

## Комбинаторные формулы

Пусть имеется множество, состоящее из  $n$  элементов. Обозначим его  $U_n$ . **Перестановкой из  $n$  элементов называется заданный порядок во множестве  $U_n$ .**

Примеры перестановок:

- 1) распределение  $n$  различных должностей среди  $n$  человек;
- 2) расположение  $n$  различных предметов в одном ряду.

Сколько различных перестановок можно образовать во множестве  $U_n$ ? Число перестановок обозначается  $P_n$  (читается "Р из n").

Чтобы вывести формулу числа перестановок, представим себе  $n$  ячеек, пронумерованных числами  $1, 2, \dots, n$ . Все перестановки будем образовывать, располагая элементы  $U_n$  в этих ячейках. В первую ячейку можно занести любой из  $n$  элементов (иначе: первую ячейку можно заполнить  $n$  различными способами). Заполнив первую ячейку, можно найти  $n-1$  вариантов заполнения второй ячейки. Таким образом, существует  $n(n-1)$  вариантов заполнения двух первых ячеек. При заполнении первых двух ячеек можно найти  $n-2$  варианта заполнения третьей ячейки, откуда получается, что три ячейки можно заполнить  $n(n-1)(n-2)$  способами. Продолжая этот процесс, получим, что число способов заполнения  $n$  ячеек равно  $n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Отсюда

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Число  $n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ , то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$ , называется " $n$ -факториал" и обозначается  $n!$ . Отсюда  $P_n = n!$

**По определению считается:**  $1! = 1$ ;  $0! = 1$ .

Пример. Сколько существует вариантов замещения 5-ти различных вакантных должностей 5-ю кандидатами?

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 .$$

**Размещениями из  $n$  элементов по  $k$  элементов будем называть упорядоченные подмножества, состоящие из  $k$  элементов множества  $U_n$  (множества, состоящего из  $n$  элементов). Число размещений из  $n$  элементов по  $k$  элементов обозначается  $A_n^k$  (читается "А из n по k").**

**Одно размещение из  $n$  элементов по  $k$  элементов может отличаться от другого как набором элементов, так и порядком их расположения.**

**Примеры задач, приводящих к необходимости подсчета числа размещений**

- 1) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек 5 кандидатов и назначить их на 5 различных должностей?

2) Сколькими способами можно из 20 книг отобрать 12 и расставить их в ряд на полке?

В задачах о размещении полагается  $k < n$ . В случае, если  $k = n$ , то легко получить  $A_n^k = P_n = n!$

Для подсчета  $A_n^k$  используем тот же метод, что использовался для подсчета  $P_n$ , только здесь возьмем лишь  $k$  ячеек. Первую ячейку можно заполнить  $n$  способами, вторую, при заполненной первой, можно заполнить  $n-1$  способами. Таким образом, существует  $n(n-1)$  вариантов заполнения первых двух ячеек. Можно продолжать этот процесс до заполнения последней  $k$ -й ячейки. Эту ячейку при заполненных первых  $k-1$  ячейках можно заполнить  $n-(k-1)$  (или  $n-k+1$ ) способами. Таким образом, все  $k$  ячеек заполняются числом способов, равным

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Отсюда получаем:  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Пример. Сколько существует различных вариантов выбора 4-х кандидатур из 9-ти специалистов для поездки в 4 различных страны?

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

**Сочетаниями из  $n$  элементов по  $k$  элементов называются подмножества, состоящие из  $k$  элементов множества  $U_n$  (множества, состоящего из  $n$  элементов).**

**Одно сочетание от другого отличается только составом выбранных элементов (но не порядком их расположения, как у размещений).**

Число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  элементов обозначается  $C_n^k$  (читается "С из  $n$  по  $k$ ").

Примеры задач, приводящих к подсчету числа сочетаний:

- 1) Сколько существует вариантов выбора 6-ти человек из 15 кандидатов для назначения на работу в одинаковых должностях?
- 2) Сколькими способами можно из 20 книг отобрать 12 книг?

Выведем формулу для подсчета числа сочетаний. Пусть имеется множество  $U_n$  и нужно образовать упорядоченное подмножество множества  $U_n$ , содержащее  $k$  элементов (то есть образовать размещение). Делаем это так:

1) выделим какие-либо  $k$  элементов из  $n$  элементов множества  $U_n$ . Это, согласно сказанному выше, можно сделать  $C_n^k$  способами;

2) упорядочим выделенные  $k$  элементов, что можно сделать  $P_k = k!$  способами. Всего можно получить  $C_n^k \cdot P_k$  вариантов (упорядоченных подмножеств), откуда следует:  $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ , то есть

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (1)$$

Пример: 6 человек из 15 можно выбрать числом способов, равным

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{9!6!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 5005$$

Несложно понять, что осуществить выбор подмножества из  $m$  элементов множества, насчитывающего  $n$  элементов, можно, выбрав  $n - m$  элементов, которые не войдут в интересующее нас подмножество. Отсюда следует свойство числа сочетаний

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Эту формулу можно доказать, используя формулу (1).

Задачи на подсчет числа подмножеств конечного множества называются комбинаторными. Рассмотрим некоторые комбинаторные задачи.

1. Из семи заводов организация должна выбрать три для размещения трех различных заказов. Сколькими способами можно разместить заказы?

Так как из условия ясно, что каждый завод может либо получить один заказ, либо не получить ни одного, и что выбрав три завода, можно по-разному разместить среди них заказы, здесь нужно считать число размещений

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

2. Если из текста задачи 1 убрать условие различия трех заказов, сохранив все остальные условия, получим другую задачу. Теперь способ размещения заказов определяется только выбором тройки заводов, так как все эти заводы получают одинаковые заказы, и число вариантов определяется как число сочетаний.

$$C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

3. Имеются 7 заводов. Сколькими способами организация может разместить на них три различных производственных заказа? (Заказ нельзя дробить, то есть распределять его на нескольких заводах).

В отличие от условия первой задачи, здесь организация может отдать все три заказа первому заводу или, например, отдать два заказа второму заводу, а один - седьмому.

Задача решается так. Первый заказ может быть помещен семью различными способами (на первом заводе, на втором и т.д.). Поместив первый заказ, имеем семь вариантов помещения второго (иначе, каждый способ помещения первого заказа может сопровождаться семью способами помещения второго). Таким образом, существует  $7 \cdot 7 = 49$  способов размещения первых двух заказов. Разместив их каким-либо образом, можем найти 7 вариантов помещения третьего (иначе, каждый способ размещения первых двух заказов может сопровождаться семью различными способами помещения третьего заказа). Следовательно, существуют  $49 \cdot 7 = 7^3$  способов размещения трех заказов. (Если бы заказов было  $n$ , то получилось бы  $7^n$  способов размещения).

4. Как решать задачу 3, если в ее тексте вместо слов "различных производственных заказа" поставить "одинаковых производственных заказа"? Это трудная задача. Ниже приводится аналогичная задача – **Задача V** с решением.

5. Добавим к условию задачи 1 одну фразу: организация также должна распределить три различных заказа на изготовление деревянных перекрытий среди 4-х лесопилок. Сколькими способами могут быть распределены все заказы?

Каждый из  $A_7^3$  способов распределения заказов на заводах может сопровождаться  $A_4^3$  способами размещения заказов на лесопилках. Общее число возможных способов размещения всех заказов будет равно

$$A_7^3 \cdot A_4^3 = \frac{7!}{4!} \cdot \frac{4!}{1!} = 7!$$

6. Риэлтерская фирма предлагает на продажу 5 больших квартир и 4 малогабаритных квартиры. Банк намеревается купить 4 квартиры, причём среди них не должно быть более двух малогабаритных. Сколько вариантов выбора имеет банк?

Банк может купить 4 большие квартиры. У него есть возможность выбрать 4 из 5-ти предлагаемых квартир, и число вариантов здесь равно  $C_5^4 = 5$ . Если банк решит купить три большие квартиры и одну малогабаритную, то число вариантов выбора у него будет равно  $4C_5^3 = 40$ . Если будет принято решение купить две малогабаритных квартиры и две больших квартиры, то число вариантов будет равным  $C_4^2 C_5^2 = 60$ . Таким образом, у банка есть 105 вариантов выбора.

## Задачи с решениями.

### Задача I.

Сколькими различными способами можно расставить на полке собрание сочинений, состоящее из 10-ти томов, при условии, что первый и пятый тома не должны стоять рядом.

### Задача II.

Автокомбинат имеет 7 автомобилей малой грузоподъёмности и 10 большегрузных автомобилей. Нужно выбрать 3 автомобиля малой грузоподъёмности для обслуживания трёх торговых организаций и 5 большегрузных автомобилей для работы на стройке. Сколькими способами автокомбинат может осуществить свой выбор?

### Задача III.

Имеется пять кусков материи разных цветов. Сколько из этих кусков можно сшить различных флагов, если флаги состоят из трёх горизонтальных полос, причём две соседние полосы должны быть разного цвета?

### Задача IV.

Сколько существует различных вариантов рассадки  $n$  человек за круглым столом, причём один вариант отличается от другого тем, что хотя бы у одного человека при разных вариантах разные соседи слева.

### Задача V.

У Деда Мороза в мешке 7 одинаковых подарков, которые можно произвольным образом распределить среди 5-ти детей. Сколькими способами можно это сделать?

### Задача VI.

Сколько различных раскладов можно получить, раздавая колоду из 52-х карт четырём игрокам?

### Задача VII.

Сколько различных раскладов можно получить, раздавая колоду из 52-х карт четырём игрокам, при условии, что каждый игрок получает одного туза?

**Задача VIII.** У Деда Мороза в мешке 7 различных подарков, которые можно произвольным образом распределить среди 5-ти детей. Сколькими способами можно это сделать?

## Ответы.

**Задача I.**  $8 \cdot 9!$  **Задача II.**  $A_7^3 \cdot C_{10}^5$ . **Задача III.**  $A_5^3 + 2 \cdot C_5^2$ . **Задача IV.**  $(n - 1)!$   
**Задача V.**  $C_{11}^4$ . **Задача VI.**  $C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13}$ . **Задача VII.**  $C_{48}^{12} C_{36}^{12} C_{24}^{12} 4!$  **Задача VIII.**  $5^7$ .

**Решения.****Задача I.**

Всего существует  $10!$  различных перестановок 10-ти книг. Чтобы подсчитать, сколько можно найти перестановок, в которых первый и пятый тома стоят рядом, предположим, что к первому тому приклеен справа пятый том, и они как бы образуют отдельную книгу. Таким образом, получилось 9 книг, которые могут быть расставлены  $9!$  способами. Теперь нужно учесть, что первый и пятый тома могут быть склеены в другом порядке, и можно получить ещё  $9!$  различных перестановок 10-ти книг, в которых первый и пятый тома стоят рядом. Отсюда следует, что ответ задачи составляет число, равное  $10! - 2 \cdot 9! = 8 \cdot 9!$

**Задача II.**

Один выбор тройки автомобилей малой грузоподъёмности от другого может отличаться не только составом выбранных машин, но и их распределением по торговым организациям. Возможно, что эти торговые организации расположены на различных расстояниях от автокомбината, что у них разные условия оплаты труда и т. п. Таким образом, здесь речь идёт о размещениях из семи по три, число которых равно  $A_7^3$ .

Напротив, выбор тяжёлых грузовиков определяется только их составом, так как все они будут работать, как можно заключить из формулировки задачи, в одинаковых условиях. Таким образом, здесь речь идёт о сочетаниях из десяти по пять, число которых равно  $C_{10}^5$ .

Теперь заметим, что каждый выбор автомобилей малой грузоподъёмности может быть осуществлён при  $C_{10}^5$  различных вариантах выбора тяжёлых грузовиков. Отсюда следует, что выбрать требуемую восьмёрку машин автокомбинат может числом способов, равным  $A_7^3 \cdot C_{10}^5$ .

**Задача III.**

Если флаги составлять из трёх полос трёх разных цветов, то один флаг от другого может отличаться не только выбором цветов полос, но и порядком их расположения. Это значит, что из пяти кусков можно изготовить  $A_5^3$  различных флагов, состоящих из трёх полос трёх различных цветов.

По условию задачи каждый флаг можно изготовить из полос двух цветов, например, следующих сверху вниз в таком порядке: “красная, белая, красная”, или в таком порядке: “белая, красная, белая”. Выбор двух цветов можно осуществить числом способов, равным  $C_5^2$  и при каждом варианте выбора получить два различных флага.

Из сказанного следует, что всего можно изготовить  $A_5^3 + 2 \cdot C_5^2$  различных флагов.

**Задача IV.**

Занумеруем всех людей числами от 1 до  $n$ . Посадим за стол человека с номером 1 на любое место. Будем называть это место первым. Для того, чтобы занять место слева от него (назовём это место вторым) есть  $n - 1$  претендент. Таким образом, мы получаем  $n - 1$  вариант посадки двух человек. Выбрав кого-либо из претендентов на второе место, и обозначив место слева от второго третьим, будем на третье место иметь  $n - 2$  претендента. Отсюда следует, что первые три места можно занять числом способов, равным  $(n - 1)(n - 2)$ . Действуя таким образом дальше, мы очевидно переберём все способы посадки  $n$  человек за круглым столом, и эт их способов будет  $(n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 = (n - 1)!$

**Задача V.**

К сожалению, условие задачи не накладывает никаких ограничений на действия Деда Мороза, кроме одного: все подарки должны быть розданы. Таким образом, все подарки могут достаться, например, одному ребёнку.

Обозначим каждого ребёнка символом  $P_i$ , где  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , а каждый подарок буквой  $\Pi$ . Рассмотрим последовательность

$$P_1, \Pi, \Pi, P_2, P_3, \Pi, \Pi, \Pi, P_4, \Pi, P_5, \Pi$$

Будем эту последовательность интерпретировать так: первый ребёнок получил 2 подарка, второй ребёнок не получил подарков, третий ребёнок получил 3 подарка, четвёртый и пятый получили по одному подарку. Теперь заметим, что каждый способ распределения подарков может быть представлен подобной последовательностью. Эта последовательность должна начинаться всегда с  $P_1$ , дальше на каком-то месте правее должен находиться символ  $P_2$ , дальше вправо – символ  $P_3$  и т. д. На оставшиеся пустые места должны быть поставлены символы  $\Pi$ . Число подарков, полученных ребёнком  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), равно числу символов  $\Pi$ , стоящих между символами  $P_i$  и  $P_{i+1}$ . Пятый ребёнок получает столько подарков, сколько символов  $\Pi$  находится после символа  $P_5$ . Всего в этой последовательности должно быть  $7 + 5 = 12$  членов, но первое место всегда занято символом  $P_1$ . Каждая такая последовательность отвечает единственному способу распределения подарков. Таких последовательностей можно найти столько, сколькими способами можно выбрать 7 мест из оставшихся 11-ти для символов  $\Pi$  или, что то же самое, 4 места для символов  $P_i$ . Из этого следует, что существует  $C_{11}^4$  вариантов распределения подарков.

В задачах VI и VII методы решения легко находятся, если известны ответы.

**Задача VIII.** Первый подарок можно отдать любому из пяти детей. Очевидно, второй подарок тоже может получить любой из пяти детей. Следовательно, два подарка можно распределить 25-ю способами. При этом третий подарок имеет 5 возможных владельцев, таким образом, имеется  $5^3 = 125$  вариантов распределения 3-х подарков, и т. д.

**Задачи для самостоятельного решения.**

1) Автокомбинат получил заявку от строительной фирмы на 5 тяжёлых грузовиков для работы на стройке. Тяжёлый грузовик можно заменить двумя лёгкими грузовиками. На автокомбинате в настоящий момент имеется 5 свободных тяжёлых грузовиков и 5 свободных лёгких грузовиков. Сколько вариантов составления колонны грузовиков для работы на стройке имеет автокомбинат? (Учтёшь, что каждая машина закреплена за своим шофёром).

Ответ: 101.

2) Сколькими способами можно разложить 7 одинаковых шаров по 4-м ящикам, если в каждый ящик должен попасть хотя бы один шар?

Ответ: 20.

3) Сколькими способами можно разложить 5 разноцветных шаров по 3-м ящикам?

Ответ: 243.

4) Директор фирмы составил список из 5-ти человек, которых он может назначить на вакантную должность своего заместителя, и список из 4-х человек, которых он может назначить на вакантную должность главного бухгалтера. В оба списка вошёл сотрудник Иванов. Других пересечений этих списков не оказалось. Сколько вариантов заполнения двух вакантных должностей имеет директор?

Ответ: 19.

5) Директор фирмы составил список из 5-ти возможных кандидатов на вакантные должности своих 1-го, 2-го и 3-го заместителей, а также список из 4-х возможных кандидатов на 2 вакантные должности своих помощников. Сколько вариантов заполнения пяти вакантных должностей имеет директор?

Ответ: 360.

6) Сколько можно найти вариантов расстановки на полке 10-ти томов собрания сочинений при условии, что первый, пятый и десятый тома не должны образовывать тройку стоящих рядом книг?

Ответ:  $84 \cdot 8!$

7) У одного человека есть 7 книг, а у другого — 9 книг. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Ответ: 2940.

8) Бригада строителей состоит из 16-ти штукатуров и 4-х маляров. Сколькими способами бригаду можно разделить на две бригады, чтобы в одной из них было 10 штукатуров и 2 маляра, а в другой 6 штукатуров и 2 маляра?

Ответ: 48048