

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
QARSHI MUHANDISLIK IQTISODIYOT INISTITUTI

I – kurs 1 – semistr uchun
”Oliy matematika” fanidan

MA'RUZALAR MATNI

Tuzuvchi:

dots. B. Eshmatov

QARSHI – 2014 yil

1-Mavzu: To'plam tushunchasi. Haqiqiy sonlar to'plami. Haqiqiy sonlar to'plamining xossalari. Sonlar o'qi. Haqiqiy sonlarni sonlar o'qida tasvirlash. Haqiqiy sonlar absolyut qiymati, xossalari

1. To'plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, unga ta'rif berilmaydi. Misollar bilan tushuntiriladi. Masalan: auditoriyadagi talabalar to'plami, unli tovushlar to'plami, natural sonlar to'plami va h.k.z. To'plamni tashkil qiluvchi ob'ektlar to'plam elementi deyiladi. To'plamlar lotin alifbosining bosh harflari bilan: A, B, C, ...; uning elementlari kichik harflari bilan: a, v, s,... belgilanadi. To'plam elementi $a \in A$ ko'rinishda yoziladi va «a element A to'plamga tegishli» deb o'qiladi.

2. Birorta ham elementi bo'lmagan to'plam bo'sh deyiladi va $\emptyset$ yoki $\{\}$ ko'rinishda belgilanadi.

Masalan: $x^2+4=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami, oydagi daraxtlar to'plami, dengiz tubidagi quruq toshlar to'plami bo'sh to'plamlardir.

To'plam chekli sondagi elementlardan tashkil topsa, chekli to'plam deyiladi. Masalan: lotin alifbosi harflari to'plami, kamalak ranglari to'plami, raqamlar to'plami chekli to'plamdir. To'plam elementlari soni cheksiz bo'lsa, bunda to'plam cheksiz to'plam deyiladi. Masalan: barcha natural sonlar to'plami, tekislikdagi nuqtalar to'plami cheksizdir. Bir xil elementlardan tashkil topgan to'plamlar teng to'plamlar deyiladi. Masalan $x^2-4=0$ tenglamaning yechimlari to'plami va $|x|=2$ tenglamaning yechimlari to'plami tengdir.

3. Agar har bir elementning ma'lum bir to'plamga tegishli yoki tegishli emasligi bir qiymatli aniqlangan bo'lsa, to'plam berildi deyiladi.

To'plamlar odatda 2 usulda beriladi:

1) to'plam elementlari ro'yxati keltiriladi.

M: $A = \{a, ye, yo, i, o, u, e, yu, ya, o'\}$

$B = \{\text{qizil, sariq, yashil}\}.$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$

2) to'plamga kirgan elementlarning yagona harakteristik xossasi ko'rsatiladi.

M: A- o'zbek alifbosi o'nli harflari to'plami

V- svetofor ranglari to'plami

S- bir xonali natural sonlar to'plami

Sonli to'plamlar uchun harakteristik xossani formula bilan berish qulay.

$$M: S = \{s \mid s \leq 9, S \in \mathbb{N}\}.$$

$$X = \{x \mid x^2 - 4 = 0, x \in \mathbb{R}\}.$$

$$Y = \{y \mid -2 \leq y \leq 6, y \in \mathbb{Z}\}.$$

4. Agar A to'plamning hamma elementi V to'plamga ham tegishli bo'lsa, A to'plam V to'plamning to'plam osti yoki qism to'plami deyiladi va $A \subset V$ ko'rinishda yoziladi. $A \subset A$ va $\emptyset \subset A$ bo'ladi.

Agar $A \subset V$ va $V \subset A$ bo'lsa, $A = V$ bo'ladi.

Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar A to'plamning qism to'plami bo'lsa, A to'plam $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar uchun universal to'plam deyiladi. Universal to'plam odatda Y yoki U harflari bilan belgilanadi.

Masalan: $\mathbb{N}$ -barcha natural sonlar to'plami,

$\mathbb{Z}$ -barcha butun sonlar to'plami,

$\mathbb{Q}$ -barcha ratsional sonlar to'plami,

$\mathbb{R}$ -barcha hakikiy sonlar to'plami bo'lib, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ shartlar bajariladi va $\mathbb{R}$ -kolgan sonli to'plamlar uchun universal to'plam vazifasini bajaradi.

5. To'plamlar orasidagi munosabatlarni yaqqolroq tasavvur qilish uchun Eyler-Venn diagrammalaridan foydalaniladi. Bunda to'plamlar doira yoki oval shaklida, universal to'plam esa, to'g'ri to'rtburchak shaklida tasvirlanadi.

Savollar:

1. Bo'sh, chekli, cheksiz to'plamlarga misol keltiring.
2. Qachon to'plam berildi deyiladi va necha xil usulda beriladi?
3. To'plam osti tushunchasiga ta'rif bering. Teng to'plamlarni qism to'plam orqali tushuntiring.
4. Universal to'plamga misol keltiring.

To'plamlar va ular ustida amallar.

1. A va V to'plamlarning birlashmasi deb, bu to'plamlarning hech bo'lmaganda biriga tegishli bo'lgan elementlar to'plamiga aytiladi va $A \cup V$ ko'rinishida belgilanadi.

$$A \cup V = \{x \mid x \in A \text{ yoki } x \in B\}.$$

M : A -barcha juft sonlar to'plami

$$A = \{a | a = 2n, n \in \mathbb{N}\}$$

B-barcha toq sonlar to'plami

$$V = \{b | b = 2n-1, n \in \mathbb{N}\} \text{ bo'lsa,}$$

$$A \cup V = \mathbb{N} \text{ bo'ladi.}$$

2. A va V to'plamlarning kesishmasi deb, bu to'plamlarning ikkalasiga ham bir vaqtda tegishli bo'lgan elementlar to'plamiga aytiladi va $A \cap V$ ko'rinishda belgilanadi.

$$A \cap V = \{x | x \in A \text{ va } x \in V\}.$$

$$M: A = \{a | 4 \leq a \leq 14, a \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{b | 10 < b < 19, b \in \mathbb{N}\} \text{ bo'lsa,}$$

$$A \cap B = \{x | 11 \leq x \leq 14, x \in \mathbb{N}\} \text{ bo'ladi.}$$

To'plamlar kesishmasi ularning umumiy qismidir. Umumiy qismga ega bo'lmagan to'plamlar kesishmasi bo'sh to'plamdir.

$$A \cap B = \emptyset.$$

Umumiy qismga ega bo'lgan to'plamlar kesishadi deyiladi va $A \cap B \neq \emptyset$, ya'ni A va V to'plamlar kesishmasi bo'sh emas, deb yoziladi.

3. A va V to'plamlarning ayirmasi deb, A to'plamning V to'plamga kirmaydigan elementlari to'plamiga aytiladi va $A \setminus V$ ko'rinishda belgilanadi.

$$A \setminus V = \{x | x \in A \text{ va } x \notin V\}.$$

$$M: A = \{a | |a| < 4, a \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{b | |b| \leq 2, a \in \mathbb{R}\}.$$

$$A \setminus B = \{x | -4 < x < -2 \cup 2 < x < 4\}.$$

Agar $V \subset A$ bo'lsa, $A \setminus V = V^1$ ko'rinishda belgilanadi va V to'plamning A to'plamga to'ldirmasi deyiladi.

4. A va V to'plamlarning dekart ko'paytmasi deb, 1-elementi A to'plamdan, 2-elementi V to'plamdan olingan (a,b) ko'rinishdagi barcha tartiblangan juftliklar to'plamiga aytiladi va $A * V$ ko'rinishda belgilanadi.

$$A * V = \{(a,b) | a \in A \text{ va } b \in B\}$$

$$M: A = \{2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c\} \text{ bo'lsa,}$$

$A*B=\{(2;a), (2;b), (2;c), (3;a), (3;b), (3;c), (4;a), (4;b), (4;c), (5;a), (5;b), (5;c)\}$ bo'ladi.

Sonli to'plamlar dekart ko'paytmasini koordinata tekisligida tasvirlash qulay.

5. Ikki to'plamning o'zaro munosabatida 4 hol bo'lishi mumkin.

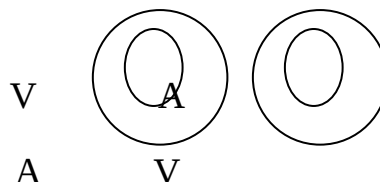
I. $A \cap B = \emptyset$



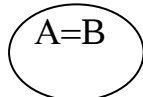
II. $A \cap B \neq \emptyset$



III. $A \subset B$ yoki $B \subset A$



IV. $A=B$



To'plamlar birlashmasining tasviri va xossalari.

I. $A \cup B$

II. $A \cup B$

III. $A \cup B$

1⁰. $V \subset A \Rightarrow A \cup V = A$

2⁰. $A \cup V = V \cup A$ (kommutativlik) 3⁰. $A \cup (V \cup A) = (A \cup V) \cup S = A \cup V \cup S$ (assotsiativlik)

4⁰. $A \cup \emptyset = A$

5⁰. $A \cup A = A$

To'plamlar kesishmasining tasviri va xossalari.

I. $A \cap B = \emptyset$

II. $A \cap B$

III. $A \cap B$

1⁰. $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$.

2⁰. $A \cap B = B \cap C$ (kommutativlik)

3⁰. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (assotsiativlik)

4⁰. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (kesishmaning birlashmaga va birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi)

$$5^0. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$6^0. A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$7^0. A \cap A = A$$

Savollar:

1. Ikki to'plam orasida qanday munosabatlar bo'lishi mumkin?
2. Eyler-Venn diagrammalarida to'plamlar ustidagi amallarni turli hollar uchun tasvirlang.
3. To'plamlar ustida amallar xossalarini ayting va izohlang.
4. To'plamlar dekart ko'paytmasiga ta'rif bering. Dekart ko'paytma kommutativlik xossasiga ega bo'lmasligini tushuntiring.

To'plamlar va ular ustida amallar.

Ta'rif. Agar A to'plam chekli yoki cheksiz sondagi juft-jufti bilan o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lsa, A to'plam $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sinflarga ajratilgan deyiladi.

Demak to'plamni sinflarga ajratishning 2 sharti bor ekan:

- 1) $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$
- 2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ bu yerda $i, j = 1, 2, \dots, n, \dots$ va $i \neq j$.

To'plamni sinflarga ajratish masalasi fanda klassifikatsiya deb ataladi.

Masalan: barcha natural sonlar to'plami bir necha usul bilan sinflarga ajratilishi mumkin:

1. Tub sonlar va murakkab sonlar sinfi.
 2. Juft va toq sonlar sinfi.
 3. Bir xonali, ikki xonali, ... sonlar sinfi.
- 1- va 2-holda sinflar soni chekli bo'lsa, 3-holda sinflar soni cheksizdir.
2. To'plamni sinflarga ajratishga oid 3 xil masalani ko'rib chiqaylik. I. D to'plam va biror α xossa berilgan bo'lsin. D to'plam elementlari α xossaga ega bo'lishi ham, ega bo'lmasligi ham mumkin. Bu holda D to'plam 2 ta o'zaro kesishmaydigan A va V qism to'plamlarga ajraladi. A to'plam D to'plamning α xossaga ega bo'lgan elementlari to'plami, $V-D$ to'plamning α xossaga ega bo'lmagan elementlari to'plami. $A \cup V = D$ va $A \cap V = \emptyset$ ekanligi ravshan. Agar D to'plamning hamma elementi α xossaga ega bo'lsa, $V = \emptyset$, agar D to'plamning birorta ham elementi α xossaga ega bo'lmasa, $A = \emptyset$ bo'ladi.

Agar A va V to'plamlar bo'sh bo'lmasa, D to'plamni quyidagicha tasvirlash mumkin:

Masalan: D-sinfidagi o'quvchilar to'plami, α -uy vazifani bajarganlik xossasi bo'lsa, A-uy vazifani bajarib kelgan va V-uy vazifani bajarmagan o'quvchilar to'plami bo'ladi.

II. D to'plam va uning elementlari ega bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin bo'lgan α va β xossalar berilgan bo'lsin. Bu 2 xossa D to'plamni ko'pi bilan 4 sinfga ajratishi mumkin.

1-sinf: α xossaga ega bo'lgan va β xossaga ega bo'lmagan elementlar to'plami.

2-sinf: α xossaga ega bo'lmagan va β xossaga ega bo'lgan elementlar to'plami.

3-sinf: α va β xossalarga ega bo'lgan elementlar to'plami.

4-sinf: α va β xossalarga ega bo'lmagan elementlar to'plami.

Bu sinflarning birortasi bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin. Umumiy holda D to'plamni 2 ta xossaga ko'ra quyidagicha sinflarga ajratish mumkin:

Bu yerda A- α xossaga ega bo'lgan, B- β xossaga ega bo'lgan elementlar to'plami.

Savollar:

1. To'plamlarni qism to'plamlarga ajratish qaysi holda sinflarga ajratish deyiladi?
2. To'plamni sinflarga ajratishga misol keltiring.
3. To'plamni bitta, ikkita, uchta xossaga ko'ra sinflarga ajratishda hosil bo'ladigan sinf elementlarini ta'riflang.

Ikki to'plam elementlari orasidagi moslik.

1. Ta'rif. $X*Y$ dekart ko'paytmaning istalgan G_f qism to'plami X va Y to'plamlar orasidagi moslik deyiladi.

Moslik lotin alifbosining f, g, t, s kabi harflari bilan belgilanadi.

Sizga ma'lum bo'lgan funktsiyalarning hammasi moslik tushunchasiga misol bo'la oladi.

X to'plam moslikning birinchi to'plami deyiladi. X to'plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to'plami moslikning aniqlanish sohasi deyiladi.

Y to'plam moslikning ikkinchi to'plami deyiladi. Y to'plamning moslikda katnashgan elementlari to'plami moslikning qiymatlar to'plami deyiladi.

2. $G_f \subset X * Y$ to'plam moslikning grafigi deyiladi. 2 to'plam orasidagi moslikni nuqtalar va yunalishli kesmalar (strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar moslikning grafi deyiladi. Masalan:

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

$$Y = \{m, n, p, q\}$$

$$G_f = \{(a,n), (b,p), (c,n), (c,q), (d,p)\}.$$

$$\text{Aniqlanish sohasi} = \{a, b, c, d\}$$

$$\text{qiymatlar to'plami} = \{n, p, q\}.$$

3. 1-Ta'rif: Agar f moslikning aniqlanish sohasi birinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik hamma yerda aniqlangan deyiladi.

2-Ta'rif: Agar f -moslikning qiymatlar to'plami ikkinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik sur'yektiv deyiladi.

3-Ta'rif: Agar f moslikda birinchi to'plamning har bir elementiga ikkinchi to'plamning bittadan ortiq bo'lmagan elementi mos kelsa, f moslik funktsional deyiladi.

4-Ta'rif: Agar f moslikda ikkinchi to'plamning har bir elementiga birinchi to'plamning 1 tadan ortiq bo'lmagan elementi mos qo'yilgan bo'lsa, f moslik in'yektiv deyiladi.

5-Ta'rif: Sur'yektiv va in'yektiv moslik bir so'z bilan biyektiv deyiladi.

6-Ta'rif: Hamma yerda aniqlangan funktsional moslik akslantirish deyiladi.

7-Ta'rif: X va Y to'plamlar orasidagi f moslik biyektiv akslantirish bo'lsa, X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan deyiladi.

8-Ta'rif: X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, bu to'plamlar teng quvvatli deyiladi.

9-Ta'rif: Barcha natural sonlar sonlar to'plami N ga teng quvvatli to'plamlar sanoqli to'plam deyiladi.

Savollar:

1. $G_f \subset X * Y$ shartni izohlang.
2. Moslikning berilish usullarini sanang.

3. Moslik turlariga misollar keltiring va ular graflarining o'ziga xos xususiyatlarini ko'rsating.
4. Uchburchakning o'rta chizig'i bilan asosi orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkinmi?
5. Barcha natural sonlar to'plami bilan barcha ratsional sonlar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkinmi?
6. Chekli to'plamlarning teng kuvvatli bo'lish shartini ayting.
7. Cheksiz to'plamlar uchun bu shart qanday?

Binar munosabatlar va ularning xossalari.

Ta'rif. $X \times X$ ning istalgan G qism to'plami binar munosabat deyiladi. Binar munosabatlar P, Q, R va boshka lotin harflari bilan belgilanadi.

Matematikada binar munosabatlar « $=$ », « $<$ », « $>$ », « $\neq$ », « $|$ », « $\perp$ » kabi belgilar orqali beriladi.

Masalan: $X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to'plam elementlari orasidagi munosabat R : « $x > y$ » berilgan. U quyidagi juftliklar to'plami orqali ifoda qilinadi.

$G = \{(4;3), (5;3), (5;4), (6;3), (6;4), (6;5), (7;3), (7;4), (7;5), (7;6), (9;3), (9;4), (9;5), (9;6), (9;7)\}$.

Ta'rif: Agar X to'plamning har bir elementii o'z-o'zi bilan R munosabatda bo'lsa (ya'ni, xRx bajarilsa), u holda R munosabat X to'plamda refleksiv deyiladi.

Masalan, « $=$ », « $|$ », « $>$ » munosabatlar refleksivdir.

Ta'rif: Agar X to'plamning birorta ham elementi uchun xRx bajarilmasa, u holda R munosabat X to'plamda antirefleksiv deyiladi.

Masalan, « $<$ », « $>$ », « $\perp$ » munosabatlar antirefleksivdir.

Ta'rif: Agar X to'plamda R munosabat berilgan bo'lib, xRy va yRx shartlar bir vaqtda bajarilsa, R -simmetrik munosabat deyiladi.

Masalan, « $|$ », « $\perp$ », « $=$ » munosabatlar simmetrik munosabatlardir.

Ta'rif: Agar X to'plamda R munosabat uchun xRy va yRx ekanligidan $x=y$ ekanligi kelib chiqsa, R antisimmetrik munosabat deyiladi.

Masalan, « x soni u soniga karrali» munosabati antisimmetrikdir.

Ta'rif: Agar X to'plamda berilgan R munosabat uchun xRy va uRz ekanligidan xRz bajarilishi kelib chiqsa, u holda R munosabat tranzitiv deyiladi.

Masalan, $\langle \Rightarrow \rangle$, $\langle \mathbb{N} \rangle$, $\langle < \rangle$ kabi munosabatlar tranzitivdir.

Ta'rif: Har qanday R munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lsa, u holda R ekvivalentlik munosabati deyiladi.

Masalan, $\langle || \rangle$, $\langle \Rightarrow \rangle$, $\langle \equiv \rangle$ kabi munosabatlar ekvivalentlik munosabati bo'ladi. Ekvivalentlik munosabati to'plamni sinflarga ajratadi.

Ta'rif: Agar R munosabat antisimmetrik va tranzitiv bo'lsa, u holda R tartib munosabati deyiladi.

Masalan, $\langle < \rangle$, $\langle > \rangle$, $\langle \leq \rangle$, $\langle \geq \rangle$ lar tartib munosabati bo'ladi.

Ta'rif: Agar X va Y to'plam elementlari orasidagi R munosabatda X to'plamning har bir elementiga Y to'plamning bittadan ortiq bo'lmagan elementi mos kelsa, u holda R funktsional munosabat yoki funktsiya deyiladi. (Misollar maktabdan olinadi).

Ta'rif: Agar R munosabat funktsional bo'lsa, u holda uning aniqlanish sohasi funktsiyaning aniqlanish sohasi deyiladi. qiymatlar sohasi esa, funktsiyaning qiymatlar sohasi deyiladi.

Ta'rif: Agar X va Y to'plamlar elementlari orasidagi R munosabatda X ning har bir elementiga Y ning faqat bitta elementi mos kelsa, u holda R munosabat X ni Y ga sur'ektiv akslantirish deyiladi.

Ta'rif: Agar akslantirishning qiymatlar sohasi Y to'plam bilan teng bo'lsa, akslantirish in'ektiv deyiladi.

Savollar:

1. Munosabatning moslikning xususiy holi ekanini tushuntiring.
2. Munosabat xossalari graflarda aks ettiring.
3. To'g'ri chiziklarning parallelligi ekvivalentlik munosabati bo'ladimi? Perpendikulyarligi-chi? Isbotlang.
4. Tekislikdagi uchburchaklar to'plamida «tengdoshlik» ekvivalentlik munosabati ajratadigan sinflarni ko'rsating.

2 – Mavzu: Determinant nazariyasi va ularning asosiy xossalari. Determinant nazariyasi yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechish. Kramer usuli.

1. Ikkinchi tartibli determinantlar

a, b, c, d sonlar berilgan bo'lsin.

Bu sonlardan tuzilgan $ad - bc$ ifoda (son) **ikkinchi tartibli determinant** deb ataladi va

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ko'rinishida yoziladi.

Determinantdagi sonlar turgan o'rnini bildirishi uchun quyidagicha yozamiz: $a = a_{11}, b = a_{12}, c = a_{21}, d = a_{22}$ sonlar bilan belgilaymiz:

Bu sonlardan tuzilgan $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ifoda(son) ikkinchi tartibli determinant deb ataladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko'rinishida yoziladi.

Demak ta'rifga binoan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \quad (1)$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar determinantning **elementlari** deb ataladi.

Ikkinchi tartibli determinantlar ikkita gorizantal va ikkita vertikal qatorlarga ega. Gorizantal qatorlarni **satrlar**, vertikal qatorlarni **ustunlar** deb ataymiz. Satrlar yuqoridan pastga qarab, ustunlar esa chapdan o'ngga qarab sanaladi. Ikkinchi tartibli determinantda a_{11}, a_{12} birinchi satrni, a_{21}, a_{22} ikkinchi satrni $\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}$ birinchi

ustunni, a_{12} esa ikkinchi ustunni tashkil etadi. Shuningdek a_{11} a_{22} ikkinchi tartibli

determinantning **bosh diagonalini** a_{12} a_{21} uning **yon (yordamchi) diagonalini** tashkil etadi. Shunday qilib ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh diagonal elementlari ko'paytmasidan yon diagonal elementlari ko'paytmasini ayirish lozim ekan.

1-misol.
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 1 = -8 - 3 = -11 .$$

Uchinchi tartibli determinantlar

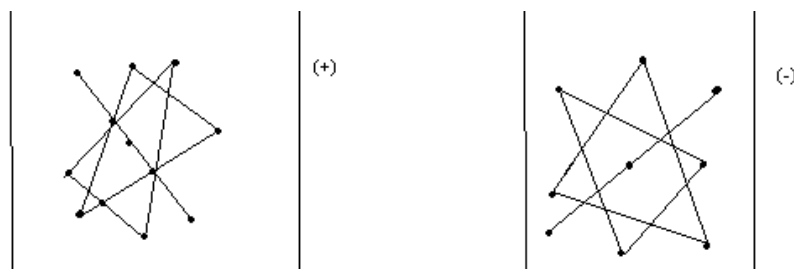
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

ifoda yordamida aniqlanadigan son **uchinchi tartibli determinant** deyiladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi. Bu yerdagi a_{11} , $a_{12}, \dots$, a_{33} sonlar ma'lum sonlar bo'lib ular determinantning elementlari deyiladi.

Uchinchi tartibli determinant uchta satr(gorizontal qator), uchta ustun (vertikal qator) va to'qqizta elementlarga ega. Yulduzcha sxemasida hisoblanadi:



2-misol.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$
 hisoblansin.

Yechish. Ta'rifga binoan.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot 4 - 2(-1) \cdot 2 = 6 + 16 - 15 - 18 - 20 + 4 = -27.$$

Determinantning har bir elementi ikki xonali indeksga ega bo'lib ulardan birinchisi shu element turgan satrning nomerini, ikkinchisi shu element turgan ustunning nomerini bildiradi. Masalan a_{32} element uchinchi satr va ikkinchi ustunda turadi. $a_{11} a_{22} a_{33}$ uchinchi tartibli determinantning bosh diagonalini, $a_{13}a_{22}a_{31}$ uning **yon diagonalini** tashkil etadi.

Minor va algebraik to'ldiruvchi

Determinantni biror elementining **minori** deb, determinantdan bu element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi. a_{ik} ($i,k=1,2,3$) elementning minori M_{ik} kabi belgilanadi. Uchinchi tartibli determinant elementlarining minorlari ikkinchi tartibli determinant bo'ladi. Masalan:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant a_{12} elementining minori $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ son, a_{23} elementining minori

$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ son bo'ladi. Chunki M_{12} ni topish uchun Δ determinantning birinchi

satri va ikkinchi ustuni M_{23} ni topish uchun esa shu a_{23} element turgan determinantning ikkinchi satri va uchinchi ustuni o'chiriladi.

$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ ($i,k=1,2,3$) son a_{ik} elementning **algebraik to'ldiruvchisi** deb ataladi. Masalan Δ determinantning a_{32} elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \text{ bo'ladi.}$$

Determinantning asosiy xossalari

1. Determinantning satrlarini unga mos ustunlar bilan almashtirish natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. *Determinantning ikkita satr(yoki ustun)larini o'rinlarini almashtirish natijasida determinantning ishorasi o'zgaradi xolos, ya'ni*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Bu yerda berilgan determinantning ikkinchi va uchinchi ustunlarini o'rinlari almashgan.

3. *Ikkita bir xil satr (yoki ustun)ga ega bo'lgan determinant nolga tengdir.*

4. *Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror λ songa ko'paytirish determinantni shu songa ko'paytirishga teng kuchlidir:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinantning bu xossasiga asoslanib 3-xossani biroz kuchaytirish mumkin. Ya'ni ikkita proporsional satr(yoki ustun)larga ega bo'lgan determinant nolga tengdir.

5. *Biror satr (yoki ustun)elementlari nollardan iborat determinant nolga tengdir.*

6. *Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror songa ko'paytirib boshqa bir satr (yoki ustun) ning mos elementlariga qo'shish natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ma_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ma_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ma_{33} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu yerda berilgan determinantning uchinchi ustun elementlari m songa ko'paytirilib ikkinchi ustinning mos elementlariga qo'shildi.

7. *Determinantning biror satr(yoki ustun) elementlarini ularning algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak yig'indi determinantning o'ziga teng bo'ladi, ya'ni:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant uchun

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}, & \Delta &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}, \\ \Delta &= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}, & \Delta &= a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}, \\ \Delta &= a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}, & \Delta &= a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33} \end{aligned}$$

tengliklar o'rinlidir.

Determinantning bunday yozilishi uning satr yoki ustun elementlari bo'yicha **yoyilmasi** deyiladi. Masalan, keltirilgan tengliklardan birinchisi Δ determinantning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasini ifodalasa, oxirgisi uni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasini ifodalaydi.

Izoh. Determinantning qaysi qatorida nol ko'p bo'lsa, uni o'sha qator elementlari bo'yicha yoyish ma'quldir.

3-misol. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ determinant hisoblansin.

Yechish. Determinantning birinchi ustun elementlarini -2 ga ko'paytirib ikkinchi ustunning mos elementlariga qo'shamiz, keyin hosil bo'lgan determinantning birinchi ustun elementlarini -5 ga ko'paytirib, uchinchi ustunning mos elementlariga qo'shamiz. U holda

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 + 3 & -10 + 4 \\ 1 & -2 + 2 & -5 + 5 \\ 4 & -8 + 7 & -20 + 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -14 \end{vmatrix}.$$

hosil bo'ladi. Oxirgi determinantni ikkinchi satrida nollar ko'p bo'lganligi sababli uni o'sha satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -14 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} = -(14 - 6) = -8.$$

8. Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini unga parallel boshqa bir satr (yoki ustun)ning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak yig'indi nolga teng bo'ladi.

Bu holda ikkita bir xil satr (yoki ustun)ga ega bo'lgan determinant hosil bo'ladi.

Masalan, $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$.

Bu yerda Δ determinantning birinchi satr elementlari ikkinchi satrning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shildi.

Keltirilgan barcha xossalarning ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar uchun to'g'riligiga bevosita determinantlarni hisoblash yo'li bilan ishonch hosil qilish mumkin.

n-tartibli determinant haqida tushincha

n -tartibli determinant deb n ta satr, n ta ustun va n^2 ta elementlarga ega bo'lgan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

kabi belgilanuvchi songa aytiladi

Yuqorida keltirilgan determinantning barcha xossalari istalgan tartibli determinantlar uchun ham o'rinlidir. Tartibi to'rt va undan yuqori bo'lgan determinantlarni determinantning 7-xossasidan foydalanib tartibini pasaytirish orqali hisoblanadi.

Masalan, to'rtinchi tartibli determinantni (2.2) formulaga o'xshash

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \\ &+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

formula yordamida hisoblash mumkin.

Bu yerdagi uchinchi tartibli determinantlar mos ravishda $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ elementlarning minori deyiladi. $a_{ik}(i,k=1,2,3,4)$ elementning algebraik to'ldiruvchisini A_{ik} orqali belgilasak (3) tenglikni

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \quad \text{ko'rinishida yozish mumkin.}$$

Bu formula to'rtinchi tartibli determinantni uning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasidir. Bunaqa yoyilmani har bir satr va ustun elementlari uchun yozib to'rtinchi tartibli determinantni hisoblash uchun 8 ta formulalarni hosil qilishimiz mumkin.

$$\text{4-misol. } A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{determinant hisoblansin}$$

Yechish. Determinantning xossaligidan foydalanib A determinantning biror satri (yoki ustuni) ni ba'zi elementlarini 0 ga aylantiramiz Determinantning birinchi satrini -3 va 2 ga ko'paytirib uning uchinchi va to'rtinchi satrlarning mos elementlariga qo'shamiz. U holda

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & -2 & 0 \\ 8 & 8 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Buning oxirgi ustunida nollar ko'p bo'lganligi uchun uni o'sha ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} A &= 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -6 & -7 & -2 \\ 8 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 0(-2) \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 2(21+16) + (18+16) - 4(-48+56) = 76. \end{aligned}$$

3. Mavzu: Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa. Matritsaning rangi.

Matritsa haqida tushincha

Ma'lum sonlardan tuzilgan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

kabi jadvallar **matritsa** deb ataladi. $a_{11}, a_{12}, \dots$ sonlar esa matritsaning **elementlari** deyiladi. Jadvalning gorizantal qatorlari matritsaning **satrlari**, vertikal qatorlari esa uning **ustunlari** deyiladi. Satrlari soni ustunlari soniga teng matritsa **kvadrat matritsa** deyiladi va satrlari yoki ustunlarining soni shu matritsaning tartibi deyiladi. Masalan (1) dagi birinchi matritsa ikkinchi tartibli, uchinchi matritsa esa uchinchi tartibli kvadrat matritsadir. Satrlari soni ustunlari soniga teng bo'lmagan matritsa **to'g'ri burchakli matritsa** deyiladi. m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri burchakli matritsa **mxn o'lchamli matritsa**-deyiladi. Masalan (1) dagi ikkinchi matritsa 2x4 o'lchamli to'g'ri burchakli matritsa. Yagona satrga ega bo'lgan matritsa **satr-matritsa**, yagona ustunga ega bo'lgan matritsa **ustun-matritsa** deb ataladi. Masalan $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$ satr-matritsa, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ esa ustun-matritsadir.

Kvadrat matritsaning elementlaridan matritsa belgisini determinant belgisi bilan almashtirish natijasida hosil bo'lgan determinant shu **matritsaning determinanti** deyiladi. Matritsani qisqacha bitta A harf bilan belgilasak uning determinanti $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi. Masalan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsaning

determinanti $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ bo'ladi.

Determinanti noldan farqli kvadrat matritsa **xosmas**, determinanti nolga teng kvadrat matritsa **xos** matritsa deyiladi.

Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ matritsa xos matritsa, chunki } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0,$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ esa xosmas matritsa, chunki } |B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13 \neq 0.$$

Matritsalar tengligi

Bir xil o'lchamli A va B matritsalarining barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lganda ular **teng** ($A=B$) deb ataladi.

Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \text{ matritsalar } a_{11}=b_{11}, a_{12}=b_{12}, a_{13}=b_{13},$$

$a_{21}=b_{21}, a_{22}=b_{22}, a_{23}=b_{23}$ bo'lganda teng bo'ladi ($A=B$).

Matritsalar qo'shish

Ikkita bir xil o'lchamli matritsaning **yig'indisi** deb ularning mos elementlarini qo'shish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \text{ matritsaning}$$

yig'indisi deb

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

matritsaga aytiladi.

$$\mathbf{1-misol.} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ matritsalarining}$$

yig'indisi topilsin.

Yechish.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 3-1 \\ 1-1 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarining yig'indisi uchun $A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$ tengliklar o'rinli.

Barcha elementlari nollardan iborat matritsa **nol matritsa** deb ataladi va (0) yoki 0 kabi belgilanadi. Istalgan A matritsa uchun $A+0=A$ bo'ladi, bu yerdagi 0 matritsa A bilan bir xil o'lchamli nol matritsa.

Matritsani songa ko'paytirish

Matritsani **songa ko'paytmasi** deb matritsaning barcha elementlarini shu songa ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ bo'lsa } mA = Am = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Matritsani nolga ko'paytirish natijasida nol-matritsa hosil bo'ladi.

2-misol. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matritsa 3 ga ko'paytirilsin.

Yechish.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 9 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarini ko'paytirish

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ matritsaning } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

matritsaga **ko'paytmasi** deb elementlari quyidagicha aniqlanuvchi $C=AB$ matritsaga aytiladi

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Matritsalar bu xilda ko'paytirish **satrlarni ustunga** deb yuritiladi. Matritsalar ko'paytirish qoidasi birinchi ko'payuvchining ustunlari soni ikkinchi ko'payuvchining satrlari soniga teng bo'lgan har qanday to'g'ri burchakli matritsalar uchun o'rinalidir.

3-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

matritsalarining ko'paytmasi topilsin.

Yechish. AB ko'paytma mavjud, chunki A matritsaning ustunlari 2 ga teng, B matritsaning satrlari soni ham 2 ga teng.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$B \cdot A$ ko'paytma mavjud emas, chunki B matritsaning ustunlari soni 2 ga, A matritsaning satrlari soni esa 3 ga teng. Bu misol umumiy holda matritsalar ko'paytirish o'zni almashtirish xossasiga ega emasligini ko'rsatadi, ya'ni umumiy holda $AB \neq BA$.

Matritsalar ko'paytirish quyidagi xossalarga ega.

1) $(AB)C = A(BC)$; 2) $(A+B)C = AC + BC$; 3) $(mA)B = m(AB)$;

4) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Bu yerdagi A, B, C lar matritsalar bo'lib ular uchun yuqoridagi ko'paytirish va qo'shish amallari o'rinli, m-biror son.

Birlik matritsa

Bosh diagonalida turgan barcha elementlari 1 ga teng bo'lib qolgan elementlari 0 dan iborat kvadrat matritsa **birlik matritsa** deb ataladi va E orqali belgilanadi.

Masalan $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ikkinchi tartibli birlik matritsa,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ esa uchinchi tartibli birlik matritsadir.}$$

Birlik matritsaning determinanti 1ga teng, ya'ni $|E|=1$.

Istalgan A kvadrat matritsani uning tartibiga mos birlik matritsaga ko'paytirish natijasida o'sha matritsaning o'zi hosil bo'ladi, ya'ni $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Ikkita sonlardan kamida bittasi nol bo'lgandagina ularning ko'paytmasi nol bo'lishi ma'lum. Matritsalarini ko'paytmasi bunaqa xossaga ega emas, ya'ni ikkita noldan farqli matritsalarining ko'paytmasi nol matritsa bo'lishi ham mumkin.

Masalan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teskari matritsa

A kvadrat matritsaga **teskari matritsa** deb $A \cdot B = B \cdot A = E$ shartni qanoatlantiruvchi B matritsaga aytiladi. A matritsaga teskari matritsa odatda A^{-1} kabi belgilanadi. A, B va E matritsalarining bir xil tartibli bo'lishi ro'vshan. Boshqacha aytganda ko'paytmasi E birlik matritsaga teng A va B kvadrat matritsalar o'zaro teskari matritsalar deyiladi. **1-teorema.** A kvadrat matritsaga teskari A matritsa mavjud bo'lishi uchun A matritsaning xosmas matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. Faraz qilaylik A ga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lsin. U holda $A \cdot A^{-1} = E, |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$ bo'ladi. Bundan $|A| \neq 0$, ya'ni A matritsaning xosmasligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Osonlik uchun uchinchi tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

xosmas matritsani qaraymiz. Bu holda

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

matritsa A matritsaga teskari matritsa ekanligiga bevosita ularni ko'paytirish yo'li bilan ishonch hosil qilish mumkin. Ko'paytirish jarayonida determinantning 7- va 8- xossalariidan foydalaniladi. Bu yerda $A_{ik}(i,k=1,2,3)$ orqali a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi belgilangan.

4-misol.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsa topilsin.

Yechish.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni birinchi satr elementlarini uchinchi satrining mos elementlariga qo'shsak

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Buni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz.

$$|A| = (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$$

Demak berilgan matritsa xosmas matritsa va unga teskari A^{-1} matritsa mavjud.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 14,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -9,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Topilgan qiymatlarni (4.2) ga qo'yib teskari matritsani aniqlaymiz.

$$A^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{14}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

Matritsaning rangi va uni hisoblash

To'g'ri burchakli yoki kvadrat A matritsa berilgan bo'lsin. Matritsaning k ta satr va o'shancha ustunlarini tanlab ularni kesishish joyida turgan elementlardan joylashish tartibini o'zgartirmagan holda k -tartibli determinant tuzamiz. Ana shu determinant A matritsaning k -tartibli **minori** deb ataladi. Matritsaning elementlarini uning birinchi tartibli minori deb hisoblash mumkin.

Masalan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

matritsa 4 ta uchinchi tartibli, 18 ta ikkinchi tartibli va 12 ta birinchi tartibli minorlarga ega.

Ushbu $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$ determinant qaralayotgan matritsaning ikkinchi tartibli

minorlardan biri bo'lib u matritsaning birinchi va uchinchi satrlarini hamda uchinchi va to'rtinchi ustunlarini tanlash natijasida hosil bo'lgan.

Agar A matritsaning r -tartibli minorlari orasida kamida bitta noldan farqlisi mavjud bo'lib, undan yuqori tartibli qolgan barcha minorlari nolga teng bo'lsa, u holda butun r son A matritsaning rangi deyiladi va $\text{rang} A = r$ yoki $r(A) = r$ kabi yoziladi.

Boshqacha aytganda A matritsaning noldan farqli minorining eng yuqori tartibiga shu matritsaning rangi deb atalar ekan.

Nol matritsadan farqli istalgan matritsaning rangi natural son bo'ladi.

5-misol.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi topilsin.

Yechish. Matritsa yagona uchinchi tartibli

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

minorga ega bo'lib u 0 ga teng(hisoblansin). Ikkinchi tartibli minorlari orasida 0dan farqlilari mavjud, masalan $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Demak matritsaning rangi 2 ga teng ekan $r(A) = 2$.

Matritsaning rangini topishda ko'p sonli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Shuning uchun matritsani rangini hisoblashda uni elementar almashtirish deb ataluvchi almashtirishdan foydalanish maqsadga muvofiq. Matritsani **elementar almashtirish** деб quyidagi almashtirishlarga aytiladi.

- a) faqat nollardan iborat satr (ustun)larni o'chirish;
- b) ikkita satr (ikkita ustun)larni o'rinlarini almashtirish;
- d) bir satr(ustun)ning barcha elementlarini biror songa ko'paytirib, boshqa satr(ustun)ning mos elementlariga qo'shish;
- e) satr(ustun)ning barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish.

Agar B matritsa A matritsadan elementar almashtirishlar yordamida hosil qilingan bo'lsa A va B **ekvivalent** matritsalar deyiladi hamda $A \sim B$ kabi yoziladi.

2-teorema. Elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi.

Teoremaning isboti determinantlarning xossalaridan kelib chiqadi.

6-misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

matritsaning rangi topilsin.

Yechish. Birinchi satrini (-2) ga ko'paytirib uchinchi satrining mos elementlariga hamda birinchi satrini (-1) ga ko'paytirib to'rtinchi satrining mos elementlariga qo'shamiz:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Ikkinchi satrni uchinchi satrga hamda ikkinchi satrni (-2) ga ko'paytirib to'rtinchi satrga qo'shsak

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

kelib chiqadi. Oxirgi matritsaning rangi 2 ga teng, chunki $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

E'tibor bilan kuzatsak bu misoldan shunga iqror bo'lamizki rangi 2 ga teng A matritsaning birinchi va ikkinchi satr elementlari o'zaro chiziqli bog'lanmagan. Boshqacha aytganda ulardan biri ikkinchisi orqali chiziqli ifodalanmaydi, ya'ni $\alpha = k\beta$ tenglikni qanoatlantiruvchi $k = \text{const}$ son mavjud emas, bunda α -birinchi satrning elementi β esa ikkinchi satrning α ga mos elementi.

A matritsaning uchinchi va to'rtinchi satr elementlari uning birinchi va ikkinchi satr elementlari bilan mos ravishda $2\alpha - \beta$ va $2\alpha + \beta$ tengliklar orqali chiziqli ifodalanadi.

Endi shu fikrni umumlashtiruvchi teoremani keltiramiz.

3-teorema. Agar matritsaning rangi r ga teng bo'lsa u holda unda r ta chiziqli bog'lanmagan satrlar mavjud bo'lib qolgan barcha satrlar shu r ta satrlar orqali chizikli ifodalanadi, ya'ni ularning chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

4 – Mavzu: Birinchi darajali tenglamalar sistemasining matritsaviy yozuvi va matritsaviy yechilishi.

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x va y noma'lum sonlar, qolgan barcha sonlar esa ma'lum. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ lar sistema **koeffitsientlari**, b_1 va b_2 sonlar esa **ozod had** (son)lar deb ataladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish degan so'z, noma'lum sonlarning shunday qiymatlari to'plamini topish demakki, ularni sistema tenglamalarining har biriga mos noma'lumlarning o'rniga qo'yilganda ular ayniyatlarga aylanadi. Bunday sonlar to'plami sistemaning yechimi deyiladi. Kamida bitta yechimga ega

bo'lgan sistema **birgalikdagi sistema** deb ataladi. Birgina yechimga ega bo'lgan birgalikdagi sistema **aniq sistema** deb ataladi. Cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lgan birgalikdagi sistema **aniqmas sistema** deb ataladi. Birorta ham yechimga ega bo'lmagan sistema **birgalikda bo'lmagan sistema** deyiladi.

Izoh. Keltirilgan ta'riflar istalgan sistema uchun o'rinlidir.

(1) sistema bizga o'rta maktab kursidan ma'lum . Uni yechishning o'riniga qo'yish, qo'shish va grafik usullari bilan tanishmiz.

Bu yerda (3.1) sistemani yechishning yana bir usuli ya'ni uni determinantlardan foydalanib yechish usuli bilan tanishamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchisini $-a_{12}$ ga ko'paytirib hadlab qo'shamiz:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x=b_1a_{22}-b_2a_{12}. \quad (2)$$

Shuningdek sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchi sini a_{11} ga ko'paytirib hadlab qo'shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})y=b_2a_{22}-b_1a_{12} \quad (3)$$

hosil bo'ladi.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

belgilashlarni kiritamiz.

Sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan Δ determinant sistemaning *asosiy determinanti* deb ataladi. Δ_x determinant Δ dagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida, Δ_y esa Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

(4) dan foydalanib (2) va (3) formulalarni

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cdot x &= \Delta_x, \\ \Delta \cdot y &= \Delta_y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Mumkin bo'lgan quyidagi hollarni qaraymiz.

I. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsin. U holda (5) ning har bir tenglamasini Δ ga bo'lib

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad (6)$$

berilgan sistemaning yechimini topish formulasiga ega bo'lamiz. (6) formulalar uning ixtirochisi Shvetsariyalik matematik Kramer(1704-1752)ning sharafiga Kramer formulalari deb ataladi.

II. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lsin.

Bu holda quyidagilardan biri bo'ladi.

1) $\Delta_x = \Delta_y = 0$ bo'lsin. U holda (3.5) $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot y = 0$ ko'rinishini olib berilgan sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega, chunki istalgan son bu tenglamalarni qanoatlantiradi.

2) Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi masalan $\Delta_x \neq 0$ bo'lsin. U holda (5) ni birinchi tenglamasi $0 \cdot x = \Delta_x \neq 0$ ko'rinishiga ega bo'lib, u yechimga ega emas. Demak, bu holda berilgan sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Xulosa. a) (1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$, ya'ni $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ yoki $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$ bo'lganda bu sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning yechimi Kramer formulalari (3.6) yordamida topiladi.

$$b) \quad \Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0 \quad \text{ya'ni} \quad \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{bo'lganda}$$

(1) sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas);

d) $\Delta = 0$ bo'lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli ya'ni

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

bo'lganda sistema yechimga ega bo'lmaydi (birgalikda emas).

(1) sistemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. (1) sistemaning har bir tenglamasi to'g'ri chiziqli tenglamasini ifodalashi ayon.

$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$ bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmaydi. Demak har ikkala to'g'ri chiziqli bitta nuqtada kesishadi. Ana shu kesishish nuqtasining koordinatalari (1) sistemasining yechimi bo'ladi.

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0 \quad \text{ya'ni} \quad \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$

bo'lganda to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi (sistema cheksiz ko'p echimlarga ega). $\Delta=0$ bo'lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lganligi sababli ular kesishmaydi (sistema yechimga ega bo'lmaydi) ya'ni birgalikda emas.

1-misol.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3, \\ 4x + 10y = 6 \end{cases} \quad \text{sistema yechilsin.}$$

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

Sitemaning birinchi tenglamasini 2 ga ko'paytirsak uning ikkinchi tenglamasi kelib chiqadi. Demak sistema bitta $2x+5y=3$ tenglamaga teng kuchli va cheksiz ko'p yechimlarga ega. y ga ixtiyoriy qiymatlar berib x ni $x = \frac{3-5y}{2}$ tenglamadan aniqlash yo'li bilan yechimlar topiladi.

Masalan, $y=0$ da $x = \frac{3}{2}$, $y=1$ da $x=-1$ va hokazo.

Bu geometrik nuqtai nazardan $2x+5y=3$ va $4x+10y=6$ to'g'ri chiziqlar bitta to'g'ri chiziq ekanini bildiradi.

2-misol.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 7, \\ 10x + 6y = 2 \end{cases} \quad \text{sistema yechilsin.}$$

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 42 - 6 = 36 \neq 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 72 = -6 \neq 0.$$

Sistemaning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lib $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ bo'lgani uchun sistema yechimga ega emas (birgalikda emas).

Uch noma'lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

sistemani qaraymiz. Bu yerdagi x , y va z noma'lumlar, qolgan barcha sonlar ma'lum sonlar. Ozod sonlari nolga teng bu sistema bir jinsli sistema deyiladi. (7) sistemani yechish bilan shug'ullanamiz.

$$\text{Faraz qilaylik } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsin. U holda sistemani

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z \end{cases}$$

ko'rinishida yozamiz. Bu sistema z ning har bir aniq qiymatida yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalariga ko'ra

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z$$

kabi topiladi. Determinantning xossalari (umumiy ko'paytuvchini determinant belgisidan chiqarish mumkinligi hamda ikkita ustunlarini o'rin almashtirganda determinantning faqatgina ishorasi o'zgarishi) dan foydalanib yechimni

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot (-z) \quad (8)$$

ko'rinishda yozamiz.

$$\frac{-z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = K$$

deb belgilasak $z = K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ bo'lib uni (3.8) ga qo'ysak

$$x=K \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{22}a_{23} \end{vmatrix}, \quad y=-K \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{21}a_{23} \end{vmatrix}, \quad z=K \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} \quad (9)$$

qaralayotgan sistemaning yechimlari kelib chiqadi. (7) sistemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. Sistemaning har bir tenglamasi koordinatalar boshidan o'tuvchi tekislik tenglamasini ifodalaydi. Tekisliklarning har ikkitasi koordinatalar boshidan o'tganligi sababli ular kesishadi. Ikkita kesishuvchi tekisliklar to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Ana shu to'g'ri chiziq nuqtalarning koordinatalari sistemaning yechimi bo'ladi.

Xulosa. Bir jinsli (7) sistema yagona yechimga ega bo'lishi yoki yechimga ega bo'lmasligi mumkin emas. U har doim cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas sistema).

3-misol.

$$\begin{cases} x+3y-2z=0, \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish. (9) ga asoslanib

$$x=K \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7K, \quad y=-K \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7K, \quad z=K \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7K$$

larni hosil qilamiz. Shunday qilib berilgan sistemaning yechimlari $x=7K$, $y=-7K$, $z=-7K$ tengliklar yordamida aniqlanadi. K ga aniq son qiymatlarini qo'yib sistemaning har xil yechimlarini topiladi.

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (10)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x, y va z noma'lum sonlar, qolgan barcha sonlar ma'lum sonlar. $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ sistemaning koeffitsientlari, b_1, b_2 , va b_3 ozod sonlar. Barcha ozod sonlar nolga teng bo'lganda (10) sistema **bir jinsli** deyiladi.

(10) sistemani yechish bilan shug'ullanamiz. Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan uchinchi tartibli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant (10) sistemaning **asosiy** determinanti deb ataladi. Berilgan sistemani yechish uchun sistemaning birinchi tenglamasini a_{11} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{11} ga, ikkinchi tenglamasini a_{21} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{21} ga va uchinchi tenglamasini a_{31} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{31} ga ko'paytirib tenglamalarni hadma-had qo'shamiz.

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})y+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})z=$$

$$=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}. \quad (11)$$

Birinchi qavs ichidagi ifoda Δ determinantning birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasi bo'lganligi uchun determinantning 7-xossasiga ko'ra $a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=\Delta$ bo'ladi. (11) dagi ikkinchi va uchinchi qavs ichidagi ifodalar Δ determinantni ikkinchi va uchinchi ustun elementlarini boshqa bir ustunning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shilganligi uchun determinantning 8-xossasiga ko'ra ular nolga teng bo'ladi. Shunday qilib (11) tenglik

$$\Delta_x = b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31} \quad (12)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

determinantni qaraymiz. E'tibor bersak bu determinant asosiy determinantdagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'lganligiga iqror bo'lamiz. Bu determinantning b_1, b_2, b_3 , elementlarining algebraik to'ldiruvchilari mos ravishda Δ determinantning a_{11}, a_{21}, a_{31} elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga tengligini hisobga olsak $b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}=\Delta_x$ bo'lib (12) tenglik

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \quad (13)$$

ko'rinishini oladi.

Shunga o'xshash $\Delta \cdot y = \Delta_y$, $\Delta \cdot z = \Delta_z$ (3.14) tengliklarni hosil qilamiz, bunda

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Δ_y determinant sistemaning asosiy determinanti Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlarga, Δ_z esa Δ dagi uchinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Mumkin bo'lgan qo'yidagi hollarni qaraymiz:

I. (10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsin. U holda (13) va (14) tenglamalarni har birini Δ ga bo'lib

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (15)$$

formulalarga ega bo'lamiz. (15) **Kramer formulalari** deb ataladi. Shunday qilib (3.10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalari (15) yordamida topilar ekan.

II. (10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lsin. U holda qo'yidagilardan biri sodir bo'ladi.

a) $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlardan aqalli bittasi noldan farqli. Bu holda (10) sistema yechimga ega bo'lmaydi. Haqiqatan, aniqlik uchun $\Delta_x \neq 0$ deb faraz qilsak bu holda $\Delta \cdot x = \Delta_x$ (13) tenglik $0x = \Delta_x \neq 0$ ko'rinishiga ega bo'lib, u x ning hech bir qiymatida bajarilmaydi.

b) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lsin. Bu holda (10) sistema yo yechimga ega bo'lmaydi yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.

4-misol.
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2, \\ x - 4y + 2z = 4, \\ 4x + 6y + 2z = 0 \end{cases} \text{ sistema yechilsin.}$$

Yechish. Bu yerda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

chunki determinantning birinchi va uchinchi satr elementlari proporsional.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bu determinantning birinchi satrini -1 ga ko'paytirib ikkinchi satrning mos elementlariga qo'shsak

$$\Delta_x = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Bu determinantni uning birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib

$$\text{hisoblaymiz. } \Delta_x = 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-5) = -40 \neq 0.$$

Demak berilgan sistema $\Delta=0$, $\Delta_x \neq 0$ bo'lganligi sababli yechimga ega emas.

7-misol.

$$\begin{cases} x + y - 2z = -2, \\ 2x + 2y - 4z = -4, \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish. Bevosita hisoblash yo'li bilan $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Qaralayotgan sistema yechimga ega emas, chunki sistemaning birinchi va uchinchi tenglamalari bir-biriga zid. Haqiqatan, sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko'paytirib uchinchisiga qo'shsak $0=6$ qarama-qarshilikka kelamiz.

8-misol.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 5, \\ 6x + 4y - 2z = 10, \\ x - 3y + z = -2 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish. Bevosita hisoblab $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ekanligini topamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini 2 ga ko'paytirsak uning ikkinchi tenglamasi kelib chiqadi. Shuning uchun berilgan sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 5, \\ x - 3y + z = -2 \end{cases}$$

uch noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasiga teng kuchli. Bu sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega. Yechimlar noma'lumlardan biri masalan x ga aniq qiymatlar berib sistemadan y va z ni topish orqali aniqlanadi.

Izoh.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \end{cases} \text{ sistema } \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{ shartda aniqmas bo'ladi.}$$

Xulosa. a) Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi (10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalari (15) yordamida topiladi.

b) $\Delta=0$ bo'lib Δ_x , Δ_y , Δ_z determinantlardan aqalli birortasi noldan farqli bo'lganda (3.10) sistema yechimga ega emas.

d) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo'lganda (10) sistema yo yechimga ega emas yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega.

Uch noma'lumli uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \quad (16)$$

sistemani qaraymiz. $x=0$, $y=0$, $z=0$ sistemaning yechimi bo'lishi ko'rinib turibdi. Bu holda kamida bitta ustuni nolga teng bo'lganligi uchun $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo'lib (13) va (14) tengliklar $\Delta \cdot x=0$, $\Delta \cdot y=0$, $\Delta \cdot z=0$ (17) ko'rinishga ega bo'ladi. Agar (16) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsa u yagona $x=0$, $y=0$, $z=0$ yechimga ega bo'ladi. Qaralayotgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ham ega bo'la oladimi degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

1-teorema. (16) sistema noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

belgilashni kiritamiz. U holda matritsalarni ko'paytirish qoidasiga binoan

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Shuning uchun (20) sistemani matritsalarni tengligidan foydalanib

$$\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yoki qisqacha $A \cdot X = B$ (21) matritsali tenglama ko'rinishda yozish mumkin. (20) sistema (21) yordamida berilgan bo'lib A xosmas matritsa bo'lsa uni quyidagicha yechiladi. (21) tenglamaning har ikkala tomonini chapdan A matritsaga teskari A^{-1} ga ko'paytirsak, $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$; $(A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$, $E \cdot X = A^{-1}B$; $X = A^{-1} \cdot B$ bo'ladi.

$X = A^{-1} \cdot B$ (3) matritsali tenglama (21) ning yechimidir.

1-misol.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - 2z = -1, \\ 3x + 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

sistema matritsa usulida yechilsin.

Yechish.

$$\text{Bu misolda } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

bo'lgani uchun berilgan sistemani $A \cdot X = B$ matritsali ko'rinishda va uning yechimini $X = A^{-1}B$ ko'rinishda yozish mumkin. A matritsaning determinanti 1-satr

elementlarini 2 ga ko'paytirib 2-satrning mos elementlariga qo'shamiz va hosil bo'lgan determinantni ikkinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

bo'lgani uchun A xosmas matritsa va unga teskari A^{-1} matritsa mavjud. A matritsaning barcha elementlarini algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12}=(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13}=(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22}=(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{23}=(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32}=(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33}=(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

Algebraik to'ldiruvchilarning qiymatlarini 2 mavzudagi (2) formulaga qo'yib A^{-1} teskari matritsani topamiz:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & 5 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

X , A^{-1} va B matritsalarini $X=A^{-1} \cdot B$ tenglikga qo'yamiz. U holda

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & 5 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6+1+0 \\ -9+9-10 \\ -12+7-10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

hosil bo'ladi. Bundan $x=1, y=2, z=3$ echimni hosil qilamiz.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli

Biz noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer va matritsa usuli bilan tanishdik. Bu usullarning zaif tomonlari shundaki, noma'lumlar soni biroz katta bo'lganda juda ko'p hisoblashlarni bajarishga to'g'ri keladi. Masalan to'rt noma'lumli to'rtta chiziqli

tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish uchun beshta to'rtinchi tartibli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. To'rtinchi tartibli determinant biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyilganda yoyilmada to'rtta uchinchi tartibli determinant qatnashadi. Demak jami $5 \cdot 4 = 20$ ta uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Besh va undan ortiq noma'lumlar qatnashgan sistema haqida gapirmasak ham bo'ladi.

Bunday hollarda chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss taklif etgan quyidagi usul bilan yechgan ma'qul.

Gauss usuli tenglamalardan noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishga asoslangan bo'lib oxirgi tenglamada bitta noma'lum qoladi xolos. Undan noma'lumni topib oxirgidan oldingi tenglamaga qo'yib ikkinchi noma'lum topiladi va hokazo shu jarayon davom ettirilib topilgan noma'lumlarning qiymatlarini birinchi tenglamaga qo'yib undan birinchi noma'lum aniqlanadi.

Gauss usuli bilan misolda tanishib chiqamiz.

$$\text{2-misol.} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z + t = -2, \\ 3x - y + 2z - 3t = -3, \\ 2x + y - z + 2t = 2, \\ x - 2y + z - t = 1 \end{cases} \quad (23)$$

sistema yechilsin.

Yechish. Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz.

1-qadam ushbu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad (24)$$

Matritsani birinchi ustunini ikkinchi satridan boshlab barcha elementlarini nolga aylantiramiz. Birinchi satrni ikkiga bo'lib

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad (25)$$

ko'rinishida yozamiz.

a) (25) matritsaning birinchi satrinini -3 ga ko'paytirib ikkinchi satriga qo'shsak, birinchi satrinini -2 ga ko'paytirib uchinchi satriga qo'shsak, birinchi satrini -1 ga ko'paytirib to'rtinchi satriga qo'shsak:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -11/2 & 7/2 & -9/2 & -0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -7/2 & 3/2 & -3/2 & 2 \end{array} \right) \quad (26)$$

hosil bo'ladi.

2-qadam. (26) matritsaning uchinchi satrining ikkinchi ustuni elementidan boshlab qolgan barcha elementlarini nolga aylantiramiz. Ikkinchi satrini $-\frac{11}{2}$ ga bo'lib ushbu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -7/11 & 9/11 & +0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -7/2 & 3/2 & -3/2 & 2 \end{array} \right) \quad (27)$$

ko'rinishda yozamiz.

(27) matritsaning ikkinchi satrini +2 ga ko'paytirib uchinchi satriga qo'shsak, ikkinchi satrini $\frac{7}{2}$ ga ko'paytirib to'rtinchi satrga qo'shsak:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -7/11 & 9/11 & +0 \\ 0 & 0 & -14/11 & 29/11 & 4 \\ 0 & 0 & -8/11 & 15/11 & 2 \end{array} \right) \quad (28)$$

3-qadam. (28) matritsaning to'rtinchi satrini uchinchi ustun elementini nolga aylantiramiz. Dastlab buning uchun matritsani uchinchi satrini $-\frac{14}{11}$ ga bo'lib

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{11} & \frac{9}{11} & \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{29}{14} & \frac{-22}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{11} & \frac{15}{11} & \dots 2 \end{array} \right)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu matritsaning uchinchi satrini $\frac{8}{11}$ ga ko'paytirib to'rtinchi satriga qo'shsak :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{11} & \frac{9}{11} & \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{29}{14} & \frac{-22}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{array} \right) \quad (29)$$

matritsaga ega bo'lamiz. Bu matritsaga mos sistema qo'yidagicha bo'ladi.

$$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = -1, \\ y - \frac{7}{11}z + \frac{9}{11}t = 0, \\ z - \frac{29}{14}t = -\frac{22}{7}, \\ -\frac{1}{7}t = -\frac{2}{7} \end{cases} \quad (30)$$

oxirgi tenglamasida bitta t noma'lum, undan oldingisida ikkita z va t noma'lumlar, ikkinchi tenglamasida uchta y , z , t noma'lumlar va birinchi tenglamasida barcha noma'lumlar - x , y , z , t lar qatnashadi.

Endi noma'lumlarni topish unchalik qiyin emas.

4-qadam. (30) sistemaning to'rtinchi tenglamasi $-\frac{1}{7}t = -\frac{2}{7}$ dan t ni topamiz.

$$t = \left(-\frac{2}{7}\right) : \left(-\frac{1}{7}\right) = 2.$$

5-qadam. t ning topilgan qiymati 2 ni (30) sistemaning uchinchi tenglamasiga qo'yib z noma'lumni topamiz: $z - \frac{29}{14} \cdot 2 = -\frac{22}{7}$; $z = \frac{29}{7} - \frac{22}{7} = \frac{7}{7} = 1$.

6-qadam. $t=2$, $z=1$ qiymatlarni (30) sistemaning ikkinchi tenglamasi $y - \frac{7}{11}z + \frac{9}{11}t = 0$ ga qo'yib y noma'lumni topamiz:

$$y - \frac{7}{11} \cdot 1 + \frac{9}{11} \cdot 2 = 0; \quad y + 1 = 0, \quad y = -1.$$

7-qadam. Topilgan $y=-1$, $z=1$, $t=2$ qiymatlarni (30) sistemaning birinchi tenglamasi $x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = -1$ ga qo'yib x noma'lumni aniqlaymiz:

$$x + \frac{3}{2}(-1) - \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = -1; \quad x = 0$$

Shunday qilib $x = 0$, $y=-1$, $z=1$, $t=2$ ya'ni $(0; -1; 1; 2)$ sonlar to'plami berilgan sistemaning yechimi bo'lar ekan.

Gauss usulining muhim tomoni shundan iboratki sistemani yechishdan oldin uni birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlashning hojati yo'q.

Agar sistema birgalikda va aniq bo'lsa bu usul xuddi yuqoridagi misoldagi singari yagona yechimga olib keladi.

Agar sistema birgalikda bo'lmasa bu usulning qaysidir qadamida yo'qotilishi lozim bo'lgan noma'lum bilan birgalikda barcha noma'lumlar ham yo'qolib ketadi va tenglikning o'ng tomonida esa noldan farqli ozod son qoladi.

3-misol.
$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 6, \\ x + 2y - z = 3, \\ 5x + 3y + 2z = 8 \end{cases} \quad (31)$$

sistema Gauss usuli bilan yechilsin.

Yechish. 1-qadam. Birinchi va ikkinchi tenglamalarni o'rin almashtirib birinchi tenglamadagi x oldidagi koeffitsientni 1 ga keltiramiz:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 3x - y + 4z = 6, \\ 5x + 3y + 2z = 8 \end{cases} \quad (32)$$

a) bu sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko'paytirib ikkinchi tenglamasiga qo'shamiz:

$$\begin{array}{r}
 -3x - 6y + 3z = -9, \\
 + \\
 3x - y + 4z = 6. \\
 \hline
 -7y + 7z = -3
 \end{array}$$

b) (3.32) sistemaning birinchi tenglamasini -5 ga ko'paytirib uchinchi tenglamasiga qo'shsak

$$\begin{array}{r}
 -5x - 10y + 5z = -15, \\
 + \\
 5x + 3y + 2z = 8. \\
 \hline
 -7y + 7z = -7
 \end{array}$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib (3.31) sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ -7y + 7z = -3, \\ -7y + 7z = -7. \end{cases} \quad (33)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

2-qadam. (33) sistemaning ikkinchi tenglamasini -1 ga ko'paytirib uchinchisiga qo'shsak uchinchi tenglamasidagi yo'qotilishi lozim bo'lgan y bilan bir qatorda z noma'lum ham yo'qolib ketadi, ya'ni.

$$\begin{array}{r}
 7y - 7z = 3, \\
 + \\
 -7y + 7z = -7 \\
 \hline
 0 = -4
 \end{array}$$

hosil bo'ladi.

Shunday qilib Gauss usuliga binoan sistema birgalikda emas, ya'ni yechimga ega emas ekan.

Agar sistema birgalikda, ammo aniqmas bo'lsa Gauss usulining qandaydir qadamida ikkita bir xil tenglamalarga ega bo'lamiz.

Ya'ni bu holda tenglamalar soni noma'lumlar sonidan bittaga kam bo'ladi.

4-misol.
$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 6, \\ x + 2y - z = 3, \\ 5x + 3y + 2z = 12 \end{cases} \quad \text{sistema Gauss usuli bilan yechilsin.}$$

Yechish. Birinchi tenglamadagi x oldidagi koeffitsientni 1 ga keltirish maqsadida sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalarni o'rinlarini almashtirib uni

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 3x - y + 4z = 6, \\ 5x + 3y + 2z = 12 \end{cases} \quad (34)$$

ko'rinishda yozamiz.

a) (34) sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko'paytirib sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'shamiz:

$$\begin{array}{r} -3x - 6y + 3z = -9, \\ + \\ 3x - y + 4z = 6. \\ \hline -7y + 7z = -3 \end{array}$$

b) (34) sistemaning birinchi tenglamasini -5 ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$\begin{array}{r} -5x - 10y + 5z = -15, \\ + \\ 5x + 3y + 2z = 12. \\ \hline -7y + 7z = -3 \end{array}$$

Shunday qilib

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ -7y + 7z = -3, \\ -7y + 7z = -3 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistema uch noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ -7y + 7z = -3 \end{cases}$$

matritsani qaraymiz. A matritsa **sistemaning matritsasi**, B esa **kengaytirilgan matritsa** deb ataladi. $r_A \leq r_B$ ekanligi ravshan.

1-teorema(Kroneker-Kapelli). (35) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun sistemaning matritsasi A bilan kengaytirilgan B matritsaning ranglari teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Zarurligi (35) sistema birgalikda va $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ yechimga ega bo'lsin. U holda

[illegible]

o'rinli bo'ladi.

B matritsaning oxirgi ustunidan α_1 ga ko'paytirilgan birinchi ustunni, keyin α_2 ga ko'paytirilgan ikkinchi ustunni va hokazo nihoyat α_n ga ko'paytirilgan n -ustunni ayiramiz. U holda (36) ga binoan B ga ekvivalent

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'lib $B_1 \sim A$ bo'ladi. Demak $r_B = r_{B_1} = r_A$.

Demak (35) sistema birgalikda bo'lganda $r_A = r_B$ bo'lar ekan.

Yetarliligi. $r_A = r_B = r$ bo'lsin. (35) sistemaning birgalikda ekanini ko'rsatamiz. A matritsaning noldan farqli r -tartibli Δ minori uning yuqori chap burchagida joylashgan deb faraz qilamiz. Aks holda noma'lumlar va tenglamalarning o'rinlarini almashtirish yo'li bilan bunga erishish mumkin.

yagona yechimga, agar bu matritsalarining ranglari o'zaro teng bo'lib, lekin noma'lumlar sonidan kichik, ya'ni $r_A = r_B < n$ bo'lsa, u holda (35) sistema cheksiz ko'p yechimgalarga ega bo'lar ekan.

$b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_n = 0$ bo'lganda (35) sistema **bir jinsli** sistema deb ataladi. Bir jinsli sistema uchun $A \sim B$ bo'lgani uchun $r_A = r_B$ bo'ladi va u doimo birgalikda. Xulosaga binoan $r_A = n$ bo'lganda bir jinsli sistema yagona $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ ya'ni nol yechimga ega.

1-teorema asosanib bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun quyidagi teorema ega bo'lamiz.

2-teorema. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas yechimlarga ega bo'lishi uchun sistemaning matritsasi A ning rangi r_A noma'lumlar soni n dan kichik bo'lishi zarur va yetarlidir.

Natija. Agar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining tenglamalari soni m noma'lumlari soni n dan kam bo'lsa, u holda sistema nolmas yechimlarga ega bo'ladi. Haqiqatdan ham, $r_A \leq m < n$.

Olingan natijalar tenglamalari soni noma'lumlari soniga teng chiziqli tenglamalar sistemasi uchun ham o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

Endi chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishga doir misollar qaraymiz.

5-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

sistema birgalikda bo'lsa, uni yeching?

Yechish. Sistemaning matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ning rangini topamiz. Matritsaning birinchi va ikkinchi satrlarini qo'shib to'rtinchi satridan ayiramiz. U holda

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

yoki oxirgi matritsaning birinchi satrini (-3) ga ko'paytirib ikkinchi va uchinchi satrlarning mos elementlariga qo'shsak

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$$

hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan matritsa diagonal matritsa rangi $r=3$ bo'ladi.

.

Kengaytirilgan

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangini hisoblaymiz. A matritsadagi singari elementar alamashtirishlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned} B &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 48 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \sim \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Oxirgi diagonal matritsaning rangi $r = 3$ bo'lishi ravshan. Demak kengaytirilgan B matritsaning rangi ham 3 ga teng: $r_B = 3$.

Matritsalar bir xil ranglarga ega bo'lganligi uchun sistema birgalikda.

Bundan tashqari matritsalarining rangi noma'lumlarning soniga teng, shu sababli sistema birgina yechimga ega. $\Delta \neq 0$ minor birinchi uchta tenglama koeffitsientlaridan tuzilgan, shu sababli to'rtinchi tenglama birinchi uchta tenglamalarning natijasidan iborat va uni tashlab yuborish mumkin.

Berilgan sistemaning birinchi uchta tenglamalaridan tuzilgan uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini Kramer formulalaridan foydalanib yechib $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ ni topamiz. Bu yechim berilgan sistemaning ham yechimi bo'ladi.

6-misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

sistema birgalikdami?

Yechish. Sistemaning matritsasi A ning rangini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 13 & -3 \\ 0 & 26 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ &\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 13 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$r_A = 2$, chunki $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$. Kengaytirilgan B matritsaning rangini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} B &\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 13 & -3 & -4 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 26 & -6 & -12 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 13 & -3 & -4 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diagonal matritsaning rangi $r_B = 3$.

$r_A \neq r_B$ bo'lgani uchun berilgan sistema birgalikda emas.

7-misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

sistema birgalikdami?

Yechish. A matritsaning rangini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$r_A = 2.$$

Kengaytirilgan B matritsaning rangini hisoblaymiz.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -11 & 7 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Demak } r_B = 2.$$

$r_A = r_B = 2$ bo'lgani uchun berilgan sistema birgalikda. Rang noma'lumlar sonidan kichik bo'lgani uchun sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega. Endi berilgan sistemani yechishga harakat qilamiz. Sistemaning ikkinchi tenglamasi uning birinchi tenglamasining natijasi bo'lganligi sababli uni tashlab yuborish mumkin. U holda berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli bo'ladi. Bu sistemaning x_1 va x_2 noma'lumlari oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan minor $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ bo'lgani uchun bu

noma'lumlar qatnashgan ifodalarni tenglikni chap qismida qoldirib x_3 qatnashgan qo'shiluvchilarni tenglikning o'ng qismiga ko'chiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3 + x_3, \\ 3x_1 - x_2 = -1 - 2x_3. \end{cases}$$

Bu sistemaning «Ozod noma'lumi» x_3 ga aniq qiymat bersak, ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'lib uning asosiy determinanti $\Delta = -11 \neq 0$ bo'lgani uchun u aniq yechimga ega. Sistemani yechib x_3 ning tayin qiymatiga mos x_1, x_2 noma'lumlarning qiymatlari topiladi. Shu jarayonni davom ettirib berilgan sistemaning boshqa yechimlarini ham topish mumkin.

Masalan so'ngi sistemaga $x_3 = 0$ qiymatni bersak u

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3, \\ 3x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

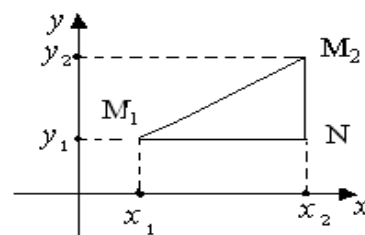
ko'rinishni oladi. Uni yechib $x_1 = 0, x_2 = 1$ ni topamiz. Demak berilgan sistemaning cheksiz ko'p yechimlaridan biri $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$ hosil qilindi.

5. Mavzu: Tekislikda analitik geometriya. Kesmani berilgan nisbatta bo'lish. Takislikda to'g'ri chiziqning har xil ko'rinishdagi tenglamalari.

Tekislikning ikki nuqtasi orasidagi masofa

Oxy tekisligining berilgan $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalari orasidagi masofani topish uchun formula chiqaramiz. M_1M_2 kesma koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasin (1-rasm).

M_1 nuqtadan Ox ga parallel, M_2 nuqtadan Oy ga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib ularni kesishish nuqtasini N orqali belgilaymiz. M_1M_2N uchburchak to'g'riburchakli bo'lganligi sababli Pifagor teoremasiga binoan $M_1M_2^2 = M_1N^2 + NM_2^2$ bo'ladi.



1- rasm.

$M_1N = |x_2 - x_1|$, $NM_2 = |y_2 - y_1|$ ekanini hisobga olsak,

$$M_1M_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ bo'ladi.}$$

Izlanayotgan masofani d orqali belgilasak, tekislikdagi ikki nuqta orasidagi masofani topish uchun

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Xususiyl holda koordinatalar boshidan $M(x; y)$ nuqtagacha d masofa $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ (2) formula yordamida topiladi.

(1) formula M_1M_2 kesma koordinata o'qlarining birortasiga parallel bo'lganda ham o'z kuchini saqlaydi.

1-misol. $M_1(3; 4)$ va $M_2(-1; 1)$ nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

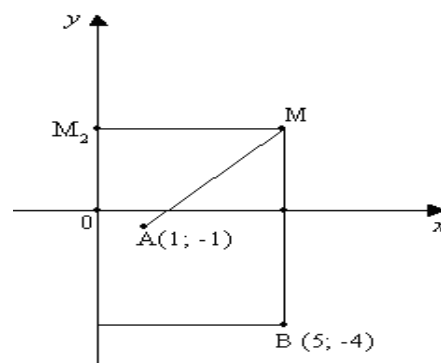
Yechish. $x_1=3$, $y_1=4$, $x_2=-1$, $y_2=1$. (1) formulaga binoan $d = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$ bo'ladi.

2-misol. Oxy tekislikning $A(1;-1)$ nuqtadan hamda Oy o'qdan 5 birlik uzoqlikda joylashgan nuqta topilsin. (2-rasm).

Yechish. $M(x,y)$ ($x>0$) izlanayotgan nuqta bo'lsin. U holda $M_2(0,y)$ M nuqtaning 0y o'qidagi proeksiyasi bo'ladi.

Shartga ko'ra $M_2M=AM=5$. (1) formulaga asosan $M_2M=\sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2}=5$ yoki bundan $x=5$ kelib chiqadi.

Shuningdek $AM=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=5$ yoki bunga $x=5$ ni qo'ysak $\sqrt{(5-1)^2+(y+1)^2}=5$; $4^2+(y+1)^2=25$; $(y+1)^2=9$; $y+1=\pm 3$; $y_1=2$, $y_2=-4$ ga ega bo'lamiz. Demak masalaning shartini ikkita $M(5;2)$ va $B(5;-4)$ nuqtalar qanoatlantirar ekan.



2-rasm

6-misol. Koordinatalar boshidan $M(6; 8)$ nuqtachacha masofa topilsin.

Yechish. $x=6$, $y=8$ (2) formulaga ko'ra $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ bo'ladi.

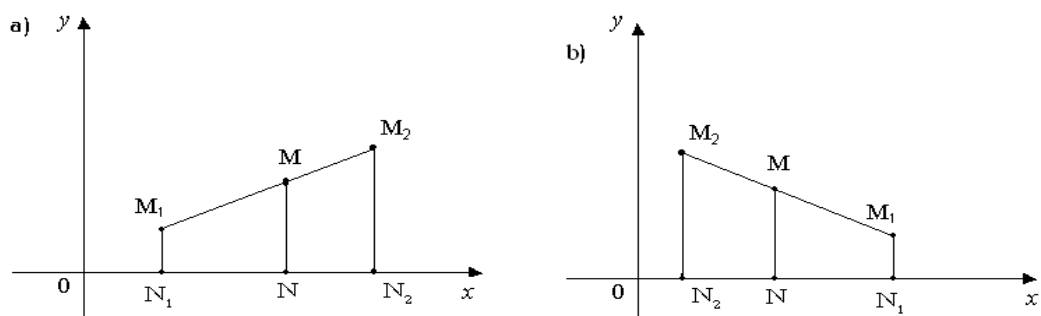
Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

M_1M_2 kesmani berilgan $\lambda > 0$ nisbatda bo'lish deganda shu kesmada $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ munosabatni qanoatlantiruvchi M nuqtani topish tushuniladi.

Oxy tekislikda $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar berilganda M_1M_2 kesmani $\lambda > 0$ nisbatda bo'luvchi $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun formula chiqaramiz. M_1 , M va M_2 nuqtalarning Ox o'qlardagi proeksiyalarini N_1, N va N_2 lar orqali belgilaymiz (3-rasm).

U holda ular Ox o'qda $N_1(x_1)$, $N(x)$, $N_2(x_2)$ koordinatalarga ega bo'ladilar.

Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi kesmalar proporsional bo'lishi elementar geometriyadan ma'lum.



3-rasm.

Shunga binoan, $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{N_1N}{NN_2} = \lambda$. Ammo $N_1N = |x - x_1|$, $NN_2 = |x_2 - x|$ bo'lgani uchun $\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \lambda$. $x - x_1$ va $x_2 - x$ ayirma bir xil ishorali ekanligini hisobga olib $|x - x_1|$ va $|x_2 - x|$ modullarni $x - x_1$ va $x_2 - x$ ayirmalarga almashtirib $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$ tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikni yechib x ni aniqlaymiz: $x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$; $x - \lambda x = x_1 + \lambda x_2$; $(1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2$; $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$.

Shunga o'xshash formulani y uchun ham hosil qilish mumkin.

Shunday qilib izlanayotgan M nuqtani x va y koordinatalarini topish uchun

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (3)$$

formulalarni hosil qilamiz.

Xususiyl holda M_1M_2 kesmaning o'rtasini koordinatalarini topish talab etilganda $\lambda = 1$ bo'lib (3) dan

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (4)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

4-misol. Agar $M_1(3; -2)$, $M_2(1; 4)$ bo'lsa M_1M_2 kesmani $\lambda = \frac{1}{4}$ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalari topilsin.

Yechish. $x_1 = 3, y_1 = -2, x_2 = 1, y_2 = 4$ (3) ga ko'ra $x = \frac{3 + \frac{1}{4} \cdot 1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{13}{5} = 2,6,$

$$y = \frac{-2 + \frac{1}{4} \cdot 4}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5} = -0,8 \text{ bo'ladi.}$$

Demak izlanayotgan nuqta $M(2,6; -0,8)$ bo'ladi.

5-misol. Agar $M_1(4; 5), M_2(-2; 3)$ bo'lsa M_1M_2 kesmaning o'rtasi topilsin.

Yechish. $x_1 = 4, y_1 = 5, x_2 = -2, y_2 = 3.$ (4) formulaga binoan

$$x = \frac{4-2}{2} = 1, y = \frac{5+3}{2} = 4 \text{ bo'ladi.}$$

Demak $M(1,4)$ nuqta berilgan M_1M_2 kesmaning o'rtasidir.

Ikki to'g'ri chizq orasidagi burchak tushinchasi

Oxy tekislikda yotgan va M nuqtada kesishuvchi λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlarni qaraymiz.

1-ta'rif. λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deb λ_1 ni λ_2 bilan ustma-ust tushishi uchun uni M nuqta atrofida soat mili aylanishiga teskari yo'nalishida burilishi lozim bo'lgan eng kichik burchakka aytiladi. (4^a-chizma).

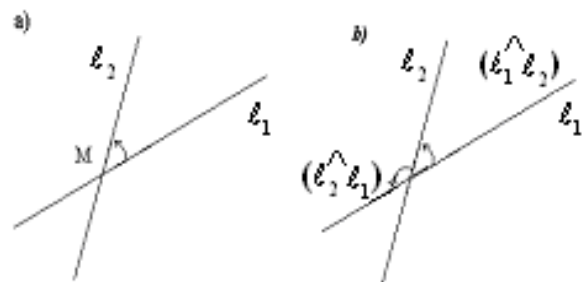
λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak $\lambda_1 \wedge \lambda_2$ kabi belgilanadi.

Keltirilgan ta'rifga ko'ra λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak λ_2 va λ_1 to'g'ri chiziqlar orqasidagi burchakka teng emas. Ta'rifga binoan

$$\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \pi - (\lambda_2 \wedge \lambda_1) \text{ bo'ladi (4^b-chizma).}$$

To'g'ri chiziqlar parallel bo'lganda yoki ustma-ust tushganda ular orasidagi burchak nolga teng hisoblanadi.

Keltirilgan ta'rif to'g'ri chiziqlardan biri o'q, masalan Ox o'q bo'lganda ham o'z kuchini saqlaydi.



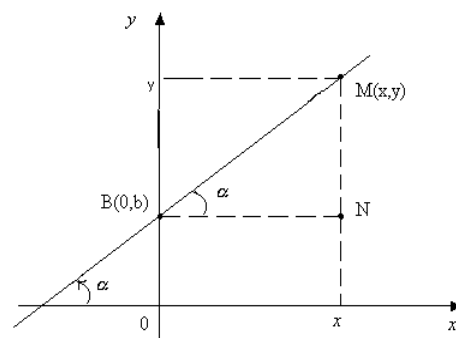
4- rasm

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi

Oxy tekislikni hamda unda yotgan to'g'ri chiziqni qaraymiz. To'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasdan Oy o'q bilan $B(0;b)$ nuqtada kesishsin va Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan α burchak tashkil etsin. (5-rasm.) Shu to'g'ri chiziqning dekartning to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan tenglamasini topamiz, ya'ni x va y dekart koordinatalarini bog'lovchi shunday tenglamani topamizki to'g'ri chiziqning barcha nuqtalarini koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiradi, to'g'ri chiziqda yotmaydigan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi.

Faraz qilaylik $M(x;y)$ nuqta to'g'ri chiziqning $B(0;b)$ nuqtasidan farqli istalgan nuqtasi bo'lsin. 5-rasmdagi $\triangle BNM$ dan $\frac{MN}{BN} = \operatorname{tg} \alpha$ yoki $MN = \operatorname{tg} \alpha \cdot BN$ tenglikka ega bo'lamiz. $MN = y - b$, $BN = x$ ekanligini hisobga olsak $y - b = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$ yoki $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$ kelib chiqadi. $k = \operatorname{tg} \alpha$ deb belgilasak $y = kx + b$ (6.6) tenglama hosil bo'ladi.

Bu tenglama berilgan to'g'ri chiziqni tenglamasi. Chunki uni to'g'ri chiziqni istalgan $B(0;b)$ nuqtadan farqli $M(x;y)$ nuqtasining koordinatalari qanoatlantirishini ko'rdik. $B(0;b)$ nuqtaning koordinatalari ham uni qanoatlantirishi ko'rinib turibdi. To'g'ri chiziqda yotmaydigan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.



5-rasm

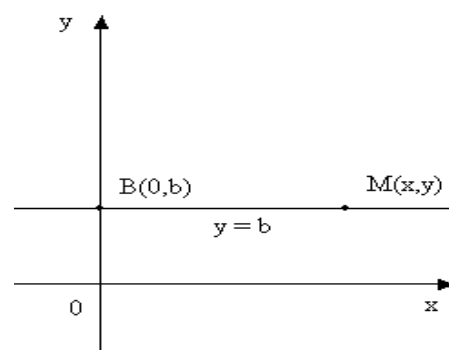
$k = \operatorname{tg} \alpha$ son to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsienti** deb ataladi, chiziqning

To'g'ri chiziqning (6) tenglamasi uning **burchak koeffitsientli** tenglamasi deyiladi.

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel bo'lsin (6-rasm).

Bu holda $\alpha = 0$, $k = \operatorname{tg} 0 = 0$ bo'lgani uchun to'g'ri chiziq tenglamasi $y=b$ (7)

ko'rinishiga ega bo'ladi. (7) Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi. Xususiyl holda $y=0$ Ox o'qning tenglamasi.



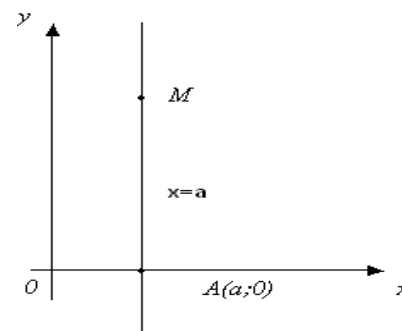
6-rasm

To'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tsin. U holda $b=0$ bo'lib koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $y=kx$ (8) hosil bo'ladi.

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq $A(a;0)$ nuqtadan o'tib Oy o'qqa parallel bo'lsin (7-rasm)

Bu holda to'g'ri chiziq Ox o'q bilan 90° burchak tashkil etib $k = \operatorname{tg} 90^\circ$ mavjud bo'lmaganligi uchun uning tenglamasini (6) ko'rinishda yozib bo'lmaydi. To'g'ri chiziqning barcha nuqtalari a absissaga ega bo'lganligi uchun uning tenglamasi

$$x=a \quad (9)$$



7-rasm

ko'rinishga ega bo'ladi, xususiyl holda $x=0$ Oy o'qning tenglamasi bo'ladi.

6-misol. Oy o'qdan 3 ga teng kesma ajratib Ox o'q bilan 45° burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.

Yechish. Burchak koeffitsientni topamiz: $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Shartga ko'ra $b=3$ (6) formulaga binoan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi $y = 1 \cdot x + 3$ yoki $y = x + 3$ bo'ladi.

7-misol. Koordinatalar boshi hamda $A(3; 2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.

Yechish. To'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tganligi uchun uning tenglamasi $y = kx$ ko'rinishga ega bo'ladi. Ikkinchi tomondan $A(3;2)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotganligi uchun nuqtaning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasi

$y = kx$ ni qanoatlantiradi, ya'ni $2=k \cdot 3$, bundan $k = \frac{2}{3}$ kelib chiqadi. Demak to'g'ri chiziqning izlanayotgan tenglamasi $y = \frac{2}{3}x$ bo'ladi.

Izoh. Bundan buyon to'g'ri chiziq berilgan yoki to'g'ri chiziq topilsin deyilganda to'g'ri chiziqning tenglamasi berilganini yoki to'g'ri chiziqning tenglamasini topish kerakligi tushuniladi.

To'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi

Yuqorida to'g'ri chiziq tenglamasi dekart koordinatalari x va y ga nisbatan birinchi darajali tenglama bo'lishini ko'rdik. Endi teskarisini isbotlaymiz.

1-teorema. Dekart koordinatalari x va y ga nisbatan birinchi darajali har qanday tenglama to'g'ri chiziq tenglamasidir.

Isboti. Dekart koordinatalariga nisbatan birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0 \quad (10)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bunda A, B, C ma'lum sonlar bo'lib $A^2 + B^2 \neq 0$, ya'ni A bilan B bir vaqtga nolga teng emas.

a) $B \neq 0$ bo'lsin. U holda (10) tenglamani y ga nisbatan yechsak

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Buni (6) tenglama bilan taqqoslab u Oy o'qdan $-\frac{C}{A}$ ga

teng kesma ajratib Ox o'q bilan tangensi $-\frac{A}{B}$ ga teng bo'lgan α burchak tashkil

etuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi ekaniga iqrar bo'lamiz.

Demak (10) tenglama ham to'g'ri chiziq tenglamasi ekan.

b) $B=0$ bo'lsin. U holda (6.10) tenglama

$$Ax + C = 0$$

ko'rinishiga ega bo'lib undan $x = -\frac{C}{A}$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama

$M\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ nuqtadan o'tib Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi.

2-ta'rif. $Ax + By + C = 0$ (10) ($A^2 + B^2 \neq 0$) tenglama **to'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishidagi tenglamasi** deb ataladi.

Endi umumiy ko'rinishdagi tenglama bilan yanada batafsilroq tanishamiz.

1) $B=0$ bo'lsin. U holda tenglama

$$x = -\frac{C}{A}$$

ko'rinishga keltirilishini ko'rdik. Agar $C \neq 0$ bo'lsa to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel bo'ladi. $C=0$ bo'lsa tenglama $x=0$ ko'rinishga ega bo'lib bu holda to'g'ri chiziq Oy o'qda yotadi.

2) $A=0$ bo'lsin. U holda $B \neq 0$ va to'g'ri chiziq tenglamasi $y = -\frac{C}{B}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglama Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasidir. $C=0$ bo'lganda bundan $y=0$ Ox o'qning tenglamasi hosil bo'ladi.

3) $C=0$ bo'lsin. U holda (10) tenglama $Ax+By=0$ yoki $y = -\frac{A}{B}x$ ko'rinishga ega bo'ladi. Oxirgi tenglama koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi ekanini bilamiz. Demak $C=0$ bo'lganda to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tar ekan.

Izoh. To'g'ri chiziq tenglamasi umumiy ko'rinishda berilganda tenglamadan y topilsa to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi hosil bo'ladi. Shuning uchun vaziyatga qarab to'g'ri chiziqning u yoki bu tenglamalaridan foydalanamiz.

To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi

$Ax + By + C = 0$ va $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib ularning kesishish nuqtasini topish talab etilsin. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi har ikkala to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lganligi sababli uning koordinatalari har ikkala to'g'ri chiziq tenglamasini ham qanoatlantiradi, ya'ni

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

sistemaning yechimi bo'ladi.

8-misol. $3x-2y-4=0$ va $2x+y-5=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish. Kesishish nuqtasining koordinatalarini

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

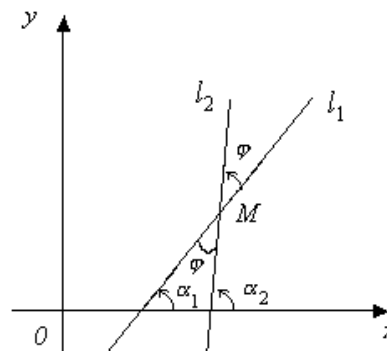
sistemani yechib topamiz. Sistemaning ikkinchi tenglamasini 2 ga ko'paytirib uning birinchi tenglamaga hadlab qo'shsak $7x-14=0$, bundan $x=2$ kelib chiqadi.

$x=2$ qiymatni sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib y ni topamiz: $2 \cdot 2 + y - 5 = 0$, $y = 1$. Demak to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $x=2$, $y=1$ koordinatalarga ega ekan.

Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak

M nuqtada kesishuvchi λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ tenglamalar yordamida berilgan bo'lsin. Shu to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchakning tangensini topamiz (8-rasm).

$\text{tg} 90^\circ$ mavjud bo'lmaganligi uchun λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar emas deb faraz qilamiz. Ma'lumki uchburchakning tashqi burchagi (α_2) o'ziga qo'shni bo'lmagan ichki burchaklar (α_1, φ) ning yig'indisiga teng. Shunga ko'ra 8-rasmdan $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ ёки $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ tenglikka ega bo'lamiz.



8-rasm

Bundan:

$$\text{tg} \varphi = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\text{tg} \alpha_2 - \text{tg} \alpha_1}{1 + \text{tg} \alpha_1 \text{tg} \alpha_2}.$$

α_1 va α_2 - Ox o'q bilan λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bo'lgani uchun $\text{tg} \alpha_1 = k_1$, $\text{tg} \alpha_2 = k_2$ bo'ladi.

Shuning uchun:

$$\text{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (12)$$

Demak, o'zaro perpendikulyar bo'lmagan λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning tangensi (6.12) formula yordamida topilar ekan.

9-misol. $y = -2x + 3$ va $y = 3x + 5$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. Misolda $k_1 = -2$, $k_2 = 3$ bo'lgani uchun

$$\text{tg} \varphi = \frac{3 - (-2)}{1 + (-2) \cdot 3} = \frac{5}{-5} = -1, \quad \varphi = 135^\circ \text{ kelib chiqadi.}$$

Izoh. λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchak

$$\text{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

formula yordamida topiladi.

Faraz qilaylik perpendikulyar bo'lmagan to'g'ri chiziqlar λ_1 va λ_2 umumiy ko'rinishdagi tenglamalari $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ yordamida berilgan bo'lib ular orasidagi φ burchakni tangensini topish talab etilsin. U holda to'g'ri chiziq tenglamalarini y ga nisbatan yechib

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \quad \text{va} \quad y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsientli tenglamalariga ega bo'lamiz. (12) ga

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{va} \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

qiymatlarni qo'yib soddalashtirsak

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib umumiy tenglamalari yordamida berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \quad (13)$$

formula yordamida topilar ekan.

10-misol. $2x - 3y + 5 = 0$ va $5x - y + 9 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. Misolda $A_1 = 2, B_1 = -3, A_2 = 5, B_2 = -1$. (13) ga binoan:

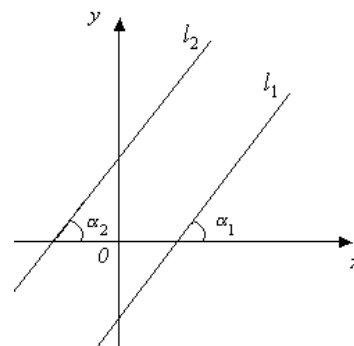
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-3)}{2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-1)} = \frac{13}{13} = 1, \quad \varphi = 45^\circ.$$

Ikki to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti

Faraz qilaylik to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsin. U holda to'g'ri chiziqlar Ox o'q bilan bir xil burchak tashkil etadi, ya'ni $\alpha_1 = \alpha_2$ bo'ladi. Demak $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$ va $k_1 = k_2$ (6.14) bo'ladi

Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo'lsa $\alpha_1 = \alpha_2$ bo'lib λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi yoki ustma-ust tushadi. Ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlarni parallel sanab quyidagiga ega bo'lamiz.

Ikki to'g'ri chiziqlarning parallel bo'lishi uchun ularning burchak koeffitsientlari teng bo'lishi zarur va yetarlidir. 9-rasm



9-rasm

11-misol. $2x + 3y - 1 = 0$ va $4x + 6y - 3 = 0$ to'g'ri chiziqlar parallelmi?

Yechish. To'g'ri chiziqlarni tenglamalari umumiy ko'rinishda berilgan. Ularni y ga nisbatan yechib to'g'ri chiziqlar tenglamalarini burchak koeffitsientli tenglamalar ko'rinishiga keltiramiz: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$.

$k_1 = k_2 = -\frac{2}{3}$ bo'lgani uchun to'g'ri chiziqlar parallel.

Ikki to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti

λ_1 va λ_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lganda (12) va (13) formulalar ma'noga ega bo'lmaydi. Shuning uchun bu holda ikki to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni kotangensini topamiz:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1}.$$

Perpendikulyar to'g'ri chiziqlar uchun $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$ bo'lgani sababli

$$\frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0, \text{ bundan } 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \text{ yoki } k_1 \cdot k_2 = -1. \text{ Aksincha, } k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ bo'lsa}$$

to'g'ri chiziqlar perpendikulyar ekanini ko'rsatish mumkin.

Shunday qilib ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyar bo'lishi uchun $k_1 \cdot k_2 = -1$ (15) shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Agar to'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishdagi $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tenglamalari yordamida berilgan bo'lsa, to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1 \text{ yoki } A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad (6.16)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

12-misol. $3x - 2y + 13 = 0$ va $2x + 3y - 4 = 0$ to'g'ri chiziqlarlar perpendikulyarmi?

Yechish $A_1 = 3, B_1 = -2, A_2 = 2, B_2 = 3$ bo'lgani uchun $A_1A_2 + B_1B_2 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$ bo'ladi. (16) perpendikulyarlik sharti bajarilgani uchun to'g'ri chiziqlar perpendikulyar.

Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti k ma'lum va to'g'ri chiziqni $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tishi aniq bo'lganda shu to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi

$$y = kx + b \quad (6)$$

ni yozamiz. Bu yerdagi k ma'lum son b esa noma'lum. b ni to'g'ri chiziqni $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tish shartidan foydalanib topamiz. $M_1(x_1; y_1)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasi (6) ni qanoatlantiradi, ya'ni

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Bundan

$$b = y_1 - kx_1.$$

b ning topilgan qiymatini to'g'ri chiziq tenglamasi (6) ga qo'ysak

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

yoki

$$y-y_1=k(x-x_1) \quad (17)$$

hosil bo'ladi. Bu berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deb aytiladi.

13-misol. Berilgan $A(3;-1)$ nuqtadan o'tib Ox o'q bilan 135° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.

Yechish. $\alpha=135^\circ$, $k=tg135^\circ=tg(90^\circ+45^\circ)=-ctg45^\circ=-1$, $x_1=3$, $y=-1$ bo'lgani uchun (17) ga binoan $y+1=-(x-3)$ yoki $y=-x+2$ kelib chiqadi.

Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi

$M_1(x_1; y_1)$ nuqta hamda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq berilgan. Shu nuqtadan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini topish talab etiladi. (17) formulaga binoan izlanayotgan tenglama

$$y-y_1=k_1(x-x_1)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdagi noma'lum k_1 ni to'g'ri chiziqlarni parallellik shartidan aniqlaymiz. Parallellik sharti (14) ga binoan $k_1=k$ bo'ladi.

Demak

$$y-y_1=k(x-x_1). \quad (18)$$

Bu berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

14-misol. $M(-2;3)$ nuqtadan $2x-y+5=0$ to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziqning tenglamasi yozilsin.

Yechish. To'g'ri chiziq tenglamasidan $y=2x+5$ va $k=2$ ekani kelib chiqadi. $x_1=-2$, $y_1=3$ bo'lgani uchun (10.2) ga ko'ra $y-3=2(x+2)$ yoki $y=2x+7$ kelib chiqadi.

**Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan
to'g'ri chiziq tenglamasi**

Berilgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan berilgan $y=kx+b$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini topish talab etilsin (18) ga binoan izlanayotgan tenglama

$$y-y_1=k_1(x-x_1)$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan bu to'g'ri chiziq berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgani uchun (15) ga asosan $k \cdot k_1 = -1$ yoki $k_1 = -\frac{1}{k}$ bo'ladi.

Demak
$$y-y_1 = -\frac{1}{k}(x-x_1). \quad (19)$$

Bu tenglama berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

15-misol. $M(-1;1)$ nuqtadan $3x-y+2=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Yechish. Izlanayotgan burchak koeffitsientni k_1 , berilgan burchak koeffitsientni k_2 desak $y=3x+2$ tenglamadan $k_2=3$ kelib chiqadi. $k_2 \cdot k_1 = -1$ perpendikulyarlik shartidan $3k_1 = -1$, bundan $k_1 = -\frac{1}{3}$ hosil bo'ladi. (19) ga binoan izlanayotgan tenglama

$$y-1 = -\frac{1}{3}(x+1) \text{ yoki } 3y-3 = -x-1; \quad x+3y-2=0$$

bo'ladi.

16-misol $(2; -1)$ nuqtadan o'tib $5x-2y+10=0$ to'g'ri chiziq bilan 45° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziqni burchak koeffitsientini (12) formulaga binoan axtaramiz.

Berilgan to'g'ri chiziq tenglamasini $y = \frac{5}{2}x + 5$ ko'rinishda yozsak uning burchak koeffitsienti $k_1 = \frac{5}{2}$ ekani kelib chiqadi. Shartga binoan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak $\varphi = 45^\circ$. Izlanayotgan burchak koeffitsientni k_2 deb belgilasak (12) formula

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{k_2 - \frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{2}k_2}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bundan

$$1 = \frac{k_2 - \frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{2}k_2} \text{ yoki } 1 + \frac{5}{2}k_2 = k_2 - \frac{5}{2}; \frac{5}{2}k_2 - k_2 = -\frac{5}{2} - 1; \frac{3}{2}k_2 = -\frac{7}{2}; k_2 = -\frac{7}{3} \text{ bo'ladi.}$$

Shunday qilib (17) ga binoan izlanayotgan tenglama

$$y + 1 = -\frac{7}{3}(x - 2) \text{ yoki } 3y + 3 = -7x + 14,$$

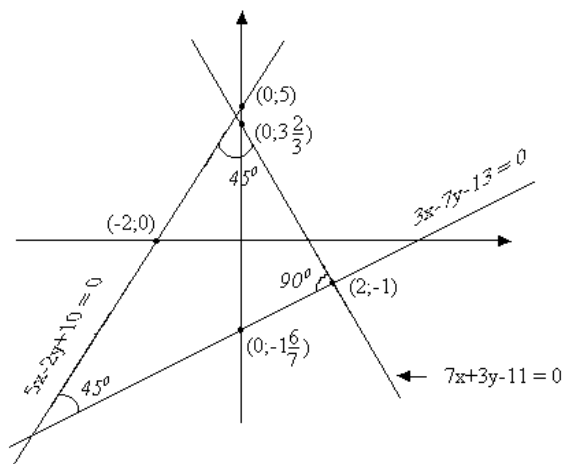
bundan $7x + 3y - 11 = 0$ bo'ladi.

Agarda $k_2 = \frac{5}{2}$, $\varphi = 45^{\circ}$ deb olib (12) dan k_1 ni topsak $k_1 = \frac{3}{7}$ bo'ladi. Bu

holda izlanayotgan tenglama (17) ga binoan $y + 1 = \frac{3}{7}(x - 2)$ yoki $3x - 7y - 13 = 0$ bo'ladi.

Demak masala ikkita yechimga ega ekan.

To'g'ri chiziqlarning har biri berilgan to'g'ri chiziq bilan 45° burchak tashkil etganligi sababli ular o'zaro perpendikulyardir (10-rasm).



10-rasm

To'g'ri chiziqlar dastasi

1-ta‘rif. Tekislikning M nuqtasidan o‘tuvchi va shu tekislikda yotgan barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami to‘g‘ri chiziqlar **dastasi** deb ataladi.

Bunda M nuqta **dastaning markazi** deyiladi.

Berilgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (20)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi burchak koefitsient k o‘zgarsin. U holda k ning har bir aniq qiymatiga $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tuvchi aniq to‘g‘ri chiziq mos keladi. Aksincha absissalar o‘qiga perpendikulyar $x = x_1$ to‘g‘ri chiziqdan farqli barcha to‘g‘ri chiziqlar aniq k burchak koefitsientiga ega bo‘lib u (20) tenglama yordamida aniqlanadi.

Shunday qilib k burchak koefitsient istalgan sonli qiymatni qabul qilganda (10.4) tenglama $x = x_1$ to‘g‘ri chiziqdan farqli markazi $M_1(x_1; y_1)$ nuqtada bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar dastasini tenglamasini ifodalaydi.

17-misol. Markazi $A(2; -3)$ nuqtada bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi yozilsin. Dastadan Ox o‘q bilan 60° burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziq ajratilsin.

Yechish. $x_1 = 2; y_1 = -3$. (20) ga ko‘ra dastaning tenglamasi $y + 3 = k(x - 2)$ bo‘ladi.

Shu dastadagi to‘g‘ri chiziqlardan Ox o‘q bilan 60° burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzamiz. $\alpha = 60^\circ, k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ bo‘lgani uchun dasta tenglamasidan $y + 3 = \sqrt{3}(x - 2)$ yoki $y = \sqrt{3}x - (2\sqrt{3} + 3)$ tenglamaga ega bo‘lamiz.

Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lib, shu nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzish talab etilsin. Shartga ko‘ra to‘g‘ri chiziq $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tganligi uchun uning tenglamasi (20) ga ko‘ra

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu yerdagi k noma‘lum. Uni topish uchun to‘g‘ri chiziqning $M_2(x_2; y_2)$ nuqtadan o‘tishi shartidan foydalanamiz. $M_2(x_2; y_2)$ nuqta to‘g‘ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari shu to‘g‘ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya‘ni

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Bundan

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

k ning ushbu topilgan qiymatini to'g'ri chiziqli tenglamasi $y - y_1 = k(x - x_1)$ ga qo'ysak

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

yoki buni $(y_2 - y_1)$ ga bo'lsak

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (21)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Demak (21) berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasidir.

(21) da $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ deb faraz qilinadi, aks holda u ma'noga ega emas. Boshqacha aytganda to'g'ri chiziqli koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmagan holni qaradik. Agar $x_1 = x_2$ bo'lsa to'g'ri chiziqli 0y o'qqa parallel bo'lib, uning tenglamasi $x = x_1$ bo'ladi. Agar $y_1 = y_2$ bo'lsa, to'g'ri chiziqli 0x o'qqa parallel bo'lib uning tenglamasi $y = y_1$ bo'ladi.

Izoh (21) tenglama to'g'ri chiziqli koordinata o'qlarining birortasiga parallel bo'lganda ham yaroqli.

U holda (21) dagi qaysi kasrning maxraji nolga teng bo'lsa uning suratini ham nolga tenglashtirish kerak xolos.

6-misol. Uchlari $A(2;3)$, $B(-1;4)$, $C(5;5)$ nuqtada bo'lgan uchburchakning og'irlik markazidan uning AC tomoniga parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziqli va undan AB tomoniga perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziqli topilsin.

Yechish. Uchburchakning og'irlik markazi M ni topamiz. Ma'lumki uchburchak og'irlik markazining koordinatalari uning uchlarining nomdosh koordinatalarining o'rta arifmetigiga teng, ya'ni uchlari $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak og'irlik markazi $M(x_m; y_m)$ nuqtaning koordinatalari

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

formulalar yordamida topiladi.

Biz qarayotgan holda

$$x_m = \frac{2 + (-1) + 5}{3} = 2, \quad y_m = \frac{3 + 4 + 5}{3} = 4 \quad \text{va} \quad M(2;4).$$

Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (21) ga asoslanib uchburchakning AC va AB tomonlari tenglamalari topiladi. (21) ga A va B nuqtaning koordinatalarini qo'ysak

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-3}{4-3} \quad \text{yoki} \quad y-3 = -\frac{(x-2)}{3} \quad \text{bo'ladi.}$$

Bundan AB to'g'ri chiziq tenglamasi $y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} + 3$ yoki $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$ ga ega bo'lamiz.

Shuningdek (21) ga A va C nuqtalarni koordinatalarini qo'yib AC tomon tenglamasini topamiz:

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{5-3} \quad \text{yoki} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2}.$$

Bundan $y-3 = \frac{2}{3}(x-2)$ yoki $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ ga ega bo'lamiz.

(18) ga asosan $M(2;4)$ nuqtadan $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ to'g'ri chiziqqa (AC tomonga) parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz: $x_1=2, y_1=4, k=\frac{2}{3}$ bo'lgani uchun $y-4 = \frac{2}{3}(x-2)$ yoki $3y-12=2x-4$ va bundan $2x-3y+8=0$ AC tomonga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi kelib chiqadi.

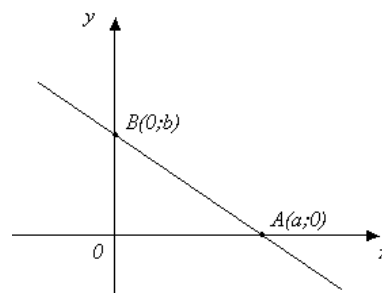
Endi (19) dan foydalanib $M(2;4)$ nuqtadan uchburchakning AB tomoniga o'tkazilgan perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz: $x_1=2, y_1=4, k=-\frac{1}{3}$ ekanini hisobga olsak $y-4=3(x-2)$ yoki $y=3x-6+4$, bundan $y=3x-2$ bo'ladi.

To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasdan u Ox o'qdan $OA=a$, Oy o'qdan $OB=b$ kesmalar ajratsin

U holda to'g'ri chiziq $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalardan o'tishi ravshan. Shuning uchun ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (21) dan foydalanamiz: $x_1=a, y_1=0, x_2=0, y_2=b$ bo'lgani uchun $\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$ yoki $\frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b}$, bundan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (22)$$



11-rasm

kelib chiqadi. Bu tenglama **to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi** deb ataladi.

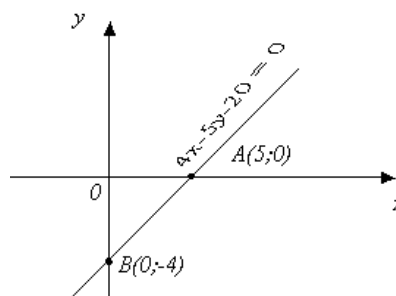
19-Misol. $4x-5y-20=0$ to'g'ri chiziq chizilsin.

Yechish. To'g'ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan yozamiz:

$$4x-5y=20 \text{ yoki } 20 \text{ ga bo'lsak } \frac{4x}{20} - \frac{5y}{20} = 1$$

$$\text{va bundan } \frac{x}{5} + \frac{y}{-4} = 1 \text{ kelib chiqadi.}$$

Demak $a=5, b=-4$ (12-rasm).



12-rasm

To'g'ri chiziqning normal tenglamasi

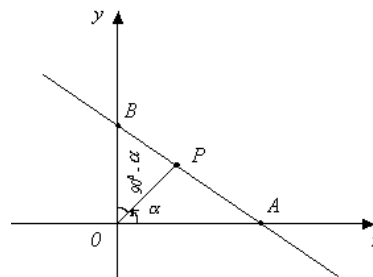
Faraz qilaylik to'g'ri chiziq $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ tenglama orqali berilgan bo'lib u koordinatalar boshidan o'tmasin (13-rasm). To'g'ri chiziqqa OP perpendikulyar o'tkazib uning uzunligini p , OP perpendikulyar bilan Ox o'q orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz. p to'g'ri chiziqning **normali** deb ataladi.

Chizmadagi $\triangle AOP$ dan $\frac{OP}{OA} = \cos \alpha$;

$$OA = \frac{OP}{\cos \alpha} = \frac{p}{\cos \alpha}; \quad a = \frac{p}{\cos \alpha}, \quad \text{chunki}$$

$$OA = a, OP = p.$$

$$\triangle OBP \quad \text{dan} \quad \frac{OP}{OB} = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha;$$



$OB = \frac{p}{\sin \alpha}; \quad b = \frac{p}{\sin \alpha}$ chunki 13-rasm
 $OB = b, OP = p.$

a va b ning ushbu qiymatlarini to'g'ri chiziqning tenglamasiga qo'ysak

$$\frac{\frac{x}{\frac{p}{\cos \alpha}}}{\frac{p}{\cos \alpha}} + \frac{\frac{y}{\frac{p}{\sin \alpha}}}{\frac{p}{\sin \alpha}} = 1 \quad \text{yoki} \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = p; \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (23)$$

kelib chiqadi. (23)-to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb ataladi.

To'g'ri chiziqning normal tenglamasini o'ziga xos xususiyatlaridan biri undagi $p > 0$ va $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ bo'ladi.

To'g'ri chiziq tenglamasini normal ko'rinishiga keltirish

To'g'ri chiziq umumiy ko'rinishidagi tenglamasi $Ax + By + C = 0$ (10) yordamida berilgan bo'lsin. Shu tenglamani (23) ko'rinishdagi normal tenglamaga keltirish mumkinligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda (10) tenglamani shunday o'zgarmas son M ga ko'paytiramizki natijada

$$MAx + MBy + MC = 0 \quad (24)$$

to'g'ri chiziqning normal tenglamasi bo'lsin. Buni normal tenglama (23) bilan taqqoslab $M \cdot A = \cos \alpha$, $M \cdot B = \sin \alpha$, $M \cdot C = -p$ (β) ekaniga iqrar bo'lamiz. Oxirgi tenglamadan M , α , p noma'lumlarni aniqlash qiyin emas. U yerdagi birinchi ikkita tenglamani kvadratga ko'tarib hadlab qo'shsak

$$M^2 A^2 + M^2 B^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1; \quad M^2 (A^2 + B^2) = 1; \quad M^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}$$

bo'lib bundan
$$M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (25)$$

kelib chiqadi. M ni **normallovchi ko'paytuvchi** deb ataladi. (25) da ishora ozod had C ning ishorasiga qarama-qarshi olinadi. M ning topilgan qiymatini (β) ga qo'yib $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ va p larni aniqlash mumkin:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Shunday qilib koordinatalar boshidan $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqqacha masofa

$$p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (26)$$

formula yordamida topilar ekan.

20-misol. $6x+8y-5=0$ to'g'ri chiziq tenglamasi normal ko'rinishda yozilsin.

Yechish. $A=6, B=8, C=-5$. Normallovchi ko'paytuvchi:

$$M = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{1}{10} \quad (C < 0).$$

Berilgan tenglamani bunga ko'paytirsak

$\frac{6}{10}x + \frac{8}{10}y - \frac{5}{10} = 0$ yoki $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{2} = 0$ normal tenglama hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq uchun $p = \frac{1}{2}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa

Aytaylik, $Q(x_0; y_0)$ nuqta hamda $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, Q nuqtadan to'g'ri chiziqqacha d masofani topish talab etilsin. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa deyilganda undan to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikulyarning uzunligi nazarda tutiladi. Oxy sistemani parallel ko'chirib koordinatalar boshini Q nuqtaga joylashtiramiz.

U holda

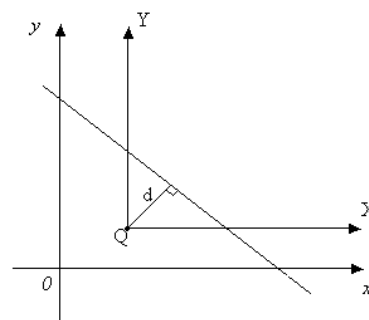
$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{cases}$$

bo'lib to'g'ri chiziq tenglamasi yangi QXY sistemaga nisbatan quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A(X+x_0)+B(Y+y_0)+C=0 \text{ yoki}$$

$$AX+BY+(Ax_0+By_0+C)=0.$$

$Ax_0+By_0+C=C_0$ deb belgilasak to'g'ri chiziq $AX+BY+C_0=0$ tenglamaga ega bo'ladi.



42-chizma

$Q(x_0; y_0)$ nuqta yangi sistemaning koordinatalar boshi bo'lganligi uchun undan to'g'ri chiziqqacha masofa (28) formula yordamida topiladi:

$$d = \frac{|C_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Bundan $C_0 = Ax_0 + By_0 + C$ ekanligini hisobga olib

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (29)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula **nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofani topish** formulasi.

21-misol. $M(-5; 2)$ nuqtadan $4x - 3y + 14 = 0$ to'g'ri chiziqqacha masofa topilsin.

Yechish. $x_0 = -5, y_0 = 2, A = 4, B = -3, C = 14$ bo'lgani uchun (29) ga binoan

$$d = \frac{|4 \cdot (-5) + (-3) \cdot 2 + 14|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-18|}{5} = \frac{18}{5} = 3,6.$$

Demak $d = 3,6$ uz.birl.

22-misol. $3x + 4y - 12 = 0$ va $3x + 4y + 13 = 0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa topilsin.

Yechish. Izlanayotgan masofani topish uchun birinchi to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan ikkinchi to'g'ri chiziqqacha masofani topamiz. Birinchi tenglamada $x = 0$ desak $y = 3$ kelib chiqadi. Demak $Q(0; 3)$ nuqta birinchi to'g'ri chiziqning nuqtasi. (29) formuladan foydalanib undan ikkinchi to'g'ri chiziqqacha d masofani topamiz.

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 13|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Demak $d = 5$ uz.birl.

23-misol. Uchlari $A(4; 3), B(16; -6)$, va $C(20; 16)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning CD balandligi topilsin.

Yechish. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (21) ga asoslanib AB tomon tenglamasini topamiz. (6.21) ga A va B nuqtaning koordinatalarini qo'ysak $\frac{x-4}{16-4} = \frac{y-3}{-6-3}$; $\frac{x-4}{12} = \frac{y-3}{-9}$; $\frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{-3}$; $-3x + 12 = 4y - 12$ yoki $3x + 4y - 24 = 0$ - AB tomon tenglamasi hosil bo'ladi. CD balandlikni nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofani topish formulasidan foydalanib topamiz. (29) ga $x_0 = 20, y_0 = 16, A = 3, B = 4, C = -24$ qiymatlarni qo'ysak

$$d = \frac{|3 \cdot 20 + 4 \cdot 16 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{100}{5} = 20$$

bo'ladi. Demak $d=20$ uz.birl.

6. Mavzu: Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola tenglamalari.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha

1-ta'rif. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1) ko'rinishdagi tenglama **ikkinchi darajali algebraik tenglama** deb ataladi.

Bu yerdagi A, B, C, D, E, F ma'lum sonlar bo'lib ulardan A, B, C bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda, ya'ni $A=B=C=0$ bo'lganda (1) tenglama

$$Dx + Ey + F = 0$$

ko'rinishdagi chiziqli (birinchi darajali) tenglamaga aylanadi va bu to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligini bilamiz.

2-ta'rif. Dekart koordinatalari x va y ra nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama yordamida aniqlanadigan egri chiziqlar **ikkinchi tartibli egri chiziqlar** deb ataladi. (9.1) ikkinchi tartibli egri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarga **aylana, ellips, giperbola** va **parabolalar** kiradi.

Aylana va uning kanonik tenglamasi

3-ta'rif. Tekislikning berilgan nuqtasidan bir xil masofada joylashgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **aylana** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtasini aylananing **markazi**, undan aylanagacha masofani **aylananing radiusi** deb ataymiz.

Markazi $O_1(a;b)$ nuqtada bo'lib radiusi R ga teng aylananing tenglamasini tuzamiz (1^a-chizma). Aylananing ixtiyoriy nuqtasini $M(x;y)$ desak aylananing ta'rifiga binoan:

$$MC_1 = R.$$

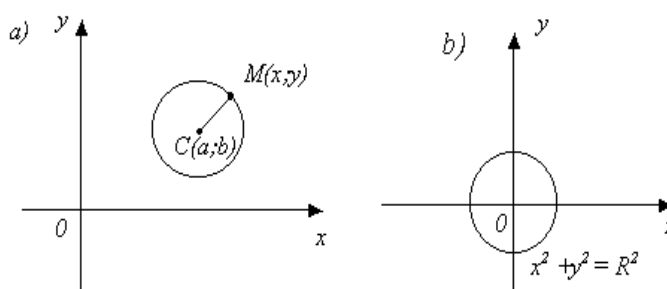
Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalansak

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

yoki bu tenglikni har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (2)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib aylananing istalgan $M(x;y)$ nuqtasining koordinatalari (2) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek ylanaga tegishli bo'lmagan hech bir qtnaning koordinatalari (2) tenglamani anoatlantirmaydi. Demak (2) aylana



1-rasm

tenglamasi.

U aylananing **kanonik** (eng sodda) tenglamasi deb ataladi.

Xususiyl holda aylananing markazi $C_1(a,b)$ koordinatalar boshida bo'lsa $a=b=0$ bo'lib uning tenglamasi

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3)$$

ko'rinishga ega bo'ladi (1^b-chizma).

Endi aylananing kanonik tenglamasini ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1) bilan taqqoslaymiz. (2) da qavslarni ochib ma'lum almashtirishlarni bajarsak u

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni (1) bilan taqqoslab unda x^2 bilan y^2 oldidagi koeffitsientlarni tengligini va koordinatalarni ko'paytmasi xy ni yo'qligini ko'ramiz, ya'ni $A=C$ va $B=0$.

(1) tenglamada $A=C$ va $B=0$ bo'lsa u aylanani tenglamasi bo'ladimi degan savolga javob izlaymiz.

Soddalik uchun $A=C=1$ deb olamiz. Aks holda tenglamani A ga bo'lib shuncha erishish mumkin.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (5)$$

tenglamaga ega bo'laylik. Bu tenglamani hadlarini o'zimizga qulay shaklda o'rinlarini almashtirib to'la kvadrat uchun zarur bo'lgan $\frac{D^2}{4}$ va $\frac{E^2}{4}$ ni ham qo'shamiz ham ayirimiz. U holda

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} + F = 0$$

yoki

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F \quad (6)$$

hosil bo'ladi. Mumkin bo'lgan uch holni qaraymiz:

1) $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0$ (yoki $D^2 + E^2 > 4F$). Bu holda (6) tenglamani (2) bilan taqqoslab u va unga teng kuchli (5) tenglama ham markazi $O_1\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ nuqtada, radiusi $R = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$ bo'lgan aylanani ifodalashiga ishonch hosil qilamiz.

2) $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F = 0$. Bu holda (6) tenglama

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamani yagona $O_1\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi xolos.

3) $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F < 0$. Bu holda (6) tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamaydi. Chunki tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni esa manfiy emas.

Xulosa. (1) tenglama $A=C, B=0, \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0$

bo'lgandagina aylanani tenglamasini ifodalar ekan.

1-misol. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ tenglama aylananing tenglamasi ekanligi ko'rsatilsin va aylananing markazi hamda radiusi topilsin.

Yechish. $A=C=1, B=0, \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F = 1^2 + 2^2 - (-4) = 9 > 0$,

demak berilgan tenglama aylanani umumiy tenglamasi ekan. Tenglamani

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 1 - 4 - 4 = 0$$

ko'rinishda yozib undan

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

aylananing kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib aylananing markazi $O_1(-1; 2)$ nuqta va radiusi $R=3$ ekan.

2-misol. $x^2 - 2x + y^2 + 2y + 4 = 0$ tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamasligi ko'rsatilsin.

Yechish. Tenglamani $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 1 + 4 = 0$

ko'rinishda yozsak undan $(x-1)^2 + (y+1)^2 = -2$

tenglikka ega bo'lamiz. Koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta mavjud emas. Demak berilgan tenglama hech qanday egri chiziqni tenglamasi emas.

Ellips va uning kanonik tenglamasi

4-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **ellips** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni ellipsning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va ellipsning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning yig'indisini $2a$ orqali belgilaymiz. Oxy dekart koordinatalar sistemasini Ox o'qini ellipsning fokuslari F_1 va F_2 orqali o'tkazib F_1 dan F_2 tomonga yo'naltiramiz, koordinatalar boshini esa F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz. U holda fokuslar $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ koordinatalarga ega bo'ladi (2-rasm).

Endi shu ellipsning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra M nuqtadan ellipsning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas son $2a$ ga teng, ya'ni

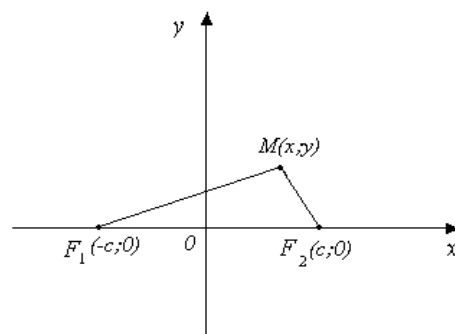
$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko'ra

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

bo'lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad \text{yoki} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$



2-rasm

kelib chiqadi. Oxirgi tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlaymiz:

$$\begin{aligned}(x+c)^2 + y^2 &= (2a)^2 - 2 \cdot 2a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2; \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2; \\ 4cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}; cx = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \\ a^2 - cx &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Buni yana ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

$$\begin{aligned}a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2[(x-c)^2 + y^2]; \quad a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]; \\ a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2; \quad a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2; \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \quad (7)\end{aligned}$$

hosil bo'ladi.

Uchburchak ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta ekanini nazarda tutsak ΔF_1MF_2 dan (2-rasm) $MF_1+MF_2 > F_1F_2$; $2a > 2c$; $a > c$; $a^2 - c^2 > 0$ ($a > 0$, $c > 0$) bo'ladi.

$a^2 - c^2 = b^2$ deb belgilab uni (7) ga qo'yamiz. U holda

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

yoki buni a^2b^2 ga bo'lsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (8) tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha ellipsga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtani koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (8) ellipsning tenglamasi. U ellipsning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. Koordinatalar boshi **ellipsning markazi** deyiladi. Koordinata o'qlari esa ellipsning **simmetriya o'qlari** bo'lib xizmat qiladi. Ellipsning fokuslari joylashgan o'q uning **fokal o'qi** deyiladi. Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishish nuqtalari uni **uchlari** deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B(0,b)$ nuqtalar ellipsning uchlari.

a va b sonlar mos ravishda ellipsning **katta** va **kichik yarim o'qlari** deyiladi. $\frac{c}{a}$ nisbat ellipsning **ekssentrisiteti** deyiladi va ε orqali belgilanadi. Ellips uchun $0 < \varepsilon < 1$ bo'ladi, chunki $c < a$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini izohlaydi.

Haqiqatan, $a^2 - c^2 = b^2$ tenglikni a^2 ga bo'lsak $1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2$ bo'ladi. Bundan eksentrisitet qanchalik kichik bo'lsa ellipsning kichik yarim o'qi uning katta yarim o'qidan shunchalik kam farq qilishini ko'ramiz.

$b=a$ bo'lganda ellips tenglamasi $x^2 + y^2 = a^2$ ko'rinishiga ega bo'lib ellips aylanaga aylanadi. Bu holda $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$, bo'lgani uchun $\varepsilon = \frac{0}{a} = 0$ bo'ladi.

Demak aylana eksentrisiteti nolga teng va fokuslari uning markaziga joylashgan ellips ekan.

Endi ellipsni shaklini aniqlaymiz. Uning shaklini avval I-chorakda aniqlaymiz. Ellipsning kanonik tenglamasi (8)ni y ga nisbatan yechsak

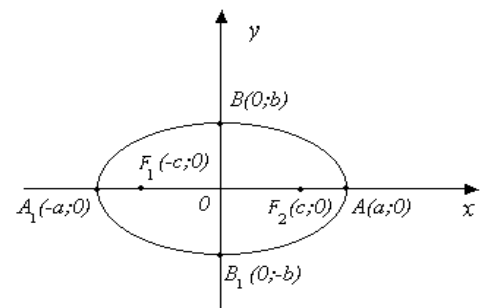
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}; \quad y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2); \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

bo'ladi, bunda $0 < x < a$, chunki $x > a$ bo'lganda ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lib u ma'noga ega bo'lmaydi. x 0 dan a gacha o'sganda y b dan 0 gacha kamayadi.

Ellipsning I-chorakdagi bo'lagi koordinatalar o'qlarida joylashgan $B(0,b)$ va $A(a;0)$ nuqtalar bilan chegaralangan yoydan iborat bo'ladi (3-rasm).

Ellipsning kanonik tenglamasida x ni $-x$ ga va y ni $-y$ ga o'zgartirilsa tenglama o'zgarmaydi.

Bu ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi. Ellipsning ana shu xususiyatiga asoslanib uning shakli 3-rasm ko'rsatilgandek ekanligiga iqrar bo'lamiz.



3-rasm

3-misol. Kichik yarim o'qi $b=4$ va eksentrisiteti $\varepsilon=0,6$ bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi yezilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,6$; $c = 0,6a$, $a^2 - c^2 = b^2$

tenglikka c va b ning qiymatlarini qo'yib a ni aniqlaymiz.

$$a^2 - (0,6a)^2 = 4^2; a^2(1 - 0,36) = 16; 0,64a^2 = 16; a^2 = \frac{16}{0,64} = 25.$$

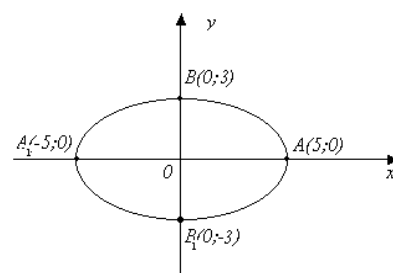
Shunday qilib ellipsning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ko'rinishda bo'lar ekan.

4-misol. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ tenglamaga ko'ra ikkinchi tartibli egri chiziqning turi aniqlansin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani $9x^2 + 25y^2 = 225$ ko'rinishda yozib buni 225 ga bo'lsak

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \text{ yoki } \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

kelib chiqadi. Demak berilgan tenglama yarim o'qlari $a=5$, $b=3$ bo'lgan ellipsni tenglamasi ekan (4-rasm)



4-rasm

5-misol. $4x^2 - 16x + 9y^2 - 54y + 61 = 0$ egri chiziq chizilsin.

Yechish. Tenglamani $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) + 61 = 0$;

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) - 16 - 81 + 61 = 0; 4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 36$$

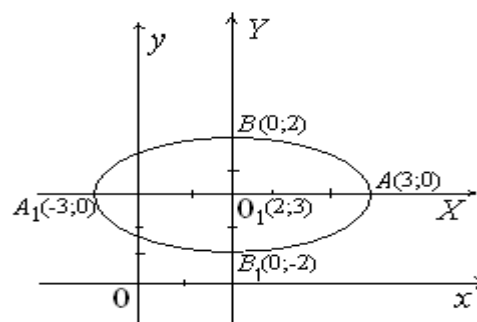
ko'rinishda yozib buni 36 ga bo'lsak $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ yoki

$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$ tenglama hosil bo'ladi. $x-2=X$; $y-3=Y$ almashtirish olsak

$$\frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1 \text{ kelib chiqadi.}$$

Bu ellipsning O_1XY sistemaga nisbatan kanonik tenglamasi.

Shunday qilib berilgan tenglama ellipsning umumiy tenglamasi ekan. Agar Oxy "eski" sistemani $O_1(2,3)$ nuqtaga parallel kuchirilsa ya'ni O_1XY sistemaga nisbatan ellipsning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'lar ekan (5-rasm)



5-rasm

Giperbola va uning kanonik tenglamasi

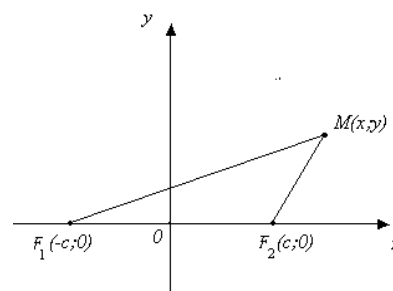
5-ta‘rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning ayirmasi o‘zgarmas bo‘lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga **giperbola** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni gepirbolaning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va giperbolaning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo‘lgan masofalarning ayirmasini $\pm 2a$ orqali belgilaymiz. Oxy dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellipsdagidek, ya‘ni Ox o‘qni F_1, F_2 fokuslaridan o‘tadigan qilib tanlaymiz va koordinatalar boshini F_1F_2 kesmaning o‘rtasiga joylashtiramiz.

U holda fokuslar $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo‘ladi (6-rasm).

Endi giperbolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin.

Ta‘rifga binoan giperbolaning M nuqtasidan uning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning ayirmasi o‘zgarmas son $\pm 2a$ ga teng, ya‘ni



6-rasm

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a .$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga binoan $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ va $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ bo‘lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (9)$$

kelib chiqadi.

Ellips tenglamasini chiqarishda bajarilgan amallarga o‘xshash amallarni bajarib

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (10)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Ma‘lumki uchburchakning ikki tomonini ayirmasi uchinchi tomonidan kichik. Shunga ko‘ra ΔF_1MF_2 dan

$F_1M - F_2M < F_1F_2$; $2a < 2c$; $a < c$; $a^2 - c^2 < 0$ ($a > 0, c > 0$) hosil bo‘ladi. Shuning uchun $a^2 - c^2 = -b^2$ yoki $c^2 - a^2 = b^2$ deb belgilab olamiz. U holda (10) formula

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \quad \text{yoki} \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Buni a^2b^2 ga bo‘lib

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib giperbolaning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (11) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek giperbolaga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak u giperbolaning tenglamasi.

(11) giperbolaning **kanonik** tenglamasi deb ataladi. Giperbolaning tenglamasida x va y juft darajalari bilan ishtirok etadi. Bu giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi.

Ya'ni qaralayotgan holda koordinata o'qlari giperbolaning simmetriya o'qlari ham bo'ladi.

Giperbolaning simmetriya o'qlarini kesishish nuqtasi **giperbolaning markazi** deb ataladi.

Giperbolaning fokuslari joylashgan simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Endi giperbolaning shaklini chizishga harakat qilamiz. Oldin uning shaklini I-chorakda chizamiz.

Giperbolaning kanonik tenglamasi (11) dan

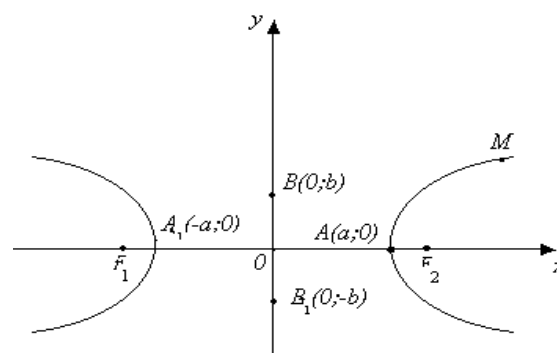
$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1; \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}; \quad y^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}; \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

kelib chiqadi, chunki I-chorakda $y \geq 0$. Bunda $x \geq a$, aks holda u ma'noga ega bo'lmaydi (ildiz ostida manfiy son bo'ladi). x a dan $+\infty$ gacha o'zgarganda y 0 dan $+\infty$ gacha o'zgaradi. Demak giperbolaning I-chorakdagi qismi 7-rasm tasvirlangan AM yoydan iborat bo'ladi.

Giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligini hisobga olsak uning shakli 7-rasmda tasvirlangan egri chiziqdan iborat bo'ladi.

Giperbolaning fokal o'q bilan kesishish nuqtalari uning **uchlari** deb ataladi. Giperbolaning tenglamasiga $y=0$ ni qo'ysak $x=\pm a$ kelib chiqadi. Demak $A_1(-a;0)$ va $A(a;0)$ nuqtalar giperbolaning uchlari bo'ladi.

Giperbolaning tenglamasi (11) ga $x=0$ ni qo'ysak $-\frac{y^2}{b^2}=1$; $y=\pm\sqrt{-b^2}$ bo'ladi.



7-rasm

Bu esa haqiqiy son emas (manfiy sondan kvadrat ildiz chiqmaydi). Demak giperbola Oy o'q bilan kesishmas ekan.

Shuning uchun giperbolaning fokal o'qi **haqiqiy o'qi** unga perpendikulyar o'qi **mavhum o'qi** deb ataladi.

a va b sonlar mos ravishda giperbolaning **haqiqiy** va **mavhum yarim o'qlari** deyiladi.

Giperbolaning M nuqtasi u bo'ylab cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan $y=-\frac{b}{a}x$ va $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlarning birortasigacha masofa nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Ya'ni giperbolaning koordinatalar boshidan yetarlicha katta masofada joylashgan nuqtalari $y=-\frac{b}{a}x$ va $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlardan biriga yetarlicha yaqin joylashadi. Koordinatalar boshidan o'tuvchi bu to'g'ri chiziqlar **giperbolaning asimptotalari** deb ataladi.

Giperbolani chizishdan oldin uning asimptotalarini chizish tavsiya etiladi.

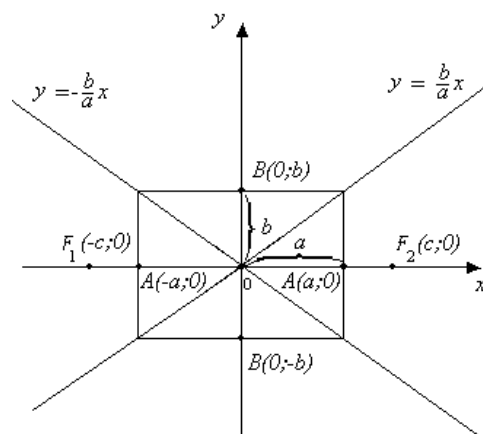
Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari Ox va Oy o'qlarga parallel va mos ravishda $2a$ va $2b$ ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli to'rtburchak yasaymiz. Bu to'rtburchakni giperbolaning **asosiy to'rtburchagi** deb ataymiz.

To'rtburchakni diagonallarini har tarafga cheksiz davom ettirsak giperbolaning asimptotalari hosil bo'ladi(8-rasm).

$\frac{c}{a}$ nisbat giperbolaning **ekssentrisiteti** deb ataladi va ε orqali belgilanadi. Giperbola uchun $c>a$ bo'lganligi sababli $\varepsilon>1$ bo'ladi.

Ekssentrisitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatdan, $c^2 - a^2 = b^2$ tenglamani har ikkala tomonini a^2 ga bo'lsak $\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki $\varepsilon^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ kelib chiqadi. ε kichrayganda $\frac{b}{a}$ nisbat ham kichrayadi. Ammo $\frac{b}{a}$

nisbat giperbolaning asosiy to'rtburchagini shaklini belgilaganligi uchun u giperbolaning ham shaklini belgilaydi. ε qanchalik kichik bo'lsa $\frac{b}{a}$ nisbat ham ya'ni giperbolaning asimptotalarini burchak koeffitsientlari ham shunchali kichik bo'ladi va giperbola Ox o'qqa yaqinroq joylashadi.



8-rasm

Bu holda giperbolani asosiy to'rtburchagi Ox o'q bo'ylab cho'zilgan bo'ladi.

Haqiqiy va mavhum yarim o'qlari teng giperbola **teng tomonli** yoki **teng yonli** deb ataladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad x^2 - y^2 = a^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$y=x$ va $y=-x$ to'g'ri chiziqlar teng tomonli giperbolaning asimptotalari bo'lib uning ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}$ bo'ladi.

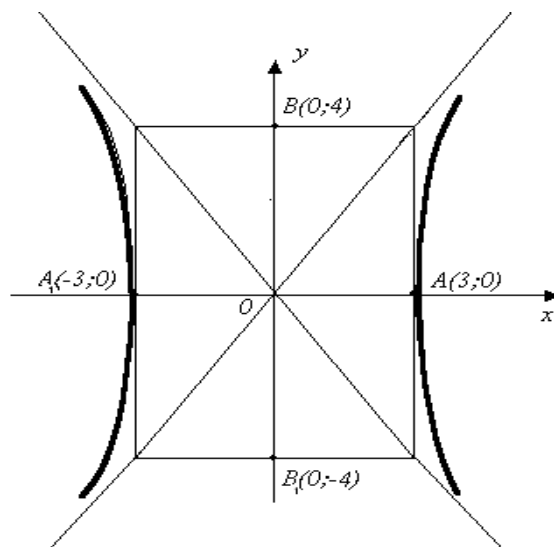
6-misol. $16x^2 - 9y^2 = 144$ egri chiziq chizilsin.

Yechish. Uni har ikkala tomonini 144 ga bo'lsak

$$\frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1; \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

kelib chiqadi. Demak qaralayotgan egri chiziq yarim o'qlari $a=3$ va $b=4$ bo'lgan giperbola ekan. Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari koordinata o'qlariga parallel hamda asosi 6 balandligi 8 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasaymiz.

Uning diagonallarini cheksiz davom ettirib giperbolaning asimptotalarini hosil qilamiz. Giperbolaning uchlari $A_1(-3;0)$ va $A(3;0)$ nuqtalar orqali asimptotalarga nihoyatda yaqinlashib boruvchi silliq chiziqni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan egri chiziq giperbolaning grafigi bo'ladi (9-rasm).



9-rasm

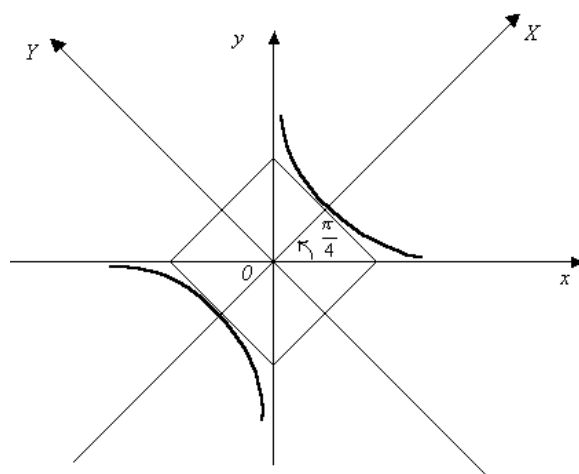
7-misol. $y = \frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi giperbola ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. Koordinata o'qlarini $\alpha = \frac{\pi}{4}$ burchakka burib "yangi" OXY sistemani hosil qilamiz. Bu holda «yangi» koordinatalardan «eski» koordinatalarga o'tish formulasi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$ ko'rinishda bo'ladi. x va y ning ushbu qiymatlarini $y = \frac{k}{x}$ tenglamaga qo'ysak $\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{k}{\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)}$;

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)(X - Y) = k$ yoki $X^2 - Y^2 = 2k$ hosil bo'ladi. Bu tenglama tengtomonli giperbolaning tenglamasi. $k > 0$ bo'lganda giperbolaning haqiqiy o'qi OX bilan, $k < 0$ bo'lganda OY o'q bilan ustma-ust tushadi.

$k > 0$ bo'lgan hol uchun giperbola 10-rasm tasvirlangan.

Ox , Oy “eski” o’qlar OXY “yangi” sistemani koordinata burchaklarini bissektoralari bo’lgani uchun ular teng tomonli giperbolani asimptotalari bo’ladi. Shunday qilib $y = \frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi asimptotalari Ox va Oy o’qlardan iborat tengtomonli giperbola bo’lar ekan.



10-rasm

Shuningdek $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ kasr-chiziqli funksiyaning grafigi ham asimptotalari koordinata o’qlariga parallel tengtomonli giperbola ekanligini ko’rsatish mumkin.

Parabola va uning kanonik tenglamasi

6-ta’rif. Berilgan nuqtadan hamda berilgan to’g’ri chiziqdan teng uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o’rniga **parabola** deb ataladi.

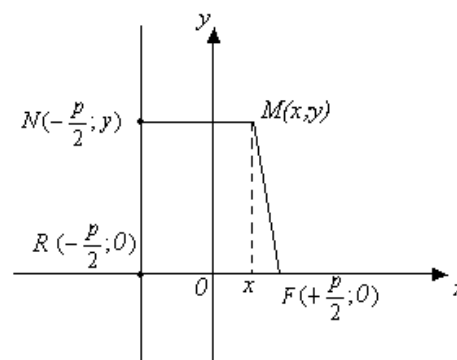
Berilgan nuqtani F orqali belgilab uni parabolaning **fokusi** deb ataymiz. Berilgan to’g’ri chiziqni parabolaning **direktrisasi** deb ataladi. (Fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi).

Fokusdan direktrisagacha masofani p orqali belgilaymiz va uni parabolaning **parametri** deb ataymiz.

Endi parabolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Absissalar o’qini fokusdan direktrisaga perpendikulyar qilib o’tkazib yo’nalishini direktrisadan fokusga tomon yo’naltiramiz.

Koordinatalar boshini fokusdan direktrisagacha masofa FR ning qoq o'rtasiga joylashtiramiz (11-rasm).

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan fokus $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ koordinatalarga, direktrisa $x = -\frac{p}{2}$ tenglamaga ega bo'ladi.



11-rasm

Faraz qilaylik $M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Parabolaning ta'rifiga binoan

M nuqtadan direktrisagacha MN masofa undan fokusgacha MF masofaga teng: $MN=MF$.

$$11\text{-rasmdan } MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{p}{2} \text{ va } MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2}$$

ekani ravshan.

$$\text{Demak, } x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \text{ yoki } y^2 = 2px \quad (12)$$

hosil bo'ladi.

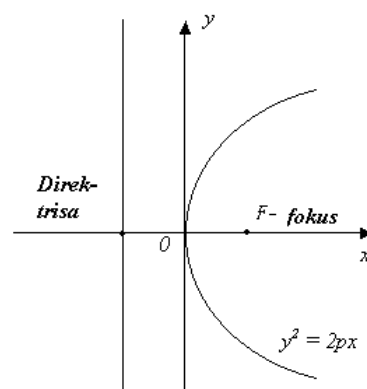
Shunday qilib parabolaning istalgan $M(x,y)$ nuqtasining koordinatalari (12) tenglamani qanoatlantiradi. Parabola yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak (12) parabolaning tenglamasi ekan. U parabolaning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. p parabolaning parametri deb yuritiladi.

Endi kanonik tenglamasiga ko'ra parabolani shaklini chizamiz (12) tenglamada y ni $-y$ ga almashtirilsa tenglama o'zgarmaydi. Bu absissalar o'qi parabolaning simmetriya o'qidan iborat ekanligini bildiradi. (12) tenglamaning chap tomoni manfiy bo'lmaganligi uchun uning o'ng tomoni ya'ni x ning ham manfiy bo'lmasligi kelib chiqadi. Demak parabola Oy o'qning o'ng tomonida joylashadi. $x=0$ da $y=0$. Demak parabola koordinatalar boshidan o'tadi.

x cheksiz o'sganda y ning absalyut qiymati ham cheksiz o'sadi. (12) tenglama yordamida aniqlanadigan parabola 12-rasmda tasvirlangan.

Parabolaning simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning **uchi** deyiladi. Qaralayotgan hol uchun koordinatalar boshi parabolaning uchi bo'ladi.



12-rasm

8-misol. $y^2=8x$ parabola berilgan. Uning direktrisasining tenglamasi yozilsin va fokusi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (12) bilan taqqoslab $2p=8$, $p=4$ ekanini ko'ramiz. Direktrisa $x=-\frac{p}{2}$ tenglamaga, fokus $(-\frac{p}{2}, 0)$ koordinatalarga ega bo'lishini hisobga olsak direktrisaning tenglamasi $x=-2$ va fokus $F(2;0)$ bo'ladi.

Izoh. Fokal o'qi Oy o'qdan iborat parabolaning tenglamasi

$$x^2=2py \quad (13)$$

ko'rinishga ega bo'ladi

9-misol. $y=3x^2-12x+16$ parabolaning tenglamasi kanonik holga keltirilsin va uning uchi topilsin.

Yechish. Tenglamani

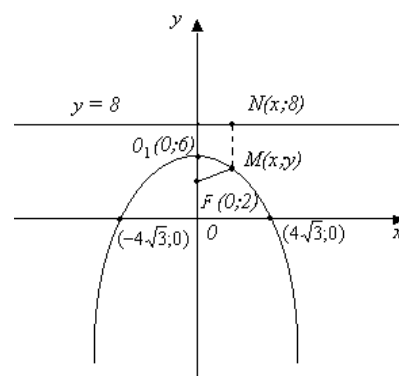
$$y=3(x^2-4x)+16, y=3(x^2-4x+4-4)+16; y=3(x-2)^2+4; y-4=3(x-2)^2$$

ko'rinishga keltirib $x-2=X$, $y-4=Y$ deb belgilasak parabolaning tenglamasi

$$Y=3X^2$$

kanonik ko'rinishga keladi. $x-2=X$, $y-4=Y$ almashtirish bilan “eski” Oxy sistemani $O_1(2;4)$ nuqtaga parallel ko'chirdik. “Yangi” O_1XY sistemaga nisbatan parabolaning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'ladi. “Yangi” sistemani koordinatalar boshini koordinatalari parabola uchining koordinatalari bo'ladi, ya'ni $x_0=2$, $y_0=4$.

10-misol. $F(0,4)$ nuqtadan hamda $y=8$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rni, egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin va egri chiziq chizilsin.



13-rasm

Yechish. $M(x,y)$ egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Shartga binoan undan $y=8$ to'g'ri chiziqqacha $MN = \sqrt{(x-x)^2 + (8-y)^2}$ masofa va undan $F(0,2)$ nuqttagacha $MF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$

masofa o'zaro teng ya'ni,

$$\sqrt{(x-x)^2 + (8-y)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} \quad (13\text{-rasm}).$$

Bu tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak $(8-y)^2 = x^2 + (y-4)^2$ yoki qavslarni ochsak.

$$64 - 16y + y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16 \text{ yoki } 64 - 16y = x^2 - 8y + 16$$

hosil bo'ladi. Tenglamani soddalashtisak

$$-16y + 8y = x^2 + 16 - 64, \quad -8y = x^2 - 48$$

yoki -8 ga bo'lsak

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + 6$$

tenglamaga ega bo'lamiz. U Oy o'qqa simmetrik parabolaning tenglamasi.

Endi parabolaning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Parabola tenglamasiga $x=0$ qiymatni qo'ysak $y=6$ kelib chiqadi. Demak parabola Oy o'q bilan $O_1(0,6)$ nuqtada kesishar ekan. Shuningdek parabolra tenglamasiga $y=0$ qiymatini qo'ysak $-\frac{1}{8}x^2 + 6 = 0; -x^2 + 48 = 0; x^2 = 48; x = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$

hosil bo'ladi. Demak parabola Ox o'q bilan $(-4\sqrt{3}, 0)$ va $(4\sqrt{3}, 0)$ nuqtalarda kesishar ekan.

Agar parabola tenglamasini $y - 6 = -\frac{1}{8}x^2$ yoki $x^2 = -8(y-6)$ ko'rinishda yozib $x=X, y-6=Y$ almashtirish olsak uning tenglamasi $X^2 = -8Y$ kanonik shaklni oladi.

Izoh. Aylana, ellips, giperbola va parabola umumiy tenglamalari yordamida berilganda koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish yoki koordinata o'qlarini burish yordamida umumiy tenglamani "yangi" sistemaga nisbatan kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

7 – Mavzu: Fazoda analitik geometriya. Sirt tenglamasi. Tekislikning normal vektori. Berikgan no'qtadan o'tuvchi, berilgan vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi. Tekislikning umumiy tenglamasi.

Sirt tenglamasi

$F(x;y;z)=0$ (1) tenglama ham $Oxyz$ fazodagi koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiruvchi sirtni aniqlaydi. (1) tenglama ana shu sirtning tenglamasi deb aytiladi, x,y,z esa dekart koordinatalari deyiladi.

Istalgan $F(x;y)=0$ tenglama har doim egri chiziqni va $F(x;y;z)=0$ tenglama har doim sirtni aniqlaydi deb o'ylash noto'g'ri. Eng oddiy sirt bu fazoda tekislikdir.

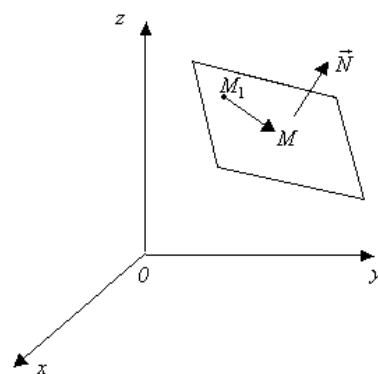
Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$Oxyz$ fazoni hamda unda berilgan T tekislikni qaraymiz.

1-ta'rif. Tekislikka perpendikulyar vektor tekislikning **normal** vektori deb ataladi.

Tekislikning bitta $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtasi hamda normal vektori $\vec{N} = \{A; B; C\}$ berilganda uning tenglamasini keltirib chiqaramiz (1-rasm). Faraz qilaylik

$M(x;y;z)$ Q tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $\vec{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$ vektorni qaraymiz. Bu vektor T tekislikda yotadi. $\vec{N}$ vektor T tekislikka perpendikulyar bo'lganligi uchun u shu tekislikda yotgan $\vec{M_1M}$ vektorga ham perpendikulyar bo'ladi. Ikki vektorning perpendikulyar bo'lishi uchun ularni skalyar ko'paytmasi $\vec{M_1M} \cdot \vec{N} = 0$ bo'lishi muqarrar edi. Koordinatalari



1-rasm.

yordamida berilgan ikki vektorni skalyar ko'paytmasini topish formulasi ga ko'ra

$$\vec{M_1M} \cdot \vec{N} = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$\text{yoki } A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (2)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shunday qilib T tekislikning ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtasining koordinatali (2) tenglamani qanoatlantirar ekan. T tekislikda yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki bu holda $\vec{M_1M}$

va $\vec{N}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lmaganligi uchun ularning skalyar ko'paytmasi noldan farqli, ya'ni $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{N} \neq 0$ bo'ladi.

Demak (2) tenglama Q tekislikning tenglamasi (2) tenglama berilgan nuqtadan o'tuvchi **tekislik tenglamasi** deb ataladi.

Shunday qilib, har qanday tekislikka dekart koordinatalari x, y, z larga nisbatan birinchi darajali tenglama mos kelishini ko'rsatdik.

2-ta'rif. Fazoning M nuqtasidan o'tuvchi tekisliklar to'plami **tekisliklar bog'lami** deb ataladi. M nuqta **bog'lamning markazi** deyiladi.

A, B, C koeffitsientlar har xil qiymatlarni qabul qilganda (2) tenglama markazi $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtada bo'lgan tekisliklar bog'laminin tenglamasini ifodalaydi.

1-misol. $M_1(3; -2; 1)$ nuqtadan $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ vektorga perpendikulyar o'tkazilgan tekislik tenglamasi yozilsin.

Yechish. Bu yerda $A=1, B=1, C=-2; x_1=3, y_1=-2, z_1=1$. (2) formulaga binoan $1 \cdot (x-3) + 1 \cdot (y+2) + (-2) \cdot (z-1) = 0$ yoki $x + y - 2z + 1 = 0$ tekislik tenglamasiga ega bo'lamiz.

Tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi

Biz yuqorida tekislik tenglamasi dekart koordinatalari x, y va z ga nisbatan birinchi darajali (chiziqli) tenglama ekanini ko'rdik. Endi aksini ya'ni x, y va z ga nisbatan birinchi darajali har qanday tenglama tekislik tenglamasi ekanini ko'rsatamiz.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

tenglamaga ega bo'laylik. Bu yerdagi A, B, C, D ma'lum sonlar bo'lib ulardan A, B, C koeffitsientlar bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda biz tenglama emas balki $D=0$ ayniyatga ega bo'lamiz.

$C \neq 0$ deb faraz qilib (7.3) tenglamani

$$A(x-0) + B(y-0) + C(z + \frac{D}{C}) = 0 \quad (4)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamani (2) tenglama bilan taqqoslab u $M_1\left(0;0;-\frac{D}{C}\right)$ nuqtadan o'tib $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normal vektorga ega tekislik tenglamasi ekanini ko'ramiz.

(3) tenglama **tekislikning umumiy tenglamasi** deb ataladi.

Endi tekislikning umumiy tenglamasining xususiy hollari bilan tanishib chiqamiz.

1. Ozod had $D=0$ bo'lsin. Bu holda tekislik tenglamasi $Ax+By+Cz=0$ ko'rinishga ega bo'ladi. $x=0, y=0, z=0$ bu tenglamani qanoatlantirgani uchun tekislik koordinatalar boshi $0(0;0;0)$ nuqtadan o'tadi. Demak tekislik tenglamasining ozod hadi nolga teng bo'lganda tekislik koordinatalar boshidan o'tar ekan.

2. Tenglamada dekart koordinatalari oldidagi koeffitsientlardan biri, masalan $C=0$ bo'lsin. Bu holda tenglama $Ax+By+D=0$ ko'rinishga ega bo'ladi. $C = pr_{oz}\vec{N} = 0$ dan $\vec{N}$ normal vektorning Oz o'qqa perpendikulyarligi va tekislikning Oz o'qqa parallelligi kelib chiqadi. Agar $Ax+By+D=0$ tenglamani Oxy tekislikda qarasak u to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini ifoda etadi. Biz qaraydigan holda Oz o'qqa parallel tekislik Oxy tekislikni ana shu to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi.

Shunga o'xshash $Ax+Cz+D=0$ tekislik Oy o'qqa parallel, $By+Cz+D=0$ tekislik esa Ox o'qqa parallel ekanligini ko'rsatish mumkin: agar tekislik tenglamasida dekart koordinatalari x,y,z lardan qaysi biri qatnashmasa tekislik o'sha koordinataga mos o'qqa parallel bo'ladi.

3. Tenglamada dekart koordinatalari oldidagi koeffitsientlardan biri va ozod had nolga teng, masalan $C=D=0$ bo'lsin. Bu holda $Ax+By=0$ tenglama 1-bandga asosan koordinatalar boshidan o'tadi va 2-bandga ko'ra u Oz o'qqa parallel bo'lishi lozim. Demak $Ax+By=0$ tekislik Oz o'q orqali o'tadi.

Shuningdek $By+Cz=0$ va $Ax+Cz=0$ tenglamalarga Ox va Oy o'qlar orqali o'tuvchi tekisliklar mos keladi.

4. Tenglamada dekart koordinatalari koeffitsientlaridan ikkitasi nolga teng bo'lsin. Masalan, $A=B=0$. Bu holda $Cz+D=0$ tekislik 3-banddagi mulohazaga ko'ra ham Ox o'qqa, ham Oy o'qqa parallel bo'ladi. Demak u Oxy tekislikka parallel bo'ladi. Shuningdek $Ax+D=0$ va $By+D=0$ tekisliklar Oyz va Oxz koordinata tekisliklariga parallel tekisliklarning tenglamalaridir.

5. Tenglamada ikkita dekart koordinatalarining koeffitsientlari hamda ozod had nolga teng bo'lsin. Masalan, $A=B=D=0$. U holda tenglama $Cz=0$ yoki

$z=0$ ko'rinishga ega bo'ladi. 4-banddagi mulohazalarga ko'ra u Oxy tekislikka parallel. 1-bandga asosan u koordinatalar boshidan o'tadi. Demak $z=0-0xy$ tekislikning tenglamasi. Shuningdek $y=0-0xz$ tekislikning tenglamasi, $x=0-0yz$ tekislikning tenglamasidir.

Tekislikni uning tenglamasiga ko'ra yasash

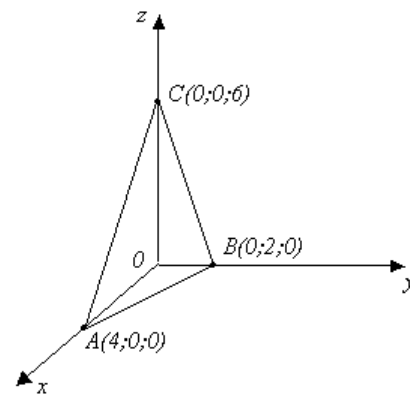
Tekislikning ma'lum tenglamasiga ko'ra uni yasash qiyin emas. Buning uchun tekislikning bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta ixtiyoriy nuqtasini bilish kifoya. Tekislikning nuqtasini uning $Ax+By+Cz+D=0$ tenglamasidagi koordinatalardan ixtiyoriy ikkitasiga ma'lum qiymatlar tayinlab uchinchi koordinatani shu tenglamadan aniqlash orqali topiladi.

Agar tekislik koordinata o'qlariga parallel bo'lmasa tekislikni koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topgan ma'qul.

2-misol. $3x+6y+2z-12=0$ tekislik yasalsin.

Yechish. Tekislikni koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz. Ox o'qning nuqtalari uchun $y=0, z=0$ bo'ladi. Bularni berilgan tenglamaga qo'ysak $3x-12=0, x=4$ bo'ladi. Demak tekislik Ox o'q bilan $A(4;0;0)$ nuqtasida kesishar ekan (58 – chizma).

Tenglamaga $x=0, y=0$ qiymatlarni qo'ysak $2z-12=0, z=6$ kelib chiqadi. Demak tekislik Oz o'q bilan $C(0;0;6)$ nuqtada kesishar ekan. Agar tenglamaga $x=0, z=0$ qiymatlarni qo'ysak $6y-12=0, y=2$ kelib chiqadi. Demak tekislik Oy o'q bilan $B(0;2;0)$ nuqtada kesishar ekan. Shunday qilib berilgan tekislik $A(4;0;0), B(0;2;0)$ va $C(0;0;6)$ nuqtalardan o'tar ekan (2-ras).



2-rasm

3–misol. Oz o'qqa parallel hamda $A_1(2;3;-1)$ va $B_1(-1;2;4)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

Yechish. Oz o'qqa parallel tekislik tenglamasi

$$Ax + By + D = 0 \quad (*)$$

ko'rinishga ega ekanligini ko'rdik (Oz o'qqa parallel tekislik tenglamasida z koordinata ishtirok etmaydi).

Agar tekislik biror nuqtadan o'tsa bu nuqtaning koordinatalari o'sha tekislik tenglamasini qanoatlantiradi. Tekislik tenglamasi (*) ga A_1 va B_1 nuqtalarning koordinatalarini qo'yib

$$\begin{cases} 2A + 3B + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0 \end{cases}$$

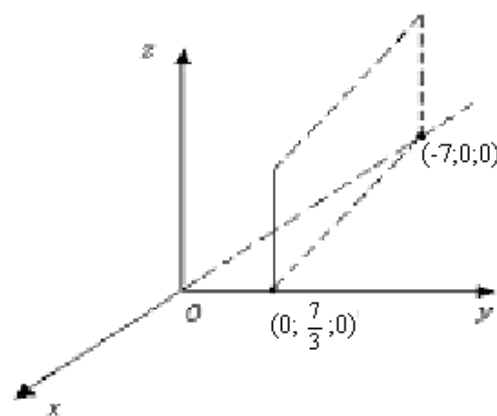
sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemani uch noma'lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasini yechimini topish formulasidan foydalanib yechamiz.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot k; \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot k; \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot k; \quad A = k; \quad B = -3k, \quad D = 7k.$$

A, B va C ning topilgan qiymatlarini (*) ga qo'ysak $kx - 3ky + 7k = 0$ yoki k

ga qisqartirilsa $x - 3y + 7 = 0$ tekislik tenglamasi kelib chiqadi. Tekislik Oxy tekislikni $x - 3y + 7 = 0$ to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi (3-rasm). Shuning uchun tekislikni chizishdan oldin to'g'ri chiziqni chizamiz. Tenglamaga $x = 0$ qiymatni qo'ysak $-3y + 7 = 0$, $y = \frac{7}{3}$ va $y = 0$ qiymatni

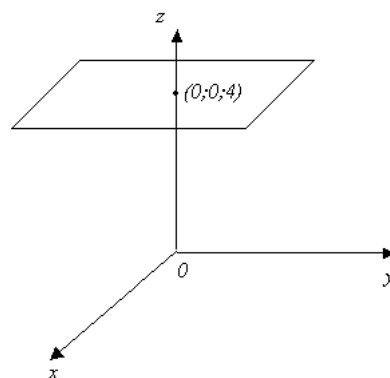
qo'ysak $x = -7$ kelib chiqadi. Demak to'g'ri chiziq Oxy tekislikning $\left(0; \frac{7}{3}\right)$ va $(-7; 0)$ nuqtalaridan o'tar ekan.



3-rasm

4–misol. $A(1;2;4)$ nuqtadan o'tib Oxy tekislikka parallel tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

Yechish. $0xy$ ga parallel tekislik tenglamasi $Cz+D=0$ ko'rinishiga ega ekanligini bilamiz. Bunga A nuqtaning koordinatalarini qo'yib $4C+D=0$, $D=-4C$ ga ega bo'lamiz. D ning ushbu qiymatini tekislik tenglamasiga qo'ysak $Cz-4C=0$ yoki C ga qisqartirsak $Z-4=0$; $Z=4$ hosil bo'ladi(4-rasm).



4-rasm

Bu tenglama $A(1;2;4)$ nuqtadan o'tib $0xy$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi.

Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi

Tekislik tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ da A,B,C,D koeffitsientlaridan hech biri nolga teng bo'lmasin.

Ozod had D ni tenglamaning o'ng tomoniga o'tkazsak

$$Ax+By+Cz=-D$$

bo'ladi. Bu tenglamani har ikkala tomonini $-D$ ga bo'lsak

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

hosil bo'ladi.

$$-\frac{D}{A} = a, \quad -\frac{D}{B} = b, \quad -\frac{D}{C} = c$$

belgilashni kiritsak tekislik tenglamasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (5)$$

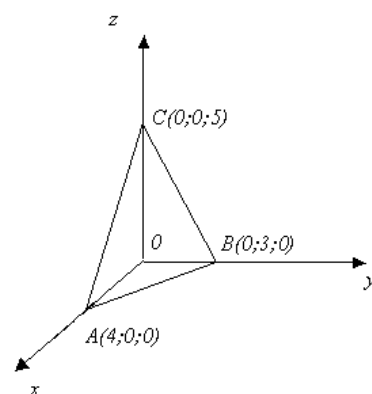
ko'rinishiga ega bo'ladi. Bu tenglama **tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi** deb ataladi. Bu yerdagi a,b,c lar tekislikning $0x,0y,0z$ o'qlardan ajratgan kesmalari.

5–misol. $15x+20y+12z-60=0$ tekislik yasalsin(5-rasm).

Yechish. Tekislik tenglamasini kesmalarga nisbatan yozamiz: $15x+20y+12z=60$;

$$\frac{15x}{60} + \frac{20y}{60} + \frac{12z}{60} = 1;$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1; \quad a = 4, \quad b = 3, \quad c = 5.$$



5-rasm

Demak tekislik $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$ va $C(0;0;5)$ nuqtalardan o'tar ekan.

Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

Bir to'g'ri chiziqda yotmagan $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lib ular orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini topish talab etilsin. $M(x, y, z)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \text{ va}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k}$$

vektorlar shu tekislikda yotadi, ya'ni ular komplanar bo'ladi. Uch vektorning komplanarlik sharti $(\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$ ga binoan

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama **uch nuqtadan o'tuvchi** tekislik tenglamasi.

6–misol. $M_1(1;2;-1)$; $M_2(-1;0;4)$; $M_3(-2;-1;1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi topilsin.

Yechish. (6) formulaga binoan izlanaetgan tekislik tenglamasini

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ko'rinishda yozamiz. Determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoysak:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} (x-1) - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} (y-2) + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} (z+1) = 0$$

yoki ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblasak $11(x-1)-11(y-2)+0 \cdot (z+1)=0$
va tenglikni 11 ga qisqartirib ixchamlasak $x-1-y+2=0$; $x-y+1=0$
kelib chiqadi. Bu tenglama 0z o'qqa parallel tekislikni aniqlaydi.

Tekislikning normal tenglamasi

Oxyz fazoda koordinatalar boshidan o'tmovchi T tekislik berilgan bo'lsin. Koordinatalar boshidan tekislikka OP perpendikulyar o'tkazib uning uzunligini p orqali va perpendikulyarning Ox, Oy, Oz o'qlar bilan tashkil etgan burchaklarini mos ravishda α, β, γ lar orqali belgilaymiz. U holda tekislik tenglamasini

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (7)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'ladi. (7) tekislikni **normal** tenglamasi deb ataladi. Bu tenglamaning o'ziga xos xususiyatlaridan biri $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ va $p > 0$.

Agar tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

umumiy ko'rinishdagi tenglamasi yordamida berilsa bu tenglikni normallovchi ko'paytuvchi deb ataluvchi

$$N = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ga ko'paytirish natijasida tekislikning normal tenglamasiga keltiriladi. Normallovchi ko'paytuvchining ishorasi ozod hadning ishorasiga qarama – qarshisi olinadi.

Demak:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} z - \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

tekislikning normal tenglasini va

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (7.8)$$

koordinatalar boshidan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikgacha masofani ifodalaydi.

7–misol. $5x+7y-34z+5=0$ tekislik tenglamasi normal ko'rinishga keltirilsin.

Yechish. Ozod had $5>0$ bo'lgani uchun normallovchi ko'paytuvchi N oldida minus ishora olinadi. Misolda $A=5$, $B=7$, $C=-34$ bo'lgani sababli

$$N = -\frac{1}{\sqrt{5^2 + 7^2 + (-34)^2}}; \quad N = -\frac{1}{\sqrt{1230}}.$$

$$-\frac{5}{\sqrt{1230}}x - \frac{7}{\sqrt{1230}}y + \frac{34}{\sqrt{1230}}z - \frac{5}{\sqrt{1230}} = 0$$

tekislikning normal tenglamasi kelib chiqadi.

8–misol. Koordinatalar boshidan $10x+15y-6z-380=0$ tekislikkacha masofa topilsin va shu perpendikulyarning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarning kosinuslari topilsin.

Yechish. Ozod son $-380<0$ bo'lganligi uchun normallovchi ko'paytuvchi oldida plus ishora olinadi: $N = \frac{1}{\sqrt{10^2 + 15^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{\sqrt{361}} = \frac{1}{19}.$

(7.8) formulaga binoan koordinatalar boshidan tekislikgacha masofa

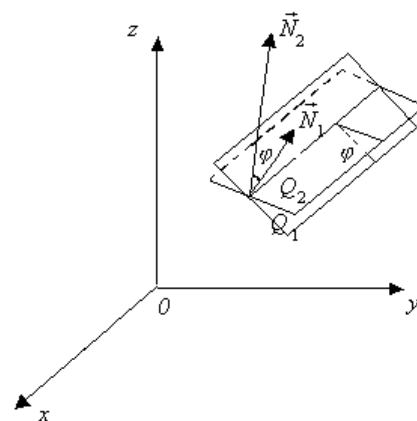
$$P = \frac{|-380|}{19} = \frac{380}{19} = 20 \text{ bo'ladi. Endi burchak kosinuslarini topamiz:}$$

$$\cos \alpha = \frac{A}{N} = \frac{10}{19}, \quad \cos \beta = \frac{B}{N} = \frac{15}{19}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{N} = -\frac{6}{19}.$$

Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

Kesishuvchi Q_1 va Q_2 tekisliklar mos ravishda $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

(Q_1 tekislik) va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
 (Q_2 tekislik) tenglamalari yordamida
 berilgan bo'lsin. Ikki tekislik orasidagi
 burchak deganda tekisliklar tashkil
 etgan ikki yoqli burchaklardan biri
 tushuniladi. Q_1 va Q_2 tekisliklarning
 normal vektorlari $\vec{N}_1$ va $\vec{N}_2$ orasidagi
 burchak ana shu burchaklardan birini
 ifodalaganligi uchun tekisliklar
 orasidagi burchakni topish ularning
 normal vektorlari orasidagi burchakni
 topishga keladi (6-rasm).



6-rasm

$$\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k} \text{ va } \vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$$

vektorlar orasidagi burchak

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (9)$$

formula yordamida topilishini bilamiz. Ana sha formula Q_1 va Q_2 tekisliklar orasidagi burchakni topish formulasi bo'lib xizmat qiladi.

9–misol. $5x-3y+4z-4=0$ va $3x-4y-2z+5=0$ tekisliklar orasidagi o'tkir burchak topilsin.

Yechish. Bu yerda $A_1=5, B_1=-3; C_1=4; A_2=3, B_2=-4, C_2=-2$ bo'lgani uchun (7.9) formulaga binoan:

$$\cos \varphi = \left| \frac{5 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) + 4 \cdot (-2)}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{15 + 12 - 8}{\sqrt{50} \sqrt{29}} \right|;$$

$$\cos \varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}}; \cos \varphi = 0,4990; \varphi = 60^{\circ}04'.$$

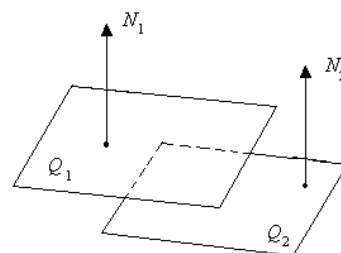
Tekisliklar orasidagi o'tkir burchakni topish talab etilganligi sababli (9) formulaning o'ng tomonidagi ifodani absolyut qiymatini oldik.

1. Tekisliklarning parallellik sharti. Q_1 va Q_2 tekisliklar faqatgina ularning normal vektorlari $\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ va $\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$ parallel (kollinear) bo'lganligida parallel bo'ladi (63-chizma).

Shuning uchun ikki vektorning parallellik shartidan

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (10)$$

ga ega bo'lamiz. Bu tekisliklarning ham parallellik shartidir. Demak ikki tekisliklarning mavjud koordinatalari oldidagi koeffitsientlari proporsional bo'lganda va faqat shu holdagina ular **parallel** bo'lar ekan.



7-rasm

Endi berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan

$$A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \quad (**)$$

tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasini topamiz. Buning uchun $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozamiz. Uning

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (***)$$

ko'rinishga ega ekanligi ma'lum. Bu tekislik berilgan (**) tekislikka parallel bo'lishi uchun

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$

shart bajarilishi kerak. Demak

$$A = A_1, B = B_1, C = C_1$$

deb olishimiz mumkin. Ushbu qiymatlarni tekislik tenglamasi (***)ga qo'yib $A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0$ (11) tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama berilgan **tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasi**.

10-misol. Koordinatalar boshidan $x + y + z = 1$ tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Bu yerda $x_1=y_1=z_1=0$ va $A_1=B_1=C_1=1$ bo'lgani uchun (11) ga binoan $x+y+z=0$ tenglamaga ega bo'lamiz.

2. Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti. Ikki tekislik ularning normal vektorlari $\vec{N}_1$ va $\vec{N}_2$ o'zaro perpendikulyar bo'lgandagina perpendikulyar bo'ladi (8-rasm).

Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \quad (12)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu ikki tekislikning perpendikulyarlik shartidir.

Endi berilgan ikkita $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar orqali o'tuvchi va $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tengmasini topamiz.

$M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o'tuvchi istalgan tekislik tenglamasini yozamiz.

U

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \quad (13)$$

ko'rinishiga ega bo'ladi. Shartga binoan $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqta ham shu tekislikda yotganligi uchun uning koordinatalari tekislik tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0. \quad (14)$$

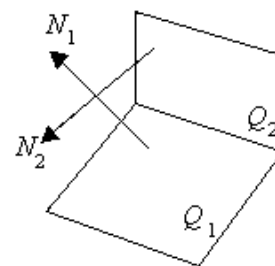
Ikkinchi tomondan (13) tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lganligi uchun

$$AA_1+BB_1+CC_1=0 \quad (15)$$

perpendikulyarlik sharti bajariladi. (7.14) va (7.15) ni birlashtirib

$$\begin{cases} A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0, \\ AA_1+BB_1+CC_1=0 \end{cases} \quad (16)$$

sistemaga ega bo'lamiz. (16) dan A, B va C koeffitsientlardan istalgan ikkitasini uchinchi orqali ifodalab ularni topilgan qiymatlarini (13)



8-rasm

tenglamaga qo'yib tenglamani uchinchi koeffitsientga qisqartirilsa izlanayotgan tenglama kelib chiqadi.

11–misol. $M_1(1; 1; 1)$ va $M_2(0; 1; -1)$ nuqtalar orqali o'tuvchi va $x+y+z=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi topilsin.

Yechish. $M_1(1; 1; 1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0 \text{ (****)}$$

bo'ladi. Tekislik $M_2(0;1;-1)$ nuqtadan o'tishi va berilgan $x+y+z=0$ tekislikka perpendikulyarlik sharti (16) ga binoan

$$\begin{cases} A(0-1) + B(1-1) + C(-1-1) = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = 0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} -A - 2C = 0, \\ A + B + C = 0 \end{cases}; \begin{cases} A + 2C = 0, \\ A + B + C = 0 \end{cases} \text{ ga}$$

ega bo'lamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini $A=-2C$ ko'rinishda yozib uni

C ga bo'lsak $\frac{A}{C} = -2$ bo'ladi. Sistemaning ikkinchi tenglamasini C ga

bo'lsak

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} + 1 = 0; \frac{B}{C} = -\frac{A}{C} - 1 = -(-2) - 1 = 1$$

hosil bo'ladi. Tekislik tenglamasi (****) ni C ga bo'lib $\frac{A}{C}$ va $\frac{B}{C}$ o'rniga ularning topilgan qiymatlarini qo'ysak izlanayotgan tenglama hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} \frac{A}{C}(x-1) + \frac{B}{C}(y-1) + z-1 &= 0; \quad -2(x-1) + 1 \cdot (y-1) + z-1 = 0; \\ -2x + 2 + y - 1 + z - 1 &= 0; \quad 2x - y - z = 0. \end{aligned}$$

Uch tekislikning kesishish nuqtasi

Berilgan uchta $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ va $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ tekisliklarning kesishish nuqtasi.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

sistemani yechib topiladi. Sistemaning asosiy determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'ladi va berilgan uchta tekislik bir nuqtada kesishadi. $\Delta=0$ bo'lganda tekisliklar bir nuqtada kesismaydi.

12–misol. $2x-y+3z+2=0$, $x+2y-z-9=0$ va $3x+y-2z-11=0$ tekisliklarning kesishishi nuqtasi topilsin.

Yechish.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -2, \\ x + 2y - z = 9, \\ 3x + y - 2z = 11 \end{cases}$$

sistemani yechib tekisliklarning kesishish nuqtasining koordinatalari $x=2$, $y=3$, $z=-1$ larni topamiz. Demak tekisliklar $M(2;3;-1)$ nuqtada kesishar ekan.

Nuqtadan tekislikgacha masofa

Nuqtadan tekislikgacha masofa deganda shu nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi nazarda tutiladi.

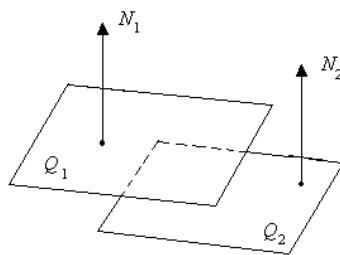
Berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamasi yordamida berilgan Q tekislikgacha d masofa formula yordamida topiladi.

$$\overrightarrow{MM_1} = (x_1 - x)\vec{i} + (y_1 - y)\vec{j} + (z_1 - z)\vec{k}, \quad \vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},$$

$$\varphi = \left(\overrightarrow{MM_1}, \vec{N} \right) = 0 \quad \cos \varphi = 1$$

bo'lgani uchun

$$\frac{\overrightarrow{MM_1} \cdot \vec{N}}{\|\overrightarrow{MM_1}\| \|\vec{N}\|} = 1 \text{ yoki } d = \|\overrightarrow{MM_1}\| = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax + By + Cz)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Tekislik tenglamasidan $-D = Ax + By + Cz$ hisobga olib ushbu

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (17)$$

formula yordamida topiladi.

13–misol. $A(2;3;-1)$ nuqtadan $7x-6y-6z+42=0$ tekislikgacha masofa topilsin.

Yechish. (17) formulaga $A=7$, $B=-6$, $C=-6$, $D=42$, $x_1=2$, $y_1=3$, $z_1=-1$ qiymatlarni qo'ysak izlanaetgan masofa

$$d = \left| \frac{7 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + (-6) \cdot (-1) + 42}{\sqrt{7^2 + (-6)^2 + (-6)^2}} \right| = \left| \frac{14 - 18 + 6 + 42}{\sqrt{121}} \right| = \frac{44}{11} = 4$$

kelib chiqadi.

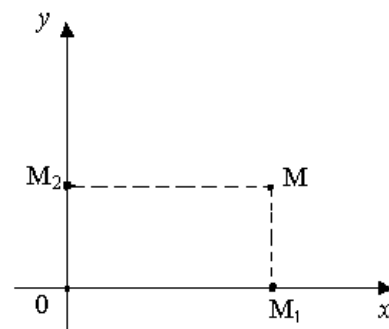
8-Mavzu: Vektorlar va ular ustida chiziqli amallar. Ikki vektor orasidagi bukchak.vektorning o'qqa proyeksiyasi. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi.

Dekartning tekislikdagi koordinatalar sistemasi

Ma'lumki, to'g'ri chiziq nuqtalarining o'rni bitta son yani uning koordinatasi bilan to'la aniqlanadi. Tekislik nuqtalarining o'rni bir juft sonlar bilan aniqlanishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik tekislikda O nuqtada kesishuvchi, bir xil o'lchov birligiga ega va o'zaro perpendikulyar Ox , Oy o'qlar berilgan bo'lsin (ular tekislikda dekart sistemasini tashkil etadi). Ox va Oy o'qlar joylashgan tekislik koordinatalar tekisligi deb aytiladi va Oxy kabi belgilanadi(1-rasm).

M nuqta shu Oxy tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

M nuqtadan Ox va Oy o'qlariga perpendikulyar o'tkazib, ularning asoslarini M_1 va M_2 lar orqali belgilaymiz. M_1 nuqtaning Ox o'qdagi koordinatasi x M nuqtaning **abssissasi**, M_2 nuqtaning Oy o'qdagi koordinatasi y M nuqtaning **ordinatasi** deb aytiladi. x , y lar M nuqtaning koordinatalari (dekart koordinatalari) deb aytiladi.

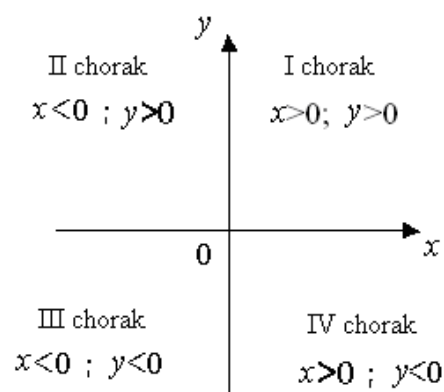


1-rasm.

Shunday qilib, Oxy koordinata tekisligining istalgan M nuqtasiga yagona tartiblangan sonlar jufti (x,y) –uning koordinatalari mos keladi.

Aksincha, har qanday (x,y) juftlik Oxy tekislikdagi yagona M nuqtani aniqlaydi. Demak, tartiblangan (x,y) sonlar jufti bilan Oxy koordinata tekisligining nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

Ox o'q **abssissalar** o'qi, Oy o'q esa **ordinatalar** o'qi, ular birgalikda **koordinata o'qlari** deyiladi. O'qlarning kesishish nuqtasi O **koordinatalar boshi** deyiladi. Koordinata o'qlari koordinata tekisligini **choraklar** deb ataluvchi to'rtta

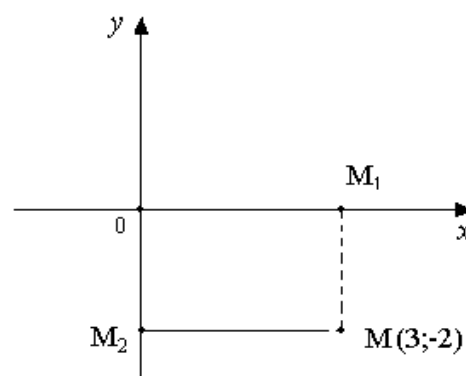


2-rasm.

qismlarga ajratadi (2-rasm). x abssissaga va y ordinataga ega bo'lgan M nuqtani $M(x;y)$ ko'rinishda yozish qabul qilingan.

1-misol. Tekislikda $M(3; -2)$ nuqta yasalsin (3-rasm).

Yechish. Abssissalar o'qi Ox da koordinatasi 3 ga teng M_1 nuqtani hamda ordinatalar o'qi Oy da koordinatasi -2 ga teng bo'lgan M_2 nuqtalarni olamiz. M_1 nuqtadan Ox o'qqa perpendikulyar, M_2 nuqtadan Oy o'qqa perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz.



3-rasm.

To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M izlanayotgan nuqta bo'ladi.

2-misol. Berilgan M nuqtaga ko'ra uning koordinatalari topilsin.

Yechish. M nuqtadan Ox va Oy o'qlarga perpendikulyarlar o'tkazib, ularning asoslarini mos ravishda M_1 va M_2 lar orqali belgilaymiz. M_1 nuqtaning Ox dagi koordinatasi x M nuqtaning abssissasi, M_2 nuqtaning Oy o'qdagi koordinatasi M nuqtaning ordinatasi bo'ladi.

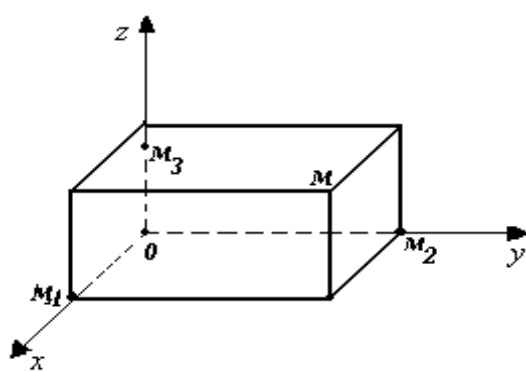
Fazodagi nuqtaning koordinatalari.

Fazodagi nuqtaning holati uchta son yordamida aniqlanishini ko'rsatamiz.

Fazoda bir xil o'lchov (masshtab) birligiga ega 0 nuqtada kesishuvchi o'zaro perpendikulyar uchta Ox , Oy , Oz o'qlarni olamiz. Bu o'qlarni **koordinata o'qlari** deb atab ularni kesishish nuqtasini **koordinatalar bosh** deb ataymiz. Bu o'qlar joylashgan fazoni Oyz orqali belgilaymiz.

Koordinata o'qlari Ox , Oy , Oz fazoda Dekartning to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini tashkil etadi. M $Oxyz$ fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Undan koordinata o'qlariga perpendikulyar uchta tekislik o'tkazamiz.

Tekisliklarning Ox , Oy va Oz o'qlar bilan kesishish nuqtalari M_1, M_2 va M_3 lar M nuqtaning mos o'qlardagi **proeksiyalari** deyiladi (4-rasm). M_1 nuqta Ox o'qda x koordinataga, M_2 nuqta Oy o'qda y koordinataga va M_3 nuqta Oz o'qda z koordinataga ega bo'lsin. x , y va z sonlar M nuqtaning fazodagi **to'g'ri burchakli (yoki dekart) koordinatalari** deyiladi va $M(x,y,z)$



4-rasm.

ko'rinishda yoziladi. Bunda x M nuqtaning **abssissasi**, y **ordinatasi**, z esa **applikatasi** deyiladi.

Shunday qilib fazoning ixtiyoriy nuqtasi yagona tartiblangan sonlar uchligi shu nuqtaning koordinatalari x , y va z larni aniqlaydi.

Aksincha $Oxyz$ fazodagi M nuqtaning holati uning uchta dekart koordinatalari yordamida to'liq aniqlanadi. Shunday qilib tartiblangan sonlar uchligi (x,y,z) bilan $Oxyz$ fazoning nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

Agar har ikkita koordinata o'qlari orqali tekisliklar o'tkazsak o'zaro perpendikulyar bo'lgan **koordinata tekisliklari** deb ataluvchi uchta Oxy , Oyz , va Oxz tekisliklar hosil bo'ladi. Bu tekisliklar butun $Oxyz$ fazoni **oktantlar** deb ataluvchi 8 ta qismga ajratadi.

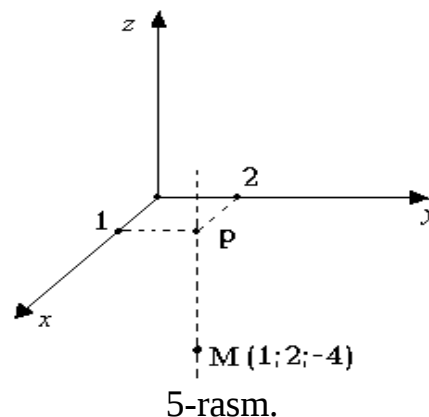
Shunday qilib sonlar o'qining nuqtasi bitta haqiqiy son x yordamida, tekislik nuqtasining tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rni ikkita tartiblangan sonlar juftligi (x,y) yordamida, fazo nuqtasining tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan holati uchta tartiblangan sonlar uchligi (x,y,z)

yordamida to'liq aniqlanar ekan. Nuqtaning holatini sonlar yordamida aniqlash usuli **koordinatalar usuli** deb ataladi.

Bu usulning asoschisi fransuz matematigi va filosofi Rene Dekartdir (1596-1650). U geometrik masalalarni algebra usullaridan foydalanib yechishni taklif etish bilan birga Oliy matematikaning maxsus bo'limi, **analitik geometriyani** yuzaga kelishiga sababchi bo'ldi.

3-misol. $M(1;2;-4)$ nuqta yasalsin.

Yechish. Ox o'qda koordinatasi 1 ga teng nuqtani olib undan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Shuningdek Oy o'qda koordinatasi 2 ga teng nuqtani olib undan Ox ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini P orqali belgilaymiz. P orqali Oz o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazib undan pastga tomon 4 birlikka teng kesma ajratamiz. Ana shu kesmaning oxiri $M(1; 2; -4)$ nuqtani aniqlaydi(5-rasm).



Skalyar va vektor kattaliklar

O'zining son qiymati bilan to'liq aniqlanadigan miqdorlar **skalyar** kattaliklar deyiladi.

Uzunlik, yuza, hajm va harorat skalyar kattalikga misol bo'la oladi. Shunday kattaliklar ham uchraydiki, ularni faqatgina son qiymati orqali to'liq aniqlab bo'lmaydi. Masalan: Qarshi shahridan 70km/soat tezlik bilan chiqqan avtomobil bir soatdan keyin qaerda bo'ladi? degan savolga birgina 70 km/soat yordamida javob berib bo'lmaydi. Agarda masalaning shartiga yo'nalish tayinlansa, uni hal etish mumkin. Ya'ni Qarshi shahridan 70 km/soat tezlik bilan Qarshi-Samarqand yo'nalishi bo'yicha harakatlanayotgan avtomobil bir soatdan keyin qaerda bo'ladi? deyilsa, bu savolga to'liq javob berish mumkin.

Son qiymatidan tashqari ma'lum yo'nalishga ega bo'lgan kattaliklar **vektor kattaliklar** deyiladi.

Harakat tezligi, tezlanish, kuch, magnit va elektr maydonining kuchlanganligi kabi kattaliklar vektor kattalikga misol bo'ladi.

Vektor tushunchasi

Vektor kattalik (miqdor) lar vektor ko'rinishida tasvirlanadi.

1-ta‘rif. Yo‘nalgan kesma **vektor** deyiladi.

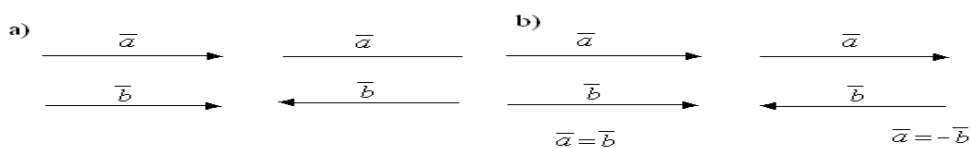
Boshlanish (bosh) nuqtasi A va oxirgi nuqtasi B bo‘lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ kabi yozish qabul qilingan. Ba‘zan vektorni bitta harf bilan $\vec{a}$ (yoki $\vec{a}$) kabi belgilanadi. A va B nuqtalar orasidagi masofa $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligi deyiladi.

$\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini uning **moduli** ham deb yuritiladi va $|\overrightarrow{AB}|$ ko‘rinishda belgilanadi.

Boshi oxiri bilan ustma-ust tushgan vektor **nol vektor** deb ataladi va $\vec{0}$ bilan belgilanadi. Demak, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ – nol vektor. Nol vektorning moduli 0 ga teng bo‘lib, uning yo‘nalishi aniq emas.

$\overrightarrow{BA}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor $-\vec{a}$ kabi belgilanadi. Uzunligi 1 ga teng vektor birlik vektor deyiladi va $\vec{a}$ vektorga mos (u bilan bir o‘qda yotgan hamda bir xil yo‘nalishga ega) birlik vektor $\vec{a}^0$ kabi belgilanadi.

2-ta‘rif. Bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar **kollinear** vektorlar deyiladi (6-rasm).



6-rasm.

3-ta‘rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar **komplanar vektorlar** deb aytiladi.

4-ta‘rif. Kollinear $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo‘nalgan hamda bir xil uzunlikka ega bo‘lsa, teng deyiladi ($\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi) (6-rasm).

Ta‘rifga binoan berilgan vektorni o‘zo‘ziga parallel ko‘chirish natijasida unga teng vektor hosil bo‘ladi. Boshqacha aytganda vektorni uzunligi va yo‘nalishini o‘zgartirmagan holda uni fazoning bir nuqtasidan boshqa bir nuqtasiga ko‘chirish mumkin ekan. Bunday vektorlar **erkin** vektorlar deyiladi. Biz faqatgina erkin vektorlar bilan ish ko‘ramiz.

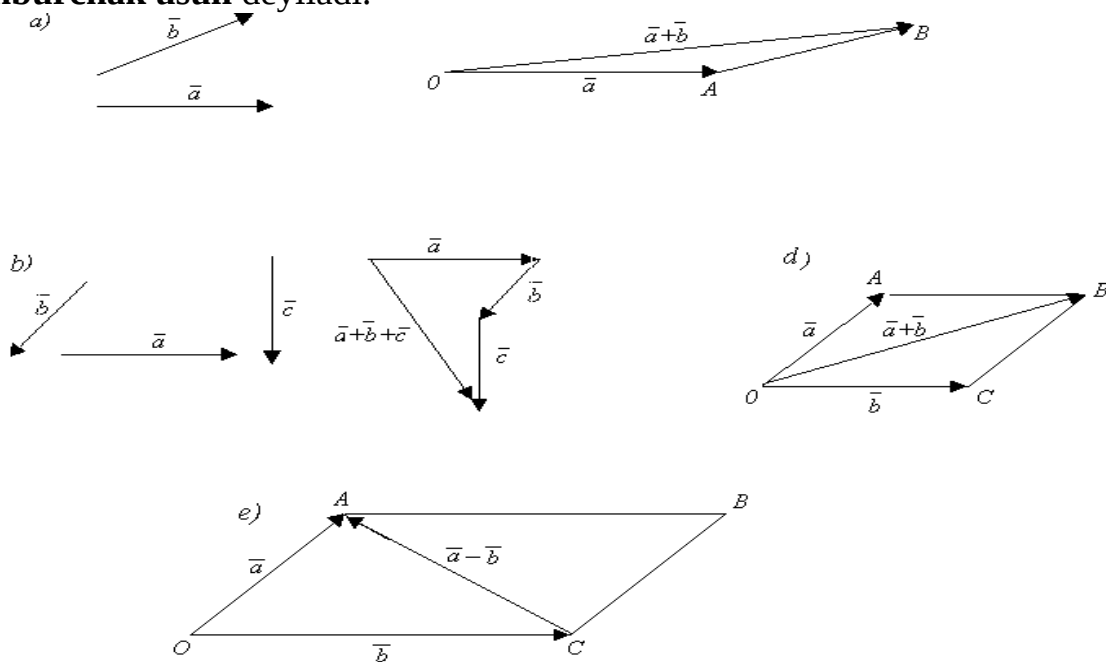
Vektorlar ustida chiziqli amallar

Matematikada vektor tushunchasi son tushunchasiga nisbatan murakkab tushuncha. Sonlar ustida bajariladigan barcha amallarni vektorlar ustida bajarib

bo'lmaydi. Masalan ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish kabi amallarni vektorlar ustida bajarish mumkin emas.

Vektorlar ustida **chiziqli amallar** deb, vektorlarni qo'shish, ayirish hamda vektorlarni songa ko'paytirish amallariga aytiladi.

1. **Vektorlarni qo'shish.** Noldan farqli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni olamiz. Ixtiyoriy 0 nuqtani olib $\vec{OA} = \vec{a}$ vektorni yasaymiz, so'ngra A nuqtaga $\vec{AB} = \vec{b}$ vektorni qo'yamiz. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ deb birinchi qo'shiluvchi $\vec{a}$ vektorning boshini ikkinchi qo'shiluvchi $\vec{b}$ vektorning oxiri bilan tutashtiruvchi $\vec{OB}$ vektorga aytiladi. (7-rasm). Vektorlarni bunday qo'shish usuli **uchburchak usuli** deyiladi.



7-rasm

Ucha $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ deb birinchi qo'shiluvchi $\vec{a}$ vektorni oxiriga ikkinchi qo'shiluvchi $\vec{b}$ vektorni boshini qo'yib, so'ngra ikkinchi qo'shiluvchi vektorning oxiriga uchinchi $\vec{c}$ qo'shiluvchi vektorning boshini qo'yib birinchi $\vec{a}$ vektorning boshi bilan uchinchi $\vec{c}$ vektorning oxirini tutashtirish natijasida hosil bo'lgan vektorga aytiladi (7^b-rasm).

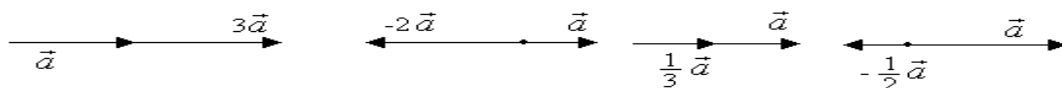
Vektorlarni bu xilda qo'shish qo'shiluvchilar soni har qanday bo'lganda ham yaroqlidir.

Endi vektorlarni qo'shishning boshqa bir usuli bilan tanishamiz. $\vec{OA} = \vec{a}$ va $\vec{OC} = \vec{b}$ vektorlarni yig'indisini topish uchun bu vektorlarni umumiy nuqtada joylashtirib OABC parallelogram yasaymiz. Parallelogramning O uchidan o'tkazilgan diagonali $\vec{OB}$ vektor, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni yig'indisini ifodalaydi. Vektorlarni bunday qo'shish usuli **parallelogramm** qoidasi deb ataladi (7^d-rasm).

2. **Vektorlarni ayirish.** $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni ayirmasi $\vec{a} - \vec{b}$ deb $\vec{b}$ vektor bilan yig'indisi $\vec{a}$ vektorni beradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi. Demak $\vec{a} - \vec{b}$ ayirmani topish uchun $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi $-\vec{b}$ vektorni yig'indisini topish lozim ekan. $\vec{OA} = \vec{a}$ va $\vec{OC} = \vec{b}$ vektorlarni ayirmasini topish uchun bu vektorlarni umumiy nuqtada joylashtirib, yasalgan OABC parallelogramning C uchidan

o'tkazilgan diagonalini $\overrightarrow{CA}$ vektorni topish lozim. Ayirma vektorda yo'nalish «ayriluvchidan» dan «kamayuvchi» ga qarab yo'naladi (7^e-rasm).

3. Vektorni songa ko'paytirish. Noldan farqli $\vec{a}$ vektorning $m \neq 0$ songa ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, uzunligi $|m| \cdot |\vec{a}|$ ga teng bo'lgan, $m > 0$, bo'lganda $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalgan, $m < 0$ bo'lganda esa unga qarama-qarshi yo'nalgan hamda $m\vec{a}$ bilan belgilanadigan vektorga aytiladi (8-rasm).



8- rasm.

Izoh. 1. Istalgan $\vec{a}$ vektorni uning uzunligi $|\vec{a}|$ bilan unga mos $\vec{a}^0$ birlik vektorni ko'paytmasi shaklida tasvirlash mumkin, ya'ni $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$.

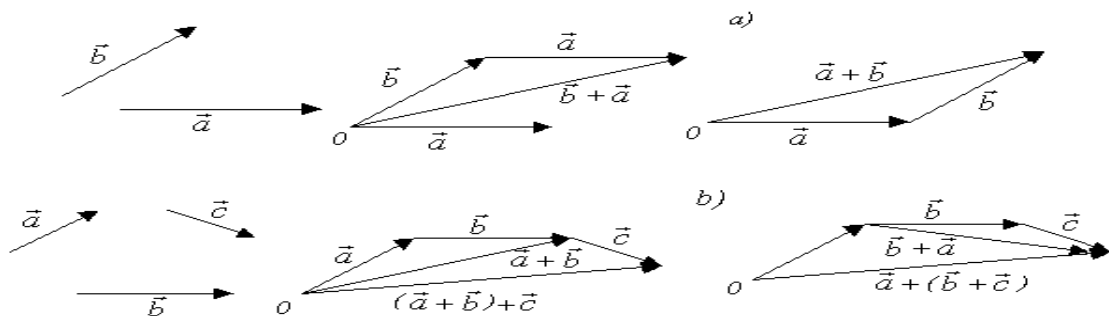
2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) kollinear vektorlar uchun shunday yagona λ son mavjud bo'lib $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, $\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{b}^0$ vektorlarni kollinearligidan $\vec{a}^0 = \pm \vec{b}^0$ ekanligi kelib chiqadi. U holda $\vec{a} = \pm |\vec{a}| \vec{b}^0 = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$ yoki $\pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \lambda$ belgilashni kiritsak $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ hosil bo'ladi.

Shunday qilib vektorlarni qo'shish, ayirish hamda vektorni songa ko'paytirish natijasida vektor hosil bo'lar ekan.

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (9^a-chizma);
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (9^b-chizma);
3. $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$.
4. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
5. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
6. $\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$;
7. $(m+n) \cdot \vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$, m va n haqiqiy sonlar;
8. $(m \cdot n) \cdot \vec{a} = m \cdot (n\vec{a}) = n(m\vec{a})$.



9-rasm.

Ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi

Fazoda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Fazoda ixtiyoriy O nuqtani olib $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlarni yasaymiz.

5-tarif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlardan birini ikkinchisi bilan ustma-ust tushishi uchun burilishi lozim bo'lgan φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) burchakka aytiladi.

$\vec{a}$ vektor bilan λ o'q orasidagi burchak deganda $\vec{a}$ vektor bilan λ o'qda joylashgan va u bilan bir xil yo'nalgan $\vec{e}_0$ birlik vektor orasidagi burchak tushiniladi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $(\vec{a} \wedge \vec{b})$ kabi belgilanadi.

Vektorning o'qqa proeksiyasi va uning xossalari

Fazoda λ o'q va $\overrightarrow{AB}$ vektor berilgan bo'lsin. A va B nuqtalardan bu o'qqa perpendikulyar tushirib perpendikulyarning asoslarini mos ravishda A_1 va B_1 orqali belgilaymiz. $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorning λ o'qdagi **tashkil etuvchisi** yoki **komponenti** deb ataladi (9-rasm). λ_1 va λ_2 sonlar A_1 va B_1 nuqtalarning λ o'qdagi koordinatalari bo'lsin.

6-ta'rif. $\lambda_2 - \lambda_1$ ayirma $\overrightarrow{AB}$ vektorning λ o'qqa proeksiyasi deb ataladi. $\overrightarrow{AB}$ vektorning λ o'qqa proeksiyasi $pr_{\lambda} \overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Shunday qilib $\overrightarrow{AB}$ vektorning λ o'qqa proeksiyasi deb vektorning boshi A va oxiri B nuqtalarning λ o'qdagi proeksiyalari A_1 va B_1 nuqtalar orasidagi masafoga aytilar ekan. Bu masofa vektor bilan o'qning yo'nalishi mos tushganda «+» ishora bilan aks holda «-» ishora bilan olinadi. Proeksiyani ta'rifidan $\overrightarrow{AB}$ vektor o'qqa perpendikulyar bo'lganda uning o'qqa proeksiyasi nolga teng bo'lishi kelib chiqadi. (10-rasm)

Proeksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

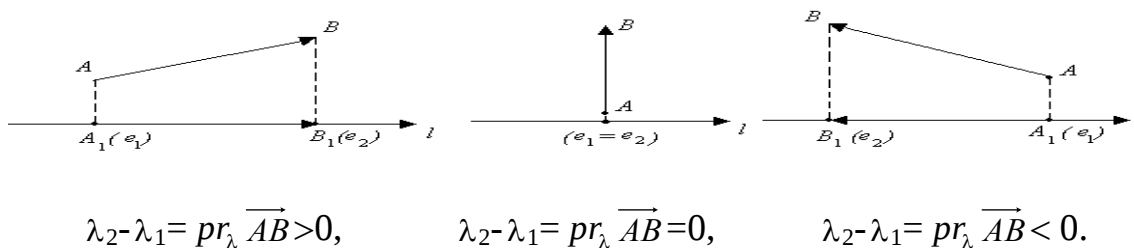
1. $\vec{a}$ vektorning λ o'qqa proeksiyasi $\vec{a}$ vektor uzunligini bu vektor bilan o'q orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng, ya'ni $pr_{\lambda} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$. Bu 10^a-chizmadan ko'rinib turibdi.

2. Ikki vektor yig'indisining o'qqa proeksiyasi qo'shiluvchi vektorlarning shu o'qqa proeksiyalari yig'indisiga teng, yani $pr_{\lambda} (\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\lambda} \vec{a} + pr_{\lambda} \vec{b}$.

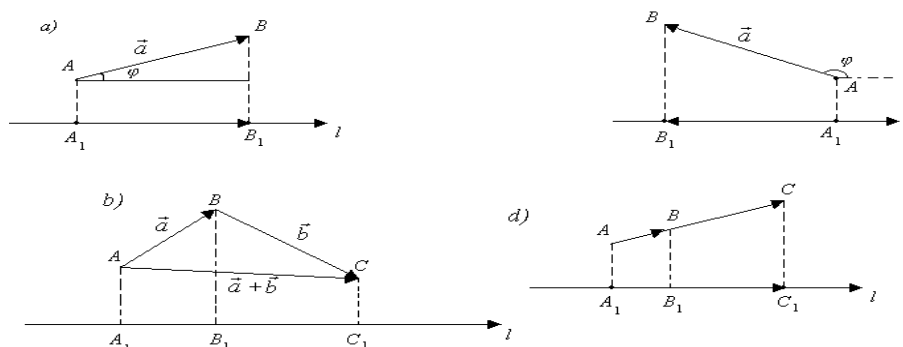
Bu 10^b-chizmadan ko'rinib turibdi.

3. Vektor $\vec{a}$ ni λ songa ko'paytirganda uning o'qqa proeksiyasi ham shu songa ko'payadi, ya'ni $pr_{\lambda} (\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot pr_{\lambda} \vec{a}$ (10^d-rasm).

Boshqacha aytganda skalyar ko'paytuvchini proeksiya belgisidan chiqarish mumkin ekan.



10-rasm



11-rasm.

Endi $\overrightarrow{AB}$ vektorning λ o'qdagi tashkil etuvchi $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorni proeksiya orqali ifodalaymiz. $\vec{\lambda}^0$ vektor λ o'qqa mos birlik vektor bo'lsin. U holda

$$\overrightarrow{A_1B_1} = pr_{\lambda} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{\lambda}^0 \quad (1)$$

bo'lishi ravshan.

Izoh. Vektorning boshqa vektor yo'nalishiga proeksiyasi ham xuddi vektorning o'qqa proeksiyasi kabi aniqlanadi.

Vektorni koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari bo'yicha yoyish

Oxyz fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini olaylik. O'qlarning har birida boshi koordinatalar boshida bo'lib yo'nalishi o'qning musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushadigan birlik vektorlarni olamiz va ularni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar orqali belgilaymiz. Bu yerdagi $\vec{i}$ 0x o'qqa mos, $\vec{j}$ 0y o'qqa mos va $\vec{k}$ 0z o'qqa mos birlik vektorlar. Demak $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlar o'zaro perpendikulyar va nokomplanar.

7-ta'rif. Uchta $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar sistemasi dekartning to'g'ri burchakli bazisi yoki ortlar deb ataladi.

$\vec{a}$ fazodagi ixtiyoriy vektor bo'lsin. Shu vektorni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlar orqali ifodalash mumkinmi? Agar mumkin bo'lsa u ifodani qanday topish mumkin? degan savollarga javob topishga harakat qilamiz.

$\vec{a}$ vektorni o'z-o'ziga parallel ko'chirib uning boshini koordinatalar boshiga joylashtiramiz. $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning oxiri M nuqtadan koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar o'tkazamiz. Natijada diagonallaridan biri $\overrightarrow{OM}$ vektordan iborat parallelepipedga ega bo'lamiz. 12-rasmdan vektorlarni qo'shish qoidasiga binoan $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM}$ ga ega bo'lamiz. $\overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_3}$ bo'lgani uchun $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$ (2) bo'ladi. $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ va $\overrightarrow{OM_3}$ vektorlar mos ravishda $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorni 0x, 0y va 0z o'qlardagi tashkil etuvchilari bo'lganligi uchun ular 1) formulaga ko'ra

$$\overrightarrow{OM_1} = pr_{0x} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{OM_2} = pr_{0y} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}, \quad \overrightarrow{OM_3} = pr_{0z} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} \quad (3)$$

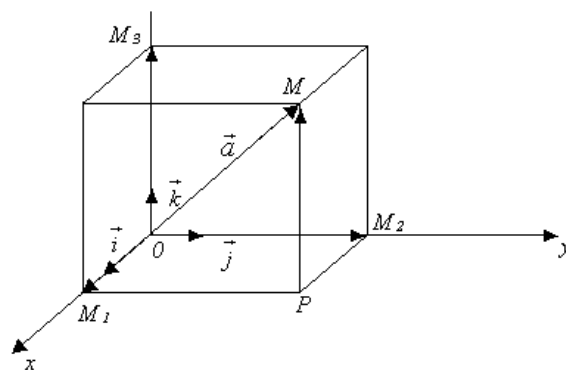
bo'ladi.

$\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning 0x, 0y, 0z o'qlardagi proeksiyalarini mos ravishda a_x, a_y, a_z lar orqali belgilasak (2) va (3) formulalarga asoslanib

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (4)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib fazodagi istalgan $\vec{a}$ vektorni yagona usul bilan dekart bazisi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orqali (4) ko'rinishda ifodalash mumkin ekan. (4) $\vec{a}$ vektorni uning koordinatalar o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali yoyilmasidir. Bu yoyilmani har xil qo'llanmalarda har xil nomlar bilan yuritiladi.



12- rasm

Masalan uni vektorni ortlar, dekart bazisi, vektorni proeksiyalari va koordinatalari orqali yoyilmasi deb ham yuritiladi.

Faraz qilaylik vektorning oxiri M nuqta x, y, z koordinatalarga ega bo'lsin. U holda $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari $a_x = x, a_y = y, a_z = z$ bo'lib (4) yoyilma
$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (5)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini uning koordinatalari deb ham ataladi. O'qlardagi proeksiyalari a_x, a_y, a_z ga teng $\vec{a}$ vektorni $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ ko'rinishda yozamiz.

a_x - $\vec{a}$ vektorning absissasi, a_y - ordinatasi, a_z - applikatasi deb ataladi.

Shunday qilib boshi koordinatalar boshida bo'lgan $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektor bilan uni oxiri M nuqta bir xil koordinatalarga ega bo'lar ekan.

$\overrightarrow{OM}$ vektor M nuqtaning **radius-vektori** deyiladi.

Izoh: Bundan buyon vektor berilgan yoki vektor topilsin deyilganda vektorning koordinatalari berilganligini yoki vektorni koordinatalarini topish lozimligini tushuniladi.

Koordinatalari orqali berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar

Agar vektorlarning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari (vektorning koordinatalari) malum bo'lsa, u holda bu vektorlar ustidagi qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirishi amallarini ularning proeksiyalari ustidagi arifmetik amallar bilan almashtirish mumkin.

Vektorlar $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ yoyilmalari yordamida berilgan bo'lsin. U holda $\vec{a} \pm \vec{b}=(a_x \pm b_x)\vec{i}+(a_y \pm b_y)\vec{j}+(a_z \pm b_z)\vec{k}$, $\lambda \vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}$, ya'ni vektorlarni qo'shganda (ayirganda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayiriladi), vektorni songa ko'paytirganda uning barcha koordinatalari shu songa ko'paytiriladi.

4-misol. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ vektorlar berilgan. Ularning yig'indisi va ayirmasi topilsin.

Yechish. Vektorlarning mos koordinatalarini qo'shib

$$\vec{a}+\vec{b}=(2+3)\vec{i}+(3-1)\vec{j}+(-2+4)\vec{k}=5\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

vektorga va mos koordinatalarini ayirib $\vec{a}-\vec{b}=(2-3)\vec{i}+(3-(-1))\vec{j}+(-2-4)\vec{k}=-\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$ vektorga ega bo'lamiz.

5- misol. $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$ vektor 4 ga ko'paytirilsin.

Yechish. Vektorning har bir koordinatalarini 4 ga ko'paytirib $4\vec{a}=8\vec{i}+20\vec{j}-12\vec{k}$ vektorni hosil qilamiz.

10. Vektorning uzunligi

Fazoda vektor $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ yoyilmasi yordamida berilgan bo'lib uning uzunligi $|\vec{a}|$ ni topish talab etilsin. Qaralayotgan holda (12-rasm) $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ vektor qirralari shu vektorning koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ va $\overrightarrow{OM_3}$ dan iborat parallelepipedning diagonallaridan biri ekanligi aytilgan edi. To'g'ri burchakli parallelepiped diagonalining kvadrati uning qirralari kvadratlarning yig'indisiga teng bo'lishi ma'lum. Shunga ko'ra

$|\vec{a}|^2=|\overrightarrow{OM}|^2=|OM_1|^2+|OM_2|^2+|OM_3|^2$, yoki $|\overrightarrow{OM_1}|=|a_x|$, $|\overrightarrow{OM_2}|=|a_y|$ va $|\overrightarrow{OM_3}|=|a_z|$ bo'lgani uchun $|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$, bundan vektorni uzunligini topish formulasi $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ (6) ni hosil qilamiz.

6-misol. $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ vektorni uzunligi topilsin?

Yechish. Misolda $a_x=6$, $a_y=3$, $a_z=-2$ bo'lgani uchun (6) formulaga binoan $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$ bo'ladi.

Izoh. $\vec{a}$ vektor Oxy tekislikda qaralsa bu holda vektorning applikasi nolga teng bo'lganligi sababli vektor $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ yoyilmaga ega hamda uning uzunligi $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ kabi topiladi. $\vec{i}$, $\vec{j}$ birlik vektorlari tekislikda Dekart bazisini tashkil etadi. a_x – absissaga va a_y - ordinataga ega bo'lgan $\vec{a}$ vektorni $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$ yoki $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$ kabi yoziladi.

Skalyar ko'paytma

1-ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning **skalyar ko'paytmasi** deb, bu vektorlar uzunliklarini ular orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'lgan songa (skalyarga) aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Demak, ta'rifga binoan $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$. (7)

$|\vec{a}| \cdot \cos \varphi = pr_{\vec{b}} \vec{a}$, $|\vec{b}| \cdot \cos \varphi = pr_{\vec{a}} \vec{b}$ bo'lgani uchun (7) formulani

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot pr_{\vec{b}} \vec{a} \text{ yoki } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot pr_{\vec{a}} \vec{b}. \quad (8)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu formulalardan foydalanib vektorning boshqa vektor yo'nalishiga proeksiyasini ham aniqlash mumkin. Masalan

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \quad (9)$$

formula orqali $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektor yo'nalishiga proeksiyasi topiladi. Agarda $\vec{b}$ vektor birlik vektor bo'lsa $|\vec{b}|=1$ bo'lib $pr_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ bo'ladi, ya'ni vektorning birlik vektori yo'nalishiga proeksiyasi ularning skalyar ko'paytmasiga teng bo'lar ekan.

Skalyar ko'paytma tushinchasidan foydalanib to'g'ri chiziqli harakatda $\vec{F}$ kuchni jismni $\vec{S}$ masofaga siljitishda bajargan ishi A ni $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ ko'rinishida yozish mumkin.

Skalyar ko'paytmaning xossalari

1. Skalyar ko'paytma o'rin almashtirish xossasiga ega ya'ni $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Bu xossaning to'g'riligi skalyar ko'paytma ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

2. Skalyar ko'paytuvchini skalyar ko'paytma belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$. Bu xossaning to'g'riligi (4.5) formuladan hamda proeksiyaning xossasidan kelib chiqadi:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot pr_b(\lambda \vec{a}) = |\vec{b}| \cdot \lambda \cdot pr_b(\vec{a}) = \lambda (|\vec{b}| \cdot pr_b(\vec{a})) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

3. Skalyar ko'paytma vektorlarni qo'shishiga nisbatan taqsimot xossasiga ega, yani $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Bu (7.5) formuladan hamda proeksiyaning xossasidan kelib chiqadi:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot pr_a(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot (pr_a \vec{b} + pr_a \vec{c}) = \vec{a} \cdot pr_a \vec{b} + \vec{a} \cdot pr_a \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

4. Ikkita noldan farqli vektorning skalyar ko'paytmasi nol bo'lishi uchun vektorlarni perpendukulyar bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ bo'lsin. U holda $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$

kelib chiqadi. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'lsa, $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ bo'lib undan $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ bo'lganligi sababli $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ va $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, ya'ni vektorlarning perpendikulyarligi kelib chiqadi.

Bu xossaga ko'ra $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ (7) bo'ladi.

Endi vektorni o'zini-o'ziga skalyar ko'paytmasini topamiz:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2.$$

Vektorni o'zini-o'ziga skalyar ko'paytmasi vektorning **skalyar kvadrati** deyiladi va $\vec{a}^2$ kabi yoziladi. Shunday qilib vektorning skalyar kvadrati uning modulini kvadratiga teng ekan.

Bunga asosan $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$ bo'ladi.

7-misol $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ va $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi topilsin.

Yechish.

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (2\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{b} \cdot \vec{a} - 6\vec{b} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{b}|^2.$$

8-misol. $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ vektor berilgan. $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$ bo'lib, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak 60° bo'lsa $\vec{c}$ vektorning uzunligi topilsin.

Yechish. $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2$ formuladan $\sqrt{|\vec{c}|^2} = |\vec{c}|$ kelib chiqadi.

Bunga asosan:

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= \sqrt{|\vec{c}|^2} = \sqrt{(3\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2} = \sqrt{9 \cdot |\vec{a}|^2 - 12 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{9 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 4^2} = \sqrt{9 \cdot 25 - 12 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} + 64} = \sqrt{169} = 13. \end{aligned}$$

Skalyar ko'paytmani vektorlarning koordinalari orqali ifodalash

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{va} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

vektorlar berilgan bo'lsin. Skalyar ko'paytmani xossalari hamda (7) va (8) formulalarga asosan quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + \\ &+ a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Shunday qilib, koordinalari yordamida berilgan ikki vektorlarning skalyar ko'paytmasi nomdosh koordinalar ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (10)$$

7-misol. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ va $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi topilsin.

Yechish. Misolda $a_x = 2$, $a_y = 3$, $a_z = -1$, $b_x = -3$, $b_y = 4$, $b_z = 2$ bo'lganligi sababli (4.9) formulaga binoan $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = 4$ bo'ladi.

8-misol. $\vec{F} = \{3; 2; 4\}$ kuch ta'sirida moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsin. $\vec{F}$ kuchning shu moddiy nuqtani $M_1(2; -5; 4)$ holatdan $M_2(7; -1; 3)$ holatga ko'chirishda bajargan ishini toping.

Yechish. $\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \{7 - 2; -1 + 5; 3 - 4\} = \{5; 4; -1\}$ ekani ayon.

(4.9) formulaga binoan $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) = 19$ ga ega bo'lamiz.

14. Ikki vektor orasidagi burchak

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ dan $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ ni topamiz.

Agar vektorlar $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ yoyilmari yordamida berilgan bo'lsa, u holda (9) dan hamda vektorni uzunligini topish formulasi (6) dan foydalanib vektorlar orasidagi burchakning kosinusini topish uchun

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (11)$$

formulani hosil qilamiz.

9-misol. $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. (4.11) formulaga asosan

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 45^\circ$ bo'ladi.

10-misol. Uchlari $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ va $C(0; 0; 5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning burchaklari topilsin.

Yechish. Boshi va oxiri berilgan vektorni koordinatalarini topish formulasiga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\overrightarrow{AB} = \{1 - 2; 1 + 1; 1 - 3\} = \{-1; 2; -2\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{0 - 2; 0 + 1; 5 - 3\} = \{-2; 1; 2\}, \quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \{1; -2; 2\}, \\ \overrightarrow{BC} = \{0 - 1; 0 - 1; 5 - 1\} = \{-1; -1; 4\}.$$

Ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasi (4.11) ga asosan:

$$\cos \angle A = \cos(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = 0,$$

bundan $\angle A = 90^\circ$,

$$\cos \angle B = \cos(\vec{BA} \wedge \vec{BC}) = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{9}{3 \cdot \sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

bundan $\angle B = 45^\circ$.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ dan $\angle C = 45^\circ$ kelib chiqadi.

Demak qaralayotgan uchburchak teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak ekan.

Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti

Skalyar ko'paytmani 4-xossasiga ko'ra $\vec{a}$ va $\vec{b}$ (nolmas) vektorlar perpendikulyar bo'lishi uchun $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli edi. Bundan (10) formulaga asosan $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ (11) ikki vektorning perpendikulyarlik shartini hosil qilamiz. Shunday qilib ikkita noldan farqli vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi uchun ularni nomdosh koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

11-misol. $\vec{a} = \{2; -3; -1\}$ va $\vec{b} = \{4; 2; m\}$ vektorlar m ning qanday qiymatlarida perpendikulyar bo'ladi.

Yechish. Perpendikulyarlik sharti (11) ga asosan $2 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot m = 0$.

Bundan $2 - m = 0$, $m = 2$. Demak vektorlar $m = 2$ da perpendikulyar bo'lar ekan.

12-misol. $\vec{a} = \vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$ va $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ vektorlar perpendikulyarmi?

Yechish. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 = 6 - 6 = 0$. Demak $\vec{a} \perp \vec{b}$.

1-izoh. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi son bo'lganligi sababli uch va undan ortiq vektorlarning skalyar ko'paytmalari haqida so'z bo'lishi mumkin emas.

2-izoh. Oxy tekislikdagi vektor uchun $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$ vektor $Oxyz$ fazoda $\vec{a} = \{a_x, a_y, 0\}$ kabi tasvirlanganligi sababli chiqarilgan formulalarda vektorning applikasi nolga teng. ($a_z = 0, b_z = 0$) deb olinsa o'sha formulaning tekislikdagi vektorlar uchun xususiyy ko'rinishi hosil bo'ladi.

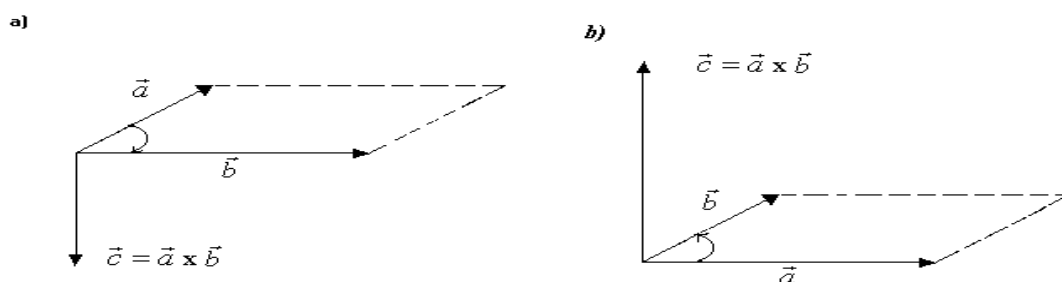
9 – Mavzu: Vektor yo'naltiruvchi kosinuslar. Ikki vektorning kollinearlik sharti. Skalyar, vektor va aralash ko'paytmalar.

1. Ikki vektorning vektorli ko'paytmasi

1-ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga **vektor ko'paytmasi** deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

- a) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ko'paytuvchi vektorlarning har ikkalasiga perpendikulyar;
- b) $\vec{c}$ vektorning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilish masofasi soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda ko'rinadi;
- d) $\vec{c}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuziga teng, ya'ni $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$. (1)

$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ kabi belgilanadi (1-rasm).



1-rasm.

Vektor ko'paytmaning xossalari

1. Ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtirish natijasida vektor ko'paytmaning ishorasi o'zgaradi, ya'ni $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Bu xossaning to'g'riligi vektor ko'paytmaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

2. Sonli ko'paytuvchini vektor ko'paytma belgidan chiqarish mumkin, ya'ni $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, ($\lambda = \text{const}$).

3. Vektor ko'paytma qo'shishga nisbatan taqsimot xossasiga ega, ya'ni

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

4. Vektor ko'paytma ko'paytuvchi vektorlardan biri nol vektor bo'lganda yoki vektorlar kollinear bo'lgandagina nolga teng bo'ladi.

Bu xossadan istalgan vektorni o'zini-o'ziga vektor ko'paytmasi nol vektorga tengligi, ya'ni $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ ekani kelib chiqadi. Jumladan dekart bazisi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ uchun $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ ga ega bo'lamiz.

1-misol $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (4\vec{a} + 3\vec{b})$ topilsin.

Yechish $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ ekanini hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz.

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (4\vec{a} + 3\vec{b}) = 12(\vec{a} \times \vec{a}) + 9(\vec{a} \times \vec{b}) - 8(\vec{b} \times \vec{a}) - 6(\vec{b} \times \vec{b}) = 12 \cdot 0 + 9(\vec{a} \times \vec{b}) + 8(\vec{a} \times \vec{b}) - 6 \cdot 0 = 17(\vec{a} \times \vec{b}).$$

2-misol. $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$ tenglik isbotlanib, uning geometrik ma'nosi izohlansin.

$$\text{Yechish.} (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} = 0 + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} - 0 = 2(\vec{a} \times \vec{b}).$$

$\vec{a} - \vec{b}$ va $\vec{a} + \vec{b}$ tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ bo'lgan parallelogrammning diagonallarini ifodalaydi. $|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})|$ ifoda tomonlari berilgan parallelogrammning diagonallaridan iborat parallelogrammning yuzini, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ esa tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogrammning yuzini ifodalaydi.

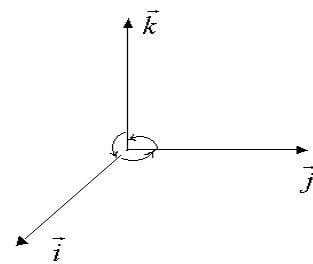
Shunday qilib isbotlangan tenglik, tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektordan iborat parallelogramm yuzini ikkilangani tomonlari shu parallelogrammning diagonallaridan iborat parallelogrammning yuziga tengligini bildiradi.

Vektor ko'paytmani topish

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ va $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Shu vektorlarning vektor ko'paytmasini ularning koordinatalaridan foydalanib topiladigan formula chiqaramiz.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorni vektor ko'paytmalarini hisoblaymiz. $\vec{i} \times \vec{j}$ vektor ko'paytmani qaraymiz. Bu ko'paytmaning moduli $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

$\vec{i} \times \vec{j}$ vektor $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorning har biriga perpendikulyar bo'lgani uchun u 0z o'qda joylashgan va u bilan bir xil yo'nalgan. Chunki uning uchidan qaragandan $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ ga qisqa burilish masofasi soat mili aylanishi yo'nalishiga teskari ko'rinadi.



2-rasm.

Demak, $\vec{i} \times \vec{j}$ vektor $\vec{k}$ vektorning o'ziga teng ekan, ya'ni $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. Shuningdek $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ tengliklarga ega bo'lamiz. Ushbu tengliklardan hamda $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$ dan va vektor ko'paytmaning xossalardan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = a_x b_x \cdot 0 + \\ &+ a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_y \cdot 0 + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} + a_z b_z \cdot 0 = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + \\ &+ (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \end{aligned}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Demak $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasini

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2)$$

formula yordamida topilar ekan. Jumladan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogrammning yuzi

$$S_p = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \right| \quad (3)$$

formula yordamida va shu vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi esa

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \right| \quad (4)$$

formula yordamida topiladi.

3-misol. $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{k}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi topilsin.

Yechish. (2) formulaga asosan:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}.$$

4-misol. Tomonlari $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ vektorlardan iborat parallelogrammning yuzi topilsin.

Yechish (5.2) formulaga binoan:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-9+1)\vec{i} - (3-2)\vec{j} + (-1+6)\vec{k} =$$

$$-8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{90} = 3 \cdot \sqrt{10}$$

(3) ga asosan $S_p = 3 \cdot \sqrt{10}$ kv. birlik bo'ladi.

5-misol. Uchlari $A(3; 4; -1)$, $B(2; 0; 3)$ va $C(-3; 5; 4)$ nuqtalarga bo'lgan uchburchakning yuzi topilsin.

Yechish. $\vec{AB} = \{2-3; 0-4; 3+1\} = \{-1; -4; 4\}$, $\vec{AC} = \{-3-3; 5-4; 4+1\} = \{-6; 1; 5\}$.

(2) formulaga ko'ra:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-20-4) - \vec{j}(-5+24) + \vec{k}(-1-24) = \\ &= -24\vec{i} + 19\vec{j} - 25\vec{k}. \end{aligned}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-24)^2 + 19^2 + 25^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1562}. \text{ Demak, } S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{1562} \text{ kv. birlik}$$

6-misol. Uchlari $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 5)$ va $C(2; 4; 7)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning A burchagini sinusi topilsin.

Yechish: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \sin A$ tenglikdan

$$\sin A = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} \quad (5)$$

formulaga ega bo'lamiz.

$$\vec{AB} = \{3-1; 4-2; 5-3\} = \{2; 2; 2\}, \quad \vec{AC} = \{2-1; 4-2; 7-3\} = \{1; 2; 4\},$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}, \quad |\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21},$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k},$$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56}$ tengliklarga egamiz (5) formulaga ko'ra

$$\sin A = \frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 7}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ bo'ladi.}$$

$BC^2 < AB^2 + AC^2$ bo'lganda A burchak o'tkir, $BC^2 > AB^2 + AC^2$ bo'lganda u o'tmas burchak bo'ladi.

Uch vektorning aralash ko'paytmasi

$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ ni uchinchi $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan son $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deyiladi. Vektorlar $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$

yoyilmalari yordamida berilganda ularning aralash ko'paytmasi $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ni topish uchun formula chiqaramiz.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

vektorni skalyar ko'paytmani topish formulasiga asoslanib $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ vektorga skalyar ko'paytiramiz. U holda

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z$$

kelib chiqadi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

determinantning uchinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasi ekanini ko'rish qiyin emas. Demak

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Shunday qilib, uch vektorning aralash ko'paytmasi uchinchi tartibli determinantga teng bo'lib uning birinchi satrini birinchi ko'paytuvchi vektorning koordinatalari, ikkinchi va uchinchi satrlarini ikkinchi va uchinchi ko'paytuvchi vektorlarning koordinatalari tashkil etadi.

7-misol. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ va $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

vektorlarning aralash ko'paytmasi topilsin .

Yechish. (8.6) formulaga asosan:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(25+3) - 4(15+2) + 2(9-10) = 14.$$

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi

Boshlari bitta nuqtada bo'lgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nokomplanar vektorlarni qaraymiz. Bu vektorlarni qirra deb parallelepiped yasaymiz. Uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzi Q ga teng bo'lgan $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektorni yasaymiz. Skalyar ko'paytmani ta'rifi binoan:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{d} \wedge \vec{c}) = Q |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{d} \wedge \vec{c}).$$

$(\vec{d} \wedge \vec{c}) < \frac{\pi}{2}$ deb faraz qilamiz. U holda parallelepipedning balandligini h orqali belgilasak $h = |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{d} \wedge \vec{c})$ kelib chiqadi. Shunday qilib aralash ko'paytma $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = Q \cdot h$ bo'ladi.

Parallelepipedning hajmini V deb belgilasak u asosining yuzi Q bilan balandligi h ning ko'paytmasiga teng, ya'ni $V = Q \cdot h$ bo'ladi.

Shunday qilib bu holda uch vektorning aralash ko'paytmasi qirralari shu vektorlardan iborat parallelepipedning hajmiga teng, ya'ni $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = V$ bo'lar ekan.

Agar $(\vec{d} \wedge \vec{c}) > \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $\cos(\vec{d} \wedge \vec{c}) < 0$, $|\vec{c}| \cos(\vec{d} \wedge \vec{c}) = -h$ bo'lib $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -V$ bo'ladi. Har ikkala holni birlashtirib $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$ yoki $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

formulaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, uch vektorni aralash ko'paytmasini absolyut qiymati shu vektorlarni qirra deb ulardan yasalgan parallelepipedning hajmiga teng ekan.

Bu aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosidir.

Demak qirralari $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan iborat parallelepipedning hajmi

$$V_{par} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \quad (7)$$

formula yordamida topiladi.

Endi qirralari $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan iborat uchburchakli piramidaning hajmini topamiz.

Bu holda piramidaning hajmi qirralari, xuddi shunday parallelepipedning hajmining oltidan biriga teng ekani elemantar geometriyadan malum.

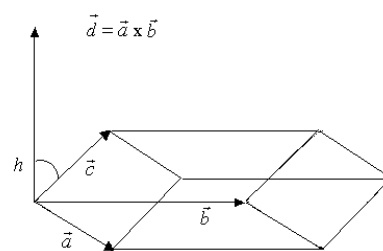
Shunday qilib

$$V_{pir} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \quad (8)$$

piramidani hajmini topish formulasini hosil qilamiz.

8-misol. Uchlari $A(0; 0; 0)$, $B(3;4;-1)$, $C(2;3;5)$, $D(6;0;-3)$ nuqtalarida bo'lgan uchburchakli piramidaning hajmi topilsin.

Yechish: Qaralayotgan hol uchun (8) formula



3-rasm.

$V_{pir} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$ ko'rinishiga ega. $\vec{AB} = \{3; 4; -1\}$, $\vec{AC} = \{2; 3; 5\}$,
 $\vec{AD} = \{6; 0; -3\}$ bo'lgani uchun

$$(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9) - 4 \cdot (-6 - 30) + 18 = 135 \quad \text{va} \quad V = \frac{1}{6} |135| = 22,5 \quad \text{kelib chiqadi.}$$

Uch vektorning komplanarlik sharti

Uchta komplanar noldan farqli $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarni qaraymiz. Sodda uchun bu vektorlar bir tekstlikda yotadi deb faraz qilamiz. Bu vektorlarni aralash ko'paytmasi $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ni tuzamiz. $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor ko'paytma $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning har biriga perpendikulyar bo'lgani uchun u ular yotgan tekstlikka ham, jumladan $\vec{c}$ vektorga ham perpendikulyar bo'ladi. Perpendikulyar vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga tengligidan $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ kelib chiqadi. Demak komplanar vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng ekan. Tesqarisi ham urinli, yani aralash ko'paytmasi nolga teng vektorlar komplanar bo'ladi.

Haqiqatan, vektorlar nokomplanar bo'lsa vektorlarni qirra deb parallelepiped yasash mumkin bo'lib uning hajmi $V \neq 0$ bo'ladi. Ammo $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ bo'lgani uchun $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0$ bo'ladi. Bu shartga zid.

Shunday qilib uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (noldan farqli) vektorlarning komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \quad \text{yoki} \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

uch vektorning komplanarlik shartidir.

9-misol. $\vec{a} = \{3; 4; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 2\}$, $\vec{c} = \{9; 14; 16\}$

vektorning komplanarligi ko'rsatilsin.

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-4) = 0.$$

Komplanarlik sharti (5.9) bajarilganligi uchun vektorlar komplanar.

10-misol. $A(1;0;1)$, $B(4;4;6)$, $C(2;2;3)$ va $D(10;14;17)$ nuqtalar bitta tekislikda yotadimi?

Yechish. $\overrightarrow{AB} = \{4-1; 4-0; 6-1\} = \{3;4;5\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2-1; 2-0; 3-1\} = \{1;2;2\}$,
 $\overrightarrow{AD} = \{10-1; 14-0; 17-1\} = \{9; 14; 16\}$

vektorlarni qaraymiz. Ularning aralash ko'paytmasini hisoblaymiz:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = 0.$$

Vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng, ular komplanar va A,B,C,D nuqtalar bir tekislikda yotadi.

Izoh. 1. Biz kerakli formulalarni faqatgina fazodagi vektorlar uchun chiqardik. Ammo keltirilgan formulalar tekislikdagi vektorlar uchun ham yaroqli. Formulalardagi vektorlarning uchinchi koordinata (applikata)lari nol deb olinsa formulalar tekislikdagi vektorlar uchun o'rinli bo'ladi. Masalan tekislikda vektorlar $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, $\vec{b}_x = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ ($\vec{i}, \vec{j}$ -dekart bazisi) kabi yoyilmaga ega

bo'lsa ularning vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$ bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Карасев А.И. и др.. Курс высший математики для экономических вузов. М.Высшая школа. 1982.
2. Замков О.О. и другие. Математические методы в экономике. Москва, 1999 г.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные и интегральные исчисление. М.: Наука, 1980.
4. Шнейдер В.Е. ва бошқ. Олий математика қисқа курси. Т.Ўқитувчи. 1987. 1,2-том.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.:Высшая школа.1986.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М: Наука, 1987.
7. Шипачев В.С. Высшая математика. М.Высшая школа, 1985.