O’zbekiston Respublikasi SSV
Toshkent Farmasevtika instituti
Farmatsiya fakulteti
Farmatsiya yo’nalishi 1/2 guruh

Mustaqil ish

Kompleks sonlar ustida amallar

***Bajardi:* Atoyeva Asal**

***Tekshirdi:* Sunnatova Dilfuza**

Toshkent 2014

Reja:

1. **Kompleks son tushunchasi ular ustida amallar**

2. **Kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik hamda ko‘rsatkichli shakllari**

3. **Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish**

Kompleks sonlar algebrasining elementlari va ko‘phadlar

Bu bobda son tushunchasini haqiqiy sondan keyingi navbatdagi mukammallashtirish natijasi bo‘lgan kompleks sonlarni va ular ustidagi asosiy algebraik amallarni hamda ko‘phadlarga oid ba’zi bir tasdiqlarni keltiramiz.

11.1. Kompleks son tushunchasi ular ustida amallar

Agar son tushunchasining rivojlanib borishiga nazar tashlasak, uning boshi natural son bo‘lib, nol va manfiy butun sonlarning, undan so‘ng butunning ulushlari yordamida kasr sonlarning kiritilishi natijasida ratsional son tushunchasiga kelingan bo‘lsa, irratsional sonning kiritilishi uni haqiqiy son tushunchasigacha kengaytirdi. Bunga sonlar ustida bajariladigan amallarga to‘siq bo‘ladigan holatlarni bartaraf qilish maqsadida qabul qilingan yangi tushunchalar sabab bo‘ldi.

Agar, $x^2+1=0$ tenglamani qarasak, u haqiqiy sonlar to‘plamida yechimga ega emasligi ravshandir. Shu misolning o‘zi haqiqiy sonlar to‘plami hali mukammal emasligini, ya’ni uni yana kengaytirish kerak ekanligini anglatadi. Agar kvadrati–1 ga teng «son» mavjud deb qabul qilinsa, yuqoridagi tenglama ham yechimga ega bo‘lar edi. Bu holatdan chiqish maqsadida kvadrati –1 ga teng «son» mavjud deb qabul qilamiz va uni *i* bilan belgilab *mavhum birlik* deb ataymiz, ya’ni $i^2=-1$. Ba’zan $i=\sqrt{-1}$ deb ham olinadi.

Agar a va b lar haqiqiy sonlardan iborat bo‘lsa, a+bi ifoda kompleks son deb ataladi, bu yerda i mavhum birlik bo‘lib, $i^2=-1$ *deb qabul qilinadi.*

Ba’zan kompleks sonni belgilash uchun bitta harf ham ishlatiladi, masalan, $z=a+bi$.

Agar $z=a+bi$ kompleks son berilgan bo‘lsa, a uning *haqiqiy qismi bi* esa *mavhum qismi*, *b mavhum qism koeffitsienti* deb yuritiladi. Bu o‘rinda, kompleks sonning mavhum qismi deyilganda ba’zan uning mavhum qismning koeffitsienti ham tushunilishini aytamiz. Kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismlari uchun mos ravishda quyidagi belgilashlar ishlatiladi:

$$Rez=a, \quad Imz=b.$$

Agar $Imz=0$ bo‘lsa $z=a+0i=a$ deb qabul qilinadi. Demak, haqiqiy son mavhum qismining koeffitsienti nolga teng bo‘lgan kompleks sondir.

Agar $Imz\neq 0$ bo‘lsa, z kompleks sonni *mavhum son* deb ataladi. Demak, *kompleks sonlar to‘plami haqiqiy va mavhum sonlar to‘plamlarining birlashmasidan iborat* ekan.

Agar $Rez=0$ va $Imz\neq 0$ bo‘lsa, $z=0+bi=bi$ deb qabul qilinadi va uni *sof mavhum son* deb ataladi.

Yuqoridagilardan ko‘rinadiki faqat $Rez=0$ va $Imz=0$ bo‘lganda $z=0$ bo‘ladi, ya’ni

$$(z=0) \Leftrightarrow (Rez=0,\ Imz=0).$$

Ikkita kompleks sonlarning tenglik sharti quyidagichadir:

$$(z_1=z_2)\Leftrightarrow(Rez_1=Rez_2 \wedge Imz_1=Imz_2).$$

Kompleks sonlar ustida katta va kichik tushunchalari mavjud emas, ya’ni *kompleks sonlar to‘plami tartiblashmagandir*.

$z=a+bi$ kompleks songa qarama–qarshi kompleks son deb $-a-bi$ qabul qilinadi va $-z$ deb belgilanadi.

$z=a+bi$ son berilgan bo‘lsa, $a-bi$ unga *qo‘shma kompleks son* deyiladi va $\bar{z}$ bilan belgilanadi, ya’ni $\overline{a+bi}=a-bi$. Bundan ko‘rinadiki, $\overline{(\bar{z})}=z$. Agar $a\in R$ bo‘lsa, $\bar{a}=a$ bo‘lishi ravshandir, ya’ni *haqiqiy sonning qo‘shmasi o‘ziga tengdir.* Shu bilan birga $\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}\bar{z}$ va $\operatorname{Im} z=-\operatorname{Im}\bar{z}$ dir.

Endi kompleks sonlar ustida asosiy to‘rt arifmetik amallarni ta’riflaymiz.

1. Qo‘shish. Berilgan $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning z_1+z_2 yig‘indisi deb,

$$z=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i \qquad (11.1.1)$$

ga aytiladi.

Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, kompleks sonlarni qo‘shish uchun ularning haqiqiy qismlarini alohida va mavhum qismlarining koeffitsientlarini alohida qo‘shib, mos yig‘indilarni haqiqiy qism va mavhum qism koeffitsienti qilib yozish kifoyadir, ya’ni

$$(z_1+z_2)=(Rez_1+Rez_2)+(Imz_1+Imz_2)i.$$

Qo‘shish amali uchun haqiqiy sonlarda bo‘lgan xossalar bu yerda ham saqlanib qoladi:

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\ \ z+(-z)=0,\ \ z+0=z,\ \ (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

Bulardan tashqari

$$z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z,\ \ \bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2}$$

ekanligini ko‘rish osondir.

2. Ayirish. Bu amal qo‘shishga teskari amal sifatida ta’riflanadi.

Berilgan z_1 va z_2 kompleks sonlarning ayirmasi z_1-z_2 deb shunday z kompleks songa aytiladiki, u bilan z_2 ning yig‘indisi z_1 ni beradi, ya’ni

$$z+z_2=z_1$$

Bu ta’rif bo‘yicha

$$(z_1-z_2)=(Rez_1-Rez_2)+(Imz_1-Imz_2)i \qquad (11.1.2)$$

formulani olish qiyin emas.

Kompleks sonlarni ayirish ham haqiqiy sonlardagi xossalarga egadir:

$$z-z=0,\quad z_1-z_2=z_1+(-z_2).$$

Undan tashqari, $z-\bar{z}=(2\operatorname{Im} z)\cdot i,\ \ \bar{z}_1-\bar{z}_2=\overline{z_1-z_2}$ larni keltirib chiqarish mumkin.

3. Ko‘paytirish. *Berilgan $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning ko‘paytmasi $z_1\cdot z_2$ deb,*

$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i \qquad (11.1.3)$$

bilan aniqlanuvchi kompleks songa aytiladi.

Bu amal ham haqiqiy sonlardagi xossalarini saqlab qoladi:

$$z_1.z_2=z_2\cdot z_1;\quad z\ .\ 1=z;\quad z\ .\ 0=0;$$

$$z_1\ .\ (z_2\ .\ z_3)=z_i\cdot(z_2\cdot z_3);$$

$$z_1\ .\ (z_2\pm z_3)=z_1z_2\pm z_1z_3.$$

Undan tashqari,

$$z\cdot\bar{z}=(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2,\ \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=\overline{z_1\cdot z_2}$$

lar to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish osondir.

Eslatma. Agar kompleks sonlarni ikkihad deb qabul qilib, ikkihadni ikkihadga ko‘paytirish qoidasi bu yerda o‘rinli deb qaralsa, $i^2=-1$ ekanligini eslagan holda (11.1.3) ko‘paytirish formulasini olish mumkin. Shu sababli bu formula yoddan ko‘tarilgan taqdirda mazkur eslatmadan foydalanish o‘rinlidir.

Masalan, $z_1=1+i$ va $z_2=2-3i$ larni ko‘paytiraylik:

$$z_1\cdot z_2=(1+i)(2-3i)=2-3i+2i-3i^2=2-i-3\cdot(-1)=5-i.$$

4. Bo‘lish. Bu amal ko‘paytirishga teskari amal sifatida ta’riflanadi.

Berilgan $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning bo‘linmasi $z_1:z_2$ yoki $\frac{z_1}{z_2}$ deb, shunday z kompleks songa aytiladiki, uning z_2 bilan ko‘paytmasi z_1 ni beradi, ya’ni $z\cdot z_2=z_1$ bo‘ladi.

Bu ta’rifdan foydalanib,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \qquad (11.1.4)$$

formulani chiqarish qiyin emas.

Agar kasrning surat va maxrajini bir xil kompleks songa (noldan farqli) ko‘paytirish bu yerda ham o‘rinli ekanligini e’tiborga olinsa, surat va maxrajni maxrajining qo‘shmasiga ko‘paytirish yo‘li bilan bo‘lish amalini, (11.1.4) formula yoddan ko‘tarilgan taqdirda, bajarish mumkin. Masalan,

$$\frac{2-i}{3+4i}=\frac{(2-i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-8i-3i+4i^2}{3^2+4^2}=\frac{6-11i-4}{25}=\frac{2-11i}{25}=$$

$$=\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i=0{,}08-0{,}44i.$$

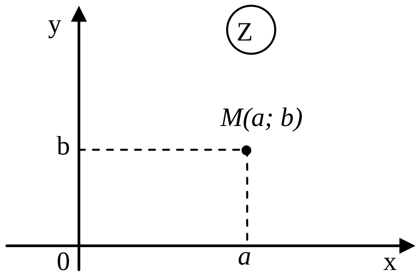
Shuningdek, $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ tenglik o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilish osondir.

11.2. Kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik hamda ko‘rsatkichli shakllari

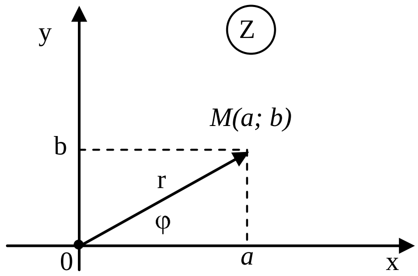
z=*a*+*bi* kompleks sonni tartiblashgan ikkita haqiqiy sonlarning, ya’ni *a* va *b* larning berilishi to‘liq aniqlaydi. Agar koordinatalar tekisligini olsak, undagi har bir *M(a; b)* nuqtaning holatini ham uning abssissasi *a* va ordinatasi *b* larning berilishi to‘liq aniqlaydi. Shu sababli, z=*a*+*bi* kompleks songa koordinatalar tekisligidagi *M(a; b)* nuqtani mos qo‘yish mumkin (11.2.1-rasmga qarang). Bu o‘rinda, o‘rnatilgan bunday moslik o‘zaro bir qiymatli ekanligini ham takidlaymiz.

Agar koordinatalar tekisligining nuqtalariga yuqoridagidek kompleks sonlar mos qo‘yilgan bo‘lsa, uni *kompleks tekislik* deb yuritiladi va odatda, uning o‘ng yuqori burchagiga doiracha ichiga *z* harfi yozib qo‘yiladi (11.2.1-rasmdagidek).

Bu kompleks sonning geometrik tasviridir. Shu bilan birga uning geometrik tasviri sifatida, M(a; b) nuqtaning radius-vektorini ham qabul qilish mumkin (11.2.2-rasm).



11.2.1-rasm.



11.2.2-rasm.

z kompleks songa mos qo‘yilgan radius vektorning moduli *r* ni *z kompleks sonning moduli*, bu vektorning O*x* o‘qi yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi φ ni z *kompleks sonning argumenti* deb ataladi va mos ravishda | *z* | hamda *argz* kabi belgilanadi. Demak, $|z|=r$, $argz=\varphi$.

U holda, z=*a*+*bi* kompleks son uchun

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{va} \quad a=r\cos\varphi, \quad b=r\sin\varphi$$

larni keltirib chiqarish mumkin. Endi, *a* va *b* larning bu ifodalarini *z* ga qo‘yib,

$$z=a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

ya’ni

$$z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (11.2.1)$$

ni olamiz. Olingan (11.2.1) ifoda *kompleks sonning trigonometrik shakli* deb ataladi. Ta’rif bo‘yicha kiritilgan z=*a*+*bi* esa uning *algebraik shakli* deb yuritiladi.

Bu yerda, har bir kompleks son o‘zining yagona moduliga ega ekanligini, ammo uning argumenti cheksiz ko‘p bo‘lishini aytamiz. Haqiqatdan ham agar M nuqtani koordinatalar boshi atrofida to‘liq aylantirsak, u yana o‘zining avvalgi holatiga qaytadi, demak, $\varphi+2\pi k$, $k\in Z$, burchaklar ham z kompleks son argumenti bo‘lar ekan. Odatda, φ ni z ning bosh, $\varphi+2\pi k$ ni esa umumiy argumenti deyilib ($0\le\varphi<2\pi$), ularni mos ravishda

$$\varphi = \arg\cdot z; \qquad \varphi + 2\pi k = Argz,\ k \in Z$$

kabi belgilash qabul qilingan.

Shuni ham aytamizki, $z=0$ sonning moduli nolga teng, ammo uning argumenti aniqlanmagandir.

Agar Eyler formulasi deb ataluvchi $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ni hisobga olsak (uni keyinroq qator yordamida isbotlaymiz), (11.2.1) ni

$$z=r\,e^{i\varphi} \qquad (11.2.2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. (11.2.2) *kompleks sonning ko‘rsatkichli shakli* deb ataladi.

Kompleks sonning trigonometrik va ko‘rsatkichli shakllari ustida ko‘paytirish, bo‘lish va quyida ko‘riladigan darajaga ko‘tarish, ildiz chiqarish amallarini bajarish birmuncha yengil ko‘chadi.

11.3. Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko'paytirish va bo'lish

Aytaylik, $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ va $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. U holda, ularning ko'paytmasi

$$z_1\cdot z_2=(r_1\cdot r_2)((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_1))$$

bo'lib, trigonometriyadagi qo'shish teoremalariga asosan

$$z_1\cdot z_2=(r_1\cdot r_2)(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \qquad (11.3.1)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bundan ko'rinadiki, trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni ko'paytirish uchun modullarini ko'paytirish argumentlarini esa qo'shish kifoya ekan.

Xuddi shunga o'xshash, ularning bo'linamasi uchun

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

formulani olish mumkin.

11.4. Kompleks sonni darajaga ko'tarish

Berilgan z kompleks sonning natural ko'rsatkichli n–darajasi z^n deb,

$$z^1=z$$

ga, $2\le n\in N$ bo'lganda,

$$z^n=z^{n-1}\cdot z$$

ga aytiladi.

Aytaylik, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ bo'lsin. U holda, (11.3.1) ga asosan

$$z^2=z\cdot z=(r\cdot r)(\cos(\varphi+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi)=r^2(\cos2\varphi+i\sin2\varphi),$$

$$z^3=z^2\cdot z=(r^2\cdot r)(\cos(2\varphi+\varphi)+i\sin(2\varphi+\varphi)=r^3(\cos3\varphi+i\sin3\varphi),$$

\- -

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \qquad (11.4.1)$$

ni olamiz. Bu kompleks sonni darajaga ko'tarish formulasidir $(n\in N)$.

Agar $|z|=r=1$ bo'lsa, (11.4.1) formuladan

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi \qquad (11.4.2.)$$

ni olamiz. Buni *Muavr formulasi* deb yuritiladi.

Bu formulaning tatbiqlaridan biri sifatida $\cos n\varphi$ va $\sin n\varphi$ ni cosφ va sinφ lar orqali ifodalash formulalarini keltirish mumkin.

Haqiqatdan ham, (11.4.2) ning o'ng tomonidagi ikki hadning n darajasini Nyuton binomi formulasi bo'yicha yoyib, i ning darajalari bo'lgan

$$i^{4k-3}=i,\ i^{4k-2}=-1,\ i^{4k-1}=-i,\ i^{4k}=1,\ k\in N$$

larni hisobga olib, kompleks sonlarning tenglik shartidan foydalansak, talab qilingan formulalarga ega bo'lamiz. Masalan, $n=4$ uchun

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^4=\cos4\varphi+i\sin4\varphi,$$

$$\cos^4\varphi+4\cos^3\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi+6\cos^2\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi+4\cos\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi+i^4\cdot\sin^4\varphi=$$

$$=\cos4\varphi+i\sin4\varphi;$$

$$\cos^4\varphi+i(4\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi)-6\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi-i(4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi)+\sin^4\varphi=$$

$$=\cos4\varphi+i\sin4\varphi;$$

$$(\cos^4\varphi - 6\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\sin^4\varphi)+i(4\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi - 4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi)=$$

$$=\cos4\varphi+i\sin4\varphi.$$

Oxirgidan,

$$\cos4\varphi=\cos^4\varphi - 6\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\sin^4\varphi,$$

$$\sin4\varphi=4(\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi - \cos\varphi\cdot\sin^3\varphi).$$

Bu yerda ham haqiqiy sonlar uchun darajaga ko‘tarish amalining xossalari saqlanib qoladi. Undan tashqari,

$$(\bar{z})^n=\overline{(z^n)}$$

ham o‘rinlidir.

11.5. Kompleks sondan ildiz chiqarish

z kompleks sonning n–darajali ($n\in N$) ildizi $\sqrt[n]{z}$ deb shunday W kompleks songa aytiladiki, uning n–darajasi z ni beradi, ya’ni

$$W^n=z \qquad (11.5.1)$$

bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ trigonometrik shakldа berilgan bo‘lsin.

$$W=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$$

bo‘lsin deylik. (11.5.1) va (11.4.1) larga asosan

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

ni olamiz.

Endi, $z\neq0$ bo‘lganda, oxirgidan

$$\rho^n=r,\ \ n\psi=\varphi+2k\pi,\ \ k\in Z$$

kelib chiqadi. Oxirgi olingan tenglamalar haqiqiy sohadagi tenglamalardir. Ulardan

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n},\ k\in Z$$

larni, demak,

$$\sqrt[n]{z}=W_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad k=0;1;\ldots;n-1 \qquad (11.5.2)$$

formulani olamiz. Bu yerda k ning qolgan qiymatlarida sinus va kosinusning davriylik xossasi tufayli k ning yuqoridagi qiymatlarida olingan ildizlar takrorlanadi, ya’ni yangi ildiz qiymati kelib chiqmaydi. Demak, noldan farqli kompleks sonning *n*–darajali ildizi mavjud va u rosa *n* ta qiymatga ega bo‘lar ekan. Kezi kelganda 0 ning natural ko‘rsatkichli ildizi 0 ning o‘zi bo‘lib, faqat bitta qiymatga egaligini aytamiz.

1–misol. $\sqrt[3]{1}$ kompleks sohada hisoblansin.

Yechish. 1 ni trigonometrik shaklda yozamiz:

$$1=\cos0+i\sin0$$

Bundan $r=1$, $\varphi=0$ ni olamiz va ularni (11.5.2) ga qo‘yib,

$$\sqrt[3]{1}=W_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\qquad k=0;1;2$$

ni olamiz.

$$k=0\Rightarrow W_0=\cos0+i\sin0=1,$$

$$k=1 \Rightarrow W_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$k=2 \Rightarrow W_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Demak, 1 ning kub ildizi kompleks sohada uchta qiymatga ega ekan, haqiqiy sohada esa faqat bitta 1 qiymatga egaligi bizga ma'lum.

2–misol. $\sqrt[4]{-1}$ ildiz kompleks sohada hisoblansin.

Yechish. Bu ildiz haqiqiy sohada mavjud emasligi ma'lum.

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi,$$
$$r=1,\ \ \varphi=\pi.$$

Bularni (11.5.2) ga qo'yamiz:

$$\sqrt[4]{-1}=W_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\quad k=0;1;2;3.$$
$$W_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$
$$W_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$
$$W_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$
$$W_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

3–misol. $\sqrt{1+i}$ ni toping.

Yechish. $$r=\sqrt{1+i}=\sqrt{2};\begin{cases}\sqrt{2}\cos\varphi=1,\\ \sqrt{2}\sin\varphi=1\end{cases}\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4};$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$
$$\sqrt{1+i}=W_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right),\ k=0;1.$$
$$W_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\approx 1{,}0987+0{,}4551i;$$
$$W_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\approx -1{,}0987-0{,}4551i.$$

11. 6. Kompleks sohada ko‘phad

Bu yerda n-darajali

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} A_i z^{n-i} \qquad (11.6.1.)$$

ko‘phadni qaraymiz. $n \in N;\ A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$ lar berilgan kompleks sonlar, ya’ni koeffitsientlar, $z=x+yi$ kompleks o‘zgaruvchi bo‘lib, $A_0 \neq 0$ deb faraz qilinadi (agar $A_0=0$ bo‘lib qolsa, ko‘phad darajasi n dan past bo‘ladi).

$n=0$ bo‘lgan holda ham ko‘phad tushunchasi saqlab qolinib, uni nolinchi darajali ko‘phad deb yuritilib,

$$P_0(z)=A_0,$$

ya’ni o‘zgarmas deb qabul qilinadi.

Agar biror $z=z_0$ kompleks son uchun $P_n(z_0)=0$ bo‘lsa z_0 kompleks son *$P_n(z)$ ko‘phadning ildizi* deyiladi.

Undan tashqari, oliy algebra kursidan ma’lumki, A_0 *ni bosh koeffitsient* A_n *ni esa ozod had* deb ham yuritiladi. Shu bilan birga quyidagi algebraning asosiy teoremasi deb yuritiladigan teorema ham isbotlangandir.

11.6.1-teorema (Algebraning asosiy teoremasi). *Har qanday natural n – darajali (11.6.1) ko‘phad kamida bitta ildizga egadir* [4].

Quyidagi Bezu teoremasi ham algebra kursidan ma’lum.

11.6.2-teorema (Bezu). Natural n–darajali (11.6.1) ko‘phadni $z-a$ ikki hadga bo‘lish natijasida chiqadigan qoldiq $P_n(a)$ ga tengdir, ya’ni

$$P_n(z)=(z-a)P_{n-1}(z)+R$$

bo‘lsa, $R=P_n(a)$ dir, bu yerda $P_{n-1}(z)$ $(n-1)$–darajali ko‘phaddir.

Algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra $n \geq 1$ bo‘lsa, (11.6.1) qandaydir z_1 ildizga egadir.

Bezu teoremasi asosida, agar z_1 (11.6.1) ko‘phadning ildizi bo‘lsa, $P_n(z_1)=0$ ekanligi sababli, uni

$$P_n(z)=(z-z_1)P_{n-1}(z)$$

ko‘rinishda ko‘paytuvchiga ajratish mumkinligi kelib chiqadi.

Agar $n \geq 2$ bo‘lsa, $P_{n-1}(z)$ ham o‘z navbatida qandaydir z_2 ildizga ega bo‘ladi, u holda

$$P_{n-1}(z)=(z-z_2)P_{n-2}(z),$$

ya’ni

$$P_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)P_{n-2}(z)$$

va hokazo, bu jarayonni davom ettirish natijasida n–so‘ngi qadamda

$$P_n(z)=A_0(z-z_1)(z-z_2)\cdot \ldots \cdot(z-z_n) \qquad (11.6.2)$$

ga ega bo‘lamiz. Bundan ko‘rinadiki, natural n–darajali ko‘phad rosa n ta ildizga ega bo‘lar ekan. Bu ildizlar ichida tenglari ham bo‘lishi mumkin.

Ilidizlari bo‘yicha ko‘phadni (11.6.2) ko‘rinishda ifodalash uni ko‘paytuvchilarga yoyish deb yuritiladi. Agar (11.6.2) *yo‘yilmada* $(z-z_i)$ *kopaytuvchi* k_i *marta takrorlangan bo‘lsa*, z_i *ni ko‘phadning* k_i *karrali ildiz deb yuritiladi*. Ildizlar karraliklarini hisobga olgan holda (11.6.2) ni

$$P_n(z) = A_0 (z-z_1)^{k_1} \cdot (z-z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z-z_q)^{k_q} \qquad (11.6.3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lib, bu yerda z_1, z_2, ..., z_q lar ko‘phadning bir-biridan farqli ildizlari va $\sum_{i=1}^{q} k_i = n$ dir.

11.6.3–teorema. Agar *n*–darajali $P_n(z)$ ko‘phad aynan nolga teng, ya’ni *z* ning ixtiyoriy kompleks qiymatida nolga teng bo‘lsa, uning barcha koeffitsientlari nolga teng bo‘ladi.

Isbot. $P_n(z)=0$ bo‘lgani uchun ixtiyoriy *n* ta z_1, z_2, ..., z_n kompleks sonlarni uning ildizlari deb qarash mumkin, u vaqtda, (11.6.2) yoyilma asosida A_0–bosh koeffitsient nolga tengligi, ya’ni A_0=0 bo‘lishi kelib chiqadi. Bu esa $P_n(z)$ *n*–emas (*n*-1)–darajali ekan degan xulosaga kelamiz va uning uchun ham

$$P_{n-1}(z)=A_1(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_{n-1})$$

yoyilmani yozib, A_1=0 ni va hokazo, bu jarayonni davom ettirib, $A_i = 0$ $(i=\overline{0;n})$ ni olamiz.

11.6.4-teorema. Agar ikkita ko‘phad aynan bir-biriga teng bo‘lsa, ularning mos koeffitsientlari tengdir.

Isbot. $P_n(z)=Q_n(z)$ bo‘lsa, $R_n(z)=P_n(z)-Q_n(z)=0$ kelib chiqadi. $R_n(z)$ ning koeffitsientlari $P_n(z)$ va $Q_n(z)$ larning mos koeffitsientlari ayirmasidan iborat bo‘lib, ular 11.6.3-teoremaga ko‘ra nolga tengligidan $P_n(z)$ va $Q_n(z)$ larning mos koeffitsientlarining tengligi kelib chiqadi.

11.6.5-teorema. Agar *n*- darajali $P_n(z)$ ko‘phad *n+1* ta turli z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1} nuqtalarda nolga teng bo‘lsa, u aynan nolga teng bo‘ladi.

Bu ham (11.6.2) yoyilma yordamida juda sodda isbotlanadi (o‘quvchiga havola qilamiz).

Agar (11.6.1) da $A_i(i=0,1,\ldots,n)$ koeffitsientlarning barchasi haqiqiy sonlar bo‘lsa, $P_n(z)$ ni *haqiqiy koeffitsientli ko‘phad* deb ataladi. Bunday ko‘phad mavhum $\alpha+\beta i$ ildizga ega bo‘lsa $(\beta\neq 0)$, u qo‘shma $\alpha-\beta i$ ildizga ham ega bo‘lishini isbotlash mumkin.

Haqiqatdan ham, $A_i\in R \Rightarrow \overline{A_i} = A_i$ $(i=\overline{0;n})$ ekanligini hisobga olsak,

$$P_n(\overline{z}) = \overline{P_n(z)}$$

bo‘lishini ko‘rish qiyin emas (bu kompleks sonlar ustida yuqorida ko‘rilgan amallarning xossalaridan kelib chiqadi). Shunday qilib, $\alpha+\beta i$ $(\beta\neq 0)$ $P_n(z)$ ning ildizi bo‘lsa,

$$P_n(\alpha+\beta i)=0$$

va

$$P_n(\alpha-\beta i)= P_n(\overline{\alpha+\beta i}) = \overline{P_n(\alpha+\beta i)} = \overline{0} = 0$$

kelib chiqadi.

Undan tashqari, $\alpha+\beta\ i$ $P_n(z)$ haqiqiy koeffitsientli ko‘phadning k karrali mavhum ilidizi bo‘lsa, $(\alpha-\beta\ i)$ qo‘shma ildiz ham *k* karrali bo‘lishi kelib chiqadi. U holda, bunday mavhum ilidizlarga mos (11.6.3) ning ko‘paytuvchilarini ajratib olsak,

$$(z-(\alpha+\beta\ i))^k(z-(\alpha-\beta\ i))^k=((z-(\alpha+\beta\ i))(z-(\alpha-\beta\ i)))^k=$$
$$=(z^2-2\alpha\ z+(\alpha^2+\beta^2))^k=(z^2+pz+q)^k,$$

ya’ni haqiqiy koeffitsientli kvadrat uchhadning k–darajasidan iborat ko‘paytuvchiga ega bo‘lamiz va bu uchhadning diskriminanti manfiyligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Demak, $P_n(z)$ haqiqiy koeffitsientli ko‘phad bo‘lganda (11.6.3) yoyilmada $z–a$ ko‘rinishdagi chiziqli ko‘paytuvchilardan faqat haqiqiy ildizga moslari qolib, mavhum ildizga moslari esa ildizning qo‘shma juftiga mosi bilan ko‘payib haqiqiy koeffitsientli kvadrat uchhad ko‘rinishidagi ko‘paytuvchilarga aylanar ekan. Shunday qilib, bu hol uchun (11.6.3) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$P_n(z) = A_0\left(\prod_{i=1}^{m}(z-a_i)^{k_1}\right)\cdot\left(\prod_{j=1}^{m}(z^2+p_jz+q_j)^{r_1}\right) \qquad (11.6.4)$$

bu yerda $\sum_{i=1}^{s} k_i + 2\sum_{j=1}^{m} r_j = n$ hamda barcha kvadrat uchhadlarning diskriminantlari manfiydir.

Shunday qilib, haqiqiy koeffitsientli natural darajali ixtiyoriy ko‘phad (11.6.4) ko‘rinishdagi chiziqli va manfiy diskrminantli kvadrat uchhadlardan iborat ko‘paytuvchilar yoyilmasi kabi ifodalanar ekan. Bu yerda (11.6.4) yoyilmada faqat chiziqli yoki faqat kvadrat uchhad ko‘rinishidagi ko‘paytuvchilar qatnashgan bo‘lishi ham mumkinligini aytamiz.

Misol. $P_4(z)=z^4+1$ ni ko‘paytuvchilarga ajrataylik.

$$P_4(z) = (z^2+1)^2 - 2z^2 = (z^2+1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 = (z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)$$

Demak, bu ko‘phad yoyilmasida faqat kvadrat uchhadlar qatnashadi (qavslar ichidagi kvadrat uchhadlarning diskriminantlari manfiydir).

Demak, (11.6.4) yoyilmadagi chiziqli ko‘paytuvchilar haqiqiy koeffitsientli ko‘phadning haqiqiy ildizlariga, manfiy diskriminantli kvadrat uchhaddan iborat ko‘paytuvchilar esa uning qo‘shma mavhum ildizlariga mos kelar ekan.

11.6.6-teorema. Agar $P_n(z)$ ko‘phad m karrali z_0 ilidizga ega bo‘lsa ($m\le n$), bu z_0 son ko‘phadning (m-1) – tartibligacha bo‘lgan hosilalari uchun ham ildiz bo‘lib, $P_n^{(m)}(Z_0) \neq 0$ bo‘ladi.

Isbot. Yuqoridagi mulohazalardan, agar z_0 $P_n(z)$ ko‘phadning m karrali ildizi bo‘lsa,

$$P_n(z)=(z–z_0)^m P_{n-m}(z)$$

o‘rinli bo‘lib, bunda $P_{n-1}(z)$ – qandaydir $(n-1)$- darajali ko‘phad va $P_{n-m}(z)$- qandaydir $(n-m)$- darajali ko‘phad va $P_{n-m}(z_0)\neq 0$ dir. Oxirgi tenglikni $m–1$ marta differensiallab,

$$P_n^{(m-1)}(z) = m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 2(z-z_0)\cdot P_{n-m}(z) + (z-z_0)^2\cdot Q_{n-m-1}(z) \qquad (11.6.5)$$

ni olamiz, bu yerda $Q_{n-m-1}(z)$ $(n-m-1)$–darajali qandaydir ko‘phaddir. Oxirgida $z=z_0$ desak, $P_n^{(m-1)}(z_0)=0$ bo‘lishi kelib chiqadi. Undan tashqari, $k\le m-1$ bo‘lganda $P_n^{(k)}(z)$ k–tartibli hosiladan iborat ko‘phad $(z-z_0)^{m-k}$ ko‘paytuvchiga ega bo‘lishiga ishonch hosil qilish qiyin emasdir va shu sababli $0\le k \le m-1$ bo‘lganda $P_n^{(k)}(z_0)=0$ dir.

Endi (11.6.5) ni differensiallab,

$$P_n^{(m)}(z) = m!P_{n-m}(z) + (z-z_0)Q_{n-m-z}(z)$$

ga ega bo‘lamiz, bu yerda $Q_{n-m-2}(z)$ $(n-m-2)$–darajali qandaydir ko‘phaddir. Oxirgida $z=z_0$ deb,

$$P_n^{(m)}(z_0) = m!P_{n-m}(z_0) \neq 0$$

ni olamiz. Teorema isbotlandi.

Eslatma. Agar *z-z*$_0$ $P_n(z)$ koʻphadning koʻpaytuvchilari yoyilmasida birinchi darajada qatnashsa, ya’ni $P_n(z_0) = 0$, $P_n'(z_0) \neq 0$ boʻlsa, z_0 ni $P_n(z)$ koʻphadning *oddiy ildizi* (ba’zan *bir karrali ildizi*) deb yuritiladi.

Adabiyot

1. Т. Жщраев ва бошыалар. Олий математика асослари. Т. «Щзбекистон», 1995 й. I ыисм.
2. Ё. У. Соатов. Олий математика. Т. «Щыитувчи», 1994 й. I ыисм.
3. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М. «Наука», 1990 г.
4. А.Г. Курош. Курс высщей алгебры. М. «Наука». 1971 г.
5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука,1984 г.
6. Фихтенголрц Г.М. Дифференциал ва интеграл ъисоб курси. I том. Т. 1951 й.
7. Уваренков И.М., Малер М.З. Курс математического анализа. I том. М. 1966 г.
8. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математике. I том. М. 1973 г.
9. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1970г.
10. Ы. Бойыщзиев. Дифференциал тенгламалар. Т. «Щыитувчи» 1983й.

11. Н.С Пискунов дифференциалные и интегралное исчисление для
ВТУЗ ов. М. Наука, в 2 х частях, 1985 г.