ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университети

Математика факультети

Әмелий математика ҳәм информатика кафедрасы

«Әмелий математика ҳәм информатика» бағдарының IV курс студенти Байжанова Гулшаттың

Питкериў қәнигелик жумысы

Темасы: Параболалық типтеги теңлемелердиң орнықлылығын дәслепки берилгенлер бойынша изертлеў

Илимий басшы: **доц. Ж.П. Алланазаров**

Кафедра баслығы: **доц. Ш. Ешмуратов**

Нөкис-2011

Мазмуны

Кирисиў

Физиканың ҳәм техниканың көплеген мәселери сызықлы ямаса сызықлы емес дара туўындылы дифференциал теңлемелерге алып келинеди. Бундай дифференциал теңлемелерди шешиўдиң универсал ҳәм оғада нәтийжели методлардың бири болып, бул–шекли айырмалары методлар ямаса торлар методы болып есапланады. Бул метод берилген теңлемениң жуўық шешимин алгебралық теңлемелер системасын шешиўге алып келеди.

Дифференциал теңлемелер ушын басланғыш ҳәм шегаралық мәселелердиң дәл шешимин көпшилик жағдайда табыў мүмкин болмайды. Соның ушын бундай жағдайда усындай мәселелердиң жуўық шешимин табыў зәрүрлиги пайда болады. Қаралып атырған питкериў қәнигелик жумысы тийкарғы дыққат берилген дифференциаллық теңлеме ушын шекли айырмалы схеманы дүзиў ҳәм оның изленип атырған шешимине минимал сыйпақлылық талап етилгенде, оның жыйнақлылық тезлигин изертлеў турады. Бул питкериў қанигелик жумысында дәслеп шекли айырмалар усылының дәслепки тийкарғы түсиниклери ҳәм олардың қәсийетлери менен таныстырылады.

Есаплаў техникасының раўажланыўы менен ҳәм оны илимий–техникалық мәселелерди шешиўге кең қолланыўында математикалық-физиканың мәселелерин шешиўдиң дискретлик методлары–шекли айырмалар методы ҳәм шекли элементлер методы бир қанша практикалық қолланыўларға себепши болды. Бул методлар дискретлик схеманы дүзиў ҳәм изертлеў принципи бойынша ажыралып турсада, ал идеялық тийкары бирдей ҳәм олар ҳәзирги ўақытлары математикалық-физиканың мәселелерин санлы шешиўдиң тийкарғы усыллары есапланады. Бул методлар универсаллық, майысқақлық (ийилиўшең, яғный ҳәр қыйлы жағдайларда қолланыў имканияты) ҳәм модуллик қәсийетлерине ийе.

Көплеген комплекслик мәселелерди изертлеў ушын дискретлик методларды қолланыў дәлликке, экономиялылыққа, қолланыўда әпиўайылыққа ҳәм орнықлылыққа жоқары талапларды қояды. Әдетте, көпшилик ҳақыйқый мәселелер сызықлы емес, қурамалы жағдайларда қойылған, улыўма жағдайда - үш өлшемли областта ҳәм бир неше белгисиз функцияларды услап турады. Тәбияттың көпшилик актуаллық мәселелерин, ҳәзирги бар есаплаў техникасының имканиятлары менен шешиў мүмкиншилиги жоқ. Бирақ оларды изертлеў жағдайында, олардың модули сыпатында, салыстырмалы әпиўайы областта қаралған сызықлы мәселелер қолланылады. Бундай моделлер дискретлик моделлерди теориялық изертлеўдиңде тийкары есапланады.

Сөзсиз, теория ушында ҳәм практикалық қолланыў ушында дәллик ҳаққындағы сораў тийкарғы мәселе болып есапланады. Берилген математикалық мәселениң шешими жеткиликли сыйпақ болған жағдайы ушын, шекли айырмалар методы теориясында көп санлы ҳәм жеткиликли толық жыйнақлылықты ҳәм дәлликтиң баҳасын изертлеўлер жүргизилген. Бирақ ҳақыйқый физикалық процесслер, гетерогенлик орталықта өтеди ҳәм ҳәр қыйлы областтағы ҳәр қыйлы физикалық характеристикаларға ийе болады. Басқаша айтқанда дәслепки берилгенлер сыйпақ емес функциялар болады. Сонлықтан дискретлик схеманың берилген мәселениң изленип атырған шешиминиң, сыйпақлығына байланыслы дәллигин изертлеў ҳаққындағы сораўы үлкен мәселе болып турады.

Есаплаў техникасының кең қолланыўына байланыслы, тек дара жағдайдағы мәселелерди шешиў ушын шекли айырмалы схемалардан пайдаланыў ҳәм оларға программаларды дүзиў мақсетке муўапық болмайтуғыны түсиникли болатуғыны белгили. Сондай шекли айырмалы схемаларды дүзиў зәрүр, ол дифференциаллық теңлемениң берилиў типинен, шегаралық ҳәм басланғыш шәртлердиң классынан ҳәм тағыда дифференциаллық теңлемениң коэффицентлериниң жататуғын функционаллық кеңисликке байланыслы бир топар мәселелерди шешетуғын болсын. Бундай универсал шекли айырмалы схемалар әлбетте, берилген мәселениң қәлеген дәслепки берилгенлери ушын қәлеген торлардың избе-излигинде жыйнақлылық талапларына жуўап бериўи керек.

Параболалық типтеги теңлемелердиң белгили ўәкили жыллылық өткизгишлик теңлемеси болып, ол стационарлық емес жыллылық өткизгишлик процессин тәрийплейди. Изотроплық орталықта бул теңлеме мына төмендеги түрге ийе болады:

$$C\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad x \in G, \ \ t > 0 \tag{1}$$

бунда

$$Lu = div(k\, grand\, u) = \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}), \tag{2}$$

$k = k(x,t) > 0$ - жыллылық өткизгишлик коэффициенти, $c = c(x,t) > 0$ - көлем бирлигиниң жыллылық сыйымлылығы.

$t = 0$ болғанда басланғыш шәрт бериледи $u(x,0) = u_0(x), \ x \in G,$

ал Γ шегарасында болса, төмендеги шегаралық шәртлердиң биреўи бериледи:

а)

$$u = \mu_1(x), \qquad x \in \Gamma \tag{3}$$

болғанда (биринши шегаралық шәрт),

б)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mu_2(x), \quad x \in \Gamma \tag{4}$$

болғанда (екинши шегаралық шәрт),

в)

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(u - \mu_3(x)) = 0, \quad x \in \Gamma \tag{5}$$

болғанда (үшинши шегаралық шәрт), бунда $\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x)$,

$\sigma = \sigma(x) \geq 0 - x$ тың берилген функциялары, $\frac{\partial u}{\partial n} - \Gamma$ шегарасына сыртлай нормал бойынша алынған туўынды. а) – в) шәртлериниң физикалық мәниси: а) шегаралық температура бериледи, б) – Г шегарасында сыртқы орталық пенен Ньютон нызамы бойынша $\mu_3(x)$ температураға ийе жыллылық алмасыўы жүз береди.

Екинши шегаралық мәселеси (Нейман мәселеси) мына төмендеги шәрти орынланғанда шешимге ийе болады:

$$\int_{\Gamma} \mu_2(x)d\sigma + \int_{G} f(x)dx = 0, \tag{6}$$

бунда $d\sigma$ - беттиң элементи, $dx = dx_1 dx_2 ... dx_p$ - көлем элементи. Бул шәрт, Г шегарасынан G көлеминде ажыралып шыққан жыллылықтың ағып өтетуғынын билдиреди.

Биз буннан былай барлық талқылаўларды биринши шегаралық мәселеси ушын жүргиземиз: $u = \mu(x,t)$, $x \in \Gamma$, $t \geq 0$ болғанда.

1-§. Есаплаў тәжирийбеси

Ҳеш қандай техникалық жетискенлик, электронлы есаплаў машиналары сыяқлы, адамның ақыл хызметине оғада күшли тәсир жасаған емес. Арифметикалық ҳәм логикалық әмеллерди орынлаўдың тезлигин онлаған ҳәм жүзлеген миллион есе арттырып, соның менен адамның ақыл мийнетиниң өнимлилигин оғада жоқарылатып, ЭЕМлер мағлыўматларды (информацияларды) қайта ислеў тараўында түпкиликли өзгерислерге алып келди. Шын мәнисинде, XVIII әсирде пуў машинасының ойлап табылыўы менен келип шыққан санаат революциясына ҳәм соған байланыслы физикалық мийнеттиң өнимлилигиниң кескин артыўына уқсас, өз алдына «информациялық революцияның» гуўасы болып отырмыз. Ҳәзирги ўақытта есаплаў машиналары адамның ақыл хызметиниң барлық тараўларына енгизилип, илимий-техникалық алға илгерилеўдиң шешиўши факторларының бирине айланды.

Шешиў ушын ЭЕМлер табыслы қолланылған дәслепки ең ири илимий мәселелер ядроның энергиясын ийелеўге ҳәм космослық кеңисликти өзлестириўге байланыслы болды.

Ҳәзирги күнлери ең ири тәбийғый-илимий ҳәм халық хожалығы мәселелерин тез ҳәрекет ететуғын ЭЕМлерди қолланбай нәтийжели шешиў мүмкин емес. Усыған байланыслы, соңғы ўақытлары, изертленип атырған объекттиң математикалық моделин ЭЕМлер жәрдеминде жасаўға ҳәм талқылаўға тийкарланған, қурамалы мәселелерди шешиўдиң жаңа усылы қәлиплести. Теориялық изертлеўлердиң бундай усылын есаплаў тәжирийбеси (ЕТ) деп атайды.

Мейли, мәселен, қандай да бир физикалық объектти, қубылысты, процессти изертлеў талап етилсин. Сонда ЕТның схемасы төмендеги 1-сүўретте көрсетилгениндей болады.

ЕТның I этабында шешилиўи керек болған физикалық мәселе қәлиплестириледи. Дәслеп объекттиң физикалық жуўықласыўы ямаса физикалық модели сайлап алынады ямаса жасалады (мәселен, ноқаттың ямаса тутас орталықтың модели), қандай физикалық факторларды есапқа алыў ҳәм қайсыларын есапқа алмаў ҳаққындағы мәселе шешиледи. Басқаша айтқанда, изертлеў объектин басқаратуғын тийкарғы нызамлар қәлиплестириледи ҳәм оған тиккелей тәсир етпейтуғын екинши дәрежели факторлар есапқа алынбайды.

I
Изертлеў объектти

II
Математикалық модели

III
Санлы усыл (дискрет модели ҳәм есаплаў алгоритми)

V
Есаплаўларды орынлаў ҳәм нәтийжелерди талқылаў

IV
ЭЕМ ушын бағдарлама дүзиў

1-сүўрет

ЕТның **II** этабында мәселениң физикалық моделине сәйкес келетуғын, оның математикалық модели жасалады, яғный алгебралық, дифференциал, интеграл ҳ.т.б. теңлемелериниң жәрдеминде физикалық объект математика тилинде сүўретленип жазылады. Әдетте бул теңлемелер тийкарғы физикалық шамалардың (энергияның, қозғалыстың муғдарының, массаның ҳ.т.б.) сақланыў нызамларын аңлатады.

Жасалған математикалық модель классикалық математиканың усыллары менен изертленеди: мәселениң дурыс қойылғанын, оны шешиў ушын басланғыш мағлыўматлардың жеткиликли екенлигин, олардың бир-бирине қарама-қарсы келмейтуғынын, қойылған мәселениң шешиминиң бар ямаса жоқлығын, шешимниң бирден-бирлигин анықлаў керек. Көплеген физикалық мәселелер еле теориясы толық исленилип шығылмаған математикалық модельлерге келтириледи. Сондай-ақ, ис жүзинде шешимниң бар болыўы ҳәм бирден-бирлиги теоремасы дәлилленбеген мәселелерди де шешиўге туўра келеди.

ЕТның III этабында қойылған математикалық мәселени шешиўдиң жуўық санлы усылы жасалады, яғный есаплаў алгоритми сайлап алынады. Есаплаў алгоритми дегенде, II этапта қәлиплестирилген математикалық мәселениң жуўық санлы шешимин табыўға мүмкиншилик беретуғын, арифметикалық ҳәм логикалық әмеллердиң избе-излиги түсиниледи. Биз төменде, ҳәзирги заман ЭЕМлеринде пайдаланыў ушын арналған, есаплаў алгоримлерине қойылатуғын талапларға тоқтап өтемиз.

ЕТның IV этабында есаплаў алгоритмниң ЭЕМ ушын бағдарламасын дүзиў иске асырылады. Биз бағдарлама дүзиўге, ЭЕМде есаплаўларды шөлкемлестириўге ҳәм орынлаўға байланыслы мәселелерге тоқтамаймыз. Өйткени бул мәселелер жумыстың шегарасынан сыртта жатады. Тек ғана анық санлы алгоритмлерди ислеп шығыў ҳәм олардың ЭЕМ ушын бағдарламасын дүзиў бир-бири менен тығыз байланыслы болыўы кереклигин атап өтемиз.

ЕТның V этабында ЭЕМде есаплаўлар орынланады ҳәм алынған нәтийжелер талқыланады. Бул этаптың нәтийжелерине байланыслы, керекли болған жағдайларда, санлы усылға ҳәм мәселениң математикалық моделине тийисли дүзетиўлер киргизиледи. Бул жерде мәселе мынада: математикалық модель оғада турпайы болып, есаплаўлардың нәтийжелери физикалық тәжирийбениң нәтийжелери менен сәйкес келмеўи мүмкин. Ямаса математикалық модель оғада қурамалы болып, шешимди оған салыстырғанда әдеўир әпиўайы модель жәрдеминде жеткиликли дәллик пенен алыў мүмкин. Бундай жағдайларда жумысты қайтадан II этаптан баслаў керек, яғный математикалық модельге керекли дүзетиўлерди киргизип, қалған барлық этапларды қайтадан өтиў керек болады. Басқаша айтқанда, ЕТның жаңа адымы басланады.

Улыўма алғанда, ЕТның схемасы усыннан ибарат. Оның тийкарында мына үш нәрсе жатады: модель - усыл (алгоритм) - бағдарлама. Солай етип, ЕТның тийкары - математикалық моделлестириў, теориялық тийкары -

әмелий математика, ал техникалық тийкары - қуўатлы электронлы есаплаў машиналары болады.

ЕТ-бул, қәде ретинде, есаплаўларды стандарт формулалар бойынша тек бир мәртебе орынлаў емес, ал бәринен де бурын, ҳәр қыйлы математикалық модельлер ушын есаплаўлардың бир неше вариантларының топарларын орынлаў болатуғынын атап өтемиз. Математикалық модельлестириў ҳәм ЕТ усылы, бурыннан қәлиплескен теориялық ҳәм тәжирийбелик усыллардың ең жақсы жетискенликлерин өзинде бириктиреди[2].

2-§. Торлар методының тийкарғы түсиниклери.

Торлар методы ҳәзирги ўақытта дифференциаллық теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди шешиўдиң ең кең таралған универсал методларының бири болып табылады.

Бул методтың тийкарғы мазмуны төмендегилерден ибарат: Аргументтиң үзликсиз өзгериў областы шекли точкалар көплиги менен алмасланады, ҳәм тор деп аталады; үзликсиз аргумент функциясының орнына торларда анықланған дискрет аргументтиң функциясы қаралады ҳәм оны торлық функция деп атайды. Дифференциаллық теңлемеге ҳәм шегаралық шәртлерге қатнасатуғын туўындылар шекли айырмалар менен алмасланады (аппроксимацияланады), яғный тордың бази-бир точкаларындағы торлық функцияның сызықлы комбинациялары менен алмасланады.

Егерде усылай етип алынған шекли айырмалы шегаралық мәселе шешилетуғын болса ҳәм торды майдалағанда оның шешими берилген мәселениң шешимине жақынласса (жыйнақлы болса), онда ол берилген мәселениң жуўық шешими болады.

Торлар методы менен ислескенимизде төмендеги сораўларға жуўап бериў керек болады:

1. Торды қалай сайлап алыў керек?

2. Шекли айырмалы схеманы қалай жазыў керек?

3. Берилген мәселени шекли айырмалы схема қаншелли жақсы аппроксимациялайды?

4. Шекли айырмалы схема орнықлыма ҳәм қандай мағынада?

5. Берилген мәселениң шешимине шекли айырмалы схеманың шешиминиң жыйнақлылық тезлиги қандай?

Енди әпиўайы дефференцияллық операторларды аппроксимациялаўды қарап өтейик.

Торлық функция у-ти торлық функцияға түрлендиретуғын $У = L_h y$ түриндеги L_h операторына торлық ямаса шекли айырмалы оператор деп аталады.

Дифференцияллық операторлар торлық операторлар жәрдеминде алмастырылады. Оның ушын ҳәр бир туўынды торлық функцияның бир-неше торлық түйинлериндеги мәнислеринен ибарат шекли айырмалар менен алмасланады.

Шекли айырмалы операторды жазыўға қатнасқан тордың түйинлериниң көплигине усы оператордың шаблоны деп аталады.

Бир өзгериўшили функцияның биринши ҳәм екинши тәртипли туўындыларын қандай етип аппроксимациялаўға болатуғынын қарайық.

Мейли $\Omega = \{x + ih| \quad i = 0,\pm1,\pm2,.... \} - \infty < x < \infty$ көшериндеги тең өлшемли h адымлы тор болсын. $L\upsilon \equiv \upsilon^1$ қарастырайық. Буны шекли айырмалар менен ҳәр қыйлы жол менен алмаслаўға болады. Мысалы:

$$L\upsilon \sim \frac{\upsilon_i - \upsilon_{i-1}}{h} \equiv L_h^- \upsilon_i - \quad \text{шеп шекли айырма,}$$

$$L\upsilon \sim \frac{\upsilon_i - \upsilon_{i-1}}{h} \equiv L_h^+ \upsilon_i - \quad \text{оң шекли айырма,}$$

$$L\upsilon \sim \frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_{i-1}}{2h} \equiv L_h^0 \upsilon_i - \quad \text{орайлық шекли айырма.}$$

Бул жерде $\upsilon_i = \upsilon(x_i)$. $L\upsilon$ операторын шекли айырмалы $L_h\upsilon_i - L\upsilon = \Psi_i$ ҳәм оны L операторын L_h операторы менен алмаслаўдың (аппроксимациялаў) қәтелиги деп аталады.

Әдетте h нольге умтылғанда бул қәтеликтиң нольге умтылыўы талап етиледи. $\Psi_i -$ ди баҳалаў ушын $\upsilon(x)-$функциясы сыйпақ болсын. Мейли $\upsilon(x) \in C^{(m)}$, бунда $m \geq 2$. $\upsilon(x)-$ функциясын $x = x_i$ точкасының дөгерегинде Тейлор қатарына жайамыз:

$$\upsilon_{i\pm1} = \upsilon_i \pm h\upsilon_i^1 + O(h^2)$$

ҳәм будан

$$\Psi_i^- = L_h^-\upsilon_i - \upsilon_i' = O(h): \quad \Psi_i^+ = L_h^+\upsilon_i - \upsilon_i' = O(h)$$

екенин есаплаймыз. Буннан $h \to 0$ да $\Psi_i^+ \to 0$ны келип шығады. Мейли L – дифференциаллық оператор, L_h- базы-бир Ω торында берилген шекли айырмалы оператор болсын, бунда h-тордың майдалығын аңлататуғын параметр. L_h- шекли айырмалы операторы.

1) L-дифференциаллық операторын $x_i \in \Omega$ түйининде аппроксимациялайды деп аталады, егерде $\Psi_i = L_h\upsilon_i - (L\upsilon)_i$ аңлатпасы $h \to 0 -$ нольге умтылса, бунда $\upsilon(x)-$ жеткиликли сыйпақ функция;

2. L-операторын $x_i \in \Omega$ түйининде n-тәртипли аппроксимациялайды деп аталады, егерде $\Psi_i = 0\ (h^n)$ болса.

$L_h^{\pm}-$формулаларына қарай отырып, $L_h^-\upsilon_i$ ҳәм $L_h^+ - \upsilon$ операторлары $L\upsilon = \upsilon' -$ты $\upsilon \in C^{(m)}, m \geq 2$ болғанда биринши тәртипли аппроксимациялайды екен. m-санын арттырған менен аппроксимациялаў тәртиби артпайды. Енди L_h^0 операторын қарайық. $L_h^0\ \upsilon_i -$операторы $\upsilon'(x)$ туўындысын $\upsilon(x) \in C^{(m)},\ m \geq 3$ болғанда екинши тәртипли аппроксимациялайтуғынын аңсат тексерип көриўимизге болады.

Будан кейин төмендеги белгилеўлерди пайдаланамыз.

$$\upsilon_{\bar{x},i} \equiv (\upsilon_i - \upsilon_{i-1})/h, \qquad \upsilon_{x,i} \equiv (\upsilon_{i+1} - \upsilon_i)/h,$$

$$\upsilon_{\overset{0}{x}} \equiv (\upsilon_{i+1} - \upsilon_{i-1})/(2h) = \frac{1}{2}(\upsilon_{\bar{x},i} + \upsilon_{x,i}).$$

Енди $L\upsilon \equiv \upsilon''$ операторын қарайық. Бул операторды 2 точкалы шаблонда аппроксимациялаў мүмкин емес екенлиги анық. Буны аппроксимациялаў ушын x_{i-1}, $x_{i,}$ x_{i+1} түйинлеринен ибарат үш точкалы шаблонды алайық ҳәм төмендеги шекли айырмалы операторды қарайық.

$$L_h\upsilon_i \equiv \upsilon_{\bar{x}x,.i} = \frac{1}{h}(\upsilon_{\bar{x},i} + \upsilon_{x,i}) = \frac{\upsilon_{i+1} - 2\upsilon_i + \upsilon_{i-1}}{h^2}.$$

$$\upsilon(x) \in C^{(m)}, \quad m \geq 4 \ \textit{болса, онда}$$

$$\upsilon_{i\pm1} = \upsilon_i \pm h\upsilon_i' + \frac{h^2}{2}\upsilon_i'' \pm \frac{h^3}{6}\upsilon_i''' + 0(h^4)$$

аңлатпасын жазыўға болады. Будан (і-индексти тастап жазамыз) $\upsilon_{xx} - \upsilon'' = 0\ (h^2)$ болады, яғный υ_{xx} операторы υ''–ты екинши тәртипли аппроксимациялайды екен. Бул көрип өткен мысаллардан көринип турғандай L_h операторының аппроксимациялаў тәртиби $\upsilon(x)$ функциясының m дефференциалланыў тәртибинен байланыслы екен. Биз аппроксимациялаў тәртиби дегенимизде сондай максимал тәртип ҳаққында айтамыз, $C^{(m)}$ классының m тәртибин көтерген менен өзгермейтуғын тәртип ҳаққында.

Мейли қурамалы операторды қарайық.

$$Lu \equiv \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

бунда $u = u(x_1, x_2)$; Торды киргизейик:

$$\Omega = \left\{ x_i = x_{i1 \cdot i2} = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \ \middle| \ x_\alpha^{(i_x)} = x_\alpha + i_\alpha h_\alpha \ \ i_\alpha = 0, \pm1, \pm2, \ldots \alpha = 1,2 \right\}$$

ҳәм төмендеги алмасыўды жүргиземиз.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_1^{(i_1-1)} x_2^{(i_2)}) - 2u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) + u(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)})}{h_1^2} = u_{\bar{x}_1 x_1, i}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_1^{(i_1)} x_2^{(i_2-1)}) - 2u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) + u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)})}{h^2} = u_{\bar{x}_2 x_2, i}$$

Нәтийжеде $L_h u_i = \left(u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}\right)_i$-шекли айырмалы операторын аламыз. Бул оператор бес точкадан ибарат шаблонда анықланған:

$$\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}\right),\ \left(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)}\right),\ \left(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)}\right),\ \left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)}\right),\ \left(x_1^{i_1}, x_2^{(i_2+1)}\right).$$

$u_{x_\alpha x_\alpha} = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2 + O\left(h_\alpha^2\right),\ \ \alpha = 1{,}2$ болғанлықтан, L_h операторы h_1 ҳәм h_2 бойынша екинши тәртипли аппроксимацияға ийе болады:

$$\Psi\left(x_i\right) = L_h u_{i_1, i_2} - \left(Lu\right)_{i_1, i_2} = O\left(h_1^2 + h_2^2\right).$$

Биз усы ўақытқа шекем аппроксимациялаў қәтелигин $\Psi = L_h \upsilon - Lu$ ны баҳалаўды $x_i \in \Omega$ дара түйинде қарастырдық. Егерде L_h операторлары L операторларын Ω областының барлық $x_i \in \Omega$ түйинлеринде аппроксимациялай алмаса, онда L_h операторы L ды Ω торында аппроксимациялайды деп аталады. Бул жағдайда аппроксимациялаў қәтелигин баҳалаў ушын С нормасынан пайдаланған мақул:

$$\left\|\Psi\right\|_c = \max_{x \in \Omega} \left|\Psi(x)\right| \tag{1}$$

Ψ - торлық функцияның шамасын баҳалаў ушын басқада нормаларды пайдалансақ болады:

$$\left\|\Psi\right\|_{L_1} = \sum_{x \in \Omega} H \left|\Psi(x)\right|, \quad \left\|\Psi\right\|_{L_2} = \left(\sum_{x \in \Omega} H \Psi^2(x)\right)^{1/2}, \tag{2}$$

бунда H=h болады, егерде бир өлшемли жағдайда ҳәм $H=h_1 h_2$- болады, еки өлшемли жағдайда. Мейли $\left\|\Psi\right\| - \Omega$ торында берилген $\Psi(x)$ функциясы ушын бирден бир норма болсын. Будан былай L_h операторы

1) L дифференциаллық операторын $\|\bullet\|$нормасы бойынша аппроксимациялайды деп аталады, егерде $h \to 0$да $\left\|\Psi\right\| = \left\|L_h \upsilon - L\upsilon\right\| \to 0$ болса;

2) $n > 0$ тәртип бойынша аппроксимациялайды деп аталады, егерде $\left\|\Psi\right\| = O\left(h^n\right)$ болса, ямаса $\left\|\Psi\right\| \le Mh^h$, бунда $M = const > 0,$ ҳәм h –тан ғәрезсиз.

Егерде υ жеткиликли сыйпақ функция болса, ал Ω-тең өлшемли тор болса, онда жоқарыда қаралған шекли айырмалы операторлар қәлеген (1), (2) нормада бирдей аппроксимациялаў тәртибине ийе болады.

Егерде тор тең өлшемли болмаса, онда мәселе басқаша болады. Мейли $\overline{\omega}=\{x_i \,|\, i=0,1,...,N, x_0=0,\ x_N=1\}$ адымын $h_i = x_i - x_{i-1},\quad i=1,2,....,N$ болған [0,1] кесиндидеги тең өлшемсиз тор болсын. $L\nu=\nu''$ операторын қарастырайық. Бул операторға сәйкес шекли айырмалы операторды жазайық:

$$L_h \upsilon_h = \frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{\upsilon_{i+1}-\upsilon_i}{h_{i+1}} - \frac{\upsilon_i - \upsilon_{i-1}}{h_i}\right],\ \hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}), \tag{3}$$

Бул шекли айырмалы оператор (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) үш точкалы шаблонда анықланған. Усы оператордың аппроксимациялаў қәтелигин қарайық

$$\psi_i = L_h v_i - (Lv)_i$$

$v(x) \in C^{(4)}[0,1]$ деп есаплап ҳәм Тейлор қатарына жайыўды пайдаланып

$$v_{i+1} = v_1 + h_{i+1}v_i + \frac{h_{i+1}^2}{2}v_i'' + \frac{h_{i+1}^3}{6}v_i''' + O\left(h_{i+1}^4\right)_i,$$
$$v_{i-1} = v_i - h_i v_i^1 + \frac{h_i^2}{2}v''_i - \frac{h_i}{6}v_i''' + O\left(h^4\right),$$

төмендегин табамыз

$$\Psi_i = \frac{h_{i+1}-h_i}{3}v_i''' + O\left(h_{i+1}^2\right) + O\left(h_i^2\right) = \frac{h_{i+1}-h_i}{3}v_i''' + O\left(\hbar_i^2\right).$$

Будан көринип турғанындай

$\|\Psi\|_C = o(h_0),\ \|\Psi\|_{L_i} = O(h_0),\ \|\Psi\|_{L_2} = O(h_0),$ бунда $h_0=maxh_i$. Солай етип L_h операторы $\|\bullet\|_C,\ \|\bullet\|_{L_1},\ \|\bullet\|_{L_2}$ нормаларында биринши тәртипли аппроксимацияға ийе болады екен.

3-§. Әпиўайы дифференцияллық операторларының шекли айырмалы аппроксимациясы.

Мейли $v=v(x)$ функциясына тәсир етиўши L - дифференциаллық операторы берилсин. Lv - ға кириўши туўындыларды шекли айырмалы қатнаслар менен алмаслап, биз Lv - ниң орнына шекли айырмалы $L_h v_h$ - аңлатпасын аламыз. Бул $L_h v_h$ - аңлатпасы – тордың базы-бир түйинлериниң көплигинде торлық функция v_h- тың мәнислериниң комбинацияларынан ибарат болып оны шаблон деп атайды:

$L_h v_h(x) = \sum_{\xi \in Ш(x)} A_h(x,\xi) v_h(\xi)$ ямаса $\quad (L_h v_h)_i = \sum_{x_j \in Ш(x_i)} A_h(x_i, x_j) v_h(x_j) \quad$ бунда $A_h(x,\xi)$ - коэффициентлер, h – тордың адымы, $Ш(x)$– x точкасындағы шаблон. Бундай Lv дифференциал операторын $L_h v_h$ шекли айырмалы операторына жуўық алмасыў аппроксимациялаў деп аталады. (ямаса L операторын шекли айырмалы аппроксимациялаў деп аталады.)

Енди биз әпиўайы дифференцияллық операторлардың шекли айырмалы аппроксимациясы менен танысайық.

Мысалы: Мейли $Lu = \frac{dv}{dx}$ болсын. Ox көшериниң базы бир x точкасын фиксерлеймиз $x-h$ ҳәм $x+h$, $h>0$ точкаларын аламыз. Lv операторын аппроксимациялаў ушын мына төмендеги аңлатпалардың биреўинен пайдалансақ болады.

$$L_h^+ v \equiv \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \equiv v_x \tag{1}$$

$$L_h^- v \equiv \frac{v(x)-v(x-h)}{h} \equiv v_{\bar{x}} \tag{2}$$

(1) аңлатпасы оң шекли айырмалы туўынды деп, ал (2) аңлатпасы шеп шекли айырмалы туўынды деп аталады. $L_h^+ v$ ҳәм $L_h^- v$ операторларыда еки ноқатта анықланған. Соның менен бирликте $\frac{dv}{dx}$ туўындысын шекли айырмалы аппроксимациясы ушын (1) ҳәм (2) аңлатпаның сызықлы комбинациясы

$$L_h^{(\sigma)} v \equiv \sigma v_x + (1-\sigma) v_{\bar{x}} \tag{3}$$

алсақта болады, бунда σ - қәлеген ҳақыйқый сан. Дара жағдайда σ = 0.5 болғанда орайлық (еки тәреплемели) шекли айырмалы туўындыға ийе боламыз.

$$v_{\overset{\circ}{x}} = \frac{1}{2}(v_x + v_{\bar{x}}) = \frac{v(x+h)-v(x-h)}{2h} \tag{4}$$

Солай етип $Lv = v'$ операторын шекли айырмалы аппроксимациялаўшы сансыз аңлатпалар жазыў мүмкин екен.

Мынадай сораў туўады: Анаў ямаса мынаў шекли айырмалы аппроксимацияны қолланғанымызда биз қандай қәтеликлерге жолығамыз ҳәм x ноқатында $h \to 0$ да $\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x)$ айырмасының шамасы қалай өзгереди? $\psi(x) = L_h v(x) - Lv'(x)$ шамасына x ноқатында Lv операторын шекли айырмалы аппроксимациялаўдың қәтелиги деп аталады. $v(x)$ функциясын Тейлор формуласы бойынша қатарға жаямыз.

$$v(x \pm h) = v(x) \pm hv'(x) + \frac{h^2}{2} v''(x) + 0(h^3)$$

бул аңлатпаны (1), (2) ҳәм (4) формулаға апарып қойып, төмендеги аңлатпаларға ийе боламыз.

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) + \dfrac{h}{2} v''(x) + 0(h^2) \\ v_{\bar{x}} = \dfrac{v(x) - v(x-h)}{h} = v'(x) - \dfrac{h}{2} v''(x) + 0(h^2) \\ v_{\overset{0}{x}} = \dfrac{v(x+h) - v(x-h)}{2h} = v'(x) + 0(h^2) \end{cases} \tag{5}$$

Бул аңлатпаларды есапқа алып,

$$\psi = v_x - v'(x) = 0(h), \quad \psi = v_{\bar{x}} - v'(x) = 0(h), \quad \psi = v_{\overset{0}{x}} - v'(x) = 0(h^2)$$

теңликлериниң орынлы екенине аңсат исениўге болады.

L_h-шекли айырмалы оператор L дифференциал операторды x точкасында m>0 тәртипли аппроксимациялайды деп атайды, егерде $\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x) = \mathrm{O}(h^m)$ теңлиги орынлы болса. Солай етип, $Lv = v'$ операторын оң ҳәм шеп шекли айырмалы туўындылар биринши тәртипли, ал орайлық айырмалы туўынды –екинши тәртипли аппроксимациялайды екен.

2-мысал: Мейли $Lv = v'' = \dfrac{d^2}{dx^2}$ операторы берилсин. Бундай екинши тәртипли дифференциалды екинши тәртипли шекли айырмалы аппроксимациялаў ушын (x-h,x,x+h) түриндеги үш точкадан пайдаланыўымызға туўра келеди яғный үш точкалы шаблонды алыўымыз керек болады. Бул жағдайда $L_h v$ операторы төмендегише анықланады.

$$L_h v=\frac{v(x+h)-2v(x)+v(x-h)}{h^2} \tag{6}$$

x точкасындағы оң шекли айырмалы туўынды x+h точкасындағы шеп шекли айырмалы туўынды менен бирдей екенлигин есапқа алсақ, яғный $v_x(x)=v_{\bar{x}}(x+h)$ екенлигин есапқа алсақ (6) аңлатпаны төмендегише анықлаўға болады:

$$L_h v=\frac{v_x(x)-v_{\bar{x}}(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[v_x(x+h)-v_{\bar{x}}(x)\right]=v_{\bar{x}x}(x) \qquad \textbf{(7)}$$

v(x) функциясының Тейлор қатарына жайылыўын еске алып, бул жағдайда аппроксимациялаў тәртиби екиге тең екенлигин көриўге болады, яғный $v_{\bar{x}x}-v''=O(h^2)$. Себеби

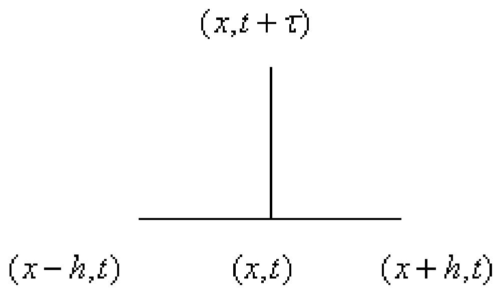
$$v_{\bar{x}x}=v''+\frac{h^2}{12}v^{(4)}+O(h^4) \tag{8}$$

3-мысал: Мейли $Lv=v^{(4)}$ операторы берилсин. Бул операторды шекли айырмалар менен аппроксимациялаў ушын 5 точкадан ибарат (x-2h, x-h, x, x+h, x+2h) шаблонын сайлап аламыз ҳәм усы шаблонда анықланатуғын төртинши тәртипли шекли айырмалы $L_h v=v_{\bar{x}x\bar{x}x}$ операторын қараймыз. Бул $L_h v$ операторының Lv операторын екинши тәртипли дәллик пенен аппроксимациялайтуғынын жоқарыдағы (8) формуладағыдай қатарға жайыўдан пайдаланып көрсетиўимизге болады, яғный $v_{\bar{x}x\bar{x}x}-v^{(4)}=\frac{h^2}{6}v^{(6)}+O(h^4)$ екенлигин көриўимизге болады. Бул кейинги Тейлор қатарына жайыўды еске алып аппроксимациялаў қәтелиги $\psi=L_h v-Lv$ h бойынша қатарға жайып аппроксимациялаў тәртибин жоқарылатыўға қолланыўымызға болады. Ҳақыйқатында да

$$v_{\bar{x}x}-v''=\frac{h^2}{12}v^{(4)}+O(h^4)=\frac{h^2}{12}v_{\bar{x}x\bar{x}x}+O(h^4)$$

Будан (x+2h, x+h, x, x-h, x-2h) шаблонында анықланған $L_h' v = v_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12} v_{\bar{x}x\bar{x}x}$ операторы $Lv = v''$ операторын төртинши тәртипли апроксимациялайтуғынын көремиз. Бундай аппроксимациялаў дәрежесин көтериў процессин тағыда даўам еттириўге болады ҳәм қәлеген тәртипли аппроксимацияны алыўымызға болады, егер $v \in V$ функциясы жеткиликли сыйпақ болса. Бул жағдайда шаблон, яғный қолланылатуғын түйинлердиң саны артады. Бирақ бул көрсетилген усыл шекли аппроксимациялаў тәртибин арттырыўда практикалық қолланыў ушын барлық ўақытта усынылмайды. Себеби бул жағдайда алынатуғын шекли айырмалы оператордың сапасы төмен болады (монотонлық, кери оператордың болмаўы, орнықлылық ҳ.т.б. мағынада)

4-мысал: Мейли $Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $v(x,t)$ операторын қарайық. Онда (x, t) – базы бир (x, t) кеңислигиниң фиксерленген точкасы болсын ҳәм $h > 0, \tau > 0$ санлары адымлар болсын. $L_{h\tau}$ аппроксимациясын жазыў ушын L операторына, биз дәслеп шаблонды анықлап алыўымыз шәрт болады. Дәслеп әпиўайы аппроксимакциялаў түрине тоқтаймыз. Мейли шаблон төрт точкадан ибарат болсын, яғный



1 - сүўрет

болсын.

$L_{h\tau}$ операторын төмендегише анықлаймыз.

$$L_{h\tau}^{(0)} = \frac{v(x,t+\tau)-v(x,t)}{\tau} - \frac{v(x+h,t)-2v(x,t)+v(x-h,t)}{h^2} \qquad (9)$$

төмендеги белгилеўлерди киргизейик:

$$v = v(x,t), \quad \tilde{v} = v(x,t+\tau), \quad \breve{v} = v(x,t-\tau).$$

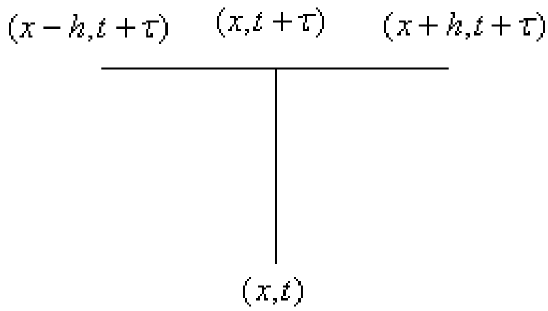
Бул белгилеўлер жәрдеминде t бойынша шекли айырмалы туўындылар төмендегише жазылыўы мүмкин:

$$v_t = \frac{v(x,t+\tau)-v(x,t)}{\tau} = \frac{\tilde{v}-v}{\tau} \qquad (10)$$

(7) ҳәм (10) формулаларды еске алып, (9) шы аңлатпаны төмендегише жазамыз.

$$L_{h\tau}^{(0)} v = v_t - v_{\bar{x}x}. \qquad (9')$$

Енди



2 - сүўрет

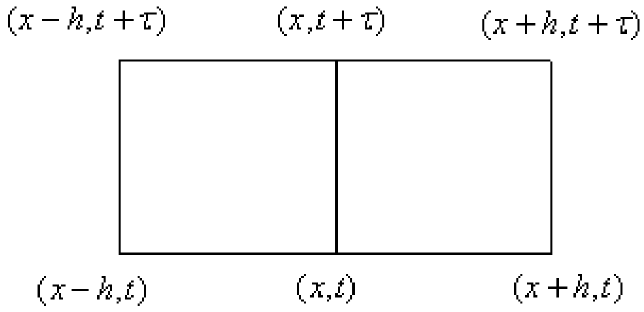
түриндеги төрт точкалы шаблоннан пайдалансақ, яғный $v_{\bar{x}x.}$ аңлатпасын $t+\tau$ моментинде алсақ, онда

$$L_{h\tau}^{(1)} v = v_t - \tilde{v}_{\bar{x}x} \qquad (11)$$

аңлатпасына ийе боламыз. (9') ҳәм (11) формулалардың сызықлы комбинациясын алсақ, онда бир параметрли айырмалы операторлардың төмендеги семействосына ийе боламыз.

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} v = v_t - (\sigma \tilde{v}_{\bar{x}x} + (1-\sigma) v_{\bar{x}x}) \qquad (12)$$

Бул оператор $\tau \neq 0$ ҳәм $\tau \neq 1$ мәнислерде төмендеги алты точкалы шаблонда анықланады.



3 - сүўрет

Шекли айырмалы аппроксимацияның тәртибин бахалаў ушын төмендеги формулалардан пайдаланамыз.

$$v_t = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial v(x,t+\tau/2)}{\partial t} + O(\tau^2)$$

$$v_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + O(h^4) = \frac{\partial^2 v(x,t+\tau/2)}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 v(x,t+\tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2+\tau^2)$$

$$\tilde{v}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 v(x,t+\tau/2)}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 v(x,t+\tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2+\tau^2)$$

Бул аңлатпаларды $L_{h\tau}^{(0)}v$ $L_{h\tau}^{(1)}v$ $L_{h\tau}^{(\sigma)}v$ формулаларына апарып қойсақ, биз төмендеги аппроксимациялаў қәтелигине ийе боламыз.

1) $L_{h\tau}^{(0)}v = \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau) = Lv(x,t) + O(h^2+\tau)$ яғный

$\psi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)}v - Lv(x,t) = O(h^2+\tau)$

2) $L_{h\tau}^{(1)}v = \dfrac{\partial v(x,t+\tau)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v(x,t+\tau)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau) = Lv(x,t+\tau) + O(h^2+\tau)$ яғный

$\psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)}v - Lv(x,t+\tau) = O(h^2+\tau)$

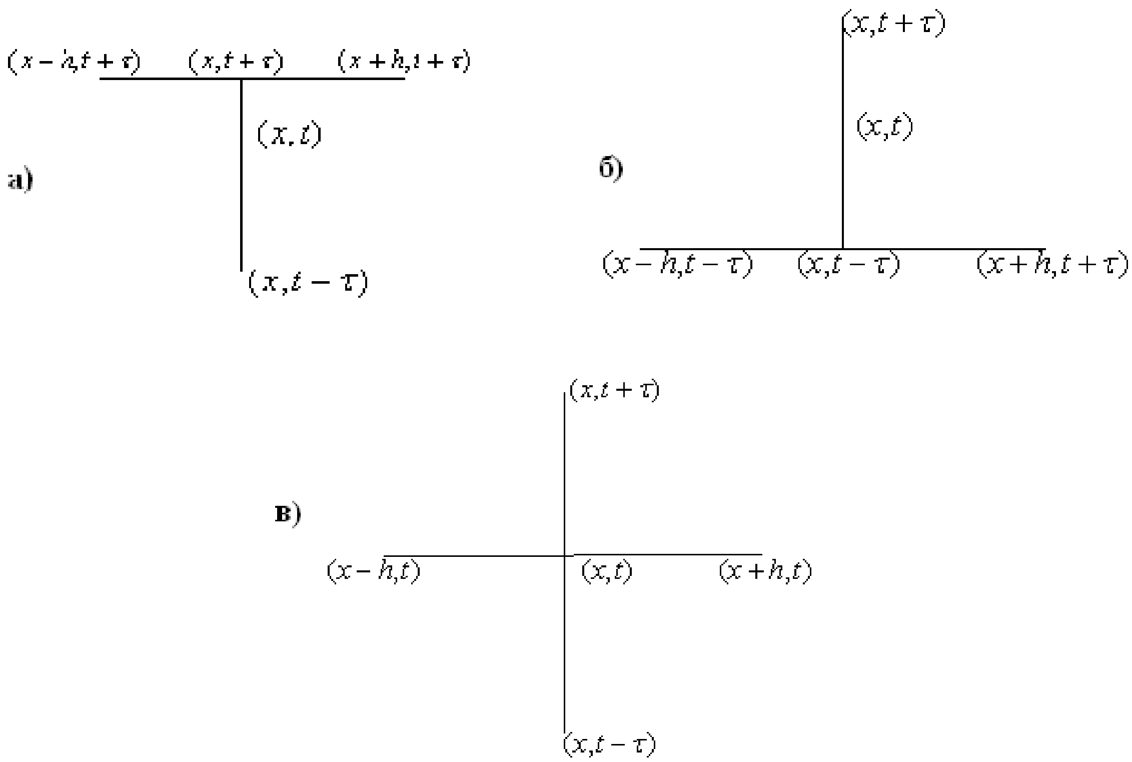
3)

$$L_{h\tau}^{(0.5)}v = \frac{\partial v(x,t+\tau/2)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x,t+\tau/2)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau^2) = Lv(x,t+\tau/2) + O(h^2+\tau^2)$$

яғный $\psi^{(0.5)} = L_{h\tau}^{(0.5)}v - Lv(x,t+\tau/2) = O(h^2+\tau^2)$

Солай етип $L_{h\tau}^{(\sigma)}$ операторы L операторын қәлеген σ ушын h бойынша екинши тәртипли ал τ бойынша $\sigma = 0, \sigma = 1$ болғанда биринши тәртипли аппроксимациялайды хәм $\sigma = 0{,}5$ болғанда τ бойыншада екинши тәртипли аппроксимациялайды.

5-мысал: Мейли $Lu = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ операторы берилген болсын. Бул жағдайда $L_{h\tau}$ шекли айырмалы аппрокцимацияны жазыў ушын торлық функцияның ўақытқа байланыслы $t-\tau, t, t+\tau$ үш жағдайындағы мәнислерин қолланыў керек болады. Ең аз шаблон болып бул бес точкалы $a, б, в$ шаблонлар есапланады



4 - сүўрет

Мүмкин болған аппроксимациялардың бири, бул орташа слойда $v_{\bar{x}x}$ мәнисин қолланатуғын төмендеги аңлатпасы (в шаблонда анықланған)

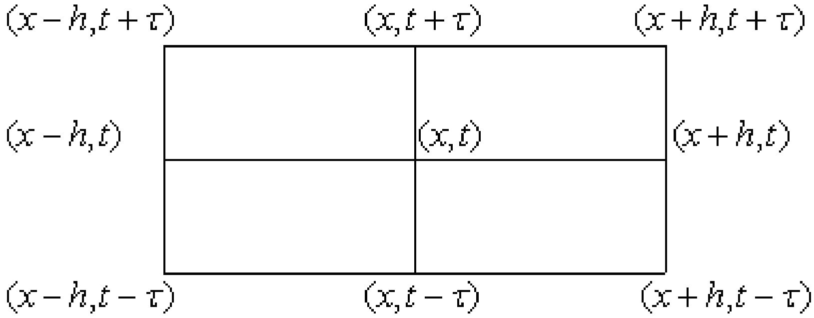
$$L_{h\tau} v = v_{\bar{t}t} - v_{\bar{x}x}, \tag{13}$$

бунда $v_{\bar{t}t} = (v(x, t-\tau) - 2v(x,t) + v(x, t+\tau)) / \tau^2$

Дәл усындай а) шаблонында анықланатуғын

$$L_{ht} v = v_{tt} - v_{\bar{x}x}. \tag{14}$$

Lu операторын 9 точкалы төмендеги шаблонда да аппроксимациалаўға болады.



5 - сүўрет

Lv операторын г) шаблонда анықланған еки параметрли шекли айырмалы операторлардың семействосы менен жазамыз.

$$L_{h\tau}^{(\sigma_1,\sigma_2)} v = v_{\bar{t}t} - (\sigma_1 \tilde{v}_{\bar{x}x} + (1-\sigma_1-\sigma_2) v_{\bar{x}x} + \sigma_2 \breve{v}_{\bar{x}x}) \tag{15}$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ болғанда (13) аңлатпасы ҳәм $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$ болғанда (14) аңлатпасы, келип шығады. $v_{\bar{t}t} = \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \mathrm{O}(\tau^2)$ ҳәм $v_{\bar{x}x} = \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^2)$ екенлигинен (13) операторының $\mathrm{O}(h^2 + \tau^2)$ аппроксимацияға ийе екенин көремиз. Тап усындай аппроксимацияға (15) операторыда ийе болады, егерде $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ болса, бунда σ-қәлеген сан. σ_1ҳәм σ_2 параметрлери σ параметриндей тек аппроксимациялаў тәртибине ғана тәсир етпей, ал схеманың орнықлылығынада тәсир етеди.

6-мысал. Мейли $Lu = u''$ операторын тең өлшеўсиз (регуляр емес) торда аппроксимациялаўды қарап өтейик.

Мейли h_- >0 ҳәм h_+ >0 еки сан болсын. Үш точкалы $(x-h, x, x+h)$ шаблонын алайық. Егерде $h_- \neq h_+$ болса, онда шаблонды **регуляр емес** деп атайды. Төмендеги белгилеўлерди киргиземиз.

$v_{\bar{x}} = \dfrac{v(x) - v(x-h)}{h_-}$, $\quad v_x = \dfrac{v(x+h_+) - v(x)}{h_+}$, $\quad h = 0.5(h_- + h_+)$ $\quad L_h v$ операторын төмендегише анықлаймыз.

$$L_h v = \frac{1}{h}\left[\ \frac{v(x+h) - v(x)}{h_+} - \frac{v(x) - v(x-h_-)}{h_-}\ \right] = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{h} \qquad (16)$$

Егерде $h_- = h_+ = h$ болса, онда $L_h v$ операторы (7) аңлатпа менен бирдей болады.

Аппроксимацияның **локал** (точкадағы) қәтелигин есаплайық:

$$\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x).$$

$v(x)$ функциясы жеткиликли сыйпақ болғанда х точкасының дөгерегиндеги Тейлор қатарына жайылыўын есапқа алып, яғный,

$$v(x+h_+) = v(x) + h_+ v'(x) + \frac{h_+^2}{2} v''(x) + \frac{h_+^3}{6} v'''(x) + O(h_+^4),$$

$$v(x-h_-) = v(x) - h_- v'(x) + \frac{h_-^2}{2} v''(x) + \frac{h_-^3}{6} v'''(x) + O(h_-^4)$$

Төмендеги формулаға ийе боламыз:

$$v_x = v'(x) + \frac{h_+}{2} v''(x) + \frac{h_+^2}{6} v'''(x) + O(h_+^3),$$

$$v_{\bar{x}} = v'(x) - \frac{h_-}{2} v''(x) + \frac{h_-^2}{6} v'''(x) + O(h_-^3)$$

$$L_h v = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{\hbar} = v''(x) + \frac{h_+^2 - h_-^2}{6\hbar} v'''(x) + O(\hbar^2).$$

$(h_{\pm} < 2\hbar)$ деп есапласақ. $\psi(x)$ ушын аңлатпа төмендегише болады.

$$\psi(x) = L_h v - Lv = \frac{h_+ - h_-}{3} v'''(x) + O(h^2) = O(\hbar). \qquad (17)$$

Солай етип (16) операторы регуляр емес шаблонда $(h_+ \neq h_-)$ биринши тәртипли аппроксимацияға ериседи.

4-§. Тордағы аппроксимациялаў қәтелиги.

Усы ўақытқа шекем биз точкада шекли айырмалы аппроксимациялаў мәселесин қарап келдик. Өткен параграфларда биз точкадағы аппроксимациялаўдың тәртиби ҳаққында сөз еттик. Шекли аппроксимациялаўдың пүткил тордағы тәртибин баҳалаў талап етиледи.

Мейли $\omega_h -$Евклид $(x=(x_1,x_2,...,x_n))$ кеңислигиниң базы бир G областының торы болсын, H_h-болса $\omega_h -$торында берилген торлық функциялардың сызықлы кеңислиги болсын, $H_0 - v(x)$ сыйпақ функцияларының кеңислиги $\|\cdot\|_0$- болса H_0 кеңислигиниң нормасы, $\|\cdot\|_h -$ болса H_h-кеңислигиниң нормасы болсын. Мейли

1) Қәлеген $u \in H_0$ушын $P_h u = u_h \in H_h$ болатуғын P_h операторы бар болсын.

2) $\|\cdot\|_0$ҳәм $\|\cdot\|_h$нормалары келисилген болсын(согласованы), яғный $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\|P_h u\|_h = \|u\|_0$ болсын. Бунда $|h| - h$ векторының нормасы. H_0 кеңислигинде берилген базы бир L операторын қарайық ҳәм $\omega_h -$ торында берилген v_h торының функциясын L_h v_h торлық функциясына түрлендиретуғын L_h операторы берилсин.

L операторын L_h шекли айырмалы операторы менен аппроксимациялаўының қәтелиги деп, төмендеги торлық функциясына айтамыз: $\psi_h = L_h v_h - (Lv)_h,$ бунда $v_h = P_h v,$ $(Lv)_h = P_h(Lu),$ $v - H_0$ кеңислигиниң қәлеген функциясы.

Егерде $|h| \to 0$ да, $\|\psi_h\|_h \to 0$ умтылса, онда L_hоператоры L дифференциаллық операторын m>0 тәртипли аппроксимациялайды деп айтады, егерде

$$\|\psi_h\|_h = \|L_h v_h - (Lv)_h\|_h = O(|h|^m)$$

теңлиги орынланса, ямаса

$$\left\| L_h v_h - (Lv)_h \right\|_h \le M |h|^m .$$

Теңлиги орынланса,онда $M - |h|$ тан ғәрезсиз болған оң анықланған турақлы.

ЕСКЕРТИЎ: 1. Егерде $h = (h_1, h_2, ..., h_p) -$векторы $h_1, h_2, ..., h_p$ компоненталы болса, онда $|h|$ шамасы ретинде $|h| = (h_1^2 + h_2^2 + ... + h_p^2)^{-2}$ узынлығын алыўымызға болады. $\left\| \psi_h \right\|_h = \left\| L_h v_h - (Lv)_h \right\|_h = \mathrm{O}(|h|^m)$ түриндеги аппроксимациялаў ҳәр қыйлы тәртипте болыўыда мүмкин.

Онда

$$\left\| \psi_h \right\|_h = \left\| L_h v_h - (Lv)_h \right\|_h = \mathrm{O}(|h|^m)$$

формуласының орнына төмендеги аңлатпасына ийе боламыз.

$$\left\| L_h v_h - (Lv)_h \right\|_h \le M \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^{m_\alpha}$$

бунда $m_\alpha > 0$ m_1, m_2, m_3,…,m_p санларының ишинен ең киши санды сайлап алып ҳәм оны m деп белгилеп,

$$\left\| \psi_h \right\|_h = \left\| L_h v_h - (Lv)_h \right\|_h = \mathrm{O}(|h|^m)$$

баҳасына ийе боламыз.

2. Егер ω_h торы тең өлшемсиз болса , яғный $h = (h_1, h_2, ..., h_N) -$ болса, онда мысалы $|h| = \max\limits_{1 \le i \le N} |h_i|$ ямаса $|h|$ орташа квадратлық мәнисти билдиреди, бунда N-түйинлер саны.

5-§. Шекли айырмалы схеманың жыйнақлылығы ҳәм дәллиги.

Мейли Г шегаралы G областа сызықлы дифференциал теңлемесиниң

$$Lu = f(x), x \in G \tag{1}$$

базы-бир

$$lu = \mu(x), x \in \Gamma \tag{2}$$

қосымша шәртлерди (басланғыш ямаса шегаралық) қанаатландыратуғын шешимин табыў талап етилсин, бунда f(x) ҳәм $\mu(x)$ берилген функциялар, L базы-бир дифференциал оператор. Мейли (1)-(2) мәселесиниң шешими бар болсын ҳәм бирден-бир болсын.

Аргументтиң үзликсиз өзгериўши G+Г областтың дискрет точкалардың көплиги x_i точкалары менен алмаслайық. Мейли h векторлық параметр болып ,ол түйинлердиң тығыз жайласыўын характерлесин, ω_h-тордың ишки түйинлериниң көплиги, γ_h-шегаралық түйинлердиң көплиги болсын. (1),(2) мәселесине сәйкес шекли айырмалы мәселени қарайық:

$$L_h y_h = \xi_h, x \in w_h; l_h y_h = \chi_h, x \in \gamma_h \qquad (3)$$

бунда $\zeta_h(x)$ ҳәм $\chi_h(x)$-белгили сеткалық функциялар. Бул жерде L_h ҳәм l_h сеткалық функцияларға тәсир етиўши операторлар. (3) мәселесиниң шешими y_h сеткалық функция болып,ол $\omega_h + \gamma_h = \overline{\omega}_y$ торының түйинлеринде анықланған, h-ты өзгертиў арқалы, яғный ҳәр қыйлы $\overline{\omega}_y$ торын сайлап отырып, h параметринен ғәрезли $\{y_h\}$ шешимлериниң көплигин аламыз. Солай етип, ҳәр қыйлы h параметрине сәйкес келиўши (3) шекли айырмалы мәселесиниң семейносын қараўға туўра келеди. Бул (3) шекли айырмалы мәселесиниң көплиги шекли айырмалар схемасы деп аталады.

Ҳәр қандай жуўық методтың тийкарғы мақсети берилген мәселениң шешиминиң жуўық мәнисин белгили $\varepsilon > 0$ дәлликте, шекли әмелден соң алыўдан ибарат. (1)-(2) мәселесиниң y_h жуўық шешими менен қәлеген берилген $\varepsilon > 0$ дәлликте $h(\varepsilon)$ адымын сайлап алыўға байланыслы шешиўге болатуғынын анықлаў ушын, y_h ҳәм u(x) шешимлерди салыстырыўымыз зәрүр.

Бул салыстырыўларды сеткалық функциялардың көплиги H_h та жүргиземиз. Мейли u_h $u(x)$-функциясының ω_h торындағы мәниси болсын. Сонлықтан $u_h(x) \in H_h$ болады. (3) шекли айырмалы схемасының шешиминиң қәтелигин қарайық, яғный $z_h = y_h - u_h$. z_h ушын шәрт жазайық, $y_h = z_h + u_h$

аңлатпасын (3) теңлемеге апарып қойып z_h ушын (3) теңлемесине уқсас мәселе аламыз:

$$L_h z_h = \psi_h, x \in \omega_h, \qquad l_h z_h = \nu_h \tag{4}$$

бунда ψ_h ҳәм V_h байланыссызлық болып, олар төмендеги түрге ийе.

$$\psi_h = \varphi_h - L_h u_h, \qquad \upsilon_h = \chi_h - l_h u_h$$

(4) мәселениң оң тәрепиндеги ψ_h ҳәм υ_h-лар сәйкес (1) теңлемесин (3) теңлемеси менен аппроксимациялаўдың қәтелиги ҳәм (2) шәрттиң $l_h y_h = \chi_h$ шекли айырмалы шәрт пенен аппроксимациялаўдың қәтелиги деп аталады.

Схеманың қәтелиги z_h ҳәм аппроксимациялаў қәтеликлери ψ_h, υ_h ларды бахалаў ушын сеткалық функциялардың көплигинде сәйкес $\|\cdot\|_{(1_h)}, \|\cdot\|_{(2_h)}$ ҳәм $\|\cdot\|_{(3_h)}$ нормаларын киргизейик. (3) шекли айырмалы мәселесиниң шешими (1)-(2) мәселесиниң шешимине жыйнақлы деп аталады, егер де $\| z_h \|_{(1_h)} = \| y_h - u_h \| \to 0$ болса, ямаса $\| z_h \|_{(1_h)} = \rho(|h|)$ болса,бунда $|h| \to 0$ де $\rho(|h|) \to 0$ ды. (3) шекли айырмалы мәселеси $O(|h|^h)$ тезлиги менен жыйнақлы ямаса n-ши тәртипли дәлликке ийе деп аталады, егерде жеткиликли киши $|h| \leq h_0$ ушын $\| z_h \|_{(1_h)} = \| y_h - u_h \|_{(1_h)} \leq M |h|^n$, теңсизлиги орынланса, бунда M>0 турақлы болып, ол h-тан ғәрезсиз, n>0 сан. $|h| \to 0$ (3) шекли айырмалы схемасы n-ши тәртипли аппроксимацияға ийе деп аталады, егер $\| \psi_h \|_{(2_h)} = O(|h|^n), \| \upsilon_h \|_{(3_h)} = O(|h|^n)$ теңликлери орынланса. f(x) ҳәм Lu(x) функцияларының ω_h сектасындағы мәнислерин сәйкес f_h ҳәм $(Lu)_h$ арқалы белгилеп ҳәм (f-Lu)=0 екенлигин есапқа алып,ψ_h-ты төмендегише жазамыз.

$$\psi_h = (\varphi_h - L_h u_h) - (f_h - (Lu)_h) = (\varphi_h - f_h) + ((Lu)_h - L_h u_h) = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)}$$

Солай етип схеманың аппроксимациялаў қәтелиги ψ_h теңлемениң оң тәрепиниң қәтелиги $\psi_h^{(1)} = \varphi_h - f_h$ ҳәм дифференциал операторды аппроксимациялаўдың қәтелиги $\psi_h^{(2)} = (Lu)_h - L_h u_h$-лардың қосындысынан туратуғын шама екен.

6-§. Турақлы коэффициентли бир өлшемли жыллылық өткизгишлик теңлемеси

Стационарлық емес мәселелер ушын шекли айырмалы схемаларды дүзиў методларын ҳәм жәнеде оларды изертлеў методларын анықлаў ушын турақлы коэффициентли бир өлшемли жыллылық өткизгишлик теңлемесин қарастырамыз.

1.Мәселениң қойылыўы.

Туўры бойынша жыллылықтың таралыў процесси жыллылық өткизгишлик теңлемеси менен тәрийпленеди:

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\bar{f}, \quad (1)$$

бунда $u=u(x,t)$-температура, C – масса бирлигиниң жыллылық сыйымлылығы, ρ - тығызлылық, k – жыллылық өткизгишлик коэффициенти, $\bar{f}$ -жыллылық дереклериниң тығызлығы, яғный ўақыт бирлигинде узынлық бирлигине ажыралатуғын жыллылық саны. Жыллылық өткизгишлик ҳәм жыллылық сыйымлылық коэффициенти тек ғана x ҳәм t лардан ғана ғәрезли болып қалмастан ал u температурадан ғәрезли болады (бул жағдайда теңлеме квазисызықлы деп аталады). Егерде k ҳәм $C\rho$ турақлы болса, онда (1) теңлеме төмендегише жазылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\bar{f}, \quad a^2=\frac{k}{C\rho}, \quad \bar{f}=\frac{f}{C\rho}, \quad (2)$$

бунда a^2 – жыллылық өткизгишлик коэффициенти.

Қалған жағында формулаларды номерлеў параграфқа байланыссыз алып барылады.

Улыўмалылық ушын a = 1 деп есапласақ, онда (2) теңлемени төмендегише жазамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f \quad (3)$$

Ҳақыйқатында да, $x'=\dfrac{x}{a}$ орын алмастырыўын жүргизип ҳәм тағыда x' ты x арқалы белгилеп алып, (3) теңлемени аламыз. Егерде (2) $0\le x\le l$ кесиндисинде изленсе, онда әдетте өлшемсиз $x'=\dfrac{x}{l}$, $t'=\dfrac{a^2t}{l^2}$ өзгериўшилери пайдаланылады. Бул өзгериўшилерде (2) теңлемеси (3) түринде жазылады, соның менен бирге $0\le x'\le l$, ал $f=\dfrac{l^2\bar{f}}{a^2}$ болады.

Биз (3) теңлемеси ушын биринши шегаралық шәртти туўрымүйешли төртмүйешлик областында $\overline{D}=(0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le T)$ қарастырамыз.

$\overline{D}$ областында берилген

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\quad 0<x<l,\ 0<t<T \qquad (\mathrm{I})$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1,$$
$$u(0,t)=u_1(x),\ u(1,t)=u_2(t),\ 0\le t\le T,$$

мәселесиниң үзликсиз болған $u(x,t)$ шешимин табыў талап етиледи.

2. Алты точкалы схема семейcтвосы.

Мына төмендеги торын киргиземиз:

$$\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\ \ i=0,1,...,N\},\qquad \omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ \ j=0,1,...,j_0\}$$

ҳәм $\overline{D}$ областында адымлары $h=\dfrac{1}{N}$ ҳәм $\tau=\dfrac{T}{j_0}$ болған мына торын киргиземиз:

$$\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h x\omega_h\{(ih,\ j\tau),\ i=0,1,...,N,\ \ j=0,1,...,j_0\}$$

$\varpi_{h\tau}$ торында анықланған y торлық функциясының (x_i,t_j) түйининдеги мәнисин y_i^j арқалы белгилеймиз.

$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ туўындысын биринши шекли айырмалы туўынды менен алмаслап, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ туўындысын екинши шекли айырмалы туўындылар менен алмаслап

$(u_{\bar{x}x} = \Lambda u)$ ҳәм ерикли σ ҳақыйқый параметрин киргизип, мына төмендеги бир параметрли шекли айырмалы схема семействосын қарастырамыз:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda\left(\sigma y_i^{j+1} + (1-\sigma)y_i^j\right) + \varphi_i^j, \quad 0 < i < N, \;\; 0 \le j \le j_0 \tag{4}$$

(4) – схемасы айырым жағдайларда салмаққа ийе схема деп те аталады.

Шегаралық ҳәм басланғыш шәртлерди дәл төмендегише аппроксимациялаймыз:

$$y_0^j = u_1^j, \qquad y_N^j = u_2^j, \tag{5}$$

$$y_j^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i) \tag{6}$$

Бундағы φ_i^j - (3) теңлемениң оң тәрепиндеги f функциясын аппроксимациялаўшы торлық функция болып, ол мысал ушын төмендегише аңлатылыўы мумкин:

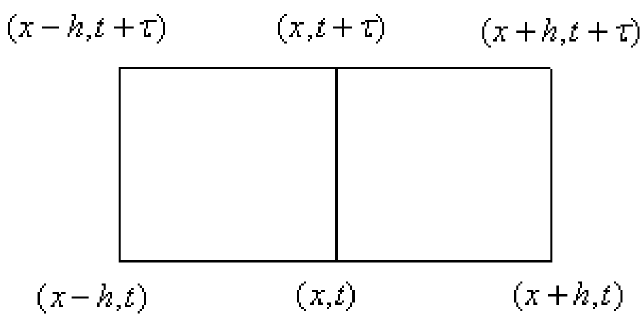
$$\varphi_i^j = f(x_i, t_{j+0.5}), \;\; t_{j+0.5} = t_j + 0.5\tau,$$

ал

$$\Lambda y_i = y_{\bar{x}x,i} = \frac{(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})}{h^2}$$

(4) – (6) шәртлери менен анықланған шекли айырмалы мәселесин (II) мәселе деп атаймыз.

(4) – шекли айырмалы схемасы алты точкалы шаблонда жазылған болып, ол шаблон түйинлери мына төмендегилерден ибарат:



1 - сүўрет

Бул шаблонның орайы $\left(x_i, t_{j+1}\right)$ точкасы есапланады. (4) – теңлемеси $\left(x_i, t_{j+1}\right)$, $i = 1,2,..., N-1$, $j+1 = 1,2,..., j_0$, түйинлеринде жазылып, оларды ишки точкалар деп атайды. Тордың ишки түйинлериниң көплигин төмендегише белгилеймиз:

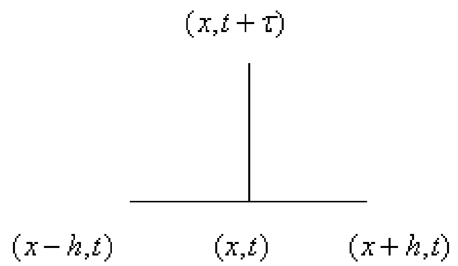
$$\overline{\omega}_{h\tau} = \left\{(x_i, t_j),\ 1 \le j \le N-1, \quad 1 \le j \le j_0\right\}$$

(5) ҳәм (6) шегаралық ҳәм басланғыш шәртлери $\varpi_{h\tau}$ торының шегаралық түйинлеринде жазылады.

$\overline{\omega}_{h\tau}$ торының $t = t_j$ туўрысының бойында жататуғын түйинлериниң көплиги әдетте слой (қатлам) деп аталады. (4) – схемасы изленип атырған y функциясының еки қатламдағы мәнислерин қамтып алады. Сонлықтан оны еки қатламлы схема дейди.

σ параметрин қалай сайланып алыныўына байланыслы (4) шекли айырмалы схеманың орнықлылығы ҳәм дәллиги ғәрезли болатуғынын биз алдағы ўақытта көрсетемиз.

σ параметриниң дара жағдайларына сәйкес келетуғын шекли айырмалар схеманы қарастырамыз. $\sigma = 0$ болғанда төрт точкалы схеманы аламыз.



2 - сүўрет

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^j + \varphi_i^j,$$

ямаса

$$y_i^{j+1} = (1-2\gamma)y_i^j + \gamma\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^j, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2} \tag{7}$$

Бул схема $(x_i, t_{j+1}), (x_i, t_j), (x_{i\pm1}, t_j)$ шаблонларында анықланған.

$t = t_{j+1}$ таза қатламының ҳәр бир точкасындағы y_i^{j+1} мәниси (7) аңлатпасы бойынша $t = t_j$ ески қатламындағы $y_i^{\,j}$ мәнислери арқалы аңлатылады. $t = 0$ болғанда $y_j^{\,0} = u_0(x_i)$ басланғыш мәнислери бериледи, онда (7) – формуласы избе–из қәлеген қатламда y мәнислерин анықлаў мүмкиншилигин береди. (7) схемасы анық схема деп аталады.

Егерде $\sigma \neq 0$ болса, онда (4) схемасы анық емес еки қатламлы схема деп аталады. $\sigma \neq 0$ болғанда $y_i^{\,j+1}$ мәнисин таза қатламда анықлаў ушын алгебралық теңлемелердың системасын аламыз:

$$\sigma \Lambda y_i^{\,j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{\,j+1} = -F_i^{\,j}, \quad F_i^{\,j} = \frac{1}{\tau} y_i^{\,j} + (1-\sigma)\Lambda y_i^{\,j} + \varphi_i^{\,j}, \quad i = 1,2,...,N-1 \quad (8)$$

ҳәм қосымша

$$y_0^{\,j+1} = u_1^{\,j+1}, \quad y_N^{\,j+1} = u_2^{\,j+1}$$

шегаралық шәртлери де болады.

Бул системаның шешимлерин айдаў усылы менен табыўға болады. Енди буннан басқа тағы еки схеманы көрсетемиз.

$\sigma = 1$ болғанда илгерилеўши (опережение) схемаға ийе боламыз ямаса ол таза анық емес схема деп аталады:

$$\frac{y_i^{\,j+1} - y_i^{\,j}}{\tau} = \Lambda y_i^{\,j+1} + \varphi_i^{\,j} \quad (9)$$

$\sigma = 0.5$ болғанда алты точкалы симметриялық схемаға ийе боламыз:

$$\frac{y_i^{\,j+1} - y_i^{\,j}}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda(y_i^{\,j+1} + y_i^{\,j}) + \varphi_i^{\,j} \quad (10)$$

Бул (10) схема айырым ўақытлары Кранк – Николсин схемасы деп те аталады.

7-§. Аппроксимациялаў қәтелиги

(4), (6) – схемасының дәллиги ҳаққындағы сораўға жуўап бериў ушын (4), (6) мәселесиниң $y = y_i^{\,j}$ шешимин (I) мәселесиниң $u = u(x,t)$ шешими менен салыстырылыўы керек. $u(x,t)$ - (I) мәселесиниң үзиликсиз шешими болғанлықтан, оны $u_i^{\,j} = u(x_i, t_j)$ деп қабыллап ҳәм $z_i^{\,j} = y_i^{\,j} - u_i^{\,j}$ айырмасын қарастырамыз. Қатламда $z_i^{\,j}$ торлық функциясын баҳалаў ушын базы бир $\|\cdot\|$ нормасын таңлап аламыз, мысал ушын, мына төмендеги нормалардың биреўин алсақ болады:

$$\|z\| = \|z\|_C = \max_{0 \le i \le N} |z_i|, \qquad \|z\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} z_i^{\,2} h \right)^{\frac{1}{2}}$$

Буннан былай индекссиз жазыўды қолланыў мақсетинде мына төмендеги индекссиз белгилеўлерди киргиземиз:

$$y_i^{\,j} = y, \quad y_i^{\,j+1} = \tilde{y}, \quad y_t = \frac{(\tilde{y} - y)}{\tau}$$

Сонда (4)-(6) мәселесин мына түрде қайта жазамыз:

$$\begin{aligned} & y_t = \Lambda\big(\sigma \tilde{y} + (1-\sigma) y\big) + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ & y(0,t) = u_1(t), \quad y(1,t) = u_2(t), \quad t \in \omega_\tau, \\ & y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad \Lambda y = y_{\bar{x}x} \end{aligned} \tag{II}$$

$z = y - u$ айырмасын анықлаўшы шәртлерди табамыз. $y = z + u$ аңлатпасын (II) мәселеге апарып қойып ҳәм u ды берилген функция деп есаплап, z ушын мына мәселеге ийе боламыз:

$$\begin{aligned} & z_t = \Lambda\big(\sigma \tilde{z} + (1-\sigma) z\big) + \psi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ & z(0,t) = z(1,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \\ & z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h \end{aligned} \tag{III}$$

бунда

$$\psi = \Lambda\big(\sigma \bar{u} + (1-\sigma) u\big) - u_t + \varphi \tag{11}$$

- (II) схеманың (I) теңлемениң $u = u(x,t)$ шешиминдеги аппроксимациялаў қәтелиги (байланыссызлық).

Енди аппроксимациялаўдың тәртиби ҳаққында түсиник беремиз. (II) схемасы (I) теңлемесин оның $u = u(x,t)$ шешиминде (m,n) тәртиби менен аппроксимациялайды деп аталады ямаса $O(h^m + \tau^n)$ аппроксимациясына ийе делинеди, егерде барлық $t \in \omega_\tau$ ушын $\|\psi(x,t)\|_{(2)} = O(h^m + \tau^n)$ ямаса $\|\psi\|_{(2)} \le M(h^m + \tau^n)$ шәртлери орынланса, бунда M - оң анықланған турақлы болып, h ҳәм τ дан ғәрезсиз, ал $\|\cdot\|_{(2)} - \omega_h$ торындағы базыбир норма.

$u = u(x,t)$ функциясы x ҳәм t өзгериўшилери бойынша керекли тәртиптеги туўындыларына ийе деп есаплап, (II) схемасының аппроксимациясының тәртибин баҳалаўға өтемиз. Мына белгилеўлеринен пайдаланамыз:

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \overline{u} = u(x_i, t_{j+0.5}), \; t_{j+0.5} = t_j + \frac{\tau}{2}$$

$u = u(x,t)$ функциясын $(x_j, \bar{t} = t_{j+0.5})$ точкасының дөгерегинде Тейлор формуласы бойынша қатарға жаямыз. Мына формуладан пайдаланып

$$\dot{u} = 0.5(\tilde{u} + u) + 0.5(\tilde{u} - u) = 0.5(\tilde{u} + u) + 0.5\tau u_t,$$
$$u = 0.5(\tilde{u} + u) - 0.5\tau u_t,$$
$$\sigma\tilde{u} + (1+\sigma)u = 0.5(\tilde{u} + u) + (\sigma - 0.5)\tau u_t$$

ψ - аппроксимациялаў қәтелигин мына түрде жазамыз:

$$\psi = 0.5\Lambda(\tilde{u} + u) + (\sigma - 0.5)\tau \Lambda u_t - u_t + \varphi$$

Бул жерде

$$\Lambda u = u'' + \frac{h^2}{12} u^{(4)} + O(h^6) = Lu + \frac{h^2}{12} L^2 u + O(h^4), \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\tilde{u} = \overline{u} + 0.5\tau \overline{\dot{u}} + \frac{\tau^2}{8} \overline{\ddot{u}} + O(\tau^3),$$

$$u = \overline{u} - 0.5\tau \overline{\dot{u}} + \frac{\tau^2}{8} \overline{\ddot{u}} + O(\tau^3),$$

$$0.5(\tilde{u} + u) = \overline{u} + \frac{\tau^2}{8} \overline{\ddot{u}} + O(\tau^3), \; u_t \quad \overline{\dot{u}} + O(\tau^2)$$

аңлатпаларынан пайдалансақ, онда

$$\Psi=\left(L\bar{u}-\bar{\dot{u}}+\varphi\right)+\left(\sigma-0.5\right)\tau\, L\bar{\dot{u}}+\frac{h^2}{12}L^2\bar{u}+O\left(\tau^2+h^4\right) \tag{12}$$

аңлатпасын аламыз.

Буннан көринип турғанындай, $\varphi=\bar{f}=f(x,t_{j+0,5})$ болғанда $\psi=(\sigma-0.5)\tau\, L\bar{\dot{u}}+O(h^2+\tau^2)$ болады, себеби $\dot{u}=Lu+f$, $L\dot{u}=L^2+Lf=u^{(4)}+f''$ ҳәм $L^2u=L\dot{u}-Lf$ теңликлерин итибарға алып, мыналарды аламыз:

$$\Psi=\left(\varphi-\bar{a}\right)+\left[\left(\sigma-0.5\right)\tau+\frac{h^2}{12}\right]L\bar{\dot{u}}-\frac{h^2}{12}L\bar{f}+O\left(h^4+\tau^2\right) \tag{13}$$

Квадратлық қаўсырмадағы аңлатпаны нольге теңлеп алып, мыналарды аламыз:

$$\sigma=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12\tau}=\sigma_* \tag{14}$$

Бул жағдайда $\sigma=\sigma_*$ ҳәм φ төмендегише аңлатылып $\varphi=\bar{f}+\frac{h^2}{12}L\bar{f}$, (II) схемасы $O\left(h^4+\tau^2\right)$ аппроксимациясына ийе болады, яғный $\psi=O\left(h^4+\tau^2\right)$ болады. Схеманың аппроксимациялаў тәртиби бузылмайды, егерде биз f'' туўындысын $f_{\bar{*}*}=\Lambda f$ аңлатпасы менен алмасласақ, яғный $\varphi=\bar{f}+\frac{(h^2\Lambda\bar{f})}{12}$ деп алсақ ямаса

$$\varphi_i^j=\frac{5}{6}f_i^{j+\frac{1}{2}}+\frac{1}{12}\left(f_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}+f_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}\right) \tag{15}$$

деп алсақ, бул формула есаплаў ушын қолайлырақ есапланады.

Мейли $C_n^m(\overline{D})-x$ өзгериўши бойынша m рет туўындысына ийе ҳәм t өзгериўши бойынша n рет туўындысына ийе областында үзликсиз функциялардың классы болсын. (13) ҳәм (14) формулаларынан көринип турғанындай, (II) схемасы

1) $\sigma=0.5$, $\varphi=\bar{f}$ ямаса $\varphi=\bar{f}+O(h^2+\tau^2)$ болса, егерде $u\in C_3^4$ болғанда, $O\left(h^4+\tau^2\right)$ аппроксимациясына,

2) қәлеген $\sigma \neq 0.5$, $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau)$ мәнислеринде, мысал ушын, $\varphi = \bar{f}$ ямаса $\varphi = f$ болғанда егер $u \in C_2^4$ болғанда, $O\left(h^2 + \tau\right)$ аппроксимациясына,

3) $\sigma = \sigma_*$ ҳәм φ (15) – формуласы менен берилсе, егерде $u \in C_3^6$ болғанда, $O\left(h^4 + \tau^2\right)$ аппроксимациясына ийе болады.

$\sigma = \sigma_*$ ҳәм $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}\Lambda\bar{f}$ болғанда (II) схемасын әдетте жоқары тәртипли дәлликли схема деп аталады.

Схеманың оң тәрепиндеги φ функциясын сайлап алыў берилген σ да аппроксимациялаў тәртибин сақлаў талабына бойсыныў керек. Себеби, $\sigma = 0.5$ болғанда φ функциясын төмендегише алыўға болады: $\varphi = 0.5(f + f)$, $\varphi = \bar{f}$ ҳ.т.б.

(13) – аңлатпадан көринип турғанындай $O\left(h^2 + \tau^2\right)$ қәтелиги $\sigma \neq 0.5$ болған мәнислеринде де ерисиў мүмкин болады, егерде $\sigma = 0.5 + \frac{h^2\alpha}{\tau}$ деп алсақ, бунда $\alpha - h$ ҳәм τ адымларынан ғәрезсиз болған қәлеген турақлы. Бул жағдайда σ параметри h ҳәм τ адымларынан ғәрезли болады. α параметрин сайлап алыўдағы ериклик схеманың орнықлылығы менен шегараланады.($\alpha > -\frac{1}{4}$ деп алыў жеткиликли болады)

8-§. Дәслепки берилгенлер бойынша орнықлылық

(II) схеманың орнықлылығын өзгериўшилерди ажыратыў усылы менен изертлестиремиз (бир – текли шегаралық шәртлерде). Мына төмендеги бирдейликлеринен пайдаланып, $y = y + \tau\, y_{t,}$ $\sigma\, y + (1-\sigma)y = y + \sigma\tau\, y_t$ бир текли шегаралық шәртлерге ийе (II) схемасын мына түрде қайта түрлендирип жазамыз:

$$y_t - \sigma\tau\Lambda y_t = \Lambda y + \varphi, \quad (x,t)\in\omega_{h\tau},$$
$$y(0,t) = y(1,t) = 0, \;\; t\in\omega_\tau, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad x\in\varpi_h \tag{16}$$

Егерде (16) – мәселесиниң шешими ушын

$$\|y(t)\|_{(1)} \le M_1\|u_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0\le t'\le t}\|\varphi(t')\|_{(2)}, \quad t\in\omega_{\tau,} \tag{17}$$

баҳасы орынлы болса, онда (16) – схемасы орнықлы деп аталады, бунда $M_1, M_2 - h$ ҳәм τ адымларынан ғәрезсиз болған оң анықланған турақлылар, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ қатламдағы (ω_h торындағы) базы бир нормалар.

Мейли $\varphi = 0$ болсын. Сонда

$$\|y(t)\|_{(1)} \le M_1\|u_0\|_{(1)}, \quad t\in\omega_{\tau,} \tag{18}$$

баҳасы (16) – схемасының дәслепки берилгенлер бойынша орнықлылығын аңлатады. Егерде $y(x,0)=0$ болса, онда

$$\|y(t)\|_{(1)} \le M_2 \max_{0\le t'\le t}\|\varphi(t')\|_{(2)} \tag{19}$$

теңсизлиги (16) – схемасының оң тәрепи бойынша орнықлылығын аңлатады.

(16) – мәселесиниң шешими ушын (17) баҳасы, (16) – схеманың дәслепки берилгенлер бойынша ҳәм оң тәрепи бойынша орнықлылығын аңлатады. (16) – мәселесиниң шешимин $y = \bar{y} + \tilde{y}$ қосындысы түринде аңлатамыз, бунда $\bar{y}$ - бир текли

$$y_t - \sigma\tau\Lambda y_t = \Lambda y, \quad y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad y(x,0) = u_0(x) \tag{16а}$$

теңлемесиниң шешими, ал $\tilde{y}$ - басланғыш $\tilde{y}(x,0)=0$ шәртли бир текли емес

$$y_t - \sigma\tau\Lambda y_t = \Lambda y + \varphi, \quad y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad y(x,0) = 0 \tag{16б}$$

теңлемесиниң шешими. Дәслепки берилгенлер бойынша (16) – схеманың орнықлылығын изертлеў ушын (16а), мәселениң шешиминиң баҳасын табыў керек болады. Оның ушын өзгериўшилерди ажыратыў методынан пайдаланыўымызға туўра келеди ҳәм $L_2(\omega_h)$ торлық нормасында:

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|, \text{ бунда } \|y\| = \sqrt{(y, y')}, \quad (y,v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$$

(18) баҳасын аламыз.

(16а) теңлемесиниң шешимин функциялардың көбеймеси түринде изертлестиремиз, олардың биреўи $T = T(t_j)$ тек ғана $t = t_j$ дан ғана ғәрезли болады, ал екиншиси болса $X = X(x_j)$ - тек ғана $x = x_j$ дан ғәрезли болып, $y(x,t)$ шешимде $y(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ деп аламыз. Бул аңлатпадан (16а) аңлатпасына апарып қойып ҳәм $\Lambda y = T\,\Lambda X$, $y_t = XT_t$ теңликлерин итибарға аламыз. Сонда мына қатнасларын аламыз:

$$\frac{\tilde{T} - T}{\tau\left(\sigma\tilde{T} + (1-\sigma)T\right)} = \frac{\Lambda X}{X} = -\lambda, \quad \tilde{T} = T(t_{j+1}), \; T = T(t_j),$$

бунда λ - бөлиў параметри. Буннан мыналарды табамыз:

$$\tilde{T} = qT,$$

бунда

$$q = \frac{1-(1-\sigma)\tau\,\lambda}{1+\sigma\,\tau\,\lambda}$$

X ушын меншикли мәнисти табыўға байланыслы шекли айырмалы мәселени аламыз (Штурмм - Лиувиилдиң шекли айырмалар мәселеси):

$$\Lambda X(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; 0 < x = ih < 1, \quad X(0) = X(1) = 0, \;\; X(x) \not\equiv 0$$

Бул мәселе есаплаў математикасы курсынан белгили болғанындай ноллик емес (тривиаллық емес) шешимлерге – меншикли функцияларға ийе болады:

$$X^{(k)}(x) = \sqrt{2}\sin\pi\,k\,x, \;\; k = 1,2,\ldots,N-1,$$

бул функциялар мына

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi kh}{2}, \;\; k = 1,2,\ldots,N-1, \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{N-1},$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}, \quad \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2},$$

меншикли мәнислерине сәйкес келеди. $\left\{X^{(k)}\right\}$ меншикли функцияларының көплиги ортонормалласқан системаны дузеди: $(X^{(k_1)}, X^{(k_2)}) = \delta_{k_1 k_2}$

Мына Парсевалл теңлиги орынлы:

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2\,, \tag{20}$$

бунда $f_k - \varpi_h$ торында анықланған ҳәм *x=0, x=1,* болғанда ноллик мәнислерди қабыллайтуғын қәлеген торлық $f(x)$ функцияның жайып жазыў коэффициенти:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N-1} f_k X^{(k)}(x), \qquad f_k=(f, X^{(k)})$$

Солай етип, (16а) мәселеси ноллик емес $y_{(k)}=T_k X^{(k)}\not\equiv 0$ шешимине ийе болады, бунда T_k - мына төмендеги теңлигинен анықланады:

$$\tilde{T}_k=q_k T_k \text{ ямаса } T_k^{j+1}=q_k T_k^{j}=\cdots=q_k^{j+1}T_k^{0}, \qquad q_k=\frac{1-\dfrac{(1-\sigma)}{\tau\lambda_k}}{1+\sigma\tau\lambda_k}, \tag{21}$$

T_k^0 -ерикли турақлы.

(16а) – теңлемесиниң $y_{(k)}=T_k X^{(k)}$ түриндеги шешими k номерли гармоника деп аталады. Ол (16а) мәселесиниң $u_0(x)=T_k^0 X^{(k)}(x)$ басланғыш шәртли шешими болады. Ҳәр бир y_k гармониклериниң қайсы бири $k=1,2,...,N-1$ болғанда қандай жағдайларда орнықлы болатуғынын анықлайық:

$$y_{(k)}^{j+1}=X^{(k)}T_k^{j+1}=q_k X^{(k)}T_k^{j}, \qquad y_{(k)}^{j+1}=q_k y_{(k)}^{j} \tag{22}$$

формуласынан көринип турғанындай $|q_k|\ge 1+E$ болғанында, бундағы *E,h* ҳәм τ параметрлеринен ғәрезсиз $E=const>0$ турақлысы, $\tau\to 0$ умтылғанда мына қатнасларды аламыз:

$$\left\|y_{(k)}^{j+1}\right\|=|q_k|\left\|y_{(k)}^{j}\right\|\ge(1+E)\left\|y_{(k)}^{j}\right\|\ge(1+E)^{j+1}\left\|y_{(k)}^{0}\right\|\to\infty$$

яғный мәселе орнықлы емес. Егерде $|q_k|\le 1$ болса, онда $\left\|y_{(k)}\right\|$ фиксерленген $t=j\tau$ да $j(\tau\to 0)$ диң өсиўи менен өспейди:

$$\left\|y_{(k)}^{j+1}\right\|\le\left\|y_{(k)}^{j}\right\|\le\cdots\le\left\|y_{(k)}^{0}\right\|$$

ҳәм гармоника орнықлы болады.

Егерде барлық $|q_k| \le 1$ болса, ҳәм нәтийжеде $\|y^j_{(k)}\| \le \|y^0_{(k)}\|$ болса, онда схема «ҳәр бир гармоникада орнықлы» деп атаймыз.

Енди σ ның қандай мәнислеринде $\|q_k\| \le 1$ ямаса $-1 \le q_k \le 1$ шәрти орынланатуғынын анықлайық, яғный ҳәр бир гармоникада схеманың орнықлылығын тәмийнлейтуғынын анықлайық.

$$q_k = 1 - \frac{\tau \lambda_k}{1 + \sigma \tau \lambda_k}$$

формуласынан, $1 + \sigma \tau \lambda_k > 0$ болса, яғный $\sigma > -\dfrac{1}{\tau \lambda_k}$ болса, $q_k < 1$ екенлиги көринип турыпты. $q_k \ge -1$ талабы ямаса

$$q_k + 1 = \frac{2 + (2\sigma - 1)\tau \lambda_k}{1 + \sigma \tau \lambda_k} \ge 0$$

шәрти орынланады, егерде $2 + (2\sigma - 1)\tau \lambda_k \ge 0$ болса, ямаса $\sigma \ge \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\tau \lambda_k}$ болса $1 + \sigma \tau \lambda_k > 0$ шәрти бул жағдайда автоматлық түрде орынланады. Себеби $\lambda_k \le \lambda_{N-1} < \dfrac{4}{h^2}$ болғанлықтан, онда $-\dfrac{1}{\tau \lambda_k} \le -\dfrac{1}{\tau \lambda_{N-1}} < -\dfrac{h^2}{4\tau}$ болады ҳәм нәтийжеде, $|q_k| \le 1$ шәрти барлық $k = 1,2,..., N-1$ ушын орынланады, егерде

$$\sigma \ge \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} = \sigma_0 \tag{23}$$

болса.

Солай етип, барлық $y_{(k)} = T_k X^{(k)}$ гармоникалар бирдей сол $\sigma \ge \sigma_0$ шәртинде орнықлы болады екен.

Ҳәрбир гармоникада (16а) схемасының орнықлылығынан (спектральлық орнықлылығынан) L_k торлық нормасында $y(x,0) = u_0(x)$ дәслепки берилгенлер бойынша орнықлылығы келип шығады, бундағы $u_0(x)$ – $0 \le x \le 1$ аралығында берилген ҳәм *x=0, x=1* мәнислеринде нольге тең болатуғын қәлеген торлық функция.

(16а) мәселесиниң улыўма шешимин $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{y}_k = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{T}_k X^{(k)}$ деп алып, (22) туриндеги дара шешимлердиң қосындысы түринде излеймиз, сонда $\|\tilde{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{T}_k^2$ болады.

Буған $\tilde{T}_k = q_k T_k$ қойып ҳәм (20) есапқа алып, төмендеги аңлатпаларды табамыз:

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)} ,$$

$$\|\tilde{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} q_k^2 T_k^2 \le \max_k q_k^2 \sum_{i=1}^{N-1} T_k^2 = \max_k q_k^2 \|y\|^2$$

Егерде $\sigma \ge \sigma_0$ болса, онда $\max|q_k| \le 1$ болады ҳәм $\|\tilde{y}\| \le \|y\|$ ямаса $\|y^{j+1}\| \le \|y^j\| \le \cdots \le \|y^0\| = \|u^0\|$ болады. Солай етип, (16а) мәселесиниң шешими ушын $\|y^j\| \le \|u^0\|$, $\sigma \ge \sigma_0$ болғанда баҳасы орынлы болады, яғный (16) схемасы $\sigma \ge \sigma_0$ болғанда дәслепки берилгенлер бойынша $L_2(\omega_h)$ торлық нормасында орнықлы екен.

Шекли айырмалы схема шәртли орнықлы деп аталады, егерде ол τ ҳәм h адымлары арасында қандайда бир байланыс бар жағдайында орнықлы болса ҳәм шәртсиз орнықлы деп аталады – кери жағдайларда. Қәлеген τ ҳәм hларда орнықлы болатуғын схемаға абсолют орнықлы схема деп аталады.

Енди базыбир дара жағдайларды қарап өтемиз.

1. Анық схема $(\sigma = 0)$. (23) шәрти $0.5 - \dfrac{h^2}{4\tau} \le 0$ аңлатпасын береди яғный

$$\frac{\tau}{h^2} \le 0.5 \qquad (25)$$

Анық схема тек ғана (25) шәртинде ғана орнықлы болады, бул шәрт болса τ ҳәм h адымларын байланыстырады (шәртли орнықлы).

2. Анық емес схема $\sigma \ge 0.5$ болғанда қәлеген τ ҳәм h да орнықлы болады, себеби $\sigma \ge 0.5 > \sigma_0$. Солай етип, илгерилеўши схема $(\sigma = 1)$ ҳәм

симметриялық схема $(\sigma = 0.5)$ қәлеген τ ҳәм hда орнықлы болады (абсолют орнықлы).

3. Жоқары тәртипли аппроксимациялы схема. Жоқары тәртипли аппроксимациялы схема $(\sigma = \sigma_*, \sigma_* = 0.5 - \frac{h^2}{12\tau})$ абсолют орнықлы болады. Ҳақыйқатында да, $\sigma_* - \sigma_0 = -\frac{h^2}{12\tau} + \frac{h^2}{4\tau} = \frac{h^2}{6\tau} > 0$ болады, қәлеген τ ҳәм h ушын.

4. Анық емес схемалар σ параметри $0 < \sigma < 0.5$ болғанда ҳәм $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$ дан ғәрезсиз болғанда $\gamma \le \frac{1}{(2-4\sigma)}$ болғанда шәртли орнықлы болады.

5. $\sigma = 0.5 + \frac{h^2\alpha}{\tau}$ параметри менен, $O(h^2 + \tau^2)$ аппроксимациясына ийе (16) схема, егерде $\alpha > -\frac{1}{4}$ болса, онда қәлеген τ ҳәм hушын орнықлы болады.

Солай етип, σ параметри тек ғана аппроксимациялаў тәртибин ғана басқарып қалмастан, тағыда (16) схема орнықлылығында басқарады.

Орнықлылықты изертлегенимизде биз тек ғана ўақытқа байланыслы еки t_j, t_{j+1} қатламлары менен ғана ҳәм $\tau = t_{j+1} - t_j$ адымы менен ислестик. Бул жүргизген талқылаўларымыз өз күшин, егерде ω_τ торы тең өлшемсиз болған жағдайларда да сақлайды, яғный $\tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$ адымы қатлам номеринен ғәрезли болады. Бул жағдайда σ параметрин $j+1$ қатлам номеринен ғәрезли деп есаплаў мумкин, $\sigma = \sigma^{j+1}$

Сонда, (23) аңлатпа орнына $\sigma \ge \sigma_0^{j+1} = 0.5 - \frac{h^2}{(4\tau_{j+1})}$ шәртин аламыз. $O(h^4 + \tau^2)$схемасы ушын, дара жағдайда, $\sigma_*^{j+1} = 0.5 - \frac{h^2}{(12\tau_{j+1})}$ деп алыўмыз керек. $\sigma \ge \sigma_0^{j+1}$ шәрти ω_τ тең өлшемсиз торында салмағы менен орнықлы болыўы ушын жеткиликли болады.

9-§. Оң тәрепи бойынша орнықлылық

(23) – шәртиниң $\sigma \ge \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$ (16) схемасының орнықлылығы ушын жеткиликли екенлигин ҳәм $\sigma \ge 0$ болғанда оң тәрепи бойынша орнықлы екенлигин көрсетемиз. Оның ушын (16б) мәселесин қарастырамыз. Оның шешимин төмендеги көринисте излестиремиз:

$$\tilde{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{T}_k X^{(k)},$$

сонда

$$\|\tilde{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{T}_k^2 \qquad (26)$$

Оң тәрептеги φ функциясын $\{X^{(k)}\}$бойынша жайып жазамыз:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k X^{(k)},$$

сонда

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^2 \qquad (27)$$

(26) ҳәм (27) аңлатпалардан (16б) мәселесине апарып қойып ҳәм $\Lambda X^{(k)} = -\lambda_k X^{(k)}$ теңлигин итибарға алсақ, онда мына төмендеги теңлигин табамыз:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \{T_{kt}(1 + \sigma\tau\lambda_k) + \lambda_k T_k - \varphi_k\} X^{(k)} = 0$$

Бул жерден меншикли функциялардың системасының ортогоналлығынан, фигуралық қаўсырма ишиндеги аңлатпаның нольге тең болатуғыны келип шығады, яғный

$$\tilde{T}_k = q_k T_k + \frac{\tau\varphi_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}, \quad q_k = \frac{1 - (1-\sigma)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \qquad (28)$$

(28) – аңлатпаны (26) апарып қоямыз:

$$\tilde{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{T}_k X^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)} + \tau \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k}{1+\sigma \tau \lambda_k} X^{(k)}$$

Үшмүйешлик теңсизлигинен пайдалансақ $\left(\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|\right)$, онда мыналарды табамыз:

$$\|\tilde{y}\| \le \max |q_k| \left(\sum_{k=1}^{N-1} T_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \max_k \frac{\tau}{|1+\sigma \tau \lambda_k|} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ямаса

$$\|\tilde{y}\| \le \max |q_k| \, \|y\| + \max_k \frac{\tau}{|1+\sigma \tau \lambda_k|} \|\varphi\| \tag{29}$$

Мейли бир ўақытта мына төмендеги шәрти орынланса

$$\sigma \ge \sigma_0, \ \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}, \ \sigma \ge 0 \tag{30}$$

Сонда $|q_k| \le 1, \ 1+\sigma \tau \lambda_k \ge 1$ ҳәм $\|\tilde{y}\| \le \|y\| + \tau \|\varphi\|$ ямаса $\left\|y^{j'+1}\right\| \le \left\|y^{j'}\right\| + \tau \left\|\varphi^{j'}\right\|$ $j' = 0,1,2,...,j$ бойынша суммаластырып, жуўмағында мына баҳаға келемиз:

$$\left\|y^{j+1}\right\| \le \sum_{j'=0}^{j} \tau \left\|\varphi^{j'}\right\| \tag{31}$$

себеби $\left\|y^0\right\| = 0$ болады (16б) мәселесиниң шешими ушын.

(31) баҳасы (30) – шәртинде ғана алынды. Енди $\sigma \ge 0$ болсын деген талаптан бас тартамыз ҳәм (30) – шәртиниң, орнына төмендеги шәртлердиң орынланыўын талап етейик:

$$\sigma \ge \sigma_E, \ \sigma_E = \frac{1}{2} - \frac{1-Eh^2}{4\tau}, \ 0 < E < 1, \tag{32}$$

бунда $E = const > 0$ ҳәм h, τ лардан ғәрезсиз. Сонда

$$\|q_k\| \le 1, \ 1+\sigma \tau \lambda_k = 1 + (\sigma - \sigma_{E_2})\tau \lambda_k + \sigma_E \tau \lambda_k \ge 1 + \sigma_E \tau \lambda_k =$$
$$= 1 + 0.5\tau \lambda_k - \frac{(1-E)h^2 \lambda_k}{4} > 1 - \frac{(1-E)h^2}{4} \cdot \frac{4}{h^2} = E$$

яғный $1+\sigma \tau \lambda_k > E$ болады барлық $k = 1,2,...,N-1$ ушын. Сонлықтан (29) аңлатпадан мына баҳасы келип шығады $\|\tilde{y}\| \le \|y\| + \frac{\tau \|\varphi\|}{E}$ ҳәм

$$\left\| y^{j+1} \right\| \le \frac{1}{E} \sum_{j'=0}^{j} \tau \left\| \varphi^{j'} \right\| \qquad (33)$$

Егерде $\sigma = \sigma_*$ шәрти $\tau < \dfrac{h^2}{6}$ болатуғынын билдиреди. Бул жағдайда $E = \dfrac{2}{3}$ деп сайлап алыўға болады, себеби $E = \dfrac{2}{3}$ болғанда $\dfrac{(1-E)}{4} = \dfrac{1}{2}$ болады. (24) ҳәм (31), (33) баҳаларын бириктирип, мына төмендеги теорема орынлы болатуғынын көремиз.

Теорема. Егерде $\sigma \ge \dfrac{1}{2} - \dfrac{h^2}{4\tau} = \sigma_0$, $\sigma \ge 0$ шәрти орынланса, онда (16) схемасы дәслепки берилгенлер бойынша ҳәм оң тәрепи бойынша орнықлы болады ҳәм (16) мәселесиниң шешими ушын $\left\| y^{j+1} \right\| \le \left\| u_0 \right\| + \sum_{j'}^{j} \tau \left\| \varphi^{j'} \right\|$ баҳасы орынлы болады.

Егерде $\sigma < 0$ болса, онда (16) схемасының оң тәрепи бойынша орнықлылығы ушын $\sigma \ge \dfrac{1}{2} - \dfrac{(1-E)h^2}{4\tau} = \sigma_E$, $0 < E < 1$ шәртиниң орынланыўы жеткиликли, бундағы $E \in (0,1)$ h ҳәм τ дан ғәрезсиз болған ерикли турақлы. Соның менен бирге (16) - мәселесиниң шешими ушын

$$\left\| y^{j+1} \right\| \le \left\| u_0 \right\| + \frac{1}{E} \sum_{j'=0}^{j} \tau \left\| \varphi^{j'} \right\|$$

баҳасы орынлы.

$O(h^4 + \tau h^2)$ - тәртипли схемасы ушын E турақлысының мәниси $E = \dfrac{2}{3}$ деп, ал σ_* мәниси $\tau < \dfrac{h^2}{6}$ болғанда $\sigma_* < 0$ болады.

10-§. $L_2(\omega_h)$ кеңислигиндеги жыйнақлылық ҳәм дәллик.

(II) схемасының жыйнақлылығы оның орнықлылығынан ҳәм аппроксимациясынан келип шығады. $z = y - u$ қәтелиги (III) мәселесиниң шешими болади. (31) априорлық баҳадан пайдаланып

$$\left\| z^{j+1} \right\| \le \sum_{j'=0}^{j} \tau \left\| \psi^{j'} \right\|, \quad \sigma \ge \sigma_0, \ \sigma \ge 0 \qquad (34)$$

болғанда теңсизлигин аламыз. Буннан мына төмендеги теореманың орынлы екенлиги келип шығады.

Теорема. Егерде (II) схема оң тәрепи бойынша орнықлы болса ҳәм (I) мәселесин аппроксимациялайтуғын болса, онда ол жыйнақлы болады, соның менен бирге оның тәртиби аппроксимациялаў тәртиби менен бирдей болады.

(34) аңлатпаға аппроксимациялаў қәтелиги бөлиминдеги баҳаны қойып, аппроксимациялаў қәтелиги ушын мына төмендеги баҳаларды аламыз:

$$\left\| y^j - u^j \right\| = \begin{cases} O(h^2 + \tau^2), & \sigma = 0.5, \ u \in C_3^4, \\ O(h^4 + \tau^2), & \sigma = \sigma_*, \ u \in C_3^6, \\ O(h^2 + \tau), & \sigma \ne 0.5, \ u \in C_2^4 \end{cases} \qquad (35)$$

Биз усы ўақытқа шекем орташа орнықлылығы ҳәм жыйнақлылығы ҳаққында, яғный $L_2(\omega_h)$ торлық нормасындағы орнықлылық ҳәм жыйнақлылық ҳаққында сөз қылдық.. Соған қарамастан көпшилик жағдайларда, яғный практикада тең өлшемли. Яғный

$$\left\| y^j - u^j \right\|_C = \max_{x \in \omega_h} \left| y^j - u^j \right|$$

нормасында шешимниң қәтелиги ушын баҳасын алыў әҳмийетли болады.

11-§. С кеңислигиндеги орнықлылық ҳәм жыйнақлылық

(16) мәселесиниң шешими ушын тең өлшемли баҳаны алыў ушын мына үш методтың биреўин пайдаланыўға болады:

1) максимум принципинен;

2) энергетикалық методтан, яғный салыў методының жәрдеминде оң тәрепи бойынша кеңислигинде орнықлылықты орнатады;

3) сол заматтағы точкалық деректиң торлық функциясының «интеграллық» шешими түринде көрстиў арқалы (Грин функциясы).

Максимум принципинен пайдаланыў ушын (II) мәселесин бир текли шегаралық шәрти менен мына төмендеги түрде жазамыз:

$$\sigma\lambda\Lambda\tilde{y}-\tilde{y}=-y-(1-\sigma)\tau\Lambda y-\tau\varphi=-F,\ \tilde{y}_0=0,\ \tilde{y}_N=0,\ y_i^0=u_0(x_i) \tag{36}$$

ямаса

$$\begin{aligned}&\sigma\gamma\,\tilde{y}_{i-1}-(2\sigma\gamma+1)\tilde{y}_i+\sigma\gamma\,\tilde{y}_{i+1}=-F_i,\ i=1,2,\dots,N-1,\\ &F_i=(1-\sigma)\gamma\,y_{i-1}+(1-2(1-\sigma)\gamma)y_i+(1-\sigma)\gamma\,y_{i+1}+\tau\,y_i,\\ &\gamma=\frac{\tau}{h^2},\ \ i=1,2,\dots,N-1\end{aligned} \tag{37}$$

[1,§2 тағы] теорема

$$\begin{aligned}&A_i y_{i-1}-C_i y_i+B_i y_{i+1}=-F_i,\quad i=1,2,\dots,N-1\\ &y_0=0,\quad y_N=0,\quad |A_i|\neq 0,\quad |B_i|\neq 0\end{aligned}$$

шекли айырмалы теңлемесиниң шешими ушын $\|y\|_C\leq\left\|\frac{F}{D}\right\|_C$ баҳасының орынлы екенлигин тастыйықлайды, егерде тек $D_i=|C_i|-|A_i|-|B_i|>0$ болса.

(36) мәселе ушын бул шәртлер $\left(|A_i|\neq 0,\ |C_i|\neq 0,\ |D_i|\neq 0,\right)$ $\sigma>0$ болғанда орынланады, сондай – ақ, $D_i=1$ болады, сонлықтан (37) – теңлемесиниң шешими ушын $\|\tilde{y}\|_C\leq\|F\|_C$, егерде $\sigma\geq 0$ болғанда ($\sigma=0$ болғанда $\tilde{y}_i=F_i$ болады) баҳасы орынлы болады.

$1-2(1-\sigma)\gamma\geq 0$ болғанда $\|F\|_C\leq\|y\|_C+\tau\|\varphi\|_C$ болатуғынын билип (36) схемасы ушын

$$\|y^{j+1}\|_C\leq\|y^j\|_C+\tau\|\varphi^j\|_C \tag{38}$$

теңсизлигин

$$\tau\leq\frac{h^2}{2(1-\sigma)} \tag{39}$$

шәртинде аламыз.

(38) аңлатпаны $j'=0,1,2,\dots,j$ бойынша суммаластырып (16) мәселесиниң шешиминиң баҳасына келемиз:

$$\left\|y^{j+1}\right\|_C \le \left\|y^0\right\|_C + \sum_{j'=0}^{j} \tau \left\|\varphi^{j'}\right\|_C \qquad (40)$$

Солай етип, (16) схемасы (39) шәртинде дәслепки берилгенлер бойынша ҳәм оң тәрепи бойынша орнықлы екенлиги дәлийлленди.

(III) мәселеге (40) априорлық баҳаны қолланып, $\left\|z^{j+1}\right\|_C \le \sum_{j'=0}^{j} \tau \left\|\psi^{j'}\right\|_C$ баҳасына ийе боламыз.

Буннан көринип турғанындай, (II) схемасы $L_2(\omega_h)$ торлық нормасындағы тезлик пенен тең өлшемли жыйнақлы болады, егерде тек (39) шәрти орынланса.

Анық схема ушын $(\sigma = 0)$ C кеңислигиндеги (39) орнықлылық шәрти $\tau \le \dfrac{h^2}{2}$ $L_2(\omega_h)$ кеңислигиндеги $\sigma = 0.5$ жағдайы ушын алдын алынған (25) орнықлылық шәрти менен бирдей болады. Илгерилеўши схемасы $(\sigma = 1)$ C кеңислигинде абсолют орнықлы болады. Ал симметриалы схема болса C кеңислигинде $\tau \le h^2$ болғанда орнықлы болады.

12-§. Санлы мысал

1-мысал.

Жыллылық өткизгишлик теңлемесине қойылған аралас мәселениң жуўық шешимин торлар усылынан пайдаланып табың.

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\varphi(x) = U(x,0) = \cos(x + 0.66) \quad (2)$$

$$\psi_1(t) = U(0,t) = 3t + 0.79 \quad (3)$$

$$\psi_2(t) = U(1.2,t) = -0.2852 \quad (4)$$

***Шешилиўи*:**

1) $h = 0.2$; $\sigma = \dfrac{1}{6}$; $k = \dfrac{h^2}{6} = 0.0067$; $t_{j+1} = t_j + k = t_j + 0.0067$

Сонлықтан

$x_0 = 0$; $x_1 = 0.2$; $x_2 = 0.4$; $x_3 = 0.6$; $x_4 = 0{,}8$; $x_5 = 1$ $x_6 = 1.2$

$t_0 = 0$; $t_1 = 0.0067$; $t_2 = 0.0134$; $t_3 = 0.0201$; $t_4 = 0.0268$; $t_5 = 0.0335$;

$t_6 = 0.0402$

ге тең болады.

2) Енди (2) ден пайдаланып тордың $U(x,t)$ функциясының мәнислерин есаплаймыз.

$$U(x_i, t) = \cos(x_i + 0.66)$$

$$U(0;0) = \cos(0 + 0.66) = 0.79 = U_{00}$$

$$U(0.2;0) = \cos(0.2 + 0.66) = 0.6524 = U_{10}$$

$$U(0.4;0) = \cos(0.4 + 0.66) = 0.4889 = U_{20}$$

$$U(0.6;0) = \cos(0.6 + 0.66) = 0.3058 = U_{30}$$

$$U(0.8;0) = \cos(0.8 + 0.66) = 0.1106 = U_{40}$$

$$U(1;0)=\cos(1+0.66)=-0.0891=U_{50}$$

$$U(1.2;0)=\cos(1.2+0.66)=-0.2852=U_{60}$$

3) Енди Ot көшери бойындағы түйинлердеги $U(x,t)$ функциясының мәнисин (3) бойынша есаплаймыз.

$$U(0;t_j)=3t_j+0.79$$

$$U(0;0)=3\cdot 0+0.79=0.79=U_{00}$$

$$U(0;0.0067)=3\cdot 0.0067+0.79=0.8101=U_{01}$$

$$U(0;0.0134)=3\cdot 0.0134+0.79=0.8302=U_{02}$$

$$U(0;0.0201)=3\cdot 0.0201+0.79=0.8503=U_{03}$$

$$U(0;0.0268)=3\cdot 0.0268+0.79=0.8704=U_{04}$$

$$U(0;0.0335)=3\cdot 0.0335+0.79=0.8905=U_{05}$$

$$U(0;0.0402)=3\cdot 0.0402+0.79=0.9106=U_{06}$$

4) Енди (4) бойынша $x=1$ туўрысының бойындағы түйинлериндеги $U(x,t)$ функциясының мәнислерин анықлаймыз. t ның қәлеген мәнисинде

$$U(1.2;t)=-0.2852$$

5) Енди тордың ишки түйинлериндеги $U(x,t)$ функциясының мәнислерин

$$U_{ij+1}=\frac{1}{6}(U_{i+1j}+4U_{ij}+U_{i-1j})$$

бойынша анықлаймыз.

Дәслеп $j=0$ қатламындағы $U(x,t)$ функциясының мәнислерин анықлаймыз.

$$U_{i1}=\frac{1}{6}(U_{i+10}+4U_{i0}+U_{i-10}) \qquad (i=\overline{1,5})$$

$$i=1 \qquad U_{11}=\frac{1}{6}(U_{20}+4U_{10}+U_{00})=\frac{1}{6}(0.4889+4\cdot 0.6524+0.79)=0.6481$$

$$i=2 \qquad U_{21}=\frac{1}{6}(U_{30}+4U_{20}+U_{10})=\frac{1}{6}(0.3058+4\cdot 0.4889+0.6524)=0.4856$$

$$i=3 \qquad U_{31}=\frac{1}{6}(U_{40}+4U_{30}+U_{20})=\frac{1}{6}(0.1106+4\cdot 0.3058+0.4889)=0.3038$$

$$i=4 \qquad U_{41}=\frac{1}{6}(U_{50}+4\cdot U_{40}+U_{30})=\frac{1}{6}(-0.0891+4\cdot 0.1106+0.3058)=0.1099$$

$$i=5 \qquad U_{51}=\frac{1}{6}(U_{60}+4\cdot U_{50}+U_{40})=\frac{1}{6}(-0.2852-4\cdot 0.0891+0.1106)=-0.0885$$

j қатламдағы тордың ишки түйинлериндеги $U(x,t)$ функциясының мәнислери

$$U_{ij+1}=\frac{1}{6}(U_{i+1j}+4U_{ij}+U_{i-1j})$$

формуласы бойынша есапланады. Есаплаўлардың нәтийжелери төмендеги 1-кестеде жайластырылған.

	i	0	1	2	3	4	5	6
j	t_j \ x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
0	0	0.79	0.6524	0.4889	0.3058	0.1106	-0.0891	-0.2852
1	0.0067	0.8101	0.6481	0.4856	0.3038	0.1099	-0.0885	-0.2852
2	0.0134	0.8302	0.6480	0.4824	0.3018	0.1092	-0.0882	-0.2852
3	0.0201	0.8503	0.6508	0.4799	0.2998	0.1084	-0.0881	-0.2852
4	0.0268	0.8704	0.6556	0.4784	0.2979	0.1076	-0.0882	-0.2852
5	0.0335	0.8905	0.6619	0.4779	0.2963	0.1067	-0.0884	-0.2852
6	0.0402	0.9106	0.6693	0.4783	0.2950	0.1058	-0.0887	-0.2852

2-мысал.

Жыллылық өткизгишлик теңлемесине қойылған аралас мәселениң жуўық шешимин торлар усылы менен табың.

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (1)$$

$$\varphi(x) = U(x,0) = \cos(x + 0.66) \qquad (2)$$

$$\psi_1(t) = U(0,t) = 3t + 0.79 \qquad (3)$$

$$\psi_2(t) = U(1.2,t) = -0.2852 \qquad (4)$$

Шешилиўи:

1) $h = 0.2$; $\sigma = \dfrac{1}{2}$; $k = \dfrac{h^2}{2} = 0.02$; $\quad t_{j+1} = t_j + k = t_j + 0.02$

Сонлықтан

$x_0 = 0$; $x_1 = 0.2$; $x_2 = 0.4$; $x_3 = 0.6$; $x_4 = 0{,}8$; $x_5 = 1$ $x_6 = 1.2$

$t_0 = 0$; $t_1 = 0.02$; $t_2 = 0.04$; $t_3 = 0.06$; $t_4 = 0.08$; $t_5 = 0.1$; $t_6 = 0.12$

ге тең болады.

2) Енди (2) ден пайдаланып тордың $U(x,t)$ функциясының мәнислерин есаплаймыз.

$$U(x_i, t) = \cos(x_i + 0.66)$$

$$U(0;0) = \cos(0 + 0.66) = 0.79 = U_{00}$$

$$U(0.2;0) = \cos(0.2 + 0.66) = 0.6524 = U_{10}$$

$$U(0.4;0) = \cos(0.4 + 0.66) = 0.4889 = U_{20}$$

$$U(0.6;0) = \cos(0.6 + 0.66) = 0.3058 = U_{30}$$

$$U(0.8;0) = \cos(0.8 + 0.66) = 0.1106 = U_{40}$$

$$U(1;0) = \cos(1 + 0.66) = -0.0891 = U_{50}$$

$$U(1.2;0) = \cos(1.2 + 0.66) = -0.2852 = U_{60}$$

3) Енди Ot көшери бойындағы түйинлердеги $U(x,t)$ функциясының мәнисин (3) бойынша есаплаймыз.

$$U(0;t_j) = 3t_j + 0.79$$

$$U(0;0) = 3\cdot 0 + 0.79 = 0.79 = U_{00}$$

$$U(0;0.0067) = 3\cdot 0.02 + 0.79 = 0.85 = U_{01}$$

$$U(0;0.0134) = 3\cdot 0.04 + 0.79 = 0.91 = U_{02}$$

$$U(0;0.0201) = 3\cdot 0.06 + 0.79 = 0.97 = U_{03}$$

$$U(0;0.0268) = 3\cdot 0.08 + 0.79 = 1{,}03 = U_{04}$$

$$U(0;0.0335) = 3\cdot 0.1 + 0.79 = 1{,}09 = U_{05}$$

$$U(0;0.0402) = 3\cdot 0.12 + 0.79 = 1{,}15 = U_{06}$$

4) Енди (4) бойынша $x=1$ туўрысының бойындағы түйинлериндеги $U(x,t)$ функциясының мәнислерин анықлаймыз. t ның қәлеген мәнисинде

$$U(1.2;t) = -0.2852$$

5) Енди тордың ишки түйинлериндеги $U(x,t)$ функциясының мәнислерин

$$U_{ij+1} = \frac{1}{6}(U_{i+1j} + 4U_{ij} + U_{i-1j})$$

бойынша анықлаймыз.

Дәслеп $j=0$ қатламындағы $U(x,t)$ функциясының мәнислерин анықлаймыз.

$$U_{i1} = \frac{1}{6}(U_{i+10} + 4U_{i0} + U_{i-10}) \qquad (i = \overline{1{,}5})$$

$i=1$ $\quad U_{11} = \frac{1}{2}(U_{20} + 4U_{10} + U_{00}) = 0.6481$

$i=2$ $\quad U_{21} = \frac{1}{2}(U_{30} + 4U_{20} + U_{10}) = 0.4856$

$i=3$ $\quad U_{31} = \frac{1}{2}(U_{40} + 4U_{30} + U_{20}) = 0.3038$

$i=4 \qquad U_{41}=\frac{1}{2}(U_{50}+4\cdot U_{40}+U_{30})=0.1098$

$i=5 \qquad U_{51}=\frac{1}{2}(U_{60}+4\cdot U_{50}+U_{40})=-0.0885$

j қатламдағы тордың ишки түйинлериндеги $U(x,t)$ функциясының мәнислери

$$U_{ij+1}=\frac{1}{6}(U_{i+1j}+4U_{ij}+U_{i-1j})$$

формуласы бойынша есапланады. Есаплаўлардың нәтийжелери төмендеги 2-кестеде жайластырылған.

	i	0	1	2	3	4	5	6
j	t_j \ x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
0	0	0.79	0.6524	0.4889	0.3058	0.1106	-0.0891	-0.2852
1	0.02	0.8500	0.6481	0.4856	0.3038	0.1098	-0.0885	-0.2852
2	0.04	0.9100	0.6547	0.4824	0.3018	0.1091	-0.0882	-0.2852
3	0.06	0.9700	0.6685	0.4810	0.2998	0.1083	-0.0882	-0.2852
4	0.08	1,0300	0,6875	0.4820	0.2981	0.1075	-0.0883	-0.2852
5	0.1	1,0900	0,7103	0.4856	0.2970	0.1066	-0.0885	-0.2852
6	0.12	1,1500	0,7302	0.4916	0.2967	0.1058	-0.0887	-0.2852

3-мысал.

Жыллылық өткизгишлик теңлемесине қойылған аралас мәселениң жуўық шешимин торлар усылы менен табың.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$\varphi(x) = U(x,0) = \cos(x + 0.66) \tag{2}$$

$$\psi_1(t) = U(0,t) = 3t + 0.79 \tag{3}$$

$$\psi_2(t) = U(1.2,t) = -0.2852 \tag{4}$$

***Шешилиўи*:**

1) $h = 0.1$; $\sigma = \dfrac{1}{6}$; $k = \dfrac{h^2}{6} = 0.0017$; $t_{j+1} = t_j + k = t_j + 0.0017$

Сонлықтан

$x_0 = 0$; $x_1 = 0.1$; $x_2 = 0.2$; $x_3 = 0.3$; $x_4 = 0.4$; $x_5 = 0.5$ $x_6 = 0.6$

$x_7 = 0.7$ $x_8 = 0.8$ $x_9 = 0.9$ $x_{10} = 1$ $x_{11} = 1.1$ $x_{12} = 1.2$

$t_0 = 0$; $t_1 = 0.0017$; $t_2 = 0.0034$; $t_3 = 0.0051$; $t_4 = 0.0068$; $t_5 = 0.0085$;

$t_6 = 0.0102$ $t_7 = 0.0119$ $t_8 = 0.0136$ $t_9 = 0.0153$ $t_{10} = 0.017$ $t_{11} = 0.0187$

$t_{12} = 0.0204$

ге тең болады.

2) Енди (2) ден пайдаланып тордың $U(x,t)$ функциясының мәнислерин есаплаймыз.

$$U(x_i, t) = \cos(x_i + 0.66)$$

$$U(0;0) = \cos(0 + 0.66) = 0.79$$

$$U(0.1;0) = \cos(0.1 + 0.66) = 0.7248$$

$$U(0.2;0) = \cos(0.2 + 0.66) = 0.6524$$

$$U(0.3;0) = \cos(0.3 + 0.66) = 0.5735$$

$$U(0.4;0) = \cos(0.4 + 0.66) = 0.4889$$

$$U(0.5;0)=\cos(0.5+0.66)=0.3993$$

$$U(0.6;0)=\cos(0.6+0.66)=0.3058$$

$$U(0.7;0)=\cos(0.7+0.66)=0.2092$$

$$U(0.8;0)=\cos(0.8+0.66)=0.1106$$

$$U(0.9;0)=\cos(0.9+0.66)=0.0108$$

$$U(1;0)=\cos(1+0.66)=-0.0891$$

$$U(1.1;0)=\cos(1.1+0.66)=-0.1881$$

$$U(1.2;0)=\cos(1.2+0.66)=-0.2852$$

3) Енди Ot көшери бойындағы түйинлердеги $U(x,t)$ функциясының мәнисин (3) бойынша есаплаймыз.

$$U(0;t_j)=3t_j+0.79$$

$$U(0;0)=3\cdot 0+0.79=0.79$$

$$U(0;0.0017)=3\cdot 0.0017+0.79=0.7951$$

$$U(0;0.0034)=3\cdot 0.0034+0.79=0.8002$$

$$U(0;0.0051)=3\cdot 0.0051+0.79=0.8053$$

$$U(0;0.0068)=3\cdot 0.0068+0.79=0.8104$$

$$U(0;0.0085)=3\cdot 0.0085+0.79=0.8155$$

$$U(0;0.0102)=3\cdot 0.0102+0.79=0.8206$$

$$U(0;0.0114)=3\cdot 0.0114+0.79=0.8257$$

$$U(0;0.0136)=3\cdot 0.0136+0.79=0.8308$$

$$U(0;0.0153)=3\cdot 0.0153+0.79=0.8359$$

$$U(0;0.017)=3\cdot 0.017+0.79=0.8410$$

$$U(0;0.0187)=3\cdot 0.0187+0.79=0.8461$$

$$U(0;0.0204)=3\cdot 0.0204+0.79=0.8512$$

4) Енди (4) бойынша $x=1$ туўрысының бойындағы түйинлериндеги $U(x,t)$ функциясының мәнислерин анықлаймыз. t ның қәлеген мәнисинде

$$U(1.2;t)=-0.2852$$

5) Енди тордың ишки түйинлериндеги $U(x,t)$ функциясының мәнислерин

$$U_{ij+1} = \frac{1}{6}(U_{i+1j} + 4U_{ij} + U_{i-1j})$$

формуласы бойынша анықлаймыз.

Дәслеп $j = 0$ қатламындағы $U(x,t)$ функциясының мәнислерин анықлаймыз.

$$U_{i1} = \frac{1}{6}(U_{i+10} + 4U_{i0} + U_{i-10}) \qquad (i = \overline{1,5})$$

$i = 1 \quad U_{11} = \frac{1}{6}(U_{20} + 4U_{10} + U_{00}) = 0.6481$

$i = 2 \quad U_{21} = \frac{1}{6}(U_{30} + 4U_{20} + U_{10}) = 0.4856$

$i = 3 \quad U_{31} = \frac{1}{6}(U_{40} + 4U_{30} + U_{20}) = 0.3038$

$i = 4 \quad U_{41} = \frac{1}{6}(U_{50} + 4 \cdot U_{40} + U_{30}) = 0.1099$

$i = 5 \quad U_{51} = \frac{1}{6}(U_{60} + 4 \cdot U_{50} + U_{40}) = -0.0885$

j қатламдағы тордың ишки түйинлериндеги $U(x,t)$ функциясының мәнислери

$$U_{ij+1} = \frac{1}{6}(U_{i+1j} + 4U_{ij} + U_{i-1j})$$

формуласы бойынша есапланады. Есаплаўлардың нәтийжелери төмендеги 3-кестеде жайластырылған.

	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
j	t_j x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
0	0	0.7900	0.7248	0.6524	0.5735	0.4889	0.3993	0.3058	0.2092	0.1106	0.0108	-0.0891	-0.1881	-0.2852
1	0.0017	0.7951	0.7236	0.6514	0.5726	0.4881	0.3987	0.3053	0.2089	0.1104	0.0108	-0.0889	-0.1878	-0.2852
2	0.0134	0.8002	0.7235	0.6503	0.5716	0.4872	0.3980	0.3048	0.2085	0.1102	0.0108	-0.0888	-0.1875	-0.2852
3	0.0051	0.8053	0.7241	0.6494	0.5707	0.4864	0.3973	0.3043	0.2082	0.1100	0.0107	-0.0887	-0.1874	-0.2852
4	0.0068	0.8104	0.7252	0.6487	0.5697	0.4856	0.3967	0.3038	0.2078	0.1098	0.0107	-0.0885	-0.1872	-0.2852
5	0.0085	0.8155	0.7266	0.6483	0.5689	0.4848	0.3960	0.3033	0.2075	0.1097	0.0107	-0.0884	-0.1871	-0.2852
6	0.0102	0.8206	0.7284	0.6481	0.5681	0.4840	0.3954	0.3028	0.2072	0.1095	0.0107	-0.0884	-0.1870	-0.2852
7	0.0119	0.8257	0.7304	0.6482	0.5674	0.4833	0.3947	0.3023	0.2068	0.1093	0.0106	-0.0883	-0.1869	-0.2852
8	0.0136	0.8308	0.7326	0.6484	0.5669	0.4825	0.3941	0.3018	0.2065	0.1091	0.0106	-0.0882	-0.1869	-0.2852
9	0.0153	0.8359	0.7349	0.6488	0.5664	0.4818	0.3934	0.3013	0.2061	0.1089	0.0105	-0.0882	-0.1868	-0.2852
10	0.0170	0.8410	0.7374	0.6494	0.5660	0.4812	0.3928	0.3008	0.2058	0.1087	0.0105	-0.0882	-0.1868	-0.2852
11	0.0187	0.8461	0.7400	0.6502	0.5658	0.4806	0.3922	0.3003	0.2054	0.1085	0.0104	-0.0882	-0.1868	-0.2852
12	0.0204	0.8512	0.7427	0.6511	0.5657	0.4801	0.3916	0.2998	0.2051	0.1083	0.0103	-0.0882	-0.1867	-0.2852

ЖУЎМАҚЛАЎ

Дифференциал теңлемелер ушын басланғыш ҳәм шегаралық мәселелердиң дәл шешимин көпшилик жағдайда табыў мүмкин болмайды. Соның ушын бундай жағдайда усындай мәселелердиң жуўық шешимин табыў зәрүрлиги пайда болады. Қаралып атырған питкериў қанигелик жумысы тийкарғы дыққат берилген дифференциаллық теңлеме ушын шекли айырмалы схеманы дүзиў ҳәм оның изленип атырған шешимине минимал сыйпақлылық талап етилгенде, оның жыйнақлылық тезлигин изертлеў турады. Бул питкериў қәнигелик жумысында дәслеп шекли айырмалар усылының дәслепки тийкарғы түсиниклери ҳәм олардың қәсийетлери менен таныстырылды.

Питкериў қәнигелик жумысы параболалық типтеги теңлемелердиң орнықлылығын дәслепки берилгенлер бойынша изертлеўге бағышланған.

Питкериў қәнигелик жумысының биринши параграфы “Есаплаў тәжирийбеси” деп аталып, онда есаплаў тәжирийбесиниң басқышлары, олардың әҳимийети, бир басқыштан екиншисине өтиў жоллары атап өтилген.

Питкериў қәнигелик жумысының екинши параграфында торлар методының тийкарғы түсиниклери, торлар методы менен ислесиў, дифференциаллық теңлемеге ҳәм шегаралық шәртлерге қатнасатуғын туўындыларды шекли айырмалар менен алмастырыўлар атап өтилди.

Келеси үшинши параграфта әпиўайы дифференциаллық операторлардың шекли айырмалы аппроксимацисы, аппроксимациялаў дәрежесин арттырыўдың практикада қолайлылық ҳәм қолайсызлықлары айтылды.

Төртинши параграфта тордағы аппроксимациялаў қателиклери, бесинши параграфта шекли айырмалар схемасы, шекли айырмалы схеманың жыйнақлылығы ҳәм дәллиги, шекли айырмалар схемасының қәтеликлери көрсетилген.

Улыўма питкериў қәнигелик жумысының келеси параграфында жыллылық таралыў процеси, турақлы коэффицентли бир өлшемли жыллылық өткизгишлик теңлемеси, анық ҳәм анық емес схемалар ҳаққында атап өтилди.

Питкериў қәнигелик жумысының келеси параграфында аппроксимациялаў қәтелиги (байланыссызлық), аппроксимациялаў тәртиби ҳаққында атап өтилди.

Кейинги сегизинши параграфта схеманың орнықлылығын ажыратыў усылы менен изертлеўлер, дәслепки берилгенлер бойынша орнықлылық, оң тәрепи бойынша орнықлылық қаралды.

Келеси параграфларда дәслепки берилгенлер бойынша орнықлылық, оң тәрепи бойынша орнықлылық, кеңисликлердеги жыйнақлылық ҳәм орнықлылық ҳәм дәлликлер қаралды.

Әдебиятлар

1. Исроилов М. Ҳисоблаш методлары. –Тошкент: Ўзбекистон, 2003.
2. Отаров А.А., Алланазаров Ж.П. Есаплаў усыллары. I-бөлим. -Нөкис.:Билим, 2001 ж.
3. Отаров А.А., Алланазаров Ж.П. Есаплаў усыллары. II-бөлим. -Нөкис.:илим, 2006 ж.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. –М.:Наука, 2003.
5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. –М.:Наука, 1971.
6. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. –М.:Наука, 1976.
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. –М.:Наука, 1978.
8. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. –М.:Наука, 1987.
9. http://www.ziyonet.uz
10. http://www.ilm.uz

ҚОСЫМША

(Жеке компьютер ушын Turbo-Pascal алгоритмлик тилинде дүзилген бағдарламалардың ҳәм оларды иске асырыўдан алынған нәтийжелериниң басып шығарылған нусқалары).

```
Program mis1;
 uses crt;
 var    uu:array[0..7,0..7]of real;  x:array[0..6] of real;
        t:array[0..6]of real;  i,j:integer;  a:text;
 Function u(x:real):real;
     Begin
           u:=cos(x+0.66);
     End;
 Function u1(t:real):real;
     Begin
           u1:=3*t+0.79;
 End;
 Function u2(t:real):real;
     Begin
           u2:=-0.2852;
  End;
 Begin clrscr;
    Assign(a,'E:\guli.pas');    Rewrite(a);
   For i:=0 to 6 do begin x[i]:=0.2*i; uu[0,i+1]:=x[i] end;
   For j:=0 to 6 do begin t[j]:=0.0067*j; uu[j+1,0]:=t[j]
end;
    For i:=1 to 7 do uu[1,i]:=u(x[i-1]);
    For j:=1 to 7 do
    Begin
      uu[j,1]:=u1(t[j-1]);     uu[j,7]:=u2(t[j-1]);
    End;
       For j:=2 to 7 do
    Begin       For i:=2 to 6 do
    Begin
      uu[j,i]:=(uu[j-1,i-1]+uu[j-1,i]*4+uu[j-1,i+1])/6
      end;
      end;
      writeln(a,'------*****N A'' T I Y J E*****------- ');
   for j:=0 to 7 do
   begin             writeln(a);
     for i:=0 to 7 do
     begin  write(a,uu[j,i]:7:4);    end;
    end;    close(a);
          end.
```

------*****N A' T I Y J E*****-------

0.0000	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	1.2000
0.0000	0.7900	0.6524	0.4889	0.3058	0.1106	-0.0891	-0.2852
0.0067	0.8101	0.6481	0.4856	0.3038	0.1098	-0.0885	-0.2852
0.0134	0.8302	0.6480	0.4824	0.3018	0.1091	-0.0882	-0.2852
0.0201	0.8503	0.6508	0.4799	0.2998	0.1083	-0.0882	-0.2852
0.0268	0.8704	0.6556	0.4784	0.2979	0.1075	-0.0883	-0.2852
0.0335	0.8905	0.6618	0.4778	0.2962	0.1066	-0.0885	-0.2852
0.0402	0.9106	0.6693	0.4782	0.2949	0.1057	-0.0887	-0.2852

```
Program mis2;
 uses crt;      const n=7;
  var    uu:array[0..n,0..n]of real;
          x:array[0..n-1] of real;
          t:array[0..n-1]of real;
        i,j:integer;  a:text;
  Function u(x:real):real;
            Begin
                       u:=cos(x+0.66);
             End;
  Function u1(t:real):real;
            Begin
                       u1:=3*t+0.79;
             End;
  Function u2(t:real):real;
            Begin
                       u2:=-0.2852;
             End;
    Begin clrscr;
   Assign(a,'D:\guli3.pas');    Rewrite(a);
         For i:=0 to n-1 do begin x[i]:=0.2*i;
uu[0,i+1]:=x[i] end;
         For j:=0 to n-1 do begin t[j]:=0.02*j;
uu[j+1,0]:=t[j] end;
         For i:=1 to n do uu[1,i]:=u(x[i-1]);
         For j:=1 to n do
    Begin
  uu[j,1]:=u1(t[j-1]);     uu[j,n]:=u2(t[j-1]);
 End;
    For j:=2 to n do
    Begin       For i:=2 to n-1 do
    Begin
    uu[j,i]:=(uu[j-1,i-1]+uu[j-1,i]*4+uu[j-1,i+1])/6;
       end;
       end;
  writeln(a,'------*****N A'' T I Y J E*****------- ');
      for j:=0 to n do
   begin             writeln(a);
      for i:=0 to n do
   begin  write(a,uu[j,i]:7:4);    end;
       end;    close(a);
       end.
```

------*****N A' T I Y J E*****-------

0.0000	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	1.2000
0.0000	0.7900	0.6524	0.4889	0.3058	0.1106	-0.0891	-0.2852
0.0200	0.8500	0.6481	0.4856	0.3038	0.1098	-0.0885	-0.2852
0.0400	0.9100	0.6547	0.4824	0.3018	0.1091	-0.0882	-0.2852
0.0600	0.9700	0.6685	0.4810	0.2998	0.1083	-0.0882	-0.2852
0.0800	1.0300	0.6875	0.4820	0.2981	0.1075	-0.0883	-0.2852
0.1000	1.0900	0.7103	0.4856	0.2970	0.1066	-0.0885	-0.2852
0.1200	1.1500	0.7362	0.4916	0.2967	0.1058	-0.0887	-0.2852

```
Program mis3;
 uses crt;      const n=13;
  var    uu:array[0..n,0..n]of real;  x:array[0..n-1]
of real;
t:array[0..n-1]of real;  i,j:integer;  a:text;

  Function u(x:real):real;
          Begin
              u:=cos(x+0.66);
          End;
  Function u1(t:real):real;
          Begin
              u1:=3*t+0.79;
           End;
  Function u2(t:real):real;
          Begin
              u2:=-0.2852;
          End;
    Begin clrscr;
  Assign(a,'D:\guli.pas');    Rewrite(a);
      For i:=0 to n-1 do begin x[i]:=0.1*i;
         uu[0,i+1]:=x[i] end;
      For j:=0 to n-1 do begin t[j]:=0.0017*j;
         uu[j+1,0]:=t[j] end;
      For i:=1 to n do uu[1,i]:=u(x[i-1]);
      For j:=1 to n do
    Begin
         uu[j,1]:=u1(t[j-1]);     uu[j,n]:=u2(t[j-1]);
          End;
      For j:=2 to n do
    Begin
      For i:=2 to n-1 do
    Begin
      uu[j,i]:=(uu[j-1,i-1]+uu[j-1,i]*4+uu[j-1,i+1])/6;
          end;
          end;
  writeln(a,'------*****N A'' T I Y J E*****------- ');
      for j:=0 to n do
          begin             writeln(a);
      for i:=0 to n do
          begin  write(a,uu[j,i]:7:4);    end;
          end;    close(a);
          end.
```

------*****N A' T I Y J E*****-------

0.0000	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000	1.1000	1.2000
0.0000	0.7900	0.7248	0.6524	0.5735	0.4889	0.3993	0.3058	0.2092	0.1106	0.0108	-0.0891	-0.1881	-0.2852
0.0017	0.7951	0.7236	0.6514	0.5726	0.4881	0.3987	0.3053	0.2089	0.1104	0.0108	-0.0889	-0.1878	-0.2852
0.0034	0.8002	0.7235	0.6503	0.5716	0.4872	0.3980	0.3048	0.2085	0.1102	0.0108	-0.0888	-0.1875	-0.2852
0.0051	0.8053	0.7241	0.6494	0.5707	0.4864	0.3973	0.3043	0.2082	0.1100	0.0107	-0.0887	-0.1874	-0.2852
0.0068	0.8104	0.7252	0.6487	0.5697	0.4856	0.3967	0.3038	0.2078	0.1098	0.0107	-0.0885	-0.1872	-0.2852
0.0085	0.8155	0.7266	0.6483	0.5689	0.4848	0.3960	0.3033	0.2075	0.1097	0.0107	-0.0884	-0.1871	-0.2852
0.0102	0.8206	0.7284	0.6481	0.5681	0.4840	0.3954	0.3028	0.2072	0.1095	0.0107	-0.0884	-0.1870	-0.2852
0.0119	0.8257	0.7304	0.6482	0.5674	0.4833	0.3947	0.3023	0.2068	0.1093	0.0106	-0.0883	-0.1869	-0.2852
0.0136	0.8308	0.7326	0.6484	0.5669	0.4825	0.3941	0.3018	0.2065	0.1091	0.0106	-0.0882	-0.1869	-0.2852
0.0153	0.8359	0.7349	0.6488	0.5664	0.4818	0.3934	0.3013	0.2061	0.1089	0.0105	-0.0882	-0.1868	-0.2852
0.0170	0.8410	0.7374	0.6494	0.5660	0.4812	0.3928	0.3008	0.2058	0.1087	0.0105	-0.0882	-0.1868	-0.2852
0.0187	0.8461	0.7400	0.6502	0.5658	0.4806	0.3922	0.3003	0.2054	0.1085	0.0104	-0.0882	-0.1868	-0.2852
0.0204	0.8512	0.7427	0.6511	0.5657	0.4801	0.3916	0.2998	0.2051	0.1083	0.0103	-0.0882	-0.1867	-0.2852