

O'zbekiston Respublikasi SSV
Toshkent Farmasevtika instituti
Farmatsiya fakulteti
Farmatsiya yo'nalishi 1/1 guruh

Mustaqil ish

Funsiyaning hosilasi

Bajardi: Xolmurodov Sh

Tekshirdi: Temirova B

Toshkent 2014

Reja:

1. Funksiya hosilasining ta'rifi

2. Differensiallashning asosiy qoidalari

3. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari

Funksiya hosilasining ta'rif

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning atrofida aniqlangan bo'lsin. Bu nuqtadagi argument va funksiya orttirmalari mos ravishda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ bo'lishi ma'lumdir.

10.1.1-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida aniqlangan bo'lib, shu nuqtadagi funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi ($\Delta x \rightarrow 0$) chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limit *funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi* deyiladi va y' , $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ lardan biri bilan belgilanadi.

Bu o'rinda y' va $\frac{dy}{dx}$ belgilashlar argument qiymati ahamiyatsiz bo'lganda, $f'(x_0)$ va $\frac{df(x_0)}{dx}$ lar esa argument qiymatini bilish zarur bo'lgan hollarda ishlatilishi qulay ekanligini aytamiz.

Ta'rif bo'yicha $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ yozuv o'rinlidir.

1-misol. $y=x^2$ funksiyaning ixtiyoriy x_0 nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish.

$$1) \Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x;$$

$$2) \Delta y = f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) = (2x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x;$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x;$$

$$4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 \Rightarrow y' = 2x_0$$

Agar x_0 ixtiyoriy ekanligidan uni x bilan almashtirilsa, $(x^2)' = 2x$ ni olamiz.

Bu misoldan ko'rinadiki, funksiya hosilasini uning ta'rifiga ko'ra topish to'rt bosqichdan (qadamdan) iborat bo'lib, birinchi bosqichda argumentga orttirma berilar, ikkinchi bosqichda funksiya orttirilmasi, uchinchi bosqichda funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati va nihoyat, to'rtinchi bosqichda bu nisbatning argument orttirmasi nolga intilgandagi limiti topilar ekan.

2-misol. $y=\sin x$ ning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \cdot \cos x$$

Demak, $(\sin x)' = \cos x$ o‘rinli ekan. Bu yerda 1-ajoyib limitdan va $\cos x$ uzluksiz funksiya ekanligidan foydalandik.

10.1.2-ta’rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning qandaydir o‘ng (chap) yaqin atrofida aniqlangan bo‘lib, $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ chekli limit mavjud bo‘lsa, uni funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng (chap) hosilasi deyiladi va $f'(x_0 + 0)$ ($f'(x_0 - 0)$) kabi belgilanadi.

Agar $f'(x_0)$ chekli hosila mavjud bo‘lsa, o‘ng va chap hosilalar mavjud va

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \quad (10.1.1)$$

bo‘lishini ko‘rsatish osondir. Buning aksinchasi ham o‘rinlidir, ya’ni $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$ bo‘lsa, $f'(x_0)$ mavjud bo‘lib, (10.1.1) o‘rinli bo‘ladi.

1-eslatma. $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f'(x)$ - funksiya hosilasining x_0 nuqtadagi bir tomonli (o‘ng yoki chap) limiti va bir tomonli (o‘ng yoki chap) hosila aynan tushunchalar emasligini keyinroq ko‘ramiz.

2-eslatma. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida aniqlangan va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty (-\infty)$ bo‘lsa, funksiya x_0 nuqtada $+\infty$ ($-\infty$) hosilaga ega deb qabul qilinadi va uni *cheksiz hosila* deb yuritiladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo‘lsa, uni shu nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi. *Funksiya hosilasini topish jarayoni uni differensiallash deb yuritiladi.* Quyidagi teorema o‘rinlidir.

10.1.1- teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksizdir.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

chekli limit mavjuddir. U holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$$

o'rinli bo'lib, bu yerda $\Delta x \rightarrow 0$ da α cheksiz kichik miqdordir, ya'ni $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$. Bundan

$$\Delta y = (y' + \alpha)\Delta x \quad (10.1.2)$$

ni olamiz. Qavslar ichidagi ifoda chekli limiti mavjudligidan chegaralangandir.

Demak, (10.1.2) ning o'ng tomonidagi ifoda chegaralangan miqdorning Δx -cheksiz kichikka ko'paytmasi sifatida cheksiz kichik miqdordir. Shunday qilib, argumentning cheksiz kichik Δx orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik Δy orttirmasi mos kelganligi sababli funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Yuqorida yozilgan (10.1.2) formula *differensiallanuvchi funksiyaning orttirmasi formulasi* deb ham yuritiladi.

Bu o'rinda shuni ham aytish lozimki, yuqorida isbotlangan tasdiqning teskarisi hamma vaqt ham o'rinli bo'lavermaydi, ya'ni funksiyaning uzluksiz ekanligidan uning differensiallanuvchi ekanligi hamma vaqt ham kelib chiqavermaydi. Bunga misol sifatida, $y=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada qarasak, u uzluksizdir. Endi uning hosilasini tekshirib ko'raylik.

$$\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

Oxirgilardan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ - mavjud emasligi, ya'ni qaralayotgan funksiyaning $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emasligi kelib chiqadi.

Differensiallashning asosiy qoidalari

Bu bandeda funksiyani differensiallashda qo'llaniladigan asosiy qoidalarni keltiramiz.

1. O'zgarman differensiallash. $y=c$, bu yerda c -o'zgarman.

$$\Delta y=0 \text{ ekanligidan } y'=0, \text{ ya'ni } c'=0$$

kelib chiqadi. Demak, *o'zgarmaning hosilasi nolga teng ekan.*

2. Yigindini differensiallash. Agar u va v funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, ularning algebraik yig'indisi ham differensiallanuvchi va

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

o'rinlidir.

Haqiqatdan ham, $\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$ ekanligidan yuqoridagini keltirib chiqarish qiyin emas.

3. Ko'paytmani differensiallash. Agar u va v funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa,

$$(uv)' = u'v + uv'$$

o'rinlidir.

Haqiqatdan ham, $\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v \Delta u + u \Delta v + \Delta u \Delta v$

va differensiallanuvchi funksiyaning uzluksiz ekanligini hisobga olib,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right) = u'v + uv' + u' \cdot 0 = u'v + uv'$$

ni olamiz.

4. O'zgarman ko'paytuvchili ko'paytmani differensiallash. Agar u differensiallanuvchi funksiya bo'lib, c o'zgarman bo'lsa,

$$(cu)' = cu'$$

o'rinlidir, ya'ni *o'zgarman ko'paytuvchini hosila belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin.*

Buni ko'rsatishni o'quvchining o'ziga qoldiramiz.

5. Bo‘linmani differensiallash. Agar u va v funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lib, $v \neq 0$ bo‘lsa,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

o‘rinlidir.

Haqiqatdan ham,

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot (v + \Delta v)} = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v(v + 0)} = \frac{u'v - u v'}{v^2}.$$

6. Teskari funksiyaning hosilasi. Agar $y=f(x)$ funksiya monoton va differensiallanuvchi bo‘lib, $y' \neq 0$ bo‘lsa, unga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo‘lib, u ham differensiallanuvchi va

$$y' = \frac{1}{x'} \quad \left(x' = \frac{1}{y'} \right)$$

o‘rinlidir, ya’ni teskari funksiyaning hosilasi funksiya hosilasining teskari qiymatiga tengdir.

Bu

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

tenglikdan kelib chiqadi (bunda monoton va uzluksiz funksiya uchun $\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$, $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$ bo‘lishini eslash kerak bo‘ladi).

7. Murakkab funksiyaning hosilasi. Agar $z=\varphi(x)$ biror $D(z)$ oraliqda, $y=f(z)$ esa biror $D_0(z)$ oraliqda aniqlangan funksiyalar bo‘lib, $\forall x \in D(z) \Rightarrow \varphi(x) \in D_0(z)$ hamda $\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada, $f(z)$ esa $z_0=\varphi(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, $y=f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va

$$u' = f'[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'(x_0)$$

o‘rinli bo‘ladi.

Buni ko‘rsatish uchun differensiallanuvchi funksiya orttirmasi formulasidan foydalanamiz:

$$\Delta z = (\varphi'(x_0) + \alpha) \Delta x; \quad \Delta y = (f'(z_0) + \beta) \Delta z$$

Bu yerda, α va β lar $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta z \rightarrow 0$ da cheksiz kichik miqdorlardir. Shuni aytish kerakki, $\Delta x \neq 0$ dan $\Delta z \neq 0$ ekanligi kelib

chiqmaydi, ammo $\Delta z=0$ bo'lgan holda $\beta=0$ deb qabul qilish hech qanday qarama-qarshilikka olib kelmaydi.

Buni hisobga olgan holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (f'(z_0) + \beta) \cdot (\varphi'(x_0) + \alpha)$$

munosabatda $\Delta x \rightarrow 0$ limitga o'tish bilan yuqoridagi formulani keltirib chiqaramiz.

Murakkab funksiya hosilasining formulasini ixtiyoriy x uchun

$$y' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

yoki

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

ko'rinishlarda yoziladi.

8. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi.

Agar $y=f(x)$ funksiya

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in T$$

parametrik tenglamalari bilan berilgan bo'lib, $t=t_0$ da $\varphi'(t_0)$ va $\psi'(t_0)$ chekli hosilalar mavjud va $\psi'(t_0) \neq 0$ bo'lsa,

$$y' = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

o'rinli bo'ladi.

Buni

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

tenglikdan foydalanib osongina olish mumkin.

Parametrik tenglamalari bilan berilgan funksiya hosilasi formulasini

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

ko'rinishlarda ham yoziladi.

9.Oshkormas funksiyanı differensiallash. Agar $y = f(x)$ funksiya biror D sohada aniqlangan bo'lsa, uni $y-f(x)=0$ ikki o'zgaruvchili tenglama ko'rinishida yozish mumkinligi ayondir.

Endi, agar

$$\varphi(x; y)=0 \quad (10.2.1)$$

ikki o'zgaruvchili tenglama berilgan bo'lib, uni y ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, $y=f(x)$ funksiyaga kelamiz. Bu holda, (10.2.1.) ni oshkormas funksiyaning tenglamasi deyilib, y oshkormas funksiya x esa uning argumentidir. Agar $\varphi(x; y)$ funksiyada $y=f(x)$ deb faraz qilinsa, y murakkab funksiya (10.2.1) esa ayniyat bo'lib qoladi. Buni e'tiborga olgan holda (10.2.1) ning har ikki tomonini differensiallash natijasida y' hosilaga nisbatan tenglama olamiz va undan y' ni topamiz, bu yerda (10.2.1) tenglama o'rinli bo'lishini yoddan chiqarmaslik lozim.

Masalan, $x^2+y^2-a^2=0$ tenglamada x argument y esa funksiya deb qarasak, bu oshkormas funksiya tenglamasidir. Uni differensiallab, $2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$ ni olamiz.

Eslatma. Differensiallashning asosiy qoidalarida funksiylarga qo'yilgan shartlar yetarli shartlar bo'lib, ularning ba'zilari zaruriy shart bo'lolmaydi. Masalan, Dirixle funksiyasi $\chi(x)$ (8.4-band) va unga o'xshab ketadigan 9.4-bandda kiritilgan $\overline{\chi}(x)$ funksiylarni qarasak, ular birorta nuqtada ham differensiallanuvchi bo'lmagan funksiylardir. Ammo, ular vositasida olingan

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \chi(x) + \overline{\chi}(x) = 1, & f_2(x) &= \chi(x) \cdot \overline{\chi}(x) = 0, \\ f_3(x) &= \chi[\overline{\chi}(x)] = 1, & f_4(x) &= \overline{\chi}[\chi(x)] = 0. \end{aligned}$$

funksiyalar o'zgarmas bo'lganliklari sababli barcha nuqtalarda nolga teng hosilaga egadirlar.

Asosiy elementar funksiylarning hosilalari

Yuqorida keltirilgan differensiallashning asosiy qoidalari yordamida hosila ta'rifi bo'yicha asosiy elementar funksiylarning hosilaplarini keltirib chiqaramiz.

1. $y=c \Rightarrow c'=0$ ekanligini ko'rdik (c - o'zgarmas).

2. $y=a^x \Rightarrow (a \in R^+, a \neq 1).$

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}, \quad y' = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Demak, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Xususiyl holda, $a=e$ bo'lsa,

$$(e^x)' = e^x$$

ni olamiz.

$$3. \quad y = \log_a x \quad (a \in R^+, a \neq 1).$$

Bunga teskari funksiya $x=a^y$ ekanligidan yuqoridagi va teskari funksiya hosilasi formulasi asosida

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$$

ni olamiz. Demak,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$$

Xususiyl holda, $a=e$ bo'lsa,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

kelib chiqadi.

4. $y=x^\alpha$ ($\alpha \neq 0$). $x>0$ bo'lgan holda $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ tenglik o'rinli ekanligi aniqdir. Unga murakkab funksiyaning differensiyalash qoidasini qo'llab,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

ya'ni

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

ni olamiz.

Agar darajali funksiya $x<0$ bo'lganda ham aniqlangan bo'lsa, uning juftlik yoki toqlik xossasi asosida yuqoridagi formula o'rinli ekanligini keltirib chiqarish mumkin. Undan tashqari, $\alpha>1$ bo'lgan va darajali funksiya argumentning manfiy qiymatlari uchun ham aniqlangan holda $x=0$ nuqtada ham hosila mavjudligini va u yuqoridagi formula asosida aniqlanishini

argumentning manfiy qiymati uchun aniqlanmagan bo'lsa, $x=0$ da o'ng hosila mavjud va u nolga tengligini aytamiz.

Agar $\alpha=1$ bo'lsa, $y=x$ funksiyaga ega bo'lamiz va bu holda $(x)'=1$ ekanligini olish qiyin emas. Demak, *argument hosilasi birga teng* ekan.

5. $y = \sin x$.

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) = 1 \cdot \cos x,$$

ya'ni

$$(\sin x)' = \cos x$$

ni olamiz.

6. $y = \cos x$. $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$.

$$(\cos x)' = \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right)' = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2} \right)' = -\sin x \cdot (1 + 0) = -\sin x.$$

Demak,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

7. $y = \operatorname{tg} x$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Bo'linmani differensiallash qoidasini qo'llasak,

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

ya'ni

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ni olamiz.

8. $y = \operatorname{ctg} x$, $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Yuqoridagiga o'xshash,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

ni olish mumkin.

$$9. y = \arcsin x, \quad |x| \leq 1, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$x = \sin y, \quad x' = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1$$

Demak,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$$

$$10. y = \arccos x, \quad |x| \leq 1, \quad y \in [0; \pi].$$

Yuqoridagiga o'xshash,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$11. y = \arctg x. \quad x \in R, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$x = \operatorname{tg} y, \quad x' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2,$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Demak,

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$12. y = \operatorname{arcctg} x. \quad x \in R, \quad y \in (0; \pi).$$

Yuqoridagidek,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

10.2.2. Hosila jadvali

Yuqorida olingan natijalarni quyidagicha joylashtiramiz.

$$1. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \neq 0, \quad \alpha \in R).$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (x)' = 1.$$

$$2. (a^x)' = a^x \ln a \quad (a \in R^+, \quad a \neq 1). \quad (e^x)' = e^x$$

$$3. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x} \quad (a \in R^+, \quad a \neq 1).$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$4. (\sin x)' = \cos x.$$

$$5. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$6. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$7. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$8. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$11. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Endi, yuqorida olingan differensiallash qoidalariga qo'shimcha sifatida *logarifmik differensiallash usulini* keltiramiz. Bu usul $y=f(x)$ berilgan bo'lsa, uni avvalo logarifmlab, so'ngra

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$$

tenglikdan

$$y' = y(\ln y)'$$

olinadigan formulaga asoslanadi.

Bunga misol tariqasida $y=U^g$ ning hosilasini topishni ko'ramiz. Bu yerda U va g lar differensiallanuvchi funksiyalar bo'lib, $U>0$ deb faraz qilamiz. U holda,

$$\ln y = g \ln U$$

Bundan

$$(\ln y)' = g' \ln U + g \cdot \frac{1}{U} \cdot U',$$

yuqoridagi formula asosida

$$(U^g)' = U^g \left(\frac{g}{U} \cdot U' + g' \ln U \right)$$

yoki

$$(U^g)' = g U^{g-1} \cdot U' + (\ln U) \cdot U^g \cdot g'$$

Eslatma. $y=U^g$ funksiya, U va g lar ikkalasi ham o'zgaruvchi funksiyalar bo'lgan holda *darajali-ko'rsatkichli* (yoki *ko'rsatkichli-darajali*) funksiya deb yuritiladi. Agar U -o'zgaruvchi g - o'zgarmas funksiyalar bo'lsa, uni murakkab darajali, U -o'zgarmas g -o'zgaruvchi bo'lgan holda murakkab

ko'rsatkichli funksiya deb yuritiladi. Yuqoridagi so'ngi formulada o'ng tomondagi ikkala qo'shiluvchilarga e'tibor bersak, birinchisi U^9 ni murakkab darajali, ikkinchisi esa murakkab ko'rsatkichli deb faraz qilib olingan hosilalar ekanligini payqash qiyin emas.

Logarifmik differensiallash usuli funksiyalarning ko'paymasi, bo'linmasi, darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish amallari qatnashgan funksiyalar hosilalarini topishda qo'l keladi.

Masalan, $y = \prod_{i=1}^n U_i$ bo'lib, U_i ($i = \overline{1;n}$) lar musbat va differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa,

$$\ln y = \sum_{i=1}^n \ln U_i$$

$$(\ln y)' = \sum_{i=1}^n \frac{U_i'}{U_i},$$

$$y' = y(\ln y)' = \prod_{i=1}^n U_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{U_j'}{U_j} = U_1' U_2 \dots U_n + U_1 U_2' \dots U_n + \dots + U_1 U_2 \dots U_n'$$

ya'ni

$$\left(\prod_{i=1}^n U_i \right)' = U_1' U_2 \dots U_n + U_1 U_2' \dots U_n + \dots + U_1 U_2 \dots U_n'$$

formulani olamiz.

Xususiyl holda, $n=3$ desak,

$$(U_1 U_2 U_3)' = U_1' U_2 U_3 + U_1 U_2' U_3 + U_1 U_2 U_3'.$$