

hisoblash mumkin, chunki hamma trigonometrik funksiyalarni $\sin x$ va $\cos x$ orqali ratsional ravishda ifodalash mumkin. Bu ifodani $R(\sin x, \cos x)$ orqali belgilaymiz.

Ushbu

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

turdagi integralni

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$$

o'rniga qo'yish bilan doim z o'zgaruvchili ratsional funksiyaning integraliga almashtirish mumkin. Haqiqatan,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2z}{1 + z^2}.$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} z, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2},$$

Shuning uchun

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2z}{1 + z^2}, \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right) \cdot \frac{2dz}{1 + z^2} = \int R_1(z) dz,$$

bunda $R_1(z)$ — z o'zgaruvchili funksiya.

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ o'rniga qo'yish $R(\sin x, \cos x)$ ko'rinishidagi har qanday funksiyaning integrallashga imkon beradi, shuning uchun u universal trigonometric almashtirish deyiladi. Lekin amaliyotda bu almashtirish ko'pincha ancha murakkab ratsional funksiya olib keladi. Shu sababli ba'zan undan foydalanmasdan ancha soddaga qo'yishdan foydalaniladi.

1) Agar $R(\sin x, \cos x)$ funksiya $\sin x$ ga nisbatan toq bo'lsa, ya'ni

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

bo'lsa, u holda

$$z = \cos x, \quad dz = -\sin x dx$$

o'rniga qo'yish bu funksiyaning ratsionallashtiradi.

2) Agar $R(\sin x, \cos x)$ funksiya $\cos x$ ga nisbatan toq bo'lsa, ya'ni

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

bo'lsa, u holda

$$z = \sin x, \quad dz = \cos x dx$$

o'rniga qo'yish bu funksiyani ratsionallashtiradi.

3) Agar $R(\sin x, \cos x)$ funksiya $\sin x$ va $\cos x$ ga nisbatan juft bo'lsa, ya'ni

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

bo'lsa, u holda

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

almashtirish amalga oshiriladi.

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]$$

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]$$

1-misol.

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

2- misol .

$$\int \sin 4x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{4} \cos 6x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

3- misol .

$$\int \cos 2x \cos 8x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 6x + \cos 10x) dx = \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{20} \sin 10x + C$$

4- misol.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{(1-t^2)}{t^4} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = \frac{-1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

$$\int \sin^p \cos^q x dx = \int \sin^{2K} \cos^{2S} x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^K \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^S dx$$

5- misol.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

6- misol.

$$\int \sin^2 x \cos^{-4} x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \tan^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \tan x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + C;$$

Amaliy mashg'ulot uchun misollar

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \sin 4x \cdot \cos 6x dx$ | javob: $-\frac{\cos 10x}{20} + \frac{\cos 2x}{4} + C$ |
| 2. $\int \sin^2 x dx$ | javob: $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$ |
| 3. $\int \cos^2 x dx$ | javob: $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$ |
| 4. $\int \sin 3x \cos 2x dx$ | javob: $-\frac{\cos 5x}{20} + \frac{\cos x}{2} + C$ |
| 5. $\int \sin 3x \sin 5x dx;$ | $j: \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + c;$ |
| 6. $\int \sin mx \sin nx dx$ | $j: \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] + c$ |
| 7. $\int \sin(5x - \frac{\pi}{4}) \cos(x + \frac{\pi}{4}) dx.$ | $j: -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \sin 4x + c$ |
| 8. $\int \sin^2 3x dx.$ | $j: \frac{1}{2} x - \frac{\sin 6x}{12} + c$ |
| 9. $\int (1 - \sin 2x)^2 dx.$ | $j: \frac{3x}{2} + \cos 2x - \frac{\sin 4x}{8} + c$ |
| 10. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$ | $j: \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + c$ |
| 11. $\int (1 + 2 \cos x)^2 dx$ | $j: 3x + 4 \sin x + \sin 2x + c$ |
| 12. $\int \cos^4 x dx$ | $j: \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + c$ |

Mustaqil yechish uchun misollar

- | | |
|---|--|
| 13. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx.$ | $j: \frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + c$ |
| 14. $\int \sin^2 \cos^4 x dx.$ | $j: \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c$ |
| 15. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$ | $j: \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$ |
| 16. $\int \cos^7 x dx$ | $j: \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + c$ |
| 17. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$ | $j: -\frac{1}{\sin x} - \sin x + c$ |
| 18. $\int \sin^5 x dx$ | $j: -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + c$ |
| 19. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$ | $j: \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + c.$ |
| 20. $\int (1 + 2 \cos x)^3 dx$ | $j: 7x + 14 \sin x + 3 \sin 2x - \frac{8 \sin^3 x}{3} + c$ |

$$21. \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$$

$$j : \frac{1}{\cos x} + \cos x + c$$

$$22. \int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} dx = ?$$

$$j : \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + c$$

$$23. \int \sin 3x \cos x dx.$$

$$j : -\frac{1}{8} (\cos 4x + 2 \cos 2x) + c;$$

$$24. \int \cos mx \cos nx dx.$$

$$j : \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] + c$$

Adabiyotlar

1. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent "“" 2013y
2. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. "“" 2014 y
3. Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent "O'qituvchi", 1992 y
4. Fikhtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
5. Lobatskaya N. L. "Osnovi visshey matematiki" Moskva 1987 g

12. Aniq integral. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash. Aniq integralni yuza hisoblashga tadbqiqi. Xosmas integral.

Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Aniq integral bilan tanishish.

Vazifalar: Aniq integralni hisoblash. Misollar yordamida tushuntirish.

Talaba bilishi lozim:

- Aniq integralga ta'rif berishi;
- Aniq integralning xossalari
- Nyuton –Leybnits formulasi

- Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirib integrallash
- Aniq integralda bo'laklab integrallash
- Aniq integralni yuza hisoblashga tadbiqu
- Xosmas integral

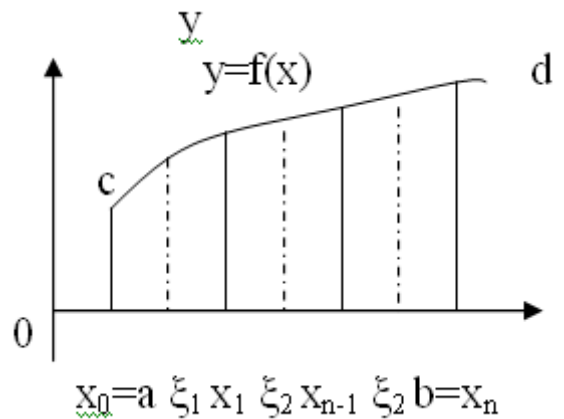
Talaba bajara olishi lozim: Aniq integralni hisoblashi kerak.

Motivasiya: Sohalarni grafik ko'rinishda tasvirlash orqali uni qanday joylashganlik holatini aniqlash mumkin.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Kimyo va fizik jarayonlarni o'rganishda ishlatiladi.

Mashg'ulotning mazmuni: Aniq integralni topish.

Mashg'ulotning maqsadi: Aniq integral. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirib integrallash. Aniq integralda bo'laklab integrallash



Nazariy qism:

Yuqoridan tenglamasi $y=f(x)$ egri chiziq bilan, pastdan OX o'qi bilan, yon tomonlaridan $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlari bilan chegaralangan egri chizikli trapesiyaning yuzini toping.

Faraz qilaylik $[a,b]$ kesmada $y=f(x)$ funksiya aniqlangan, uzuliksiz va $f(x) \geq 0$ bo'lsin. $[a,b]$ kesmasini $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$ nuqtalar bilan n ta $[x_{i-1}, x_i]$, ($i=1, \overline{1, n}$) ta bo'lakchalarga bo'lib va bo'linish nuqtalaridan OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazsak natijada $acdb$ egri chizikli trapesiyamiz n ta kichik egri chizikli trapesiyalarga (trapesiyachalarga) ajraladi. Endi har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachada ixtiyoriy ξ_i , ($i=1, \overline{1, n}$) nuqta tanlab olinib, $f(x)$ funksiyaning bu ξ_i nuqtalaridagi qiymatlarini $f(\xi_i)$, asosi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuziga teng bo'ladi:

$$s_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i \quad (i=1, \overline{1, n})$$

Butun ya'ni $acdb$ egri chizikli trapesiyaning yuzi taxminan hamma kichik egri chizikli trapesiyalar yuzlarining yigindisiga teng bo'ladi:

$$s \approx f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

Agar $[x_{i-1}, x_i]$ kesmalar uzunliklarining eng kattasi $\lambda \rightarrow 0$ da $[a, b]$ kesmaning mayda bo'lakchalarga bo'linish soni cheksiz o'sadi, natijada (1) yuza berilgan **acdb** egri chiziqli trapesiya yuziga cheksiz yaqinlashib boradi. Shuning uchun **acdb** egri chiziqli trapesiyaning yuzini

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\xi_i) \Delta x_i \quad (2)$$

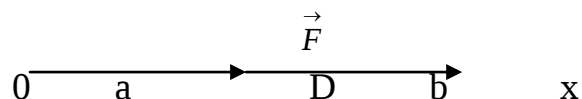
desak bo'ladi.

Kuch ta'srida bajarilgan ishni hisoblash masalasi.

Faraz qilaylik biror D moddiy nuqtaga OX o'qi yo'nalishida biror o'zgaruvchan $F=f(x)$ kuch ta'sir qilinsin. Moddiy D nuqtaning F kuch ta'srida biror a nuqtadan b nuqtagacha harajatlengandagi bajargan ishini hisoblaylik.

$[a, b]$ kesmasini n ta $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, n}$) bo'lakchalarga bo'lib har bir $[x_{i-1}, x_i]$

bo'lakchada F kuchini deyarli



o'zgarmas deb hisoblasak u holda har bir bo'lakchada bajarilgan ish taxminan $A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i$ bo'ladi. Bu erda $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$, $f(\xi_i)$ esa kesmadagi ta'sir etayotgan kuch.

U holda $[a, b]$ da $F=f(x)$ kuch ta'srida bajarilgan taxminan

$$A \approx f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Agar $\max \{ \Delta x_i \} = \lambda$ desak va $\lambda \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda bajarilgan ish quyidagicha bo'ladi:

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (3)$$

Juda ko'p texnika, mexanika va fizika masalalarini yechishda (2), (3) ko'rinishdagi yigindilarning limitini hisoblashga to'g'ri keladi.

Aniq integral va uning ta'rifi.

$y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin. $[a, b]$ ni $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ nuqtalar bilan n ta bo'lakchalarga ajratib va har bir $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, n}$) kesmada ixtiyoriy ξ_i ($i = \overline{1, n}$) nuqta olib bu nuqtalardagi $f(x)$ funksiyasining qiymatlarini $f(\xi_i)$ deylik $[x_{i-1}, x_i]$ kesmalarining uzunliklarini $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ deb belgilab quyidagi ko'paytmalar yigindisini tuzaylik:

$$s = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

(1)ga funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi integral yigindisi deyiladi.

Ta'rif. Agar $[a, b]$ da aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun tuzilgan (1) integral yigindi, $\lambda \rightarrow 0$ da $[a, b]$ ni ixtiyoriy n ta bo'lakchalarga bo'lish usuliga va har bir $[x_{i-1}, x_i]$ bo'lakchada ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlab olish usuliga bog'liq bo'lmagan

limitga ega bo'lsa, bu limitga $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

ko'rinishida yoziladi.

Shunday qilib ta'rifga ko'ra
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (2)$$

a, b -larga mos ravishda integralning quyi va yuqori chegarasi, $[a,b]$ ga integrallash sohasi deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya uchun (2) limit mavjud bo'lsa $f(x)$ funksiyani $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Aniq integralning geometric ma'nosi yuqoridagi 1-masaladagi egri chiziqli rapesiyaning yuzini beradi:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

2- masalada esa bajarlgan ish $F=f(x)$ kuchdan olingan integralga teng:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

1-teorema. $[a,b]$ kesmada uzulisiz bo'lgan har qanday $f(x)$ funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

2-teorema. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lishi uchun shu kesmada chegaralangan bo'lishi zarur.

1-eslatma. $[a,b]$ da chegaralanmagan funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'lmaydi.

2-eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chekli, ya'ni sanoqli uzilish nuqtalariga ega bo'lib, chegaralangan bo'lsa, bu funksiya shu kesmad integrallanuvchi bo'ladi.

Agar $a > b$ bo'lsa $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ bo'ladi, chunki $a = x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n = b$

bo'lib $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < 0$ bo'ladi. Agar $a = b$ bo'lsa $\int_a^b f(x)dx = 0$ bo'ladi:

Integral o'zgaruvchini har qanday harif bilan belgilash mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(y)dy$$

Aniq integrallning xossalari.

1-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqari chiqarish mumkin:

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx \quad (A\text{-o'zgarmas son})$$

2-xossa

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

3-xossa Agar $[a,b]$ da $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $f(x) \leq \varphi(x)$ tengsizlikni qanoatlantirsalar, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx \quad \text{munosabat o'rinli bo'ladi.}$$

4-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,c],[c,b]$ ($a < c < b$) kesmalarning har biriga integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu $[a,b]$ da ham integrallanuvchi bo'lib.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

bo'ladi

Bu hossaning geometrik ma'nosi: asosi $[a,b]$ bo'lgan egri chiziqli trapesiyaning yuzi asoslari $[a,c]$ va $[c,b]$ bo'lgan egri chiziqli trapesiyalar yuzlarining yigindisiga teng bo'ladi.

5-xossa. Agar $[a,b]$ da diffrensiallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiyaning shu kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m va M bo'lib, $a \leq b$ bo'lsa, u holda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

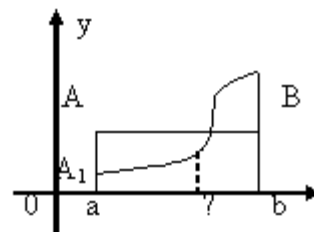
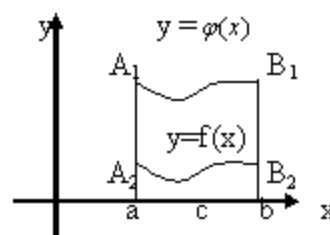
6-xossa. (O'rta qiymat haqidagi teorema). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzuliksiz bo'lsa, u holda bu kesmada shunday ξ nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral va Nyuton-leybonis formulasi.

Faraz qilaylik $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiya dan olingan integral



$$\int_a^b f(x)dx$$

bo'lsin.

Biz bilamizki integral o'zgaruvchini istalgan harf bilan belgilash mumkin, shuning uchun

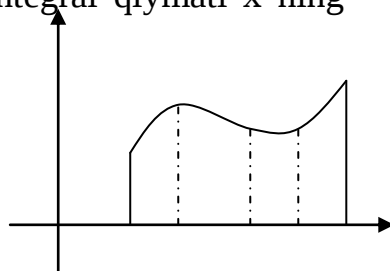
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$$

deylik.

Biz bilamizki agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa $[a,x]$ da ($a \leq x \leq b$) ya'ni $\forall x \in [a,b]$ ham integrallanuvchi bo'lib, integral qiymati x ning funksiyasi bo'ladi.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u)du \quad (1)$$

(1) integral egri chiziqli trapesiyaning yuzini ifodalaydi. Agar $[a,b]$ da x o'zgarsa $\Phi(x)$ ham o'zgarishi ravshan.



Teorema. Agar $f(u)$ funksiya $u=x \in [a,b]$ nuqtada uzuliksiz bo'lsa u holda $\int_a^x f(u)du$ integraldan yuqori chegarasi bo'yicha olingan hosila integral ostidagi funksiya teng bo'lib, unda integrallash o'zgaruvchisi o'rniga integralning yuqori chegarasi qo'yiladi, ya'ni

$$\Phi'(x) = f(x) \text{ yoki } \left(\int_a^x f(u)du \right)' = f(x) \text{ bo'ladi.}$$

Bu isbot qilingan, matematik analiz kursining asosiy teoremlarining biri bo'lgan teoremdan ko'rinadiki $[a,b]$ da uzuliksiz bo'lgan har qanday $f(x)$ funksiya uchun $\int_a^x f(u)du$ aniq integrak bshlang'ich funksiyasi cheksiz ko'p

bo'lgani uchun ularning ixtiyoriy bittasini $F(x)$ boshqasiga esa $\int_a^x f(u)du$ desak ular bir biridan o'zgaras sonda farq qiladi:

$$F(x) = \int_a^x f(u)du + C$$

O'zgaras C ni topish uchun, $x=a$ desak $F(a) = \int_a^a f(u)du + C \Rightarrow C = F(a), x=b$ desak

$$F(b) = \int_a^b f(u)du = F(a) \Rightarrow \int_a^b f(u)du = F(b) - F(a) \text{ yoki } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Nyuton-leybnis formulasi kelib chiqadi.

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b \text{ deb ham belgilanadi.}$$

Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash.

Faraz qilaylik bizda $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lgan funksiya $f(x)$ berilgan bo'lib, undan shu kesmada olingan $\int_a^b f(x)dx$ (1) aniq integral mavjud bolsin.

Bizning maqsad shu (1) aniq integralni hisoblash uchun o'zgaruvchini shunday almashtiraylikki natijada hosil bo'lgan aniq integral berilgan aniq integralga nisbatan ancha soda bo'lsin.

Teorema. Agar (1) da $x=\varphi(t)$ (2) almashtirish bajarganimizda $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

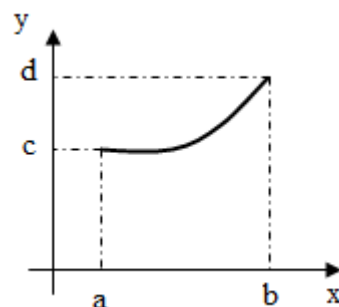
1. $\varphi(t)$ funksiya $[c,d]$ kesmadagi aniqlangan va uzuliksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega bo'lsin
2. yangi o'zgaruvchi t $[c,d]$ kesmada o'zgarganda $\varphi(t)$ funksiyaning qiymati $[a,b]$ dan chiqsin.
3. $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$ bo'lsin, bu holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$$\textbf{Misol.1)} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4}$$

$$2) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} \left| \begin{array}{l} x+1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x=3.da.t=2 \\ x=8.da.t=3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t dt = 2 \int_2^3 (t^2-1) dt = 10 \frac{2}{3};$$



Aniq integralda bo'laklab integrallash.

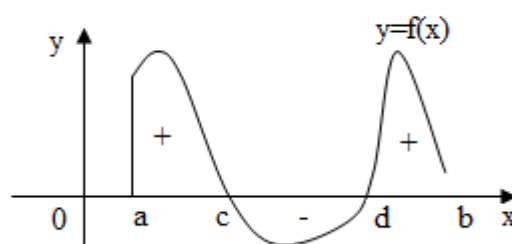
Teorema. Agar $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzuliksiz bo'lgan $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (1)$$

formula o`rinli bo`ladi.

1)

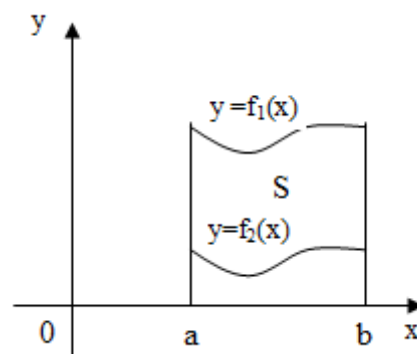
$$\int_0^1 \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctg x \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| = x \cdot \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$



2)

$$\int_1^2 x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, e^x dx = dv \\ du = dx, v = e^x \end{array} \right| = (x e^x) \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = (e^x (x-1)) \Big|_1^2 = e^2$$

Biz bilamizki agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan, aniqlangan uzuliksiz va $f(x) \geq 0$ bo`lsa, u holda yuqoridan tenglamasi  $y=f(x)$  bo`lgan egri chiziq bilan va yon tomonlaridan $x=a$, $x=b$, to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli



trapesiyaning yuzi $S = \int_a^b f(x) dx$ (1) bo`lar edi

a) Agar $[a,b]$ kesmada $f(x) < 0$ bo`lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dx \text{ integral qiymati ham manfiy bo`ladi, ya`ni } S = \int_a^b [-f(x)] dx = - \int_a^b f(x) dx$$

b) agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada ishorasini chekli son marta almashtirsa u holda $f(x) \geq 0$ bo`lgan kesmalar uchun alohida,  $f(x) < 0$  bo`lgan kesmalar uchun alohida aniq integrallar hisoblanib so`ngra ular qo`shiladi

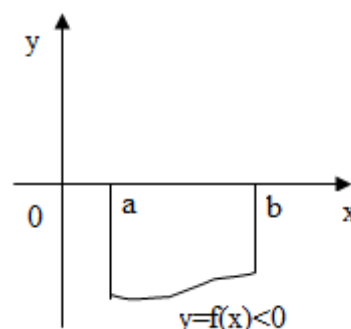
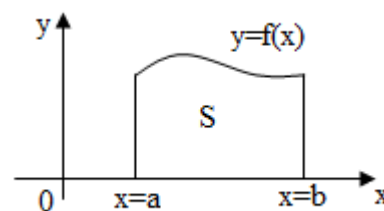
$a < c < d < b$ bo`lsa

$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

Aslida yuzalar manfiy bo`lmagani uchun yuzalar yig`indisinin odatdagi ma`noda hosil qilish uchun integrallar absolyut qiymatlar yig`indisini olish kerak ya`ni

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

c) Agar yuqoridan $y=f_1(x)$, pastdan $y=f_2(x)$ egri chiziqlar bilan yon tomonlardan esa $x=a$, $x=b$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan yuza $f_1(x) \geq f_2(x)$, $a < b$ bo`lgan holda



$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx \quad (2) \text{ formula bilan hisoblanadi.}$$

g) agar egri chiziqli trapesiyamiz yuqoridan parametrik tenglamasi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($a \leq t \leq \beta$ va $\varphi(a)=a, \varphi(\beta)=b$) bo'lgan negri chiziq bilan chegaralangan

bo'lsa, u holda bu yuzani topish uchun $S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$ formulada $x=\varphi(t)$ $dx=\varphi'(t)$

$y=f(x)=f[\varphi(t)]=\psi(t)$ almashtirish bajarsak $S = \int_a^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \quad (3) \text{ formula hosil bo'ladi.}$

Chegarasi cheksiz bo'lgan integral.

Biz $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralda chegaralari chekli bo'lib, integral ostidagi funksiya uzluksiz va chegaralangan bo'lsin degan edik. Endi bu shartlarning bajarilmagan hollarini ko'raylik.

$f(x)$ funksiya $[a, +\infty]$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz va uning ixtiyoriy chekli qismida integrallanuvchi bo'lsin, Ixtiyoriy $B > a$ sonni olamiz. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ ($a < B < +\infty$) da integrallanuvchi.

Demak $\int_a^B f(x)dx$ integral b ning funksiyasi bo'ladi $F(B) = \int_a^B f(x)dx$.

Ta'rif. Agar $B \rightarrow +\infty$ da $\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x)dx$ chekli limit mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x)$

funksiyaning $[a, +\infty]$ oraliqdagi xosmas integrali deyiladi va $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

ko'rinishda yoziladi. Demak ta'rifga ko'ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x)dx$ bo'ladi. Bu

holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralni mavjud yoki yaqinlashuvchi deyiladi.

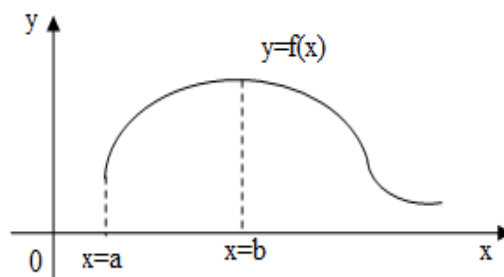
Agar $-\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x)dx$ chekli limit mavjud

bo'lmasa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralni

mavjud emas yoki uzoqlashuvchi deyiladi.

Agar $f(x) > 0$ desak xosmas integralning

geometric ma'nosi $y = f(x)$, $x = a$, $y = 0$ chiziqlar orasidagi cheksiz soha yuzini ifodalashi chizmadan ko'rinadi.



Xuddi shuningdek $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ integralni ko'rsak $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x)dx$

Agar xosmas integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ko'rinishda bo'lsa, u holda quyidagi ikkita xosmas integrallar yig'indisi sifatida qaraladi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \quad c \in]-\infty, +\infty[$$

Agar o'ng tomondagi xosmas integrallarning har bir mavjud bo'lsa, u holda chap tomondagi integral mavjud bo'ladi.

Misol. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \arctg|_A^0 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \arctg|_0^B = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{Demak xosmas integral}$$

yaqinlashuvchi ekan.

Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar

Aniq integralni hisoblang.

1. $\int_1^3 (2x^2 + 5)dx$

j: $\frac{82}{3}$

2. $\int_1^4 \sqrt{x}dx$

j: $\frac{14}{3}$

3. $\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$

j: $\frac{45}{4}$

4. $\int_1^5 (3x^2 + x)dx$

j: 136

5. $\int_0^1 (3x^4 + \sqrt{x})dx$

j: $\frac{5}{3}$

6. $\int_1^3 (3x^2 + 6x)dx$

j: 50

7. $\int_1^5 3\sqrt{x-1}dx$

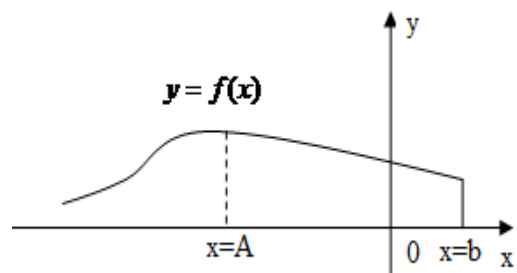
j: 16

8. $\int_1^2 e^{3x} dx$

j: $\frac{e^6 - e^3}{3}$

9. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} \ln x dx$

j: 3



$$10. \int_{-1}^8 (\sqrt[3]{x} + \frac{4}{x+2}) dx \quad j: \frac{45}{4} - 4 \ln 10$$

$$11. \int_0^1 \ln(x+1) dx \quad j: 2 \ln 2 - 1$$

$$12. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx \quad j: \frac{\pi}{2} - 1$$

$$15. \int_1^2 \frac{4}{x+1} dx \quad j: \ln \frac{81}{16}$$

$$16. \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx \quad j: \frac{1}{3} \ln 3$$

$$17. \int_0^{\pi} x \cos x dx \quad j: -2$$

Aniq integral yordamida egri chiziqli trapesiyaning yuzasini topish.

$$18. y = 3x + 1 \quad x = 1, \quad x = 5, \quad y = 0 \quad j: S = 40 \text{ kv. bir.}$$

$$19. y = 2x - x^2 \quad y = 0$$

$$20. y = x^2 - 5x \quad y = 0$$

$$21. y = x + 6 \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0$$

$$22. y = \sqrt{x} \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0$$

$$23. y = \sqrt[3]{x} \quad x = 1, \quad x = 8, \quad y = 0$$

$$24. y = 4x - 2x^2 \quad y = 0$$

$$25. y = x^2 - 5x + 6 \quad y = 0$$

$$26. y = \sqrt{2x+1} \quad x = 0, \quad x = 4$$

$$27. y = 2x + 4 \quad x = 1, \quad x = 3$$

$$28. y = \sqrt[3]{x+3} \quad x = -2$$

$$29. y = 4x^2 \quad x = 0, \quad x = 5$$

Mustaqil yechish uchun misollar

$$30. \int_1^4 (\sqrt{x} + 5x) dx \quad j: \frac{73}{6}$$

$$31. \int_1^4 (3x^2 + 6\sqrt{x}) dx \quad j: 91$$

$$32. \int_1^{10} (x+5) dx \quad j: \frac{189}{2}$$

$$33. \int_1^4 (\sqrt{x} + \frac{4}{x^3}) dx \quad j: \frac{57}{24}$$

$$34. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx \quad j: \frac{1}{3}$$

35. $\int_0^1 x e^{-x} dx$	javob: $1 - \frac{2}{e}$
36. $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$	javob: $\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$
37. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$	javob: $\frac{\pi^2}{4} - 2$
38. $\int_1^2 x \ln x dx$	javob: $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$
39. $\int_1^2 x^2 e^x dx$	javob: $e - 2$
40. $\int_{-1}^1 (x+1)e^x dx$	javob: $e + \frac{1}{e}$

Aniq integral yordamida egri chiziqli trapesiyaning yuzasini topish.

41. $y = 2x^3$	$x = 1, x = 3$
42. $y = 5x^4 + 1$	$x = 0, x = 2, y = 0$
43. $y = \sqrt[3]{2x-3}$	$x = 2, x = 64, y = 0$
44. $y = 5x^2 - 1$	$x = 1, x = 4, y = 0$
45. $y = 3x + 6$	$x = 2, x = 5, y = 0$
46. $y = 6x - x^2$	$y = 0$
47. $x - 4y + 2 = 0$	$x + y - 3 = 0 \quad y = 0$
48. $y^2 = 4x$	$x = 4, x = 9$
49. $y = 8 + 2x - x^2$	$2x - y + 4 = 0$
50. $y = 5x$	$x = 2, y = 0$

Adabiyotlar

1. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent "..." 2013y
2. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. "..." 2014 y
3. Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent "O'qituvchi", 1992 y
4. Fixtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
5. Lobatskaya N. L. "Osnovi visshey matematiki" Moskva 1987 g

13. Aniq integralni taqribiy hisoblash.

To'g'ri to'rtburchaklar formulasi

Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Aniq integralni taqribiy hisoblash.

Vazifalar: Aniq integralni taqribiy hisoblashni o'rganish. Misollar yordamida tushuntirish.

Talaba bilishi lozim:

- Aniq integralni taqribiy hisoblashning to'g'ri to'rtburchaklar usuli.
- Aniq integralni taqribiy hisoblashning trapetsiyalar usuli.
- Aniq integralni taqribiy hisoblashning Simpson usuli

Talaba bajara olishi lozim: Aniq integralni taqribiy hisoblashi kerak.

Motivasiya: Jarayonlarni grafik ko'rinishda tasvirlash orqali uni qanday keshishini holatini aniqlash mumkin.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Kimyo va fizik jarayonlarni o'rganishda ishlatiladi.

Mashg'ulotning mazmuni: Aniq integralni taqribiy hisoblash.

Mashg'ulotning maqsadi: Aniq integralni

taqribiy hisoblashning usullarini o'rganish.

Nazariy qism:

$[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyadan olingan

$$\int_a^b f(x) dx$$

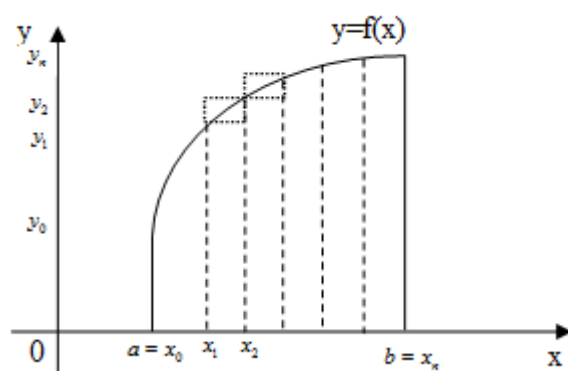
integralni hisoblashni ko'raylik.

$[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

nuqtalar bilan uzunliklari bir xil, ya'ni Δx bo'lgan n ta eng bo'laklarga

ajrataylik. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ bo'lsin. Endi $y = f(x)$ funksiyaning $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

nuqtalardagi $y = f(x)$ qiymatlarini mos ravishda



$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ deb belgilab quyidagi yig'indilarni tuzaylik. $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \dots + y_{n-1}\Delta x$ va bu yig'indilarning har biri $f(x)$ funksiya

uchun $[a, b]$ kesmada tuzilgan integral yig'indi bo'ladi. Shuning uchun $\int_a^b f(x)dx$ integralning taqribiy qiymati

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) \quad (2)$$

(1) va (2) formulalar to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.

Chizmadan ko'rinadiki agar $f(x)$ musbat va o'suvchi funksiya bo'lsa, u holda (1) formula ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan zinapoyasimon shaklning yuzini tasvirlaydi. (2) formula esa tashqi to'rtburchaklardan tuzilgan zinapoyasimon shaklning yuzini tasvirlaydi. Bu formulalar bilan hisoblanganda qo'yiladigan xatolik n soni qancha katta bo'lsa,

ya'ni $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ qancha kichik bo'lsa, shuncha kam bo'ladi.

Misol. $\int_1^2 \sqrt{x}dx$ integralni $n=10$ bo'lgan holda to'g'ri to'rtburchaklar formulasi

bilan hisoblang. **Yechish.** $y = f(x) = \sqrt{x}$; $n=10$; $\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1$

$x: x_0 = 1; x_1 = x_0 + \Delta x = 1 + 0,1 = 1,1; x_2 = x_1 + \Delta x = 1,1 + 0,1 = 1,2; x_3 = 1,3; x_4 = 1,4;$

$x_5 = 1,5; x_6 = 1,6; x_7 = 1,7; x_8 = 1,8; x_9 = 1,9; x_{10} = 2.$

$$y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{1} = 1 \quad y_5 = \sqrt{1,5} = 1,225$$

$$y_1 = \sqrt{x_1} = 1,049 \quad y_6 = \sqrt{1,6} = 1,265$$

$$y_2 = \sqrt{x_2} = 1,095 \quad y_7 = \sqrt{1,7} = 1,304$$

$$y_3 = \sqrt{x_3} = 1,14 \quad y_8 = \sqrt{1,8} = 1,342$$

$$y_4 = \sqrt{x_4} = 1,183 \quad y_9 = \sqrt{1,9} = 1,378$$

Agar (1) formula bo'yicha hisoblasak

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx \approx 0,1(1 + 1,049 + 1,095 + 1,14 + 1,183 + 1,225 + 1,265 + 1,304 + 1,342 + 1,378) = 0,1 \cdot 11,981 \approx 1,20$$

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx \approx 1,2$$

Endi Nyuton-Leybnis formulasi bo'yicha hisoblaylik

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx = \int_1^2 x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \approx 1,219$$

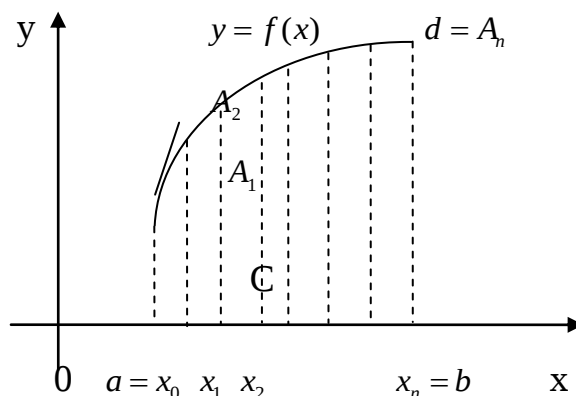
haqiqatan integralning qiymati $[1,2]$ kesmada bo'lar ekan.

Trapesiyalar formulasi.

Agar $y = f(x)$ egri chiziqni to'g'ri to'rtburchaklar formulasidagidek zinapoyasimon ko'rinishdagi to'g'ri chiziqlar bilan emas, balki ichki chizilgan siniq chiziqlar bilan almashtirsak, u holda aniq integralni hisoblashdagi xatolik ancha kam bo'lishi tabiiydir. Bu holda $acdb$ egri chiziqli trapesiyaning yuzi taxminan yuqoridan $CA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ vatarlar bilan chegaralangan to'g'ri chiziqli trapesiyalar yuzalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Bu to'g'ri chiziqli trapesiyalarni yuzalari mos ravishda

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x, \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x, \dots, \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x,$$



bo'lgani uchun

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x \quad \text{yoki} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{bo'lgani uchun}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \quad (3)$$

(3) ga trapesiyalar formulasi deyiladi.

Misol. $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{8+x^3}}$ integralni $n=5$ da taqribiy hisoblang.

Yechish. $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{8+x^3}}$; $n=5$; $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{6-1}{5} = 1$; $\Delta x = h = 1$

$$x_0 = 1; x_1 = x_0 + \Delta x = x_0 + h = 1 + 1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 4; x_4 = 5; x_5 = 6$$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{8+1}} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

$$y_1 = f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{8+8}} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$y_2 = f(x_2) \approx 0,16, y_3 \approx 0,12, y_4 \approx 0,09, y_5 = 0,07$$

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{8+x^3}} = 1 \cdot \left[\frac{0,33+0,07}{2} + 0,25 + 0,16 + 0,12 + 0,09 \right] = 0,82$$

Simpson (parabolalar) formulasi.

$\int_a^b f(x)dx$ integralni taqribiy hisoblash talab qilinsin. Buning uchun $[a, b]$ ni $n=2m$ sondagi juft bo'lgan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2m-1} < x_{2m} = b$ nuqtalar orqali $[x_{i-1}, x_i]$ bo'lakchalarga ajratib, $f(x)$ funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_{2m-1} = f(x_{2m-1}), y_{2m} = f(x_{2m})$ deylik.

Endi har bir $[x_{i-1}, x_i]$ ($k = \overline{1, 2m}$) oraliqga mos kelgan $y = f(x)$ funksiya grafigini parabola yoyi bilan almashtiraylik. U holda $acdb$ egri chiziqli trapesiyaning yuzi taxminan yuqoridan parabola yoylari bilan almashtirilgan bo'lakchalar yuzalarining yig'indisiga teng bo'ladi. Yuqoridan parabalo yoylari bilan chegaralangan shakllar yuzalarini hisoblab qo'shsak quyidagi formula kelib chiqadi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} [y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})]$$

yoki $n=2m$ bo'lgani uchun $\Delta x = h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m} [y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})] \quad (4)$$

(4) ga Simpson yoki parabolalar formulasi deyiladi.

Misol. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralni $n=2m=8$ bo'lganda hisoblang.

Yechish. $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\Delta x = h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8} = 0,125$

$x_0 = 0$; $x_1 = x_0 + h = x_0 + \Delta x = 0 + 0,125 = 0,125$; $x_2 = x_1 + h = 0,125 + 0,125 = 0,25$;

$x_3 = x_2 + h = 0,25 + 0,125 = 0,375$; $x_4 = 0,375 + 0,125 = 0,5$; $x_5 = 0,5 + 0,125 = 0,625$;

$x_6 = 0,625 + 0,125 = 0,75$; $x_7 = 0,75 + 0,125 = 0,875$; $x_8 = 0,875 + 0,125 = 1$

$y_0 = 1$;

$y_1 = 0,984625$, $y_2 = 0,941176$, $y_3 = 0,876712$, $y_4 = 0,8$, $y_5 = 0,719101$,

$y_6 = 0,64$, $y_7 = 0,566389$, $y_8 = 0,5$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{0,125}{3} [1 + 0,5 + 2(0,941176 + 0,8 + 0,64 + 0,5) + 4(0,984615 + 0,876712 + 0,719101 + 0,566371)] = \frac{1}{24} [18,849548] \approx 0,8274025$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7853979 \text{ demak Simpson formulasidagi xatolik juda kam}$$

bo'lar ekan.

Eslatma. $\int_a^b f(x)dx$ integralni (1) yoki (2) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi

yordamida taqribiy hisoblaganda quyidagi xatolik $R_1 = \frac{M_1}{4n}(b-a)^2$ formula bilan hisoblanadi. Bu yerda $M_1 = |f'(x)|$ ning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

$\int_a^b f(x)dx$ integralni (3) trapesiyalar va (4) Simpson formulalari bilan taqribiy hisoblagandagi qo'yiladigan xatoliklar mos ravishda quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$R_2 = \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3; \quad R_3 = \frac{M_3}{2880n^4}(b-a)^5$$

$M_2 = |f''(x)|$ ning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymati, M_3 esa $|f^{IV}(x)|$ ning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar

1. $\int_0^3 \sqrt{1+x^3} dx \quad n=6$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 - \cos 2x} dx \quad n=8$

3. $\int_0^4 \frac{dx}{1+x^4} \quad n=6$

Adabiyotlar

1. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent "..." 2013y
2. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. "..." 2014 y
3. Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent "O'qituvchi", 1992 y
4. Fikhtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
5. Lobatskaya N. L. "Osnovi visshey matematiki" Moskva 1987 g

14. Ko'p argumentli funksiya. Aniqlanish sohasi va uzluksizligi. Ikki argumentli funksiya differensial.

Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Ko'p argumentli funksiya haqida ma'lumot berish.

Vazifalar: Ko'p argumentli funksiya aniqlanish sohasini, differensialini hisoblashni o'rganish. Misollar yordamida tushuntirish.

Talaba bilishi lozim:

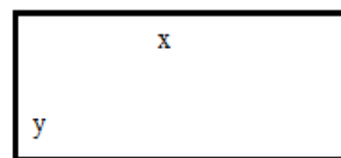
- Ko'p argumentli funksiya ta'rifi
- Ko'p argumentli funksiya aniqlanish sohasi.
- Ko'p argumentli funksiya limiti.
- Ko'p argumentli funksiya 1-, 2- tartibli xususiy hosilalari
- Ko'p argumentli funksiya to'la differensial

Talaba bajara olishi lozim: Ko'p argumentli funksiya aniqlanish sohasini, xususiy hosilalarini hisoblashi kerak.

Motivasiya: Jarayonlarni grafik ko'rinishda tasvirlash orqali uni qanday keshishini holatini aniqlash mumkin.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Kimyo va fizik jarayonlarni o'rganishda ishlatiladi.

Mashg'ulotning mazmuni: Ko'p argumentli funksiya ta'rifi. Ko'p argumentli funksiya aniqlanish sohasi. Ko'p argumentli funksiya limiti. Ko'p argumentli funksiya 1-, 2- tartibli xususiy hosilalari



Mashg'ulotning maqsadi: Ko'p argumentli funksiya aniqlanish sohasini topishni, 1-, 2-tartibli xususiy hosilalarini, to'la differensialini hisoblashni o'rganish.

Nazariy qism:

Biz shu vaqtgacha faqat bitta argument (x) ga bog'liq bo'lgan funksiyalarni o'rgandik. Lekin qiymatni bittagina emas, balki bir necha boshqa miqdorlarga bog'liq erksiz miqdorlar ham tez-tez uchrab turadi. Misollar ko'raylik

1) To'g'ri to'rburchak perimetri (z) – ikki argumentning: eni (x) va bo'yi (y) ning funksiyasidir: $z = 2x + 2y$.

2) trapetsiyaning yuzi uchta argument funksiyasidir: $z = \frac{x+y}{2}h$.

3) Markaziy koordinatalar boshida x bo'lgan shar sirtidagi har bir nuqtaning applikatasi (z) bu nuqta h $z = \frac{x+y}{2}h$ absissasi va ordinatasi (x va y) ning funksiyasidir:

$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ yoki } x^2 - y^2 + z^2 = R^2.$$

1-ta'rif. Agar $x, y, z, \dots, t$ o'zgaruvchilar qabul qila oladigan har bir qiymatlar to'plamiga u miqdor x, y, z bog'liqmas miqdorlarning funksiyasi deb ataladi va $u = f(x, y, z, \dots, t)$ kabi yoziladi.

2-ta'rif. $u = f(x, y, z, \dots, t)$ funksiyasining mavjudlik (aniqlanish) sohasi deb $x, y, z, \dots, t$ argumentlarning shunday qiymatlari sistemalari to'plamiga aytiladiki, bunday har bir qiymatlar sistemasi uchun u ning muayyan haqiqiy son qiymati mos keladi.

Masalan, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi x va y ning $x^2 + y^2 \leq 4$ tenglikni qiymatlaridan, ya'ni markazi koordinatalar boshida bo'lib, radiusi 2 ga teng bo'lgan doira ichidagi nuqtalardan iborat.

Ikki argumentli funksiya limiti. Funksiya orttirmalari.

3-ta'rif. Agar $z = f(x, y)$ funksiyasining $M_0(x_0; y_0)$ nuqtaga yetarlicha yaqin hamma $M(x; y)$ nuqtalari uchun $f(x, y) - a$ ayirmaning absolyut qiymati oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ dan kichik bo'lsa, ya'ni $|f(x, y) - a| < \varepsilon$ bo'lsa, a son $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada $f(x, y)$ funksiyaning limiti deyiladi.

4-ta'rif. $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada $f(x, y)$ funksiya argumentlarining cheksiz o'zgarishi z ning kichik o'zgarishi mos kelsa, boshqacha aytganda, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$

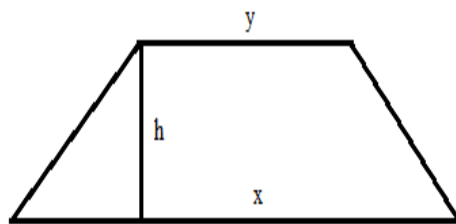
tenglik bajarilsa, z funsiya M_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

5-ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning x argumenti bo'yicha esa xususiy orttirmasi deb faqat x nigina o'zgaruvchi (y ni esa o'zgarmas) deb topilgan.

$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ orttirma aytiladi.

Shuningdek, y bo'yicha xususiy orttirma quyidagicha boladi: $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Misol. $z = x \cdot y$ funksiya xususiy orttirmalarini toping. Ularni geometrik tasvirlang.



Yechish chizmadan ko'rish mumkin $\Delta x = z = (x + \Delta x) \cdot y - x \cdot y = y\Delta x$,
 $\Delta_y z = x(y + \Delta y) - x \cdot y = x\Delta y$

Bir argumentli funksiya orttirmasi kabi ikki argumentli funksiya orttirmalari ham real ma'noga ega ekan.

Uch o'zgaruvchili tenglama geometrik jihatdan biror sirtini ifoda etadi. Chindan ham xOy tekislikdagi $M(x, y)$ nuqta $f(x, y)=0$ chiziqda joylashgan bo'lsa, $z=f(x, y)$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar xOy tekislik bilan kesimi $f(x, y)=0$ chiziqdan iborat sirtini ifoda etadi.

Ikki argumentli funksiyaning xususiy hosilalari.

1-ta'rif. $z=f(x, y)$ funksiyaning x argumenti bo'yicha xususiy hosilasi deb ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y) \text{ limitiga aytiladi.}$$

Shuningdek, y argumenti bo'yicha xususiy hosilasi

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y) \text{ bo'ladi.}$$

Misollar. 1. $z = 7x^3 + 3x^2y^3 - xy^5 - 6y + 1$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 21x^2 + 6x \cdot y^3 - y^5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 5xy^4 - 6.$$

2. $z = x^y$; $z'_x = ? \quad z'_y = ?$

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}. \quad z'_y = x^y \ln x.$$

(chunki ikkinchi holda x o'zgarmas bo'lib, y ko'rsatkichli funksiya bo'ladi.)

Funksiyaning xususiy hosilalari yana funksiya dan iborat.

3-ta'rif. Birinchi tartibli xususiy hosiladan yana bir marta olingan xususiy hosila ikkinchi tartibli xususiy hosila deb ataladi vs quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xx}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xy}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yx}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yy}.$$

3. $z = 3x^2y - 4xy^2 + 5x - 7y$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

Yechish.

$$z'_x = 6y - 4y^2 + 5.$$

$$z'_y = 3x^2 - 8xy - 7.$$

$$z''_{xx}=6y.$$

$$z''_{yy}=-8x$$

$$z''_{xy}=6x-8y.$$

$$z''_{yx}=6x-8y.$$

Bulardan ko'rinadiki $z''_{xy}=z''_{yx}$ yoki $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy differensiyalari.

$y=f(x)$ ning differensial kabi $z=f(x, y)$ ning differensial to'g'risida fikr yuritish mumkin.

Birinchi tartibli xususiy hosila ta'rifiga ko'ra: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ edi. Bundan limit

ta'rifiga ko'ra: $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} - \frac{\partial z}{\partial x} = \alpha_1$ (α_1 —cheksiz kichik miqdor), bundan

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \alpha_1 \Delta x. \quad (1)$$

Demak, z funksiyaning x argument bo'yicha orttirmasi ikki qismdan iborat ekan.

Ta'rif. orttirmaning bosh qismi bo'lgan $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x$ ko'paytmaga z funksiyaning x argument bo'yicha *xususiy differensial* deb ataladi va $d_x z$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$ yoki $\Delta x = dx$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx.$$

(1) dan

$$\frac{d_x z}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad (1')$$

ya'ni xususiy differensialning mos argument differensialiga bo'lgan nisbati mos xususiy hosi-laga teng bo'ladi. Xuddi (1)ga o'zshash.

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy \text{ yoki } \frac{[d_y z]}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Misol. $z = \ln \operatorname{tg}(x^2 - 3y)$ funksiyaning xususiy differensiallarini toping.

$$\text{Yechish. } d_x z = \frac{1}{\operatorname{tg}(x^2 - 3y)} \cdot \frac{2x \cdot dx}{\cos^2(x^2 - 3y)} = \frac{4x \cdot dx}{\sin 2(x^2 - 3y)} dx.$$

$$d_y z = \frac{1}{\operatorname{tg}(x^2 - 3y)} \cdot \frac{-3 \cdot dy}{\cos^2(x^2 - 3y)} = -\frac{6 \cdot dy}{\sin 2(x^2 - 3y)}.$$

Funksiyaning to'liq orttirmasi va to'liq differensial.

1-ta'rif. $z=f(x, y)$ funksiyaning to'liq orttirmasi deb uning hamma argumentlari o'zgarishi natijasida olingan orttirmaga aytiladi:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Umuman aytganda to'liq orttirma xususiy irttirmalar yig'indisiga teng emas, ya'ni $\Delta z \neq \Delta_x \cdot z + \Delta_y z$.

Misol.

1. $z=xy$ funksiyaning to'liq orttirmasini toping.

Yechish $\Delta z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y = y \cdot \Delta x + x \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y$.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_x z = y \cdot \Delta x \\ \Delta_y z = x \cdot \Delta y \end{array} \right\} \text{Demak, } \Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta x \cdot \Delta y.$$

2. $z=x^2-xy+y^2$ funksiya berilgan. $\Delta_x z, \Delta_y z$ va Δz larni toping. Agar x miqdor 2 dan 2,1 gacha y esa 2 dan 1,9 gacha o'zgarsa, $\Delta_x z, \Delta_y z$ va Δz larni hisoblang.

Yechish.

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta_x z &= (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) \cdot y + y^2 + x^2 + xy - y^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - xy - y \cdot \\ &\cdot \Delta x - x^2 + xy = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - y \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \Delta_y z &= x^2 - x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 = -xy - x + \Delta_y + y^2 + 2y \cdot \Delta y + \\ &+ (\Delta y)^2 + xy - y^2 = 2 \cdot \Delta y - x \cdot \Delta y + (\Delta y)^2; \end{aligned}$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 + x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 -$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -xy - x \cdot \Delta y - y \Delta x - \Delta x \Delta y + y^2 + 2y \cdot \Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 &= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - y \cdot \\ &\cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y + (\Delta y)^2 - x \Delta y - \Delta x \Delta y = \Delta_x z + \Delta_y z - \Delta x \cdot \Delta y. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_x z = (2 \cdot 2 + 0,1) \cdot (0,1) = 0,21. \\ \Delta_y z = (-2 + 2,2 - 0,1) \cdot (0,1) = 0,19 \\ \Delta z = 0,21 + (0,19) - 0,1(-0,1) = 0,03. \\ \Delta_x z = \Delta_y z = 0,21 + (-0,19) = 0,02. \end{array} \right\}$$

Yuqoridagilardan ko'ramizki, xususiy orttirmalar yig'indisi to'liq orttirmadan kam farq qilar ekan.

2-ta'rif. to'liq orttirmaning bosh qismga, ya'ni $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ yoki

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ ga funksiyaning *to'liq differensial* deb ataladi (bu yerda

$\Delta x = dx, \Delta y = dy$). (I) ni quyidagicha yozsa ham bo'ladi:

$$dz = d_x z + d_y z. \quad (1)$$

Xususiy differensiallar yig'indisi to'liq differensialga teng bo'ladi.

To'liq differensialga ega bo'lgan funksiyaning differensiallanuvchi deb ataladi.

3. $z=xy$ funksiyaning to'liq orttirmasi va to'liq differensiallarini toping.

Natijalarini solishtiring.

Yechish.

$$\text{a) } \Delta z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y;$$

$$b) dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = (x \cdot y)_x \cdot \Delta x + (x \cdot y)_y \cdot \Delta y = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y.$$

c) $\Delta z - dz = \Delta x \cdot \Delta y$. (Agar $\Delta x = 0,2$ va $\Delta y = 0,3$ desak, $\Delta x \cdot \Delta y = 0,06$ ya'ni farq kichik bo'ladi.) Demak $\Delta z \approx dz$

4. $z = y^y$ ning xususiy qiymati deb $1,08^{3,90}$ ni taqribiy hisoblang.

Yechish.

$$a) dx = \Delta x = 1,08 - 1 = 0,08; x_1 = x = 1$$

$$dy = \Delta y = 3,86 - 4 = -0,04; y_1 = y = 4.$$

$$b) f(x, y) = f(1; 4) = 1^4 = 1.$$

$$c) dz = z'_x \cdot dx + (x^y)'_y \cdot dy = y \cdot x^{y-1} dx + x^y \cdot \ln x \cdot dy.$$

$$z + \Delta z \approx z + dz = f(x, y) + dz = f(1; 4) + 4 \cdot 1^{4-1} \cdot 0,08 + 1^4 \ln 1 \cdot (-0,04) = 1 + 4 \cdot 0,08 - 1 \cdot 0(0,04) = 1 + 0,32 = 1,32.$$

Shunday qilib, $1,08^{3,90} \approx 1,39$.

Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar

Ikki o'zgaruvchili funktsiyani aniqlanish sohasini toping.

$$1. z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$j: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$2. z = \frac{x+2}{x^2+y}$$

$$j: y \neq -x^2$$

$$3. z = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{5}$$

$$j: x^2 + y^2 \leq 4$$

$$4. z = x^2 - 4yx$$

$$j: (-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty)$$

$$5. z = \sin(xy^2 - 6x)$$

$$j: (-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty)$$

$$6. z = \log_4(5x - y)$$

$$j: y < 5x$$

$$7. z = \frac{4}{x-y}$$

$$j: y \neq x$$

$$8. z = 5 \sin(4x^2 - y)$$

$$j: (-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty)$$

$$9. z = \frac{2}{x+y-4}$$

$$j: y \neq 4 - x$$

$$10. z = \log_2(x - y)$$

$$j: x > y$$

$$11. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$$

$$j: x^2 + y^2 \geq 25$$

$$12. z = \log_2(x^2 - y + 4)$$

$$j: y < x^2 + 4$$

$$13. z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 16}}{x - y}$$

$$j: x^2 + y^2 \geq 16; x \neq y$$

$$14. z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$j: x^2 + y^2 \leq 9$$

$$15. z = \frac{5x}{x+y-1}$$

$$j: y \neq 1-x$$

$$16. z = \frac{x-y}{x+y-14}$$

$$j: y \neq 14-x$$

$$17. z = \frac{5x-y}{y^2-x+2}$$

$$j: y^2 \neq x-2$$

$$18. z = 4\sqrt{36-x^2-y^2}$$

$$j: x^2 + y^2 \leq 36$$

$$19. z = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$$

$$j: (-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty)$$

$$20. z = \frac{2\sqrt{x^2+y^2-49}}{x^2+y^2}$$

$$j: x^2 + y^2 \geq 49; x \neq 0; y \neq 0$$

$$21. z = \frac{13x}{x^2-y^2}$$

$$j: |x| \neq |y|$$

$$22. z = \sin(2x+y-4)$$

$$j: (-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty)$$

Hususiyl hosilalarini toping

$$1. f(x, y) = e^{xy}$$

$$j: f'_x = ye^{xy}; f'_y = xe^{xy}$$

$$2. f(x, y) = xy^2$$

$$j: f'_x = y^2; f'_y = 2xy$$

$$3. f(x, y) = xe^y$$

$$j: f'_x = e^y; f'_y = xe^y$$

$$4. f(x, y) = x \ln y$$

$$j: f'_x = \ln y; f'_y = \frac{x}{y}$$

$$5. f(x, y) = \sin(xy)$$

$$j: f'_x = y \cos(xy); f'_y = x \cos(xy)$$

$$6. f(x, y) = \ln xy$$

$$j: f'_x = \frac{1}{x}; f'_y = \frac{1}{y}$$

$$7. f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$j: f'_x = 2x; f'_y = 2y$$

$$8. f(x, y) = \frac{1}{xy}$$

$$j: f'_x = -\frac{1}{x^2 y}; f'_y = -\frac{1}{xy^2};$$

$$9. f(x, y) = x^2 - 2xy$$

$$j: f'_x = 2(x-y); f'_y = -2x;$$

$$10. f(x, y) = y \ln x$$

$$j: f'_x = \frac{y}{x}; f'_y = \ln x;$$

$$11. f(x, y) = xy$$

$$j: f'_x = y; f'_y = x;$$

$$12. f(x, y) = xy^2$$

$$j: f'_x = y^2; f'_y = 2xy;$$

$$13. f(x, y) = 2y - x^2$$

$$j: f'_x = -2x; f'_y = 2;$$

$$14. f(x, y) = x \sin y$$

$$j: f'_x = \sin y; f'_y = x \cos y;$$

$$15. f(x, y) = \ln \frac{x}{y}$$

$$j: f'_x = \frac{1}{x}; f'_y = -\frac{1}{y};$$

$$16. f(x, y) = x \cos y$$

$$j: f'_x = \cos y; f'_y = -x \sin y;$$

17. $f(x, y) = \cos xy$ j: $f'_x = -y \sin(xy); f'_y = -x \sin(xy)$
18. $f(x, y) = ye^x$ j: $f'_x = ye^x; f'_y = e^x$
19. $f(x, y) = (xy)^2$ j: $f'_x = 2xy^2; f'_y = 2x^2y$
20. $f(x, y) = e^x + y$ j: $f'_x = e^x; f'_y = 1$
21. $f(x, y) = e^{yx} + y^2$ j: $f'_x = ye^{xy}; f'_y = xe^{xy} + 2y$
22. $f(x, y) = \cos x^2y + 3y^2$ j: $f'_x = -2xy \sin x^2y;$
 $f'_y = -x^2 \sin x^2y + 6y$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $f(x, y) = x^2 \sin y.$ j: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y.$
2. $f(x, y) = x^y.$ j: $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x.$
3. $f(x, y) = x^2 + y^2.$ j: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$
4. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2.$ j: $2x + y, x + 2y$
5. $f(x, y) = (5x^2y - y^3 + 7)^3.$ j: $\frac{\partial f}{\partial x} = 30xy(5x^2y - y^3 + 7); \frac{\partial f}{\partial y} = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2).$
6. $f(x, y) = \arctg(x/y).$ j: $\frac{\partial f}{\partial x} = y/(x^2 + y^2); \frac{\partial f}{\partial y} = -x/(x^2 + y^2).$
7. $f(x, y) = e^{xy}.$ j: $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$
8. $f(x, y) = \ln \cos(y/x).$ j: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

$$\begin{aligned}
9. f(x, y) &= x^2 + y^3. & j : \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 \\
10. f(x, y, z) &= e^{x/y} + e^{z/y}. & j : \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{y} e^{x/y}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{x/y} - \frac{z}{y^2} e^{z/y}, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y} e^{z/y}. \\
11. f(x, y) &= (x^2 + y^2)^2. & j : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 12x^2 + 4y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^2 + 12y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy. \\
12. f(x, y) &= \frac{x-y}{x+y}. & j : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -4y/(x+y)^3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x/(x+y)^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2y-2x)/(x+y)^3. \\
13. f(x, y) &= \ln \sqrt{x^2 + y^2}. & j : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2xy/(x^2 + y^2)^2 \\
14. f(x, y) &= y \ln x. & j : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -y/x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1/x \\
15. f(x, y) &= xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4. & j : df &= (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y + 8y^3)dy. \\
16. f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}. & j : df &= (xdx + ydy)/\sqrt{x^2 + y^2}. \\
17. f(x, y) &= \sin(xy). & j : df &= (ydy + xdy)\cos(xy) \\
18. f(x, y) &= \arcsin(x/y). & j : df &= (ydx - xdy)/(y\sqrt{y^2 - x^2}) \\
19. f(x, y) &= \ln(xy). & j : df &= dx/x + dy/y. \\
20. f(x, y) &= e^{x^2+y^2}. & j : df &= 2e^{x^2+y^2}(xdx + ydy).
\end{aligned}$$

Adabiyotlar

1. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent " " 2013y
2. Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. " " 2014 y
3. Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent "O'qituvchi", 1992 y
4. Fikhtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
5. Lobatskaya N. L. "Osnovi visshey matematiki" Moskva 1987 g

15. Differensial tenglamalar. O'zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglamalar. Bir jinsli differensial tenglamalar. Chiziqli differensial tenglamalar. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar. Bir jinsli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamalar. Mashg'ulotni o'tkazish joyi: auditoriya.

Mashg'ulotning jihozlanishi: o'quv uslubiy majmua, ma'ruzalar matni, tarqatma materiallar, kalkulyator, daftar.

Mashg'ulotning davomiyligi: 80'

Mashg'ulotning maqsadi: Differensial tenglamalar haqida ma'lumot berish.

Vazifalar: Differensial tenglamalarning turlarini o'rganish va ularni yechish. Misollar yordamida tushuntirish.

Talaba bilishi lozim:

- Differensial tenglamalar ta'rifi
- Differensial tenglamalar turlari.
- 1-tartibli differensial tenglamalar va ularni yechish
- Yuqori tartibli differensial tenglamalar va ularni yechish

Talaba bajara olishi lozim: Differensial tenglamalarni yecha olishi kerak.

Motivasiya: Jarayonlarni grafik ko'rinishda tasvirlash orqali uni qanday keshishini holatini aniqlash mumkin.

Fanlararo va fan ichidagi bog'liqlik: Kimyoviy, farmakologik, biologik va fizik jarayonlarni o'rganishda ishlatiladi.

Mashg'ulotning mazmuni: Differensial tenglamalar ta'rifi. Differensial tenglamalar turlari. 1-tartibli differensial tenglamalar va ularni yechish. Yuqori tartibli differensial tenglamalar va ularni yechish

Mashg'ulotning maqsadi:

Nazariy qism:

Ta'rif: Noma'lum funksiya argumentini funksiya va funksiyaning hosilasi yoki differensial bilan bog'laydigan tenglamaga *differensial tenglama* deyiladi.

Differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

yoki

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) \quad (2)$$

kabi bo'ladi.

Agar tenglamadagi funksiya bir argumentli bo'lsa, bunday tenglamani *oddiy differensial tenglama* deyiladi. Agar differensial tenglamada ikkita Yoki bir nechta $x, y, \dots$ o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan noma'lum z funksiya

hamda $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2y}{dx^2}$, va hokazo xususiy hosilalar ishtirok etsa, bunday

tenglama *xususiy hosilali differensial tenglama* deyiladi. Biz soddalik uchun bundan keyin oddiy differensial tenglamalar bilan ish ko'ramiz. Tenglamadagi hosila (Yoki differensial)ning eng yuqori tartibiga differensial tenglamaning *tartibi* deyiladi. Masalan, $xdy - y^2 dx = 0$ va $yy' = \frac{x}{y}$, tenglamalar birinchi tartibli, $y'' - 4x^3 = 0$ ikkinchi tartibli, $5xy' - y''' = 8x$ uchinchi tartibli differensial tenglamalardir. Differensial tenglamani yechish tenglamani qanoatlantiruvchi funksiyani topishdan iborat. Differensial tenglamaning *yechimi* deb differensial tenglamaga keltirib qo'yilganda uni ahamiyatga aylantiruvchi har qanday $y = f(x)$ funksiyaga aytiladi.

Oddiy tenglamalar kabi differensial tenglamalar ham hayolan o'ylab topilgan bo'lmay, balki real zaruriyatlardan kelib chiqqan. Differensiallar ko'proq fizika va mexanikaga doir masalalarni yechish tufayli kelib chiqqan.

Misollar. 1. Shunday egri chiziqni topingki, uning har bir nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti $tg\alpha = k = -\frac{x}{y}$, bo'lsin.

Yechish. Hosilaning geometrik ma'nosidan bilamizki, $tg\alpha = k = y' = \frac{dy}{dx}$,

Shartga ko'ra $tg\alpha = -\frac{x}{y}$.

Demak, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ oddiy differensial tenglamani hosil qildik. Buni $ydy = -xdx$ deb yozish mumkin.

Tenglikning ikkala tomonini integrallash mumkin:

$$\int ydy = \int (-x)dx,$$

integrallaymiz, natijada

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \text{ yoki } x^2 + y^2 = C$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya $y = -\frac{x}{y}$, differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

h balandlikdagi havo bosimining o'zgarishi qonunini toping.

Yechish: Fizikadan bizga ma'lumki, bosim P havo zichligiga proporsionaldir u holda h balandlik Δh ga o'zgarganda bosim orttirmasi ΔP quyidagiga teng bo'ladi: $\Delta P = -k \cdot p \cdot \Delta h$ (bosim orttirmasi asosning yuzi 1 birlikka, balandligi h ga teng bo'lgan havo) ustunining og'irligiga teng). Ortirmaning differensial bilan almashtirib, quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$dp = -kpdh \text{ yoki } \frac{dp}{p} = -kdh.$$

yechimi: $p = Ce^{-kh}$.

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, birinchi tartibli differensial tenglama yechimida bittadan o'zgaras miqdor C ishtirok etayapti.

C o'zgaras miqdorga aniq qiymatlar berib differensial tenglamaning aniq yechimlarini hosil qilamiz (Masalan, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ va hokazo). Bularni *xususiy yechimlar* deyiladi. Umumiy holda (1) va (2) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$\varphi(x, y_1, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (3)$$

ko'rinishida bo'ladi.

Umumiy yechimdan xususiy yechimni Ajratib olish uchun oldindan boshlang'ich shartlar deb atalgan shartlar berilgan bo'lishi kerak. Masalan, $x = x_0$

$$\text{bo'lganda } y = y_0 \text{ va } \frac{dy}{dx} = a_0 \quad (4)$$

Umumiy holda boshlang'ich shartlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x = x_0 \text{ bo'lganda } y = y_0; y' = (y_0), \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \quad (5)$$

Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Birinchi tartibli differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y') = 0 \quad (6)$$

kabi bo'ladi. (6) ning umumiy ko'rinishdagi yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi(x, y, C) = 0 \quad (7)$$

Birinchi tartibli differensial tenglamalarning turlarini qarab chiqaylik.

1. Eng sodda ko'rinishdagi differensial tenglama

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

shaklda bo'ladi. Uning umumiy yechimi

$$y = \int f(x) dx + C \quad (9)$$

ko'rinishda bo'ladi.

O'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar.

(6) tenglamani quyidagi ko'rinishda ham yozsak bo'ladi:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (10)$$

bu yerda $M(x, y)$ va $N(x, y)$ funksiyalar x va y ga bog'liq bo'lib, quyidagi ko'rinishlarda bo'lishi mumkin:

a) $M(x, y) = M(x)$, $N(x, y) = N(y)$ bo'lsin. U holda (10) tenglama

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (11)$$

ko'rinishda bo'lib

$$\int N(y)dy = -\int M(x)dx$$

bo'ladi. Bu yerda $\int N(y)dy = \varphi(y)^2$, $\int M(x)dx = \varphi_2(x)$ deb belgilasak, $\varphi_1(y) = \varphi_2(x) + C_2$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

$$M(x, y) = M_1(x) M_2(y); N(x, y) = N_1(x) N_2(y)$$

bo'lsin.

U holda (10) tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \quad (12)$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy + \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = 0$$

integrallab, umumiy yechimni .

(11) va (12) tenglamalar o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar deyiladi.

Misollar. 1. $(x-1)dx + ydy = 0$.

Yechish: $(x-1)dx = -ydy$.

Ikkala tomonidan integral olsak,

$$\int (x-1)dx = -\int ydy,$$

$$\frac{x^2}{2} - x = -\frac{y^2}{2} + C,$$

$$x^2 - 2x + y^2 + C_1 = 1 \quad (C_1 = -2C).$$

Bu funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

$$2. \frac{2x+1}{y+1} = \frac{dx}{dy}.$$

$$\text{Yechish: Tenglamadan: } \frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{2x+1}.$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{2x+1}.$$

Tenglamani integrallaymiz:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{2x+1}.$$

$$\ln(y+1) = \frac{1}{2} \ln(2x+1) + \ln C,$$

$$y+1 = C\sqrt{2x+1} - 1.$$

Demak, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi $y = C\sqrt{2x+1} - 1$ bo'ladi.

Bir jinsli tenglamalar.

Agar t ning har qanday qiymatida

$$M(tx, ty) = t^k M(x, y)$$

Ayniyat o'rinli bo'lsa, $M(x, y)$ funksiya x va y o'zgaruvchilarga nisbatan k o'lchivli bir jinsli funksiya deyiladi. Masalan,

$$x \cos \frac{y}{x}; x - y \cos \frac{y}{x}; \sqrt[3]{x^3 + y^3}; \frac{x^2 - y^2}{xy}$$
 funksiyalar bir jinsli funksiyalardir.

Agar (10) tenglamada $M(x, y)$ va $N(x, y)$ funksiyalar 0 o'lchovli bir jinsli funksiyalardan iborat bo'lsa, (10) tenglamaga *bir jinsli differensial tenglama* deyiladi. Bir jinsli differensial tenglamalarni yechish uchun $y = ux$ almashtirish kiritamiz. U holda $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ bo'ladi. Buni keltirib (10) tenglamaga qo'ysak, o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo'ladi.

Eslatma. (10) tenglamani $\frac{dy}{dx} = P(x, y)$ ko'rinishda ham yozish mumkin.

$$\left[P(x, y) = \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right].$$

$P(x, y)$ 0 o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lganligi uchun $P(x, y) = P\left(1 \frac{y}{x}\right)$ bo'lib,

$$\frac{y}{x} = u; y = xu \text{ almashtirish bajaramiz.}$$

$$\text{Misol. } (x^2 - 2xy)dy - (xy - y^2)dx = 0.$$

$y = xu$ almashtirish kiritamiz:

$$dy = xdu + udx.$$

Bularni keltirib tenglamaga qo'yamiz va soddalashtiramiz:

$$(x^2 - 2xxu)(xdu + udx) - (xxu - x^2u^2)dx = 0$$

$$x(1 - 2u)du + (1 - 2u)udx = (u - u^2)dx$$

$$x(1 - 2u)du = u^2dx.$$

o'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{1 - 2u}{u^2} du = \frac{dx}{x}.$$

Ikkala tomonidan integral olamiz:

$$\int \frac{1 - 2u}{u^2} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1}{u^2} du + \int \frac{-2}{u} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int u^2 du - 2 \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\begin{aligned}\frac{u^{-1}}{-1} - 2 \ln u &= \ln x + \ln C; \\ -\frac{1}{u} &= \ln u^2 + \ln x + \ln C_1; \\ \ln(u^2 x C_1) &= -\frac{1}{u}; u = \frac{y}{x}; \\ \ln\left(\frac{y^2}{x^2} x C_1\right) &= -\frac{x}{y}; \frac{y^2 C_1}{x} = e^{-\frac{x}{y}}; \frac{y^2 C_1}{x} e^{\frac{x}{y}} - 1 = 0\end{aligned}$$

bu tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Eslatma. C ixtiyoriy son bo'lgani uchun differensial tenglamaning umumiy yechimi C ga nisbatan har xil ko'rinishda bo'lishi mumkin:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C}$$

ko'rinishdagi differensial tenglamalarni $x=x_1+\alpha$, $y=y_1+\beta$ almashtirishni bajarib, bir jinsli tenglamaga keltirish mumkin. Bu yerda α va β lar

$$\begin{aligned}a\alpha + b\beta + C &= 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + C_1 &= 0\end{aligned}$$

tengliklar o'rinli bo'ladigan qilib tanlab olinadi.

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

Soddalashtirilgandan so'ng

$$y' + M(x)y = N(x) \quad (14)$$

ko'rinishga kelidagin tenglamalarga *birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar* deyiladi. Bu yerda $M(x)$ va $N(x)$ lar x ning uzluksiz funksiyalaridir (o'zgarmas son ham bo'lishi mumkin). Chiziqli differensial tenglamani yechish uchun $y = u(x)v(x)(*)$ almashtirish kiritamiz. $U(x)$ yoki $v(x)$ funksiyalardan biri tanlab olinadi, ikkinchisi esa (14) tenglamaga asosan aniqlanadi. (*) dan hosila olamiz:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}. \quad (15)$$

(15) ni (14) ga keltirib qo'yamiz.

$$u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dx} + M(x) \cdot u \cdot v = N(x) \quad (16)$$

2. ifodada v ni shunday tanlab olinadiki

$$\frac{dv}{dx} + M(x) \cdot v = 0 \quad (17)$$

tenglik o'rinli bo'lsin.

3. tenglamani v ga nisbatan yechamiz:

$$\frac{dv}{v} = -M(x)dx.$$

ikkala tomonidan integral olsak:

$$\ln |v| = -\int M(x)dx + \ln |C|$$

bundan

$$v = C_1 e^{-\int M(x)dx}$$

(17) tenglamaning noldan farqli birorta yechimi kerak bo'lganligi uchun bitta

$$v = e^{-\int M(x)dx} \quad (18)$$

yechimni olamiz .

(18) va (16) ga keltirib qo'yamiz va u ni topamiz:

$$e^{-\int M(x)dx} \frac{du}{dx} = N(x)$$

yoki

$$du = N(x) e^{M(x)dx} dx$$

$$u = \int M(x) e^{M(x)dx} dx + C_1$$

(18) va (19) dan berilgan chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = uv = \left[\int N(x) e^{M(x)dx} dx + C \right] e^{-\int M(x)dx}$$

ko'rinishda bo'lishi kelib chiqadi.

Misollar. 1. $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani ikkala tomonini x^2 ga bo'lamiz:

$$\frac{dy}{dx} - 2 \frac{y}{x} = \frac{3}{x^2}.$$

$$y = u \cdot v \text{ va } \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

larni keltirib tenglamaga qo'yamiz:

$$u = \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dx} - 2 \frac{uv}{x} = \frac{3}{x^2}.$$

endi

$$u \left(\frac{dv}{dx} - 2 \frac{v}{x} \right) + v \frac{du}{dx} = \frac{3}{x^2}$$

tenglamada v ni shunday tanlab olaylikki,

$$\frac{dv}{dx} - 2 \frac{v}{x} = 0$$

bo'lsin.

Bu tenglamani qanoatlantiruvchi v ning bitta qiymatini topamiz:

$$\frac{dv}{dx} = 2 \frac{v}{x}$$

$$\ln v = 2 \ln x; \quad v = x^2$$

Buni keltirib (*) ga qo'yamiz va u ning qiymatini topamiz:

$$x^2 \cdot \frac{du}{dx} = \frac{3}{x^2}$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$du = \frac{3}{x^2} dx;$$

$$\int du = 3 \int x^{-2} dx,$$

$$u = 3 \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

u va v ning qiymatini $y=uv$ ga qo'yamiz:

$$y = u \cdot v = \left(-\frac{1}{x} + C \right) x^2$$

Shunday qilib, tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$y = -\frac{1}{x} + Cx^2$$

2. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^3$ tenglamani yeching.

Yechish: Biz bu tenglamani to'g'ridan-to'g'ri formuladan foydalanib yechamiz:

$$M(x) = -\frac{2}{x}; N(x) = x^3; v = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x = x^2}$$

$$u = \int x^3 \cdot e^{\left(\frac{2}{x}\right) dx} dx + C = \int x^3 \cdot \frac{1}{x^2} dx + C = \int x dx + C \quad u = \frac{x^2}{2} + C$$

demak, $y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + C \cdot x^2 \right) x^2 + C.$

Eslatma. Yuqorida ko'tarilgan birinchi tartibli differensial tenglamalardan tashqari yana quyidagi ko'rinishdagi differensial ko'rinishdagi tenglamalar ham uchraydi.

1. $\frac{dy}{dx} + M(x) \cdot y = N(x) \cdot y^n$ (19) Bernulli tenglamasi.

Bernulli tenglamasini yechishda ikkala tomonini y^{-n} ab o'lamiz va $u = y^{-n+1}$

almashtirish bajaramiz. Natijada u ga nisbatan chiziqli differensial tenglama hosil bo'ladi.

4. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tenglamada

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \quad (20)$$

bo'lsa, uni *to'la differensial tenglama* deb ataladi. Bu tenglamani ham elementar usul bilan yechsa bo'ladi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.

1. $y''=f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalar *ring soda*, ikkinchi tartibli differensial tenglamalar deyiladi.

Bunday tenglamalarni $y' = \frac{dy}{dx} = p$ belgilash kiritib yechiladi. U holda

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$$

yoki

$$dp = f(x)dx$$

bo'ladi.

Ikkala tomondan integral olsak:

$$p = \int f(x)dx = F_1(x) + C_1$$

bo'ladi. Bundan

$$p = \frac{dy}{dx} = F_1(x) + C$$

$$dy = [F_1(x) + C_1]dx$$

yana bir marta integral olsak:

$$y = \int [F_1(x)dx + C_1]dx$$

yoki

$$y = F_2(x) + C_1x + C_2.$$

Bu berilgan, ikkinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Misol. $y'' = \sin x$ tenglamani yeching.

Yechishi. $y' = \frac{dy}{dx} = p$ belgilash kiritamiz, natijada:

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ yoki } \frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$p = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1, \text{ bundan } dy = (-\cos x + C_1)dx$$

integral olsak:

$$y = -\int \cos x dx + C_1x + C_2.$$

shunday qilib, umumiy yechim quyidagicha bo'ladi:

$$y = -\sin x + C_1x + C_2.$$

Tekshirish: $y' = +(-\sin x + C_1 x + C_2)'$ yoki $y' = -\cos x + C$; $y'' = \sin x$

Bir jinsli chiziqli tenglamalar. Ushbu

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (21)$$

(bunda $a_0, a_1, a_2, f(x)$ lar x ning funksiyalari yoki o'zgarmas sonlar) ko'rinishdagi tenglama ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Agar $f(x) = 0$ bo'lsa (21) tenglama, ya'ni

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (22)$$

tenglama *bir jinsli chiziqli tenglama* deyiladi. (21) va (22) tenglamalarning chap tomoni y, y', y'' larga nisbatan birinchi darajali bir jinsli funksiyadir.

1 – teorema. Agar y_1 va y_2 – ikkinchi tartibli bir jinsli

$$y' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

differensial tenglamaning ikkita xususiy yechimi bo'lsa, u holda $y_1 + y_2$ ham bu tenglamaning yechimi bo'ladi.

Isbot. y_1 va y_2 lar tenglamaning yechimi bo'lgani uchun

$$y_1 + a_1 y_1 + a_2 y_1 = 0 \quad (23)$$

$$y_2 + a_1 y_2 + a_2 y_2 = 0$$

bo'ladi. (22) tenglamaga $y_1 + y_2$ ni qo'yamiz va (23) ni e'tiborga olsak:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) = (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0$$

bo'ladi va $y_1 + y_2$ ham tenglamaning yechimi ekanligi kelib chiqadi.

2 – teorema. Agar y_1 (22) tenglamaning yechimi bo'lib, C ixtiyoriy o'zgarmas miqdor bo'lib, u holda Cy_1 ham (22) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Isbot. (22) tenglamaga Cy_1 ni qo'yamiz, u holda

$$Cy_1'' + Ca_1 y_1' + Ca_2 y_1 = C(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0$$

Bo'ladi. Teorema isbotlandi.

3–teorema. Agar y_1 va y_2 (22) tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimi bo'lsa, u holda

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

(bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlar) ham (22) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Bu teoremaning isboti 1 – va 2 – teoremalarda kelib chiqadi.

O'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar.

Ta'rif: O'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglama deb

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (24)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Bunda yuqoridagi teoremalarga asosan bu tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning ikkita chiziqli erkli xususiy yechimini topish yetarlidir.

Tenglamani yechish uchun $y=e^{kx}$ deb faraz qilamiz, bu yerda k nolga teng bo'lmagan o'zgarmas son.

Hosilalarni topamiz:

$$y'=ke^{kx}, \quad y''=k^2e^{kx}.$$

Bularni (24) tenglamaga keltirib qo'yamiz:

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0 \quad (25)$$

$e^{kx} \neq 0$ bo'lgani uchun (25) tenglamada.

$$k^2+pk+q=0 \quad (26)$$

bo'ladi. Demak, k (26) tenglamani qanoatlantirsa, e^{kx} tenglamaning yechimi bo'ladi. (26) tenglama (24) tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi. (26) tenglama ikkita ildizga ega bo'ladi, ularni k_1 va k_2 bilan belgilaymiz:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

Bu yerda quyidagi holter bo'lishi mumkin:

1. k_1 va k_2 haqiqiy va bir – biriga teng emas ($k_1 \neq k_2$):
2. k_1 va k_2 haqiqiy va bir – biriga teng ($k_1 = k_2$):
3. k_1 va k_2 kompleks sonlar;

Har bir holni alohida – alohida ko'rib chiqamiz:

a) *xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil* ($k_1 \neq k_2$).

Bu holda

$$y_1=e^{k_1 x}, \quad y_2=e^{k_2 x}$$

funksiyalar xususiy yechimlar bo'lib, tenglamaning umumiy yechimi

$$y=C_1 e^{k_1 x}+C_2 e^{k_2 x} \quad (27)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Haqiqatan ham, y' va y'' larni topamiz:

$$y_1 C_1 k_1 e^{k_1 x} + C_2 k_2 e^{k_2 x}, \quad y'' = C_1 k_1^2 e^{k_1 x} + C_2 k_2^2 e^{k_2 x};$$

bularni (25) tenglamaga qo'yamiz:

$$C_1 k_1^2 e^{k_1 x} + C_2 k_2^2 e^{k_2 x} + q(\tilde{N}_1 k_1 e^{k_1 x} + C_2 k_2 e^{k_2 x}) + q(C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}) = 0.$$

Chap tomondagi qavslarni ochib, gruppalaymiz:

$$(\tilde{N}_1 k_1^2 e^{k_1 x} + p C_1 k_1 e^{k_1 x} + q C_1 e^{k_1 x}) + (C_2 k_2^2 e^{k_2 x} + q C_2 e^{k_2 x}) = 0$$

yoki

$$C_1 e^{k_1 x} (k_1^2 + p k_1 + q) + C_2 e^{k_2 x} (k_2^2 + p k_2 + q) = 0. \quad (28)$$

k_1 va k_2 lar (26) tenglamaning ildizlari bo'lganligi uchun, (28) ning chap tomonidagi qavs ichidagi ifodalar nolga teng va umuman chap tomoni ham nolga teng bo'ladi. Demak, $y=C_1 e^{k_1 x}+C_2 e^{k_2 x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Misol. $y'' - 8y' + 15y = 0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k_1=5$; $k_2=3$ ildizga ega.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{3x}.$$

b) xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va teng.

Bu holda $k_1 = k_2 = \frac{p}{2}$ bo'lib, $2k_1 = -p$ Yoki $2k_1 + p = 0$ bo'ladi.

Bitta xususiy yechimi $y_1 = e^{k_1 x}$ ma'lumdir. Ikkinchi xususiy yechimini

$$y_2 = u(x) e^{k_1 x}$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu yerda $u(x) = u$ aniqlanishi kerak bo'lgan noma'lum funksiya. $u(x)$ ni aniqlash uchun y_2' va y_2'' larni topamiz:

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + u k_1 e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u' + u k_1),$$

$$y_2'' = u' e^{k_1 x} + u' k_1 e^{k_1 x} + u' k_1 e^{k_1 x} + u k_1^2 e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u'' + 2k_1 u' + u k_1^2).$$

Bularni (25) tenglamaga keltirib qo'yamiz:

$$e^{k_1 x} [(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u) + p e^{k_1 x} (u' + k_1 u) + q u] = 0$$

yoki

$$e^{k_1 x} [u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + k_1 p + q)u] = 0$$

k xarakteristik tenglamaning karrali ildizi va $k_1 + p = 0$ bo'lgani uchun $e^{k_1 x} u'' = 0$ yoki $u'' = 0$ bo'lishi kerak. Uni integrallab

$$u(x) = Ax + B$$

ni topamiz. Xusuxiy holda $B=0$, $A=1$ deb olsak,

$$u(x) = x \text{ bo'ladi.}$$

Shunday qilib, ikkinchi xususiy yechim kabi

$$y_2 = x e^{k_1 x} \text{ bo'ladi.}$$

Bularni nazarda tutsak, umumiy yechimni

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Misol. $4y'' - 12y' + 9y = 0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$4k^2 - 12k + 9 = 0$$

bo'lib uning ildizlari $k_1 = k_2 = \frac{3}{2}$ dir.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{3}{2} x}.$$

v) xarakteristik tenglamaning ildizlari komoleks sonlar bo'lgan hol. Ildizlar $k_1 = \alpha + i\beta$. $k_2 = \alpha - i\beta$. ko'rinishda bo'lsin.

U holda differensial tenglamaning xususiy yechimlari

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

ko'rinishda bo'ladi. y_1 va y_2 lar (26) tenglamani qanoatlantiradi. Biz quyidagi natijadan foydalanamiz:

Agar haqiqiy koeffitsiyentli bir jinsli chiziqli tenglamaning xususiy yechimi kompleks sonlardan iborat bo'lsa, u holda uning haqiqiy va mavhum qismlari ham shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

Binobarin, xususiy yechim

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

bo'lgani uchun $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$ lar ham (26) tenglamaning yechimi bo'ladi. shunday qilib, (26) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol. $y'' - 4y' + 7y = 0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2 - 4k + 7 = 0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1 = 2 + i\sqrt{3}$; $k_2 = 2 - i\sqrt{3}$; dan iborat. Tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$y = e^{2x} (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x).$$

Agar $f(x, y)$ funksiyada x va y o'zgaruvchilarni mos ravishda t_x va t_y ga almashtirilganda (bu yerda t -ixtiyoriyoriy kattalik, parametr) t_n ga ko'paytirilgan o'sha funksiya hosil bo'lsa, ya'ni

$$f(t_x, t_y) \equiv t^n f(x, y)$$

shart bajarilsa, $f(x, y)$

3-misol. $y'' + 4y' + 4y = 0$ tenglamani yeching.

Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

Uning ildizlari $k_1 = k_2 = 2$. Demak, umumiy yechim

$$y = (C_1 + xC_2)e^{2x}$$

bo'ladi.

$$y'' + py' + gy = f(x)$$

Ko'rinishdagi tenglama o'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi.

4-misol. Quydagi o'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamalarni eching.

a) $y'' - 4y' + 13y = 0$; b) $y'' + 9y = 0$.

a) Xarakteristik tenglamani yozamiz: $k^2 - 4k + 13 = 0$.

Uning ildizlarini topamiz:

$$k_1 = 2 + 3i \text{ va } k_2 = 2 - 3i.$$

Demak,

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

umumiy echim bo'ladi.

b) xarakteristik tenglamani yozamiz:

$$k^2 + 9 = 0$$

Uning ildizlari $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$ bo'ladi.

Umumiy yechim $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

5-misol. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi. Xususiy echimlarni toping.

a) $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

b) $y'' + a^2 y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

a) $k^2 + 2k + 5 = 0$ xarakteristik tenglamani tuzib, uning $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$ ildizlarini topamiz. Demak, tenglamaning umumiy yechimi $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ bo'ladi.

Umumiy yechimni differensiallab, quyidagini topamiz:

$$y' = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x)$$

yoki

$$y' = e^{-x}[(2C_2 - C_1)\cos 2x - (2C_1 + C_2)\sin 2x]$$

O'zgaras, C_1 va C_2 larni boshlang'ich shartlardan topamiz:

$$\begin{cases} 0 = e^{-0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0), \\ 1 = e^{-0}[(2C_2 - C_1)\cos 0 - (2C_1 + C_2)\sin 0] \end{cases}$$

Bundan $C_1 = 0$ va $C_2 = \frac{1}{2}$. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y = \frac{1}{2}e^{-x} \sin 2x$$

bo'ladi.

b) $k^2 + a^2 = 0$ xarakteristik tenglamani tuzib, uning ildizlarni topamiz. Demak, tenglamani umumiy yechimi $y = -aC_1 \cos ax + C_2 \sin ax$ bo'ladi. Bundan

$y' = -aC_1 \sin ax + aC_2 \cos ax$. O'zgaras C_1 va C_2 larni boshlang'ich shartlardan topamiz:

$$\begin{cases} 2 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \\ -1 = -aC_1 \sin 0 + aC_2 \cos 0. \end{cases}$$

bundan $C_1 = 2$ va $C_2 = -\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$). Shunday qilib, berilgan boshlang'ich shartlarni

qanoatlantiruvchi xususiy yechim $y = 2 \cos ax - \frac{1}{a} \sin ax$ bo'ladi.

Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar

Oddiy differensial tenglamalarni yeching

1. $y' = 4x^3 \quad x=0; \quad y=0; \quad j: y = x^4 + C; \quad y = x^4$
2. $(x^2 + 4)y' - 2xy = 0 \quad x=1; \quad y=5; \quad j: y = C(x^2 + 4); \quad y = x^2 + 4$
3. $xy' = \frac{y}{\ln x} \quad x=e; \quad y=1; \quad j: y = C \ln x; \quad y = \ln x$
4. $y' = y^2 \quad x=1; \quad y=1 \quad j: y = \frac{-1}{(x+c)}, \quad y = \frac{-1}{(x-2)}.$
5. $y' \operatorname{tg} x - y = 1 \quad x = \frac{\pi}{2}, y=1 \quad j: y = C \sin x - 1, y = 2 \sin x - 1.$
6. $(1+x^2)dy + ydx = 0 \quad x=1 \quad y=1 \quad j: \ln y = C - \operatorname{arctg} x, \quad y = e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}$

O'zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglamalarni yeching

1. $(x+3)dy - (y+3)dx = 9 \quad j: y = C(x+3) - 3$
2. $ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0 \quad j: y = C\sqrt{e^{2x}+1}$
3. $\sqrt{y}dx + \frac{1}{\sin x}dy = 0 \quad j: y = \frac{(C + \cos x)^2}{4}$
4. $\frac{yy'}{x} + e^y = 0 \quad j: \frac{x^2}{2} - e^{-y}(y+1) = C$
5. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y. \quad j: \sin y \cos x = C$
6. $\sin x \cos y dx + \cos x \sin y dy = 0 \quad j: \cos x \cos y = C$

Bir jinsli differensial tenglamalarni yeching

1. $2xyy' = y^2 - 4x^2. \quad j: y^2 + 4x^2 = Cx$
2. $y^2 - 4xy + 4x^2y' = 0. \quad j: y = \frac{4x}{\ln x + C}$
3. $xy - (y^2 + x^2)y' = 0. \quad j: 2y^2 \ln(yC) = x^2$
4. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0. \quad j: y^2 - Cx + x^2 = 0$
5. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad j: y = x \arcsin Cx$

Chiziqli differensial tenglamalarni yeching

1. $y' - \frac{3y}{x} = x \quad j: y = Cx^3 - x^2$
2. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x} \quad j: y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$
3. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x \quad j: y = \frac{C - \cos 2x}{2 \cos x}$

4. $(2x+1)y'+y=x$ $j:y=\frac{x-1}{3}+\frac{C}{\sqrt{2x+1}}$
5. $y'+y\cos x=\sin 2x$ $j:y=2(\sin x-1)+Ce^{-\sin x}$

Tartibi pasayadigan differensial tenglamalarni yeching

1. $y'''=\frac{6}{x^3}$ $j:$
2. $y''=\sin x$ $j:y=-\sin x+C_1x+C_2$
3. $y''=\sin x \cos x$ $j:y=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{8}+C_1x+C_2$
4. $y''=xe^{-x}$ $y(0)=1; y'(0)=2$ $j:y=e^{-x}(x+2)+C_1x+C_2$
5. $y'''=\cos x$ $j:y=-\sin x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$

O'zgaras koeffisientli bir jinsli chiziqli ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yeching

1. $y''+5y'+6y=0$ *Javob:* $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$
2. $y''-7y'-6y=0$ *Javob:* $y=C_1e^x+C_2e^{6x}$
3. $y''-25y=0$ *Javob:* $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{5x}$
4. $y''+2y'-15y=0$ *Javob:* $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{3x}$
5. $y''-2y'=0$ *Javob:* $y=C_1+C_2e^{2x}$
6. $y''+2y'+y=0$ *Javob:* $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$
7. $y''-6y'+9y=0$ *Javob:* $y=(C_1+c_2x)e^{3x}$
8. $y''+36y=0$ *Javob:* $y=C_1\cos 6x+C_2\sin 6x$
9. $y''-2y'+5y=0$ *Javob:* $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$
10. $y''+6y'+10y=0$ *Javob:* $y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

Mustaqil yechish uchun misollar Oddiy differensial tenglamalarni yeching

1. $y'=\frac{y}{4x}$ $x=16, y=-10$ $j:y=C\sqrt[4]{x}, y=-5\sqrt[4]{x}.$
2. $y'=\frac{y}{\ln y}$ $x=2, y=1.$ $j:\ln^2 y=2(x+C), \ln^2 y=2(x-2).$
3. $y'\cot x+y=2$ $x=0, y=-1.$ $j:y=2-C\cos x, y=2-3\cos x.$
4. $xy'+x=1$ $x=0, y=2.$ $j:y^2+x^2-2x=C, y^2+x^2-2x=4.$
5. $\frac{dx}{3}+\frac{dy}{\cos x}=0;$ $y(0)=-1$ *Javob.* $Y=\frac{1}{3}\sin x-1.$

$$6. \quad e^x dx - 2dy = 0 \quad y(0)=0 \quad \text{Javob. } y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}.$$

O'zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglamalarni yeching

$$\begin{aligned} 1. \quad y' &= y^2 \cos x & j: y &= \frac{-1}{(\sin x + C)} \\ 2. \quad xy dx + (x+1)dy &= 0 & j: y &= C(x+1)y^{-x} \\ 3. \quad (1+e^{2x})y^2 dy &= e^{2x} dx & j: y^3 &= 3 \ln C \sqrt{e^{2x} + 1} \\ 4. \quad x + y'(y + xy) &= 0 & j: x + \frac{y^2}{2} &= \ln C |x+1| \\ 5. \quad (1+y^2)dx - xy dy &= 0; \quad y(1)=0 & \text{Javob. } x^2 - y^2 &= 1. \\ 6. \quad \frac{dx}{2} + \frac{dy}{\sin x} &= 0; \quad y(0)=1 & \text{Javob. } y &= \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bir jinsli differensial tenglamalarni yeching

$$\begin{aligned} 1. \quad xy' &= y - xe^{\frac{y}{x}} & j: y &= x \arcsin Cx \\ 2. \quad yy' &= 2y - x & j: y - x &= Ce^{\frac{x}{y-x}} \\ 3. \quad x^2 + y^2 - 2xyy' &= 0 & j: x^2 - y^2 &= Cx \\ 4. \quad xy + y^2 &= (2x^2 + xy)y' & j: y^2 &= Cxe^{-\frac{y}{x}} \\ 5. \quad xy + y^2 &= (2x^2 + xy)y' & j: & \end{aligned}$$

Tartibi pasayadigan differensial tenglamalarni yeching

$$\begin{aligned} 1. \quad y'' &= \cos 3x & j: y &= -\frac{1}{9} \cos 3x + C_1 x + C_2 \\ 2. \quad y'' &= \sin x; & \text{Javob. } y &= -\sin x + C_1 x + C_2. \\ 3. \quad y'' &= \sin x \cos x; & \text{Javob. } y &= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} + C_1 x + C_2. \\ 4. \quad y'' &= xe^{-x}; & \text{Javob. } y &= e^{-x}(x+2) + C_1 x + C_2. \\ 5. \quad xy'' - y &= 0; & \text{Javob. } y &= C_1 x^2 + C_2. \\ 6. \quad y'' y^3 &= 1; & \text{Javob. } C_1 y^2 &= 1 + (C_1 x + C_2)^2. \end{aligned}$$

Quidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping.

$$\begin{aligned} 1. \quad y'' - 9y &= 0, y(0) = 0, y'(0) = 6 & \text{Javob: } y &= 2e^{3x} \\ 2. \quad y'' - y' - 2y &= 0, y(0) = 3, y'(0) = 0 & \text{Javob: } y &= e^{2x} + 2e^{-x} \\ 3. \quad y'' + 2y' + 5y &= 0; y(0) = 1, y'(0) = 1 & \text{Javob: } y &= e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x) \\ 4. \quad y'' - 10y' + 25y &= 0, y(0) = 1, y'(0) = 8 & \text{Javob: } y &= 2(1-x)e^{5x} \end{aligned}$$

- | | | |
|-----|----------------------------------|---|
| 5. | $y''+3y'+2y=0, y'(0)=-1, y(0)=3$ | <i>Javob:</i> $y=e^{-x}-2e^{-2x}$ |
| 6. | $y''+6y'+9y=0, y(0)=2, y'(0)=1$ | <i>Javob:</i> $y=e^{-3x}(2+7x)$ |
| 7. | $y''-2y'+2y=0, y(0)=1, y'(0)=3$ | <i>Javob:</i> $y=e^x(\cos x+2\sin x)$ |
| 8. | $y''+2y'-8y=3x$ | <i>Javob:</i> $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x}-\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}$ |
| 9. | $y''-5y=5x$ | <i>Javob:</i> $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{5}{4}x$ |
| 10. | $y''-3y'-4y=x^2+1$ | <i>Javob:</i> $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{8}x+\frac{13}{32}$ |

Quidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping.

- | | | |
|-----|-----------------------------------|--|
| 11. | $y''-9y=0, y(0)=0, y'(0)=6$ | <i>Javob:</i> $y=2e^{3x}$ |
| 12. | $y''-y'-2y=0, y(0)=3, y'(0)=0$ | <i>Javob:</i> $y=e^{2x}+2e^{-x}$ |
| 13. | $y''+2y+5y=0; y(0)=1, y'(0)=1$ | <i>Javob:</i> $y=e^{-x}(\cos 2x+\sin 2x)$ |
| 14. | $y''-10y'+25y=0, y(0)=1, y'(0)=8$ | <i>Javob:</i> $y=2(1-x)e^{5x}$ |
| 15. | $y''+3y'+2y=0, y'(0)=-1, y(0)=3$ | <i>Javob:</i> $y=e^{-x}-2e^{-2x}$ |
| 16. | $y''+6y'+9y=0, y(0)=2, y'(0)=1$ | <i>Javob:</i> $y=e^{-3x}(2+7x)$ |
| 17. | $y''-2y'+2y=0, y(0)=1, y'(0)=3$ | <i>Javob:</i> $y=e^x(\cos x+2\sin x)$ |
| 18. | $y''+2y'-8y=0$ | <i>Javob:</i> $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x}$ |
| 19. | $y''-5y=0$ | <i>Javob:</i> $y=C_1e^{-\sqrt{5}x}+C_2e^{\sqrt{5}x}$ |
| 20. | $y''-3y'-4y=0$ | <i>Javob:</i> $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$ |

«3x5»TEXNOLOGIYASI.

Bu uslub o'quvchi - talabalarni erkin fikrlashi, keng doirada turli g'oyalarni bera olishi, ta'lim jarayonida yakka, kichik guruh holda tahlil etib, xulosa chiqara olishi, ta'rif bera olishiga hamda hamkorlikda jamoa bo'lib ishlashiga qaratilgan

treningda talabalar kichik guruhlariga bo'linadi va ularga tayyor tarqatma material-lar tarqatiladi. Har bir guruh jamoa bo'lib javob belgilaydi. Shartni bajarish uchun ikki daqiqadan vaqt ajratiladi va kuzatilib boriladi. Keyingi bosqichda varaqlar guruhlariga soat strelkasi bo'yicha almashtirilib beriladi. 3 yoki 5 marta aylangandan keyin talabalar bilan to'g'ri javob muhokama qilinadi.

Innovatsion-texnologik programma sharti: sizga mashg'ulot mazmunini eslatib turuvchi kalit so'zlarni yozing.

Ish sharti.	I -guruh	II – guruh	III – guruh
1	2	3	4
Birinchi tartibli differensial tenglamaga misol			
Ikkinchi tartibli differensial tenglamaga misol			
Misollar farqi			

Adabiyotlar

- 1.Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A. Kamolov M. Oliy matematika. Toshkent “” 2013y
- 2.Ulug'murodov N. H., Sunatova D. A., Puskunov N. S. Oliy matematika Toshkent. “” 2014 y
- 3.Soatov Yo. U. Oliy matematika ikki jildlik Toshkent “O'qituvchi”, 1992 y
- 4.Fixtengolts G. M. Osnovi matematicheskogo analiza V 2-t. 7-izdaniye. Moskva. Fizmatlit, 2002 g.
- 5.Lobatskaya N. L. “Osnovi visshey matematiki” Moskva 1987 g

Mundarija

Mundarija

Kirish.....	6
1. Sonlar ketma-ketligi	8
O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar	11
2. Funksiya	12
Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi.....	13
Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar	14
Mustaqil yechish uchun misollar	16
Funksiyaning juft-toqligi.....	18
Asosiy elementar funksiyalar.....	19
3. Funksiya limiti.....	24
Funksiyaning limiti haqidagi teoremlar	25
Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar	28
Mustaqil yechish uchun misollar	29
Ba'zi bir muhim limitlar	29
Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar	31
4. Funksiyaning hosilasi	32
Hosilaning geometrik ma'nosi.....	33
Hosilaning mexanik ma'nosi	34
Teskari funksiyaning hosilasi	34
Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning hosilasi.....	34
Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari	35
5. Murakkab funksiyaning hosilasi.....	37
Oshkormas funksiya hosilasi.....	38
Yuqori tartibli hosila	39
Hosilalar jadvali	40
Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar	41
Mustaqil yechish uchun misollar	44

6. Funksiya differensial.....	50
Differensialning taqribiy hisoblaiga tatbiqi	50
Yuqori tartibli differensial	53
7. Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari.....	54
Funksiyaning o'sishi va kamayishi	54
Funksiyaning ekstremumlari.....	54
Funksiyaning max va min topishning 1-qoidasi	54
Egri chiziqning qavaqriqligi va botiqligi. Bukilish (egilish) nuqtasi	56
Funksiya maksimumi va minimumini topishining 2-qoidasi	57
Egri chiziqning asimptotalari	58
Funksiyani tekshirishni umumiy sxemasi	58
Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar	61
Mustaqil yechish uchun misollar	62
8. Integrall.	63
Aniqmas integral jadvali	65
Bevosita integralash usuli.....	65
Differinsal belgisi ostiga kiritilib integrallash.....	65
Amaliy mashg'ulotlar	67
Mustaqil yechish uchun misollar.....	69
9. O'zgaruchan integrallni almashtirib va bo'laklab integrallash.....	69
Bo'laklab integrallash	71
Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar.....	73
Mustaqil yechish uchun misollar	74
10. Ratsional kasrlarni soodda kasrlarga yoyib integrallash.....	75
Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar	78
Mustaqil yechish uchun misollar.....	79
11. Trigonometrik ifodalar qatnashgan integralni integrallash.....	79
Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar.....	82
Mustaqil yechish uchun misollar.....	83

12. Aniq integral.....	84
Aniq integral xossalari.....	87
Yuqori chegarasi o'zgaruvchan bo'lgan integral	88
Nyuton-leybonis formulasi.....	88
Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish.....	90
Chegarasi cheksiz bo'lgan integral.....	92
Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar.....	93
Mustaqil yechish uchun misollar.....	94
13. Aniq integralni taqribiy hisoblash.....	96
Tarapetsiyalar formulasi.....	98
Simpson formulasi.....	99
14. Ko'p argumentli funksiya.....	101
Ikki argumentli funksiyaning umumiy hosilasi.....	103
Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy differensiyalari.....	104
Amaliy mashg'ulotlar.....	106
Mustaqil yechish uchun misollar.....	109
15. Differensial tenglamalar.....	109
Birinchi tartibli differensial tenglama.....	112
Bir jinsli tenglama.....	114
Ikkinchi tartibli differensial tenglama.....	118
Amaliy mashg'ulotlar uchun misollar.....	124
Mustaqil yechish uchun misollar.....	125