Министерство Высшего и Среднего
Специального Образования
Республики Узбекистан

Каршинский инженерно – экономический институт
Факультет “Промышленная технология”

РЕФЕРАТ

По предмету:
“Прикладная механика”

Выполнил: студент группы ООТ-286
Мухаммадиев Руслан

Принял: Исмоилов И.

Карши – 2015 г.

Тема: Равновесие системы сил. Пара сил.

План:

1.Введение

2. Проекция силы на ось и на плоскость.

3. Геометрический способ сложения сил.

4. Равновесие системы сходящихся сил.

5. Момент силы относительно центра или точки.

6. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

7. Равновесие плоской системы параллельных сил.

8. Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил.

9. Заключение.

Введение.

Произвольной пространственной системой сил называется система сил, линии действия которых не лежат в одной плоскости.

Согласно основной теореме статики (теореме Пуансо) любую произвольную систему сил, действующую на твердое тело, можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы (главного вектора системы) и пары сил (главного момента системы сил).

Отсюда вытекает **условие равновесия произвольной пространственной системы сил**.

В геометрической форме: для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы равнялись нулю

$$\boldsymbol{R = 0,\ \ M_o = 0}.$$

В аналитической форме: для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad \Sigma F_{ky} = 0, \quad \Sigma F_{kz} = 0,$$
$$M_x(F_k) = 0, \quad M_y(F_k) = 0, \quad M_z(F_k) = 0.$$

Условия равновесия могут быть использованы для решения задач на равновесие при определении неизвестных величин (реакций связей).

Чтобы задача была статически определимой, число неизвестных должно быть не более шести.

В частности, для системы параллельных сил условиями равновесия являются следующие равенства

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad M_x(F_k) = 0, \quad M_y(F_k) = 0.$$

Перейдем к рассмотрению аналитического (численного) метода решения задач статики. Этот метод основывается на понятии о проекции силы на ось. Как и для всякого другого вектора, проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы. Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус - если в отрицательном. Из определения следует, что проекции данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости с силой.

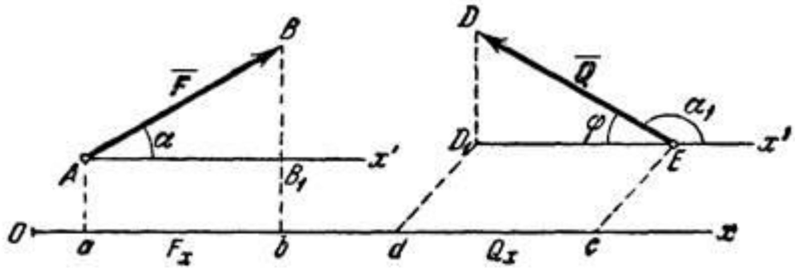


Рис. 1

Обозначать проекцию силы $\bar{F}$ на ось *Ox* будем символом *F*x. Тогда для сил, изображенных на рис.1, получим:

$F_x = AB_1 = ab, \quad Q_x = -ED_1 = -ed.$

Но из чертежа видно, что $AB_1 = Fcos\alpha, \quad ED_1 = Qcos\beta = -Qcos\alpha_1$.

Следовательно,

$F_x = Fcos\alpha, \quad Q_x = -Qcos\varphi = Qcos\alpha_1,$

т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. При этом проекция будет положительной, если угол между направлением силы и положительным направлением оси - острый, и отрицательной, если этот угол - тупой; если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.

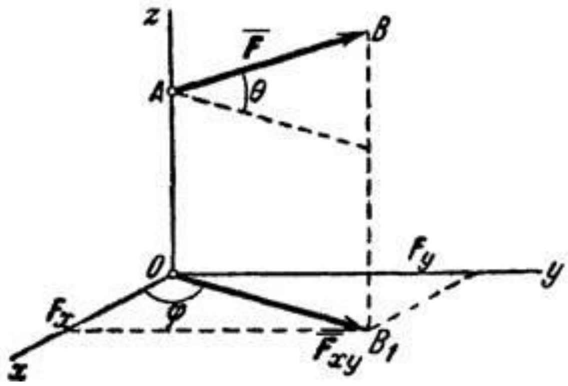


Рис.2

Проекцией силы $\bar{F}$ на плоскость *Oxy* называется вектор $F_{xy} = OB_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\bar{F}$ на эту плоскость (рис. 2). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости *Oxy*. По модулю $F_{xy} = Fcos\theta$, где θ — угол между направлением силы $\bar{F}$ и ее проекции F_{xy}.

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось.

Например, в случае, изображенном на рис. 2, найдем таким способом, что

$F_x = F_{xy} \cdot cos\varphi = F \cdot cos\theta \cdot cos\varphi,$

$F_y = F_{xy} \cdot sin\varphi = F \cdot cos\theta \cdot sin\varphi$

Геометрический способ сложения сил.

Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем называть главным вектором этой системы сил. Понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей, для многих систем сил, как мы увидим в дальнейшем, равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для любой системы сил.

Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ (рис. 3, *а*), откладываем от произвольной точки *O* (рис. 3, *б*) вектор *Oa*, изображающий в выбранном масштабе силу F_1, от точки *a* откладываем вектор $\overline{ab}$, изображающий силу F_2, от точки *b* откладываем вектор *bc*, изображающий силу F_3 и т. д.; от конца *m* предпоследнего вектора откладываем вектор *mn*, изображающий силу F_n. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On} = \bar{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n \quad \text{или} \quad \bar{R} = \sum \bar{F}_k.$$

От порядка, в котором будут откладываться векторы сил, модуль и направление $\bar{R}$ не зависят. Легко видеть, что проделанное построение представляет собою результат последовательного применения правила силового треугольника.

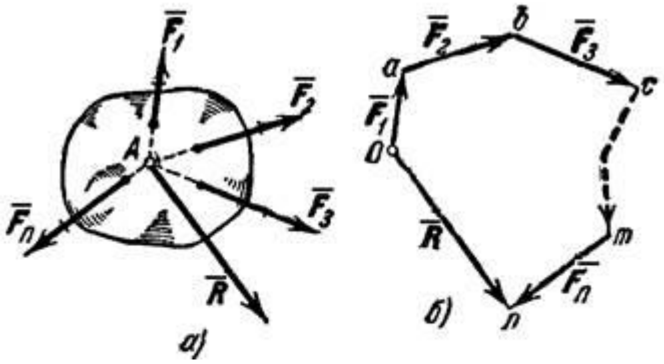


Рис.3

Фигура, построенная на рис. 3,*б*, называется *силовым (в общем случае векторным) многоугольником.* Таким образом, геометрическая сумма или главный вектор нескольких сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного из этих сил (правило силового многоугольника). При построении векторного многоугольника следует помнить, что у всех слагаемых векторов стрелки должны быть направлены в одну сторону (по обводу многоугольника), а у вектора $\bar{R}$ - в сторону противоположную.

Равнодействующая сходящихся сил. При изучении статики мы будем последовательно переходить от рассмотрения более простых систем сил к более сложным. Начнем с рассмотрения системы сходящихся сил.

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называемой центром системы (см. рис. 3, *а*).

По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 3, *а* в точке *A*).

Последовательно применяя аксиому параллелограмма сил, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения. Следовательно, если силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ сходятся в точке *A* (рис. 3, *а*), то сила, равная главному вектору $\bar{R}$, найденному построением силового многоугольника, и приложенная в точке *A*, будет равнодействующей этой системы сил.

Примечания.

1. Результат графического определения равнодействующей не изменится, если силы суммировать в другой последовательности, хотя при этом мы получим другой силовой многоугольник –отличный от первого.

2. Фактически силовой многоугольник, составленный из векторов сил заданной системы, является ломаной линией, а не многоугольником в привычном смысле этого слова.

3. Отметим, что в общем случае этот многоугольник будет пространственной фигурой, поэтому графический метод определения равнодействующей удобен только для плоской системы сил.

Равновесие системы сходящихся сил.

Из законов механики следует, что твердое тело, на которое действуют взаимно уравновешенные внешние силы, может не только находиться в покое, но и совершать движение, которое мы назовем движением «по инерции». Таким движением будет, например, поступательное равномерное и прямолинейное движение тела.

Отсюда получаем два важных вывода:

1) Условиям равновесия статики удовлетворяют силы, действующие как на покоящееся тело, так и на тело, движущееся «по инерции».

2) Уравновешенность сил, приложенных к свободному твердому телу, является необходимым, но не достаточным условием равновесия (покоя) самого тела; в покое тело будет при этом находиться лишь в том случае, если оно было в покое и до момента приложения к нему уравновешенных сил.

Для равновесия приложенной к твердому телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю. Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или аналитической форме.

1. *Геометрическое условие равновесия.* Так как равнодействующая $\bar{R}$ сходящихся сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника, построенного из этих сил, то $\bar{R}$ может обратиться в нуль тогда и только тогда, когда конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой, т. е. когда многоугольник замкнется.

Следовательно, для равновесия системы, сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнут.

2. *Аналитические условия равновесия.* Аналитически равнодействующая системы сходящихся сил определяется формулой

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Так как под корнем стоит сумма положительных слагаемых, то R обратится в нуль только тогда, когда одновременно $R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0$, т. е. когда действующие на тело силы будут удовлетворять равенствам:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0.$$

Равенства выражают *условия равновесия в аналитической форме:* для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил. В случае плоской системы сходящихся сил получим, очевидно, только два условия равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0,$$

Равенства выражают также необходимые условия (или уравнения) равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием сходящихся сил.

Теорема о трех силах. Уравновешенная плоская система трех непараллельных сил является сходящейся.

Условие «плоская» в формулировке теоремы не является необходимым – можно убедиться, что любая уравновешенная система трех сил всегда будет плоской. Это следует из условий равновесия произвольной пространственной системы сил, которые будут рассмотрены далее.

Пример 1. На рис.4 показаны три силы. Проекции сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ на оси *x, y, z* очевидны: $X_1 = -F_1;\ Y_1 = 0;\ Z_1 = 0;\ X_2 = F_2 sin\alpha;\ Y_2 = 0;\ Z_2 = -F_2 cos\alpha.$

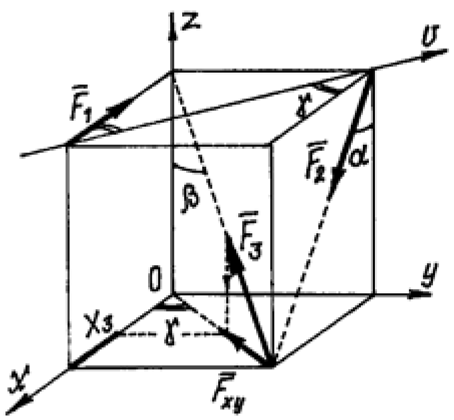


Рис.4

А чтобы найти проекцию силы $\bar{F}_3$ на ось *x* нужно использовать *правило двойного проектирования.*

Проектируем силу сначала на плоскость *x*O*y*, в которой расположена ось (рис.4), получим вектор $\bar{F}_{xy}$, величиной $F_{xy} = F_3 sin\beta$, а затем его проектируем на ось *x:* $X_3 = -F_{xy} cos\gamma = -F_3 sin\beta \cdot cos\gamma$.

Аналогично действуя, найдём проекцию на ось *y*: $Y_3 = -F_{xy} sin\gamma = -F_3 sin\beta \cdot sin\gamma$.

Проекция на ось *z* находится проще: $Z_3 = F_3 cos\beta$.

Нетрудно убедиться, что проекции сил на ось *V* равны:

$V_1 = F_1 cos\gamma;\ V_2 = -F_2 sin\alpha \cdot cos\gamma$;

$V_3 = F_{xy} \cos(180^0 - 2\gamma) = -F_3 sin\beta \cdot cos2\gamma.$

При определении этих проекций удобно воспользоваться рис.5, видом сверху на расположение сил и осей.

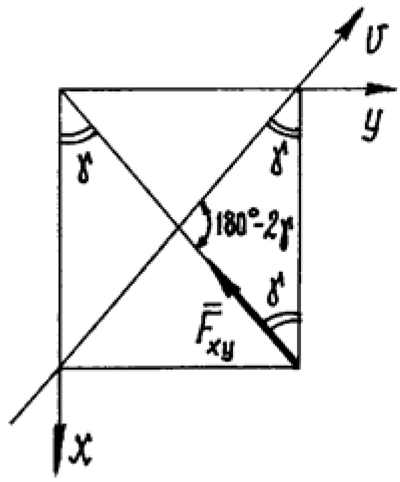


Рис.5

Вернёмся к системе сходящихся сил (рис. 6). Проведём оси координат с началом в точке пересечения линий действия сил, в точке *O*.

Мы уже знаем, что равнодействующая сил $\bar{R} = \sum \bar{F}_i$. Спроектируем это векторное равенство на оси. Получим проекции равнодействующей $\bar{R}$ на оси *x*, *y*, *z*:

$R_x = \sum X_i,\ \ R_y = \sum Y_i,\ \ R_z = \sum Z_i.$

Они равны алгебраическим суммам проекций сил на соответствующие оси. А зная проекции равнодействующей, можно определить и величину её как диагональ прямоугольного параллелепипеда $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ или

$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}$.

Направление вектора $\bar{R}$ найдём с помощью направляющих косинусов (рис.6):

$cos\alpha = \frac{R_x}{R}$, $\quad cos\beta = \frac{R_y}{R}$, $\quad cos\gamma = \frac{R_z}{R}$.

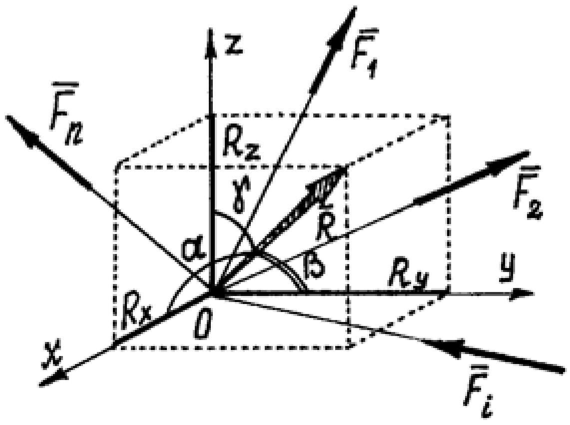


Рис.6

Пример 2. На шар, вес которого *P*, лежащий на горизонтальной плоскости и привязанный к ней нитью *AB*, действует сила *F* (рис.7). Определим реакции связей.

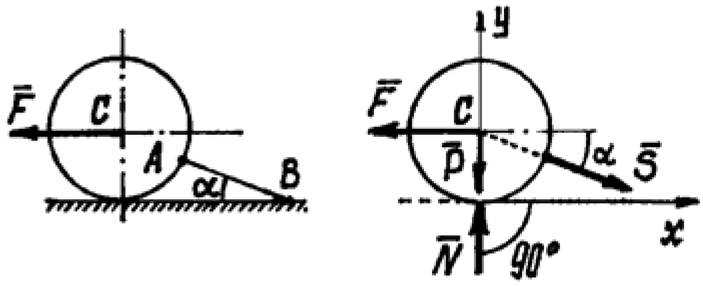


Рис.7

Следует сразу заметить, что все задачи статики решаются по одной схеме, в определённом порядке.

Продемонстрируем ее на примере решения этой задачи.

1. Надо выбрать (назначить) объект равновесия – тело, равновесие которого следует рассмотреть, чтобы найти неизвестные.

В этой задаче, конечно, объект равновесия – шар.

2. Построение расчётной схемы. Расчётная схема – это объект равновесия, изображённый отдельно, свободным телом, без связей, со всеми силами, действующими на него: реакциями и остальными силами.

Показываем реакцию нити $\bar{S}$ и нормальную реакцию плоскости – $\bar{N}$ (рис.7). Кроме них на шар действуют заданные силы $\bar{F}$ и $\bar{P}$.

3. Надо установить какая получилась система сил и составить соответствующие уравнения равновесия.

Здесь получилась система сходящихся сил, расположенных в плоскости, для которой составляем два уравнения (оси можно проводить произвольно):

$$\sum X_i = 0; \; -F + Scos\alpha = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; \; -P + N - Ssin\alpha = 0.$$

4. Решаем систему уравнений и находим неизвестные.

$S = \frac{F}{cos\alpha}$, $\quad N = Ssin\alpha + P = Ftg\alpha + P$.

По условию задачи требовалось найти давление шара на плоскость. А мы нашли реакцию плоскости на шар. Но, по определению следует, что эти силы равны по величине, только давление на плоскость будет направлено в противоположную сторону, вниз.

Пример 3. Тело весом P прикреплено к вертикальной плоскости тремя стержнями (рис.8). Определим усилия в стержнях.

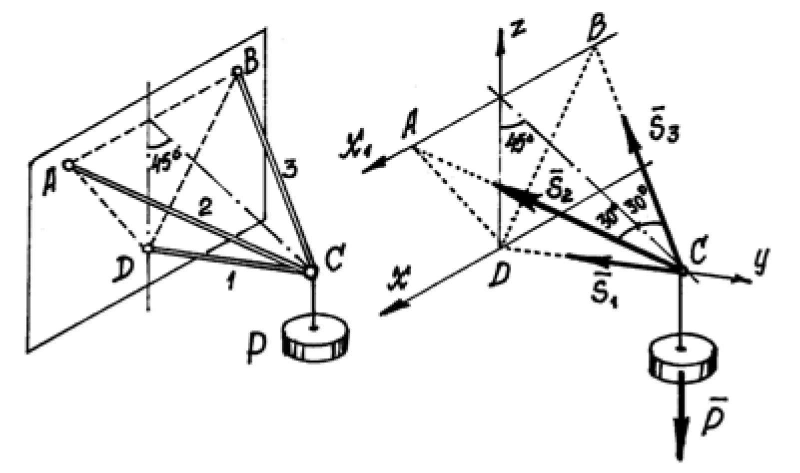


Рис.8

В этой задаче объект равновесия – узел C вместе с грузом. Он нарисован отдельно с реакциями, усилиями в стержнях $\overline{S_1}, \overline{S_2}, \overline{S_3}$, и весом $\bar{P}$. Силы образуют пространственную систему сходящихся сил. Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0;\ S_2 cos60^0 - S_3 cos60^0 = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;\ -S_1 - S_2 cos30^0 \cdot cos45^0 - S_3 cos30^0 \cdot cos45^0 = 0;$$
$$\sum Z_i = 0;\ S_2 cos30^0 \cdot cos45^0 + S_3 cos30^0 \cdot cos45^0 = 0.$$

Из первого уравнения следует: $S_2 = S_3$. Тогда из третьего:

$S_2 = S_3 = P/2cos30^0 \cdot cos45^0 = 2P/\sqrt{6}$, а из второго: $S_1 = -2S_2 cos30^0 \cdot cos45^0 = -P$.

Когда мы направляли усилие в стержне от узла, от объекта равновесия, предполагали, что стержни работают на растяжение. Усилие в стержне CD получилось отрицательным. Это значит – стержень сжат. Так что знак усилия в стержне указывает как работает стержень: на растяжение или на сжатие.

Пример 4. Определить реакции стержней, соединенных шарниром B, если к нему подвешен груз весом Q (рис.9,*а*).

Решение. В соответствии с предложенным выше планом выбираем тело, равновесие которого мы будем рассматривать. Этот выбор, в основном, определяется условиями задачи. Если в этой задаче рассмотреть равновесие подвешенного груза, то мы сумеем найти только силу натяжения нити, которая равна весу тела: $T = Q$ (рис.9,*б*).

Чтобы определить реакции стержней, рассмотрим равновесие точки B. Можно считать, что к ней посредством нити приложена активная сила Q и реакции отброшенных стержней S_A и S_C (рис.9,*в*).

Решим эту задачу аналитически. Выбирая начало отсчета в точке B, составим уравнения равновесия, которые примут вид:

$-S_A \cos\alpha + S_C \cos\beta = 0;$

$S_A \sin\alpha + S_C \sin\beta = Q.$

Чтобы найти отсюда S_C сложим полученные уравнения, умножив предварительно первое из них на $\sin\alpha$, а второе – на $\cos\alpha$:

$S_C\ (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta) = Q\ \cos\alpha.$

Отсюда следует, что $S_C = Q\ \cos\alpha/\sin(\alpha+\beta)$, а поскольку α и β в эти уравнения входят симметрично, то $S_A = Q\ \cos\beta/\sin(\alpha+\beta)$.

Для проверки правильности аналитического решения задачи воспользуемся графическим методом.

Треугольник, образованный из трех сил: Q, S_A и S_C должен быть замкнут, поэтому решение сводится к построению треугольника по известной стороне (Q) и направлению двух других сторон(S_A и S_C). Для этого нужно в масштабе построить вектор Q, а затем из начала и из конца этого вектора провести прямые, параллельные S_A и S_C до их пересечения (рис.9,*г*).

Измерив длины найденных отрезков и пересчитав в масштабе, можно считать поставленную задачу решенной. Направление полученных векторов определяется из условия замкнутости силового многоугольника, то есть конец последнего вектора должен совпадать с началом первого.

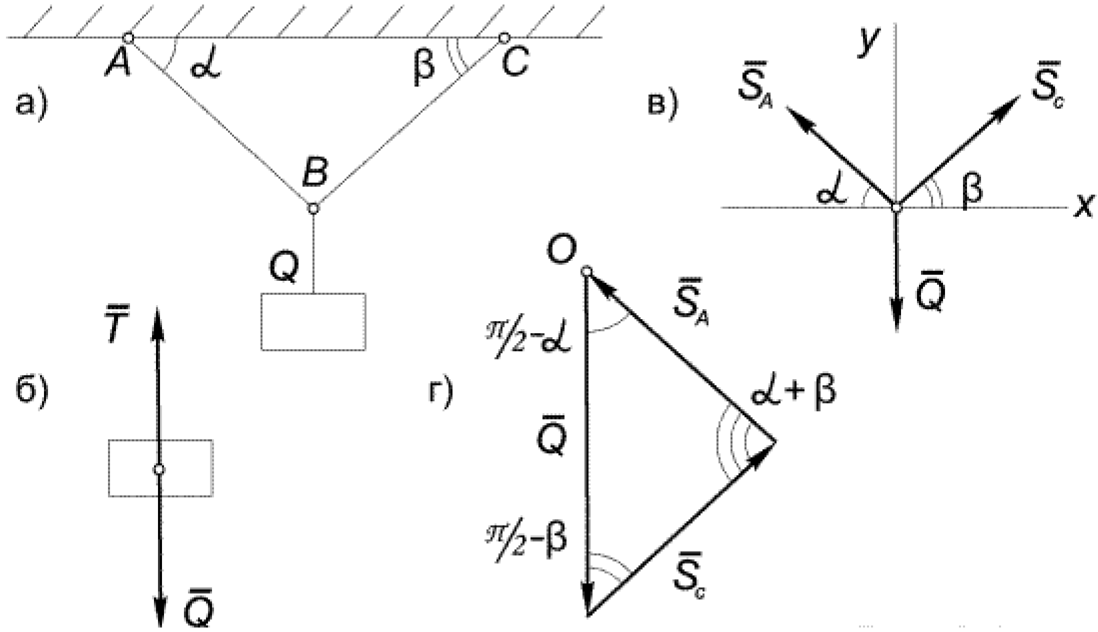


Рис.9

Можно, впрочем, определить величину S_A и S_C и без масштабной линейки, если просто решить построенный треугольник.

С этой целью воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{Q}{sin(\alpha+\beta)}=\frac{S_A}{sin(\pi/2-\beta)}=\frac{S_c}{sin(\pi/2-\alpha)},$$

откуда, заменяя синус дополнительного угла косинусом, получим:

$$S_A=\frac{Qcos\beta}{sin(\alpha+\beta)};\quad S_c=\frac{Qcos\alpha}{sin(\alpha+\beta)}.$$

То есть, результат графического решения совпадает с аналитическим, значит задача решена правильно.

Пример 5. Центр невесомого идеального блока удерживается при помощи двух стержней, соединенных шарнирно в точке B. Через блок переброшена нить, один конец которой закреплен, а к другому – подвешен груз весом Q (рис.10,*а*). Определить реакции стержней, пренебрегая размерами блока.

Решение. Рассмотрим равновесие блока B, к которому приложены силы натяжения нитей T_1 и T_2 и реакции отброшенных стержней S_A и S_C, которые, как и в предыдущем примере мы считаем растянутыми (рис.10,*б*).

Фактически в качестве активной силы выступает вес груза Q, который приложен к блоку с помощью нити, поэтому $T_1 = Q$. По поводу силы T_2 надо отметить, что идеальным – то есть без трения блоком называется механизм, который меняет направление силы натяжения нити, но не ее величину, поэтому $T_1 = T_2 = Q$.

Пренебрегая размерами блока, получим уравновешенную систему сходящихся сил, приложенных в точке B (рис.10,*в*).

Определим реакции S_A и S_C аналитически. Отметим, что если в первое из аналитических уравнений равновесия входят оба неизвестных, то в уравнение $\Sigma Y_i = 0$ неизвестная реакция S_C не войдет, поэтому имеет смысл начать решение задачи именно с этого уравнения:

$$S_A\cos30°+T_2\cos60°-T_1=0.$$

Подставляя сюда значения тригонометрических функций и $T_1 = T_2 = Q$, получим:

$$S_A\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{Q}{2},$$

Откуда

$S_A = Q\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Теперь вернемся к уравнению $\Sigma X_i = 0$:

$-S_A\cos 60° + T_2\cos 30° + S_C = 0,$

или

$S_c = \frac{S_A}{2} - Q\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Подставив найденное выше значение S_A, получим:

$S_c = Q\frac{\sqrt{3}}{6} - Q\frac{\sqrt{3}}{2} = -Q\frac{\sqrt{3}}{3}.$

При этом минус в последнем выражении означает, что стержень BC не растянут, как мы предполагали, а сжат.

Для проверки полученного результата решим эту задачу графически. С этой целью от центра O последовательно откладываем в масштабе известные силы T_1 и T_2, затем от начала первого и от конца последнего вектора проводим прямые, параллельные S_A и S_C до их пересечения (рис.10,*г*).

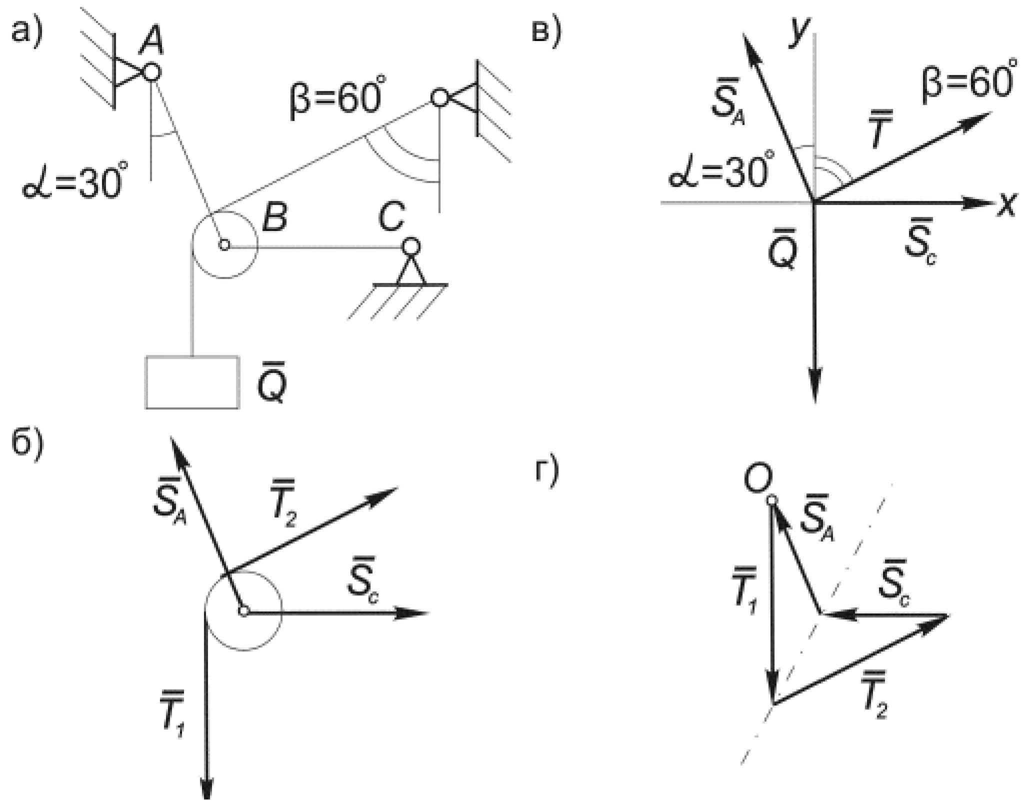


Рис.10

Нетрудно видеть, что построенный силовой многоугольник имеет ось симметрии и $|S_A|=|S_C|$. При этом направление вектора S_C на силовом многоугольнике противоположно первоначальному направлению, указанному на чертеже, то есть стержень BC не растянут, а сжат.

Примечания.

1. В системе аналитических уравнений равновесия оси координат не обязательно должны быть взаимно перпендикулярными, поэтому, если в последнем примере выбрать ось Ox, совпадающую по направлению с силой T_2, мы получим систему уравнений, из которых неизвестные S_A и S_C находятся *независимо одно от другого*.

2. Впоследствии мы увидим, что аналитическое решение можно проверить не только с помощью графического решения, но и аналитически. Впрочем, для системы сходящихся сил изложенный метод решения задач является, по-видимому, оптимальным.

Момент силы относительно центра (или точки).

Опыт показывает, что под действием силы твердое тело может наряду с поступательным перемещением совершать вращение вокруг того или иного центра. *Вращательный эффект силы характеризуется ее моментом.*

Рассмотрим силу $\bar{F}$, приложенную в точке A твердого тела (рис. 11). Допустим, что сила стремится повернуть тело вокруг центра O. Перпендикуляр h, опущенный из центра O на линию действия силы $\bar{F}$, называется *плечом силы* $\bar{F}$ относительно центра O. Так как точку приложения силы можно произвольно перемещать вдоль линии действия, то, очевидно, вращательный эффект силы будет зависеть: 1) от модуля силы F и длины плеча h; 2) от положения плоскости поворота OAB, проходящей через центр O и силу F; 3) от направления поворота к этой плоскости.

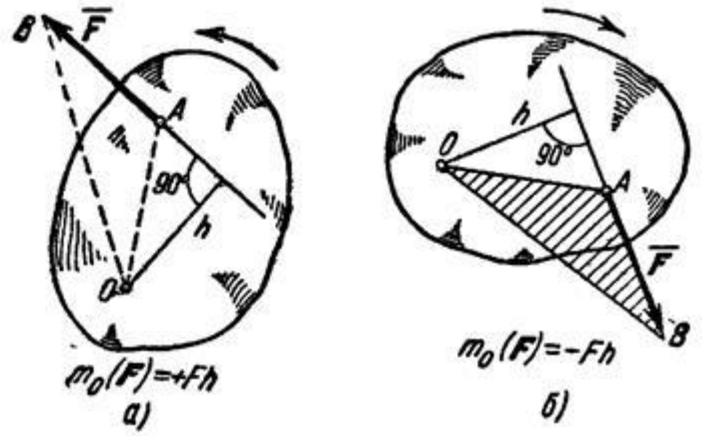


Рис.11

Ограничимся пока рассмотрением систем сил, лежащих в одной плоскости. В этом случае плоскость поворота для всех сил является общей и в дополнительном задании не нуждается.

Тогда для количественного измерения вращательного эффекта можно ввести следующее понятие о моменте силы: моментом силы $\bar{F}$ относительно центра O называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.

Момент силы $\bar{F}$ относительно центра O будем обозначать символом $m_0(F)$. Следовательно,

$$m_0(\bar{F}) = \pm Fh.$$

В дальнейшем условимся считать, что момент имеет знак плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и знак минус, - если по ходу часовой стрелки. Так, для силы $\bar{F}$, изображенной на рис.20,*а*, момент относительно центра O имеет знак плюс, а для силы, показанной на рис.20,*б,* - знак минус.

Отметим следующие свойства момента силы:

1) Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия.

2) Момент силы относительно центра O равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).

3) Момент силы численно выражается удвоенной площадью треугольника OAB (рис. 20,*б*)

$$m_0(\bar{F}) = \pm 2 \text{пл}\,\Delta OAB$$

Этот результат следует из того, что

$$\text{пл}\Delta OAB = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}Fh.$$

Рассмотренное определение момента силы подходит только для плоской системы сил.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Докажем следующую *теорему Вариньона*: *момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.*

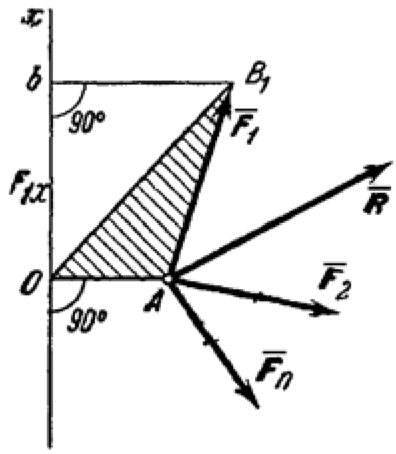


Рис.12

Рассмотрим систему сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_n}$, сходящихся в точке *A* (рис.12). Возьмем произвольный центр *O* и проведем через него ось *Ox*, перпендикулярную к прямой *OA*; положительное направление оси *Ox* выбираем так, чтобы знак проекции любой из сил на эту ось совпадал со знаком ее момента относительно центра *O*.

Для доказательства теоремы найдем соответствующие выражения моментов $m_0(\overline{F_1})$, $m_0(\overline{F_2})$, … . По формуле $m_0 = (\overline{F_1}) = +2\text{пл.}\Delta OAB_1$. Но, как видно из рисунка, $2\text{пл.}\Delta OAB_1 = OA \cdot Ob = OA \cdot F_{1x}$, где F_{1x} - проекция силы $\overline{F_1}$ на ось *Ox*; следовательно

$$m_0(\overline{F_1}) = OA \cdot F_{1x}.$$

Аналогично вычисляются моменты всех других сил.

Обозначим равнодействующую сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_n}$, через $\overline{R}$, где $\overline{R} = \sum \overline{F_k}$. Тогда, по теореме о проекции суммы сил на ось, получим $R_x = \sum F_{kx}$. Умножая обе части этого равенства на *OA*, найдем:

$$OA \cdot R_x = \sum (OA \cdot F_{kx})$$

или,

$$m_0(\overline{R}) = \sum m_0(\overline{F_k}).$$

Пара сил. Момент пары.

Парой сил (или просто парой) называются две силы, равные по величине, параллельные и направленные в противоположные стороны (рис.13). Очевидно, $F_1 = F_2$, $\overline{F_1} = -\overline{F_2}$ и $\overline{F_1} + \overline{F_2} = 0$.

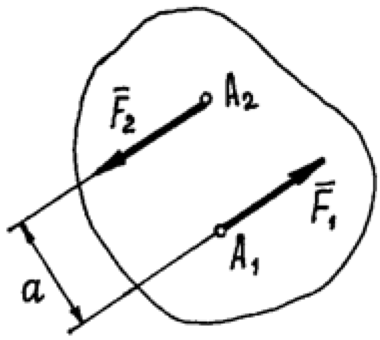


Рис.13

Несмотря на то, что сумма сил равна нулю, эти силы не уравновешиваются. Под действием этих сил, пары сил, тело начнёт вращаться. И вращательный эффект будет определяться моментом пары:

$m = F_1 \cdot a = F_2 \cdot a$.

Расстояние *а* между линиями действия сил называется *плечом пары*.

Если пара вращает тело против часовой стрелки, момент её считается положительным (как на рис.13), если по часовой стрелке – отрицательным.

Для того, чтобы момент пары указывал и плоскость, в которой происходит вращение, его представляют вектором.

Вектор момента пары $\bar{m}$ направляется перпендикулярно плоскости, в которой расположена пара, в такую сторону, что если посмотреть оттуда, увидим вращение тела против часовой стрелки (рис. 14).

Нетрудно доказать, что вектор момента пары $\bar{m} = \bar{r} \times \bar{F_1}$ – есть вектор этого векторного произведения (рис. 14). И заметим, что он равен вектору момента силы $\bar{F_1}$ относительно точки *А*, точки приложения второй силы:

$\bar{m} = \bar{M}_A(\bar{F_1})$.

О точке приложения вектора $\bar{m}$ будет сказано ниже. Пока приложим его к точке *А*.

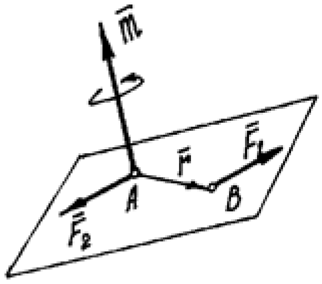


Рис.14

Свойства пар

1) Проекция пары на любую ось равна нулю. Это следует из определения пары сил.

2) Найдём сумму моментов сил $\bar{F_1}$ и $\bar{F_2}$ оставляющих пару, относительно какой-либо точки *О* (рис.15).

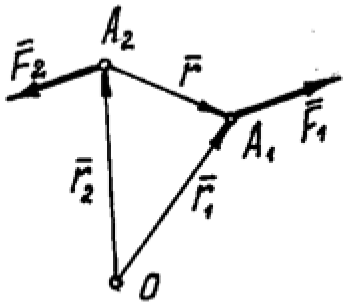


Рис.15

Покажем радиусы-векторы точек A_1 и A_2 и вектор $\bar{r}$, соединяющий эти точки. Тогда момент пары сил относительно точки *О*

$\overline{M_0}(\bar{F_1}, \bar{F_2}) = \overline{M_0}(\bar{F_1}) + \overline{M_0}(\bar{F_2}) = \bar{r_1} \times \bar{F_1} + \bar{r_2} \times \bar{F_2}$.

Но $\bar{r_1} = \bar{r_2} + \bar{r}$. Поэтому $\overline{M_0}(\bar{F_1}, \bar{F_2}) = (\bar{r_2} + \bar{r}) \times \bar{F_1} + \bar{r_2} \times \overline{F_2} = \bar{r_2} \times (\bar{F_1} + \overline{F_2}) + \bar{r} \times \bar{F_1}$.

Но $\bar{F_1} + \overline{F_2} = 0$, а $\bar{r} \times \bar{F_1} = \bar{m}$.

Значит $\overline{M_0}(\bar{F_1}, \bar{F_2}) = \bar{m}$.

Момент пары сил относительно любой точки равен моменту этой пары.

Отсюда следует, что, во-первых, где бы не находилась точка *О* и, во-вторых, где бы не располагалась эта пара в теле и как бы она не была повёрнута в своей плоскости, действие её на тело будет одинаково. Так как момент сил, составляющих пару, в этих случаях один и тот же, равный моменту этой пары $\bar{m}$.

Поэтому можно сформулировать ещё два свойства.

3) Пару можно перемещать в пределах тела по плоскости действия и переносить в любую другую параллельную плоскость.

4) Так как действие на тело сил, составляющих пару, определяется лишь её моментом, произведением одной из сил на плечо, то у пары можно изменять силы и плечо, но так, чтобы момент пары остался прежним. Например, при силах $F_1=F_2=5$ Н и плече $a = 4$ см момент пары $m = 20$ Н·см. Можно силы сделать равными 2 Н, а плечо $a = 10$ см. При этом момент останется прежним 20Нсм и действие пары на тело не изменится.

Все эти свойства можно объединить и, как следствие, сделать вывод, что пары с одинаковым вектором момента $\overline{m}$ и неважно где расположенные на теле, оказывают на него равное действие. То есть такие пары *эквивалентны.*

Исходя из этого, на расчётных схемах пару изображают в виде дуги со стрелкой, указывающей направление вращения, и рядом пишут величину момента m (рис.15.1). Или, если это пространственная конструкция, показывают только вектор момента этой пары. И вектор момента пары можно прикладывать к любой точке тела. Значит вектор момента пары $\overline{m}$ – свободный вектор. Такое упрощенное изображение оправдано тем, что пара сил характеризуется моментом, а не ее положением в плоскости. Но если необходимо определять не внешние силы, а внутренние в разных сечениях элемента, как это делается в сопротивлении материалов, то важен знак и место приложения пары сил.

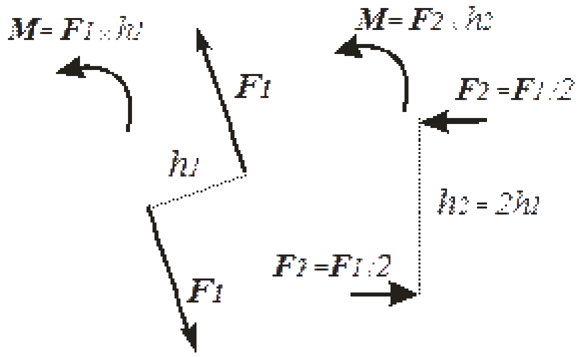


Рис.15.1. Эквивалентные пары сил

И ещё одно дополнительное замечание. Так как момент пары равен вектору момента одной из сил её относительно точки приложения второй силы, то момент пары сил относительно какой-либо оси z – есть проекция вектора момента пары $\overline{m}$ на эту ось:

$m_z = m \cdot cos\gamma$,

где γ – угол между вектором $\overline{m}$ и осью z.

Сложение пар.

Пусть даны две пары с моментами m_1 и m_2, расположенные в пересекающихся плоскостях (рис.16).

Сделаем у пар плечи одинаковыми, равными $a = AB$. Тогда модули сил, образующих первую пару, должны быть равны: $F_1 = F_1' = m_1/a$, а образующих вторую пару: $F_2 = F_2' = m_2/a$.

Эти пары показаны на рис.16, где $\overline{F_1'} = -\overline{F_1}, \overline{F_2'} = -\overline{F_2}$. И расположены они в своих плоскостях так, что плечи пар совпадают с прямой AB на линии пересечения плоскостей.

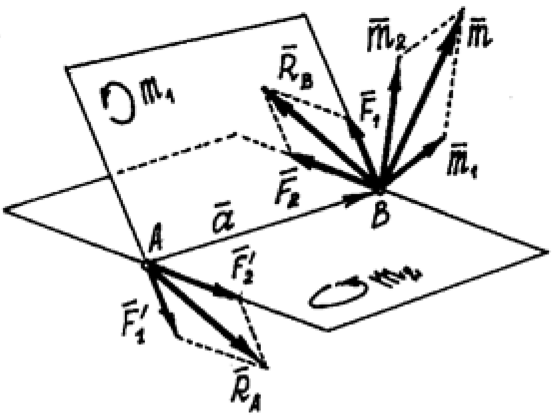


Рис.16

Сложив силы, приложенные к точкам A и B, построением параллелограммов, получим их равнодействующие $\overline{R_B} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ и $\overline{R_A} = \overline{F_1'} + \overline{F_2'}$. Так как $\overline{R_B} = -\overline{R_A}$, то эти силы $\overline{R_A}$ и $\overline{R_B}$ будут образовывать пару, момент которой $\overline{m} = \bar{a} \times \overline{R_B}$, где $\bar{a}$ – радиус-вектор точки B, совпадающий с AB.

Так как $\bar{R}_B = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$, то момент полученной пары

$\bar{m} = \bar{a} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \bar{a} \times \bar{F}_1 + \bar{a} \times \bar{F}_2 = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$.

Следовательно, в результате сложения пар, расположенных в пересекающихся плоскостях, получится пара сил. Момент её будет равен векторной сумме моментов слагаемых пар.

При сложении нескольких пар, действующих в произвольных плоскостях, получим пару с моментом

$\bar{m} = \sum \bar{m}_i$.

Конечно, эта результирующая пара будет располагаться в плоскости перпендикулярной вектору $\bar{m}$.

Равенство нулю результирующей пары будет означать, что пары, действующие на тело, уравновешиваются. Следовательно, условие равновесия пар

$\sum \bar{m}_i = 0$.

Это является необходимым и достаточным условием равновесия систем пар.

Если пары расположены в одной плоскости, векторы моментов их будут параллельны. И момент результирующей пары можно определить как алгебраическую сумму моментов пар.

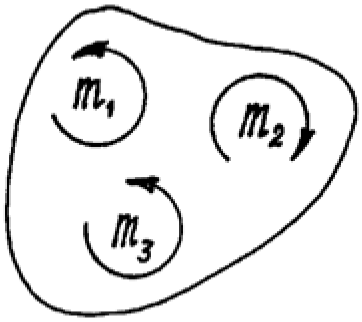


Рис.17

Например, пары, показанные на рис.17, расположены в одной плоскости и моменты их:

m_1=2 Нсм , m_2=5 Нсм, m_3=3 Нсм. Пары уравновешиваются, потому что алгебраическая сумма их моментов равна нулю:

$$\sum \bar{m}_i = m_1 - m_2 + m_3 = 2 - 5 + 3 = 0$$

Пример 6. Определить опорные реакции рамы, загруженной системой пар (рис.18).

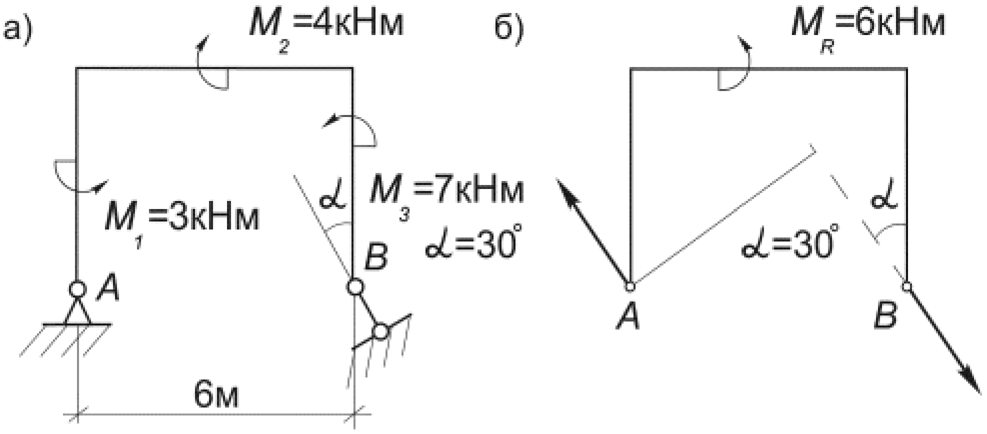


Рис.18

Решение. Заменим систему пар, приложенных к раме, результирующей парой по формуле:

$M_R = M_1 - M_2 + M_3 = 3 - 4 + 7 = 6$ кНм.

Из условия равновесия систем пар $\sum \bar{m}_i = 0$ следует, что активную пару M_R, приложенную к раме, может уравновесить только пара сил, образованных опорными реакциями, поэтому линия действия R_A должна быть параллельной R_B и

$M_R + M(R_A, R_B) = 0$,

откуда $R_A = R_B = M_R/d$, где $d = 6\cos 30° = 3\sqrt{3}$ м – плечо пары (R_A, R_B).

Итак, $R_A = R_B = 6/(3\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})/3$ м.

Теорема о параллельном переносе силы.

Одной из основных задач, решаемых статикой, является замена одной системы сил другой – эквивалентной ей.

Такая процедура позволяет все многообразие систем сил свести к простейшим *каноническим* системам, классифицировать их и получить уравнения равновесия, необходимые для решения практических задач. Ключевую роль в проведении таких преобразований систем сил играет следующая теорема, называемая *Лемма Пуансо*.

Равнодействующая системы сходящихся сил непосредственно находится с помощью аксиомы параллелограмма сил. Для двух параллельных сил эта задача была решена путем приведения их к сходящимся силам. Очевидно, что аналогичную задачу легко будет решить и для произвольной системы сил, если найти и для них метод приведения к силам, приложенным в одной точке.

Ранее мы установили, что вектор силы можно переносить по линии действия в любую точку тела.

Попробуем силу $\bar{F}$ (рис. 19) перенести в какую-нибудь точку O, не расположенную на линии действия.

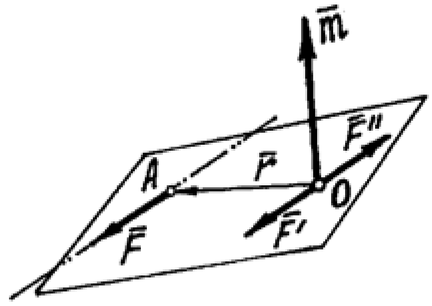


Рис.19

Приложим к этой точке две уравновешивающиеся силы $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные силе $\bar{F}$ и равные ей по величине: $F' = F'' = F$

В результате получим силу $\bar{F}' = \bar{F}$, приложенную к точке *O*. То есть мы как бы перенесли заданную силу $\bar{F}$ из точки *A* в точку *O*, но при этом появилась пара, образованная силами $\bar{F}$ и $\bar{F}''$. Момент этой пары $\bar{m} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0(\bar{F})$, равен моменту заданной силы $\bar{F}$ относительно точки *O*.

Этот процесс замены силы $\bar{F}$ равной ей силой $\bar{F}'$ и парой называется приведением силы к точке *O*.

Точка *O* называется *точкой приведения*; сила $\bar{F}'$, приложенная к точке приведения, – *приведённой силой*. Появившаяся пара – *присоединённой парой*.

Приведение плоской системы сил к данному центру.

Пусть на твердое тело действует какая-нибудь система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$, лежащих в одной плоскости. Возьмем в этой плоскости произвольную точку *O*, которую назовем центром приведения, и, перенесем все силы в центр *O* (рис. 20, *а*). В результате на тело будет действовать система сил $\bar{F}_1' = \bar{F}_1, \bar{F}_2' = \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n' = \bar{F}_n$ приложенных в центре *O*, и система пар, моменты которых будут равны: $m_1 = m_0(\bar{F}_1),\ \ m_2 = m_0(\bar{F}_2),\ m_n = m_0(\bar{F}_n)$

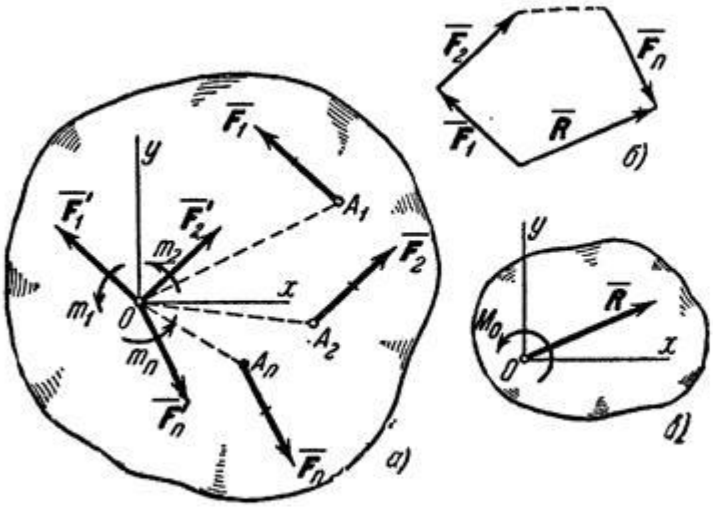


Рис.20

Силы, приложенные в центре *O*, можно заменить одной силой $\bar{R}$, приложенной в том же центре; при этом $\bar{R} = \sum \bar{F}_k'$ или $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$

Точно так же, по теореме о сложении пар, все пары можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости. Момент этой пары $M_0 = \sum m_k$ или $M_0 = \sum m_0(\bar{F}_k)$.

Величина $\bar{R}$, равная геометрической сумме всех сил системы, называется, как известно, *главным вектором системы*; величину M_0, равную сумме моментов всех сил системы относительно центра *O*, будем называть *главным моментом системы* относительно центра *O*.

В результате мы доказали следующую теорему: всякая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру *O* заменяется одной силой *R*, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения *O*, и одной парой с моментом M_0, равным главному моменту системы относительно центра *O* (рис. 20, *в*).

Примечания:

1. Для плоской системы сил под главным моментом системы часто также понимают величину этого момента.

2. Очевидно, что главный вектор R_0 не зависит, а главный момент M_0 зависит от выбора центра приведения.

Частные случаи приведения плоской системы сил.

В зависимости от значений главного вектора R_0 и главного момента M_0 возможны следующие случаи приведения плоской системы сил.

1) R_0 =0, M_0 =0 – система сил находится в равновесии;

2) R_0 =0, $M_0 \neq 0$ – система эквивалентна паре сил с моментом, равным главному моменту системы, который в этом случае не зависит от выбора центра приведения;

3) $R_0 \neq 0$, M_0 =0 – система эквивалентна равнодействующей R, равной и эквивалентной главному вектору системы R_0 , линия действия которой проходит через центр приведения: $R = R_0$,$R \sim R_0$;

4) $R_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$ – система эквивалентна равнодействующей R, равной главному вектору системы R_0, ее линия действия проходит на расстоянии $d = |M_0|/ R_0$ от центра приведения (рис.20,*б*).

Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия: $R = 0$, $M_0 = 0$.

Здесь O - любая точка плоскости.

Из этого условия следуют *уравнения равновесия произвольной плоской системы сил*, которые можно записать в трех различных формах:

1) Первая форма:

$\Sigma M_A = 0$;

$\Sigma X = 0$;

$\Sigma Y = 0$.

2) Вторая форма:

$\Sigma M_A = 0$;

$\Sigma M_B = 0$;

$\Sigma Y = 0$, где ось Oy неперпендикулярна отрезку AB.

3) Третья форма:

$\Sigma M_A = 0$;

$\Sigma M_B = 0$;

$\Sigma M_C = 0$, где точки A, B и C не лежат на одной прямой.

Равенства выражают, следующие аналитические условия равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

Теорема о трех моментах. Для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов этих сил системы относительно трех любых точек, расположенных в плоскости действия сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0; \ \sum M_B(\bar{F}_i) = 0, \ \sum M_C(\bar{F}_i) = 0.$$

Равновесие плоской системы параллельных сил.

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, мы можем направить ось Ox перпендикулярно к силам, а ось Oy параллельно им (рис. 21). Тогда проекция каждой из сил на Ox будет равна нулю и первое из 3-х равенств обратится в тождество вида 0 = 0. В результате для параллельных сил останется два условия равновесия: $\sum F_{ky} = 0, \ \sum m_0(\bar{F}_k) = 0$.

Где ось Oy параллельна силам.

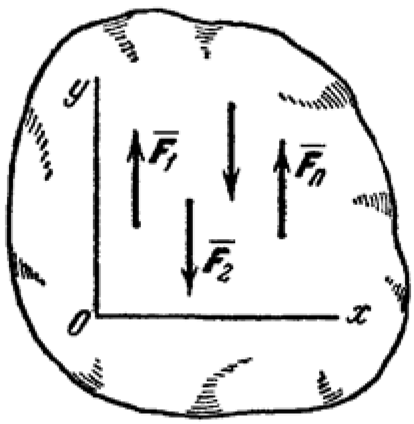


Рис.21

Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил.

Пусть даны две параллельные силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$, направленные в одну сторону и приложенные к точкам A_1 и A_2 (рис.22).

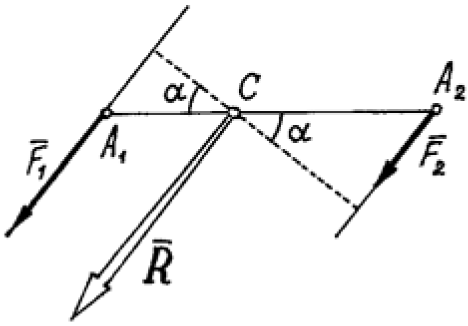


Рис.22

Конечно, величина их равнодействующей $R = F_1 + F_2$. Вектор её параллелен силам и направлен в ту же сторону. С помощью теоремы Вариньона найдём точку приложения равнодействующей – точку *C*. По этой теореме $M_C(\vec{R}) = \sum M_C(\vec{F_i})$.

Значит $0 = F_1 \cdot A_1C \cdot cos\alpha - F_2 \cdot A_2C \cdot cos\alpha.$

Отсюда $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$. То есть точка приложения равнодействующей делит расстояние между точками A_1 и A_2 на части обратно пропорциональные силам.

Если параллельные силы направлены в противоположные стороны (рис.23), то аналогично можно доказать, что равнодействующая по величине будет равна разности сил: $R = F_2 - F_1$ (если $F_2 > F_1$), параллельна им, направлена в сторону большей силы и расположена за большей силой – в точке *C*. А расстояния от точки *C* до точек приложения сил обратно пропорциональны силам: $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$

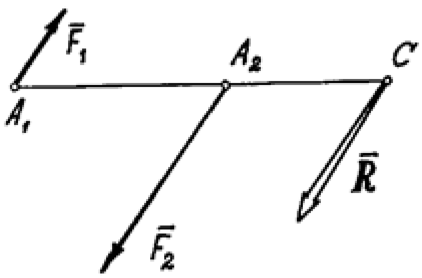


Рис.23

Следует заметить, что если точка приложения равнодействующей расположена на одной прямой с точками A_1 и A_2, точками приложения сил, то, при повороте этих сил в одну сторону на одинаковый угол, равнодействующая также повернётся вокруг точки приложения C в том же направлении, и останется параллельной им.

Такая точка приложения равнодействующей называется *центром параллельных сил*.

Конечно, если хотя бы одну из сил перенести по своей линии действия в другую точку, то и точка приложения равнодействующей, центр параллельных сил, тоже переместится по линии действия.

Следовательно, положение центра параллельных сил зависит от координат точек приложения сил.

Центром нескольких параллельных сил, найденный последовательным сложением каждых двух сил, будем называть точку C, радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_c = \sum F_i \vec{r}_i / \sum F_i = \sum F_i \vec{r}_i / R \quad (1)$$

где $\vec{r}_i$ - радиусы-векторы точек приложения сил; $R = \sum F_i$ – величина равнодействующей параллельных сил, равная алгебраической сумме этих сил (знак силы определяется направлением, которое заранее выбирается и считается положительным).

Используя (1), нетрудно найти координаты центра параллельных сил. Если радиусы-векторы откладывать из начала координат, то проекции радиусов-векторов точек на оси будут равны их координатам. Поэтому, проектируя векторное равенство (1) на оси, получим

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{R}; \quad y_c = \sum \frac{F_i y_i}{R}; \quad z_c = \sum \frac{F_i z_i}{R}$$

где x_i, y_i, z_i – координаты точек приложения сил.

Понятие о распределенной нагрузке.

Наряду с рассмотренными выше сосредоточенными силами строительные конструкции и сооружения могут подвергаться воздействию *распределенных нагрузок* – по объему, по поверхности или вдоль некоторой линии – и определяемых ее *интенсивностью.*

Примером нагрузки, *распределенной по площади*, является снеговая нагрузка, давление ветра, жидкости или грунта. Интенсивность такой поверхностной нагрузки имеет размерность давления и измеряется в кН/м^2 или килопаскалях (кПа = кН/м^2).

При решении задач очень часто встречается нагрузка, *распределенная по длине балки*. Интенсивность q такой нагрузки измеряется в кН/м.

Рассмотрим балку, загруженную на участке $[a, b]$ распределенной нагрузкой, интенсивность которой изменяется по закону $q = q(x)$. Для определения опорных реакций такой балки нужно заменить распределенную нагрузку эквивалентной сосредоточенной. Это можно сделать по следующему правилу:

Рассмотрим частные случаи распределенной нагрузки.

а) общий случай распределенной нагрузки (рис.24)

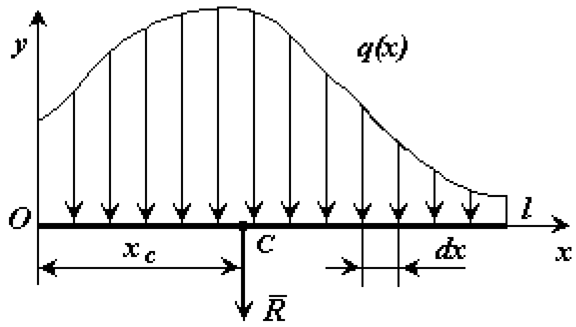


Рис.24

q(x) - интенсивность распределенной силы [Н/м],

$dR = q(x) \cdot dx$ - элементарная сила.

l – длина отрезка

Распределенная по отрезку прямой сила интенсивности q(x) эквивалентна сосредоточенной силе $R = \int_0^l q(x)dx$.

Сосредоточенная сила прикладывается в точке C (центре параллельных сил) с координатой

$$x_C = \int_0^l xq(x)dx / R$$

б) постоянная интенсивность распределенной нагрузки (рис.25)

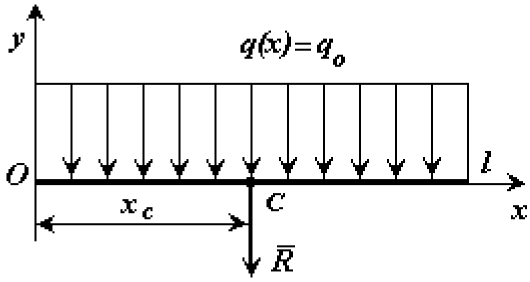


Рис.25

$$R = \int_0^l q_0 dx = q_0 \cdot l$$

$$\int_0^l x q_0 dx = q_0 \cdot l^2/2$$

$$x_C = l/2$$

в) интенсивность распределенной нагрузки, меняющаяся по линейному закону (рис.26)

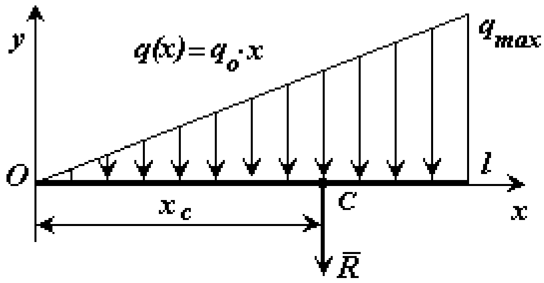


Рис.26

$$R = \int_0^l q_0 x dx = q_0 \cdot l^2/2$$

$$R = \int_0^l q_0 x dx = q_0 \cdot l^2/2$$

$$x_C = 2 \cdot l/3$$

Расчет составных систем.

Под *составными системами* будем понимать конструкции, состоящие из нескольких тел, соединенных друг с другом.

Прежде, чем переходить к рассмотрению особенностей расчета таких систем, введем следующее определение.

Статически определимыми называются такие задачи и системы статики, для которых число неизвестных реакций связей не превышает максимально допустимого числа уравнений.

Если число неизвестных больше числа уравнений, соответствующие *задачи и системы называются статически неопределимыми. При этом разность между числом неизвестных и числом уравнений называется степенью статической неопределимости системы.*

Для любой плоской системы сил, действующих на твердое тело, имеется три независимых условия равновесия. Следовательно, для любой плоской системы сил из условий равновесия можно найти не более трех неизвестных реакций связи.

В случае пространственной системы сил, действующих на твердое тело, имеется шесть независимых условия равновесия. Следовательно, для любой пространственной системы сил из условий равновесия можно найти не более шести неизвестных реакций связи.

Поясним это на следующих примерах.

1. Пусть центр невесомого идеального блока (пример 4) удерживается при помощи не двух, а трех стержней: AB, BC и BD и нужно определить реакции стержней, пренебрегая размерами блока.

С учетом условий задачи мы получим систему сходящихся сил, где для определения трех неизвестных: S_A, S_C и S_D можно составить по-прежнему систему только двух уравнений: $\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0$. Очевидно, поставленная задача и соответствующая ей система будут статически неопределимыми.

2. Балка, жестко защемленная на левом конце и имеющая на правом конце шарнирно-неподвижную опору, загружена произвольной плоской системой сил (рис.27).

Для определения опорных реакций можно составить только три уравнения равновесия, куда войдут 5 неизвестных опорных реакций: X_A, Y_A, M_A, X_B и Y_B. Поставленная задача будет дважды статически неопределимой.

Такую задачу нельзя решить в рамках теоретической механики, предполагая рассматриваемое тело абсолютно твердым.

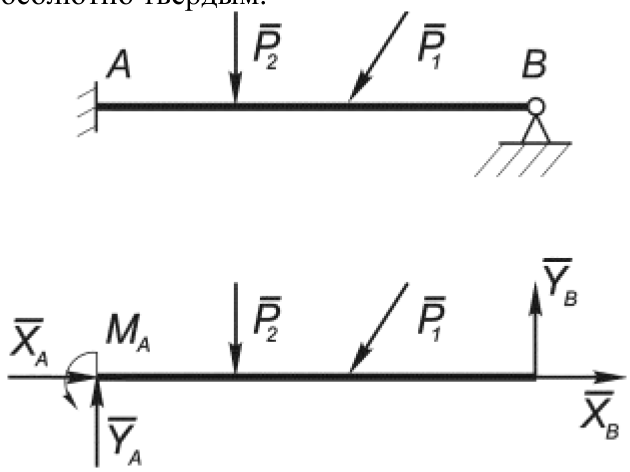


Рис.27

Вернемся к изучению составных систем, типичным представителем которых является трехшарнирная рама (рис. 28,*а*). Она состоит из двух тел: AC и BC, соединенным *ключевым* шарниром C. На примере этой рамы рассмотрим *два способа определения опорных реакций составных систем.*

1 способ. Рассмотрим тело AC, загруженное заданной силой P, отбросив в соответствии с аксиомой 7 все связи и заменив их соответственно реакциями внешних (X_A, Y_A) и внутренних (X_C,Y_C) связей (рис. 28,*б*).

Аналогично можно рассмотреть равновесие тела BC под действием реакций опоры B – (X_B, Y_B) и реакций в соединительном шарнире C – (X_C', Y_C') , где в соответствии с аксиомой 5: $X_C = X_C'$, $Y_C = Y_C'$.

Для каждого из этих тел можно составить три уравнения равновесия, таким образом, общее число неизвестных: X_A, Y_A , $X_C = X_C'$, $Y_C = Y_C'$, X_B , Y_B равняется суммарному числу уравнений, и задача является статически определимой.

Напомним, что по условию задачи требовалось определить только 4 опорные реакции, нам же пришлось проделать дополнительную работу, определяя реакции в соединительном шарнире. В этом и заключается недостаток данного способа определения опорных реакций.

2 способ. Рассмотрим равновесие всей рамы ABC, отбросив только внешние связи и заменив их неизвестными опорными реакциями X_A, Y_A, X_B , Y_B .

Полученная система состоит из двух тел и не является абсолютно твердым телом, поскольку расстояние между точками A и B может изменяться вследствие взаимного поворота обеих частей относительно шарнира C. Тем не менее можно считать, что совокупность сил, приложенных к раме ABC образует систему, если воспользоваться аксиомой отвердевания (рис.28,*в*).

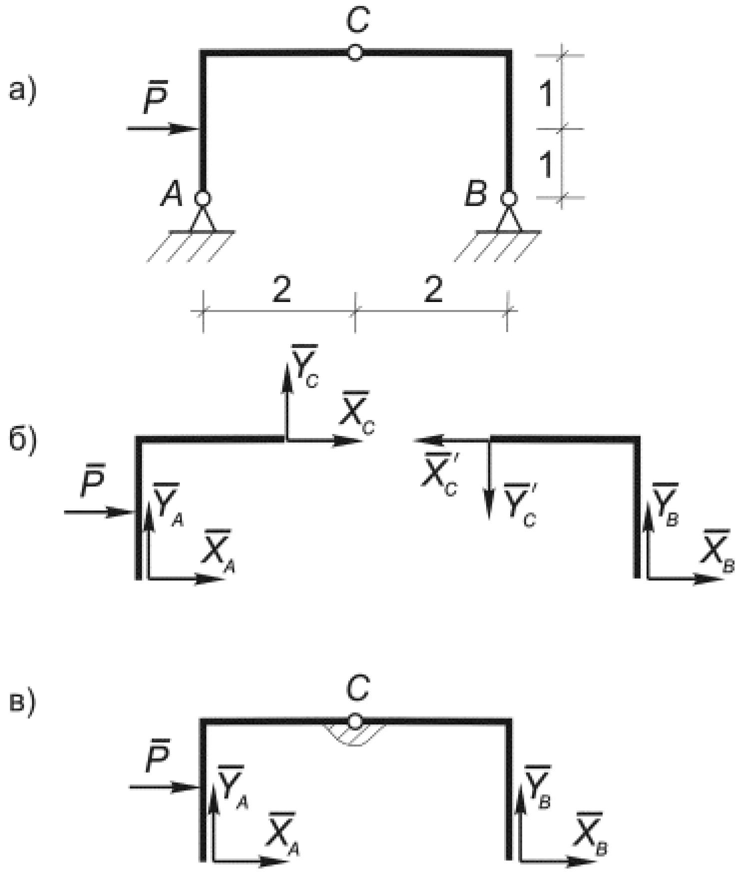


Рис.28

Итак, для тела ABC можно составить три уравнения равновесия. Например:

$\Sigma M_A = 0$;

$\Sigma X = 0$;

$\Sigma Y = 0$.

В эти три уравнения войдут 4 неизвестных опорных реакции X_A, Y_A, X_B и Y_B. Отметим, что попытка использовать в качестве недостающего уравнения, например такое: $\Sigma M_B = 0$ к успеху не приведет, поскольку это уравнение будет линейно зависимым с предыдущими. Для получения линейно независимого четвертого уравнения необходимо рассмотреть равновесие другого тела. В качестве него можно взять одну из частей рамы, например – BC. При этом нужно составить такое уравнение, которое содержало бы «старые» неизвестные X_A, Y_A, X_B, Y_B и не содержало новых. Например, уравнение: $\Sigma X^{(BC)} = 0$ или подробнее: $-X_C' + X_B = 0$ для этих целей не подходит, поскольку содержит «новое» неизвестное X_C', а вот уравнение $\Sigma M_C^{(BC)} = 0$ отвечает всем необходимым условиям. Таким образом, искомые опорные реакции можно найти в следующей последовательности:

$\Sigma M_A = 0; \rightarrow Y_B = P/4$;

$\Sigma M_B = 0; \rightarrow Y_A = -P/4$;

$\Sigma M_C^{(BC)} = 0; \rightarrow X_B = -P/4$;

$\Sigma X = 0; \rightarrow X_A = -3P/4$.

Для проверки можно использовать уравнение: $\Sigma M_C^{(AC)} = 0$ или, подробнее: $-Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 2 + P \cdot 1 = P/4 \cdot 2 - 3P/4 \cdot 2 + P \cdot 1 = P/2 - 3P/2 + P = 0$.

Отметим, что в это уравнение входят все 4 найденные опорные реакции: X_A и Y_A – в явной форме, а X_B и Y_B – в неявной, поскольку они были использованы при определении двух первых реакций.

Заключение.

Из основной теоремы статики следует, что любая система сил и моментов, действующих на твердое тело, может быть приведена к выбранному центру и заменена в общем случае **главным вектором** и **главным моментом**.

Если система уравновешена, то получаем условия равновесия: $R=0,\ M_o=0$. Из этих условий для пространственной системы сил получается шесть уравнений равновесия, из которых могут быть определены шесть неизвестных:

$$\sum x_i = 0, \quad \sum M_{ix}=0;$$
$$\sum y_i = 0, \quad \sum M_{iy}=0;$$
$$\sum z_i = 0, \quad \sum M_{iz}=0.$$

Для плоской системы сил (например, в плоскости Oxy) из этих уравнений получаются только три:

$$\sum x_i=0;$$
$$\sum y_i=0;$$
$$\sum M_o=0,$$

причем оси и точка O , относительно которой пишется уравнение моментов, выбираются произвольно. Это **первая форма** уравнений равновесия.

Уравнения равновесия могут быть записаны иначе:

$$\sum x_i = 0;$$
$$\sum M_A=0; \quad \sum M_B=0.$$

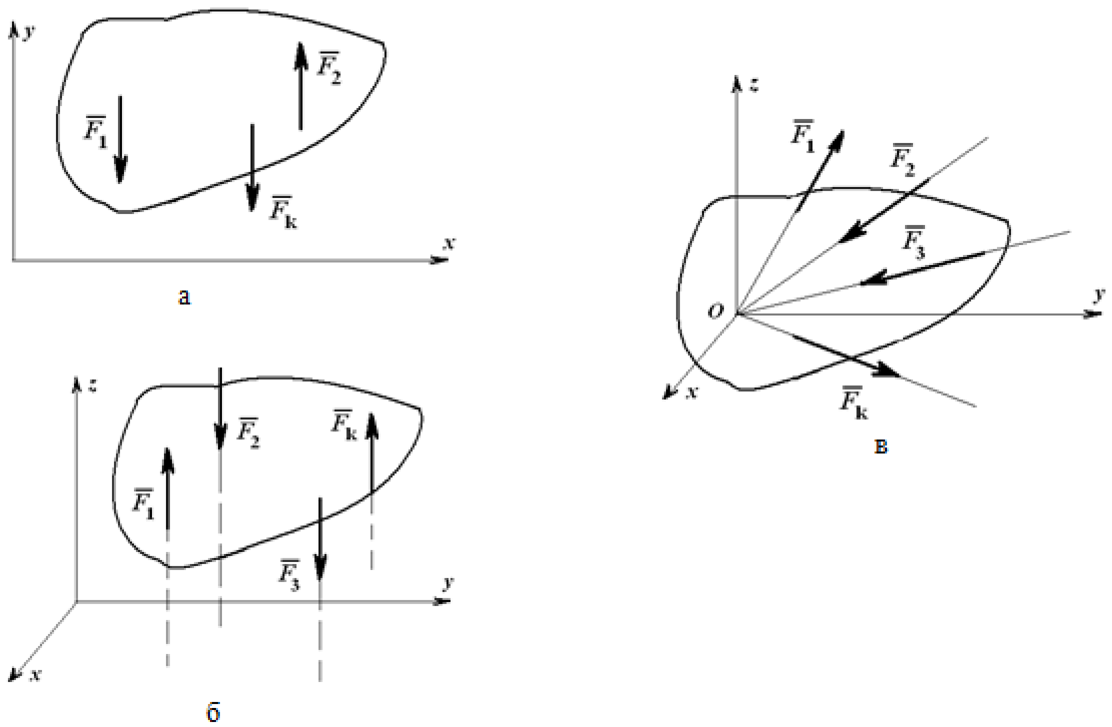
Это **вторая форма** уравнений равновесия, причем ось Ox не должна быть перпендикулярна линии, проходящей через точки A и B .

$$\sum M_A=0;$$
$$\sum M_B=0;$$
$$\sum M_C=0.$$

Это **третья форма** уравнений равновесия, причем точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ не должны лежать на одной прямой. Предпочтительность написания форм уравнений равновесия зависит от конкретных условий задачи и навыков решающего.

При действии на тело плоской системы параллельных сил одно из уравнений исчезает и остаются два уравнения (рисунок 1.26, а):

$$\sum \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{0};$$
$$\sum \boldsymbol{M_o} = \boldsymbol{0}.$$



Для пространственной системы параллельных сил (рисунок 1.26, б) могут быть записаны три уравнения равновесия:

$$\sum \boldsymbol{z_i} = \boldsymbol{0};$$
$$\sum \boldsymbol{M_{ix}} = \boldsymbol{0}; \quad (1.25)$$
$$\sum \boldsymbol{M_{iy}} = \boldsymbol{0}.$$

Для системы сходящихся сил (линии действия которых пересекаются в одной точке) можно написать три уравнения для пространственной системы:

$$\sum \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{0};$$
$$\sum \boldsymbol{y_i} = \boldsymbol{0}; \quad (1.26)$$

$$\sum z_i = 0$$

и два уравнения для плоской системы:

$$\sum x_i = 0;$$

$$\sum y_i = 0. \quad (1.27)$$

В каждом из вышеприведенных случаев число неизвестных, находимых при решении уравнений, соответствует числу записанных уравнений равновесия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцанский Л.Г. Лурье. А.И. Курс теоретической механики. М., Высшая школа -1980 г.

2. Яблонский А. А. Никифррова В.М. Курс теоретической механики. М. Высшая школа 1985 г.

3. В.В. Добронравов. Н.Н. Никитен. Курс теоретической механики. М., Высшая школа-1983 г.

4. Воронков И.М. курс теоретической механики.

5. http://www.isopromat.ru

6. http://dic.academic.ru