ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

Қол жазба ҳуқуқында

УДК 512.83

Даўекеев Саламат Хамидуллаевич

Меншикли мәнис ушын симметриялық мәселесин шешиў алгоритмлери

5А130202 – «Әмелий математика ҳәм информациялық технологиялар»

магистр дәрежесин алыў ушын усынылған

ДИССЕРАТАЦИЯ

Илимий басшы:

доц. Ж.П. Алланазаров

Нөкис-2013

ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

Магистратура бөлими
Кафедра: «Әмелий математика ҳәм информатика»
Оқыў жылы: 2011-2012/2012-2013

Магистрант: Даўекеев Саламат
Илимий басшы: доцент. Ж. П. Алланазаров
Қәнигелиги: «Әмелий математика ҳәм информациялық технологиялары»

МАГИСТРЛИК ДИССЕРТАЦИЯ АННОТАЦИЯСЫ

Диссертация жумысының актуаллығы: Тербелис тәбияттың барлық жеринде ушырасады ҳәм бул меншикли мәнис пенен байланыслы мәселелерди пайда етеди. Қаншама математикалық моделлер сонша таза илимниң бағдарларын ийелеген сайын, меншикли мәнислерди есаплаўларға да талаплар соншама артып барады.

Диссертация жумысының мақсети ҳәм ўазыйпалары: Магистрлик диссертация аз толықлықтағы матрицаларды үш диагоналлы матрицаларға әкелиў арқалы дәслепки матрицаның меншикли мәнислерин есаплаў мүмкиншилигин усынлады.

Изертлеў объекти ҳәм изертлеў предмети: Изертлеў жумысының объекти ретинде үлкен өлшемли симметриялы матрицалардың меншикли мәнислерин табыўда эффектив методларды жаратыўға қаратылған.

Изертлеў методикасы ҳәм усыллары: Илимий жумыс шолыў ҳәм илимий изертлеў характерине ийе болып, QR ҳәм QL алгоритмлери пайда болғаннан соң симметриялық матрицалардың барлық меншикли мәнислерин табыўда ең нәтийжели усыл есабында тез танылды.

Изертлеў нәтийжелериниң илимий тәрептен жаңалық дәрежеси:

Симметриялы матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын есаплаўда пайдаланылатуғын QR ҳәм QL алгортмлериниң жыйнақлылығы дәлилленди ҳәм олардың шекли адымларда тийисли нәтийжелерди бериўлиги әмелий мысаллар менен көрсетилди.

Изертлеўдиң әмелий әҳмийети ҳәм қолланылыўы: Үлкен өлшемли симметриялы матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли функцияларын есаплаўда нәтийжели методлар сыпатында QR ҳәм QL алгортмлеринен пайдаланыў кейинги ўақытлары тез пәт пенен артпақта.

Жумыстың дүзилиси ҳәм қурамы: Магистрлик диссертация жумысы кирисиў бөлиминен, үш баптан, биринши бап 8 параграфтан, екинши бап 11 параграфтан ҳәм үшинши бап 2 параграфтан ҳәмде жуўмақлаў бөлиминен ибарат.

Жумыстың тийкарғы нәтийжелери: Үлкен өлшемдеги матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли мәнислерин есаплаўда кең қолланылатуғын QR ҳәм QL алгортмлериниң жыйнақлылық тезликлериниң дәллиги ҳаққындағы теоремалар дәллиленип көрсетилди ҳәм алынған теориялық нәтийжелер практикалық мысаллар менен көрсетилди.

Жуўмақ ҳәм усыныслардың қысқаша улыўмаластырылған көриниси: Үлкен өлшемдеги матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли мәнислерин есаплаўда кең қолланылатуғын QR ҳәм QL алгортмлериниң жетискенликлери дәлиллеп көрсетилди ҳәм оларды әмелий мәселелерди шешиўде қолланылыў ушын пакет программалар дүзилди.

Илимий басшы __________________ доц. Ж. П. Алланазаров

Магистрант __________________ С. Х. Даўекеев

THE MINISTRY OF HIGHER AND SECONDARY SPECIAL EDUCATION OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

KARAKALPAK STATE UNIVERSITY NAMED AFTER BERDAKH

Magistracy department
Chair: ”Practical mathematics and information science”
Educational years: 2011-2012/2012-2013

Second year student: Dawekeev Salamat
Scientific supervisor: dots. Zh. P. Allanazarov
Speciality: “Practical mathematics and Informational technology”

THE ANNOTATION OF MASTER’S THESIS

The actuality of paper:
The oscillation is met in all places of nature and this with proper meaning connected problems are appeared. As many mathematic models so new directions of science are and so the requirements to calculate proper meanings are getting more.

The objectives and functions of thesis:
In this Master’s thesis few completeness matrixes bring to diagonal matrixes through previous matrixes to calculate the proper meanings’ possibilities are recommended.

The object of research and subject of research:
As the object of research paper was taken the large dimension of symmetric matrixes’ to find out the proper meaning using the effective methods.

The methods and the ways of solving problems of research paper:
The research paper clarifies and has scientific research characteristics, QR and QL algorithms appeared after the symmetric matrixes’ all proper meanings to find and that was widely known as the most resulting method.

The research results of innovation from scientific point of view:
The proper meanings of symmetric matrixes and proper vectors using them in calculating QR and QL algorithms were proved and there was shown with few practical examples the results of their limited steps.

The practical value and usage of research paper:
The large dimensions of systematic matrixes’ proper meaning and proper functions lately are spread fast to calculate as the resulting methods using of QR and QL algorithms.

The structure and the content of paper:
The Master’s thesis consists of introduction, three chapters, there are 8 paragraphs in first chapter, 11 paragraphs in second chapter and 2 paragraphs in third chapter and conclusion.

The main results of paper:

The large dimension of matrixes and proper meanings and to calculate the proper meanings with the use of QR and QL algorithm speed exact theorems are proved and shown and taken theoretic results with practical examples.
Conclusion and short total aspect of suggestions:
The large dimension matrixes' proper meanings and to calculate the proper meaning with the wide use of QR and QL algorithms advantages are proved and shown and there was structured a packet of programms to use in solving these practical tasks.

Scientific supervisor: __________________________ dots. Zh.P. Allanazarov

Second year student: _________________________ S.H. Dawekeev

М А З М У Н Ы

Кирисиў

Тербелис тәбияттың барлық жеринде ушырасады, ҳәм бул меншикли мәнис пенен (ямаса жийилик) байланыслы мәселелерди пайда етеди. Қаншама математикалық моделлер сонша таза илимниң бағдарларын ийелеген сайын, меншикли мәнислерди есаплаўларға да талаплар соншама артып барады.

Меншикли мәнистиң мәселелеринде айырмашылықлар болғаны менен, конкрет мәселелерде олар квадратлық матрицалардан ибарат ҳақыйқый коэффициентли ямаса комплекслик элементли қандайда бир меншикли мәнислерге байланыслы мәселеге алып келеди. Бул мәселелерде биреўлери тек ҳақыйқый меншикли мәнислерине ийе матрицаларға алып келсе, екиншилери комплекслик меншикли мәнисли матрицаларға алып келеди. Ҳақыйқый меншикли мәнисли матрицалар – бул өз-өзине түйинлес мәселелер менен байланыслы болып, бундай мәселелер менен жумыс алып барыў жүдә унамлы болады.

Жүдә киши топардағы қәнийгелерден басқа, азғана сандағы қәнийгелер өз-өзине түйинлес ҳәм түйинлес емес мәселелерди шешиў менен қызықсынады. Бул еки жағдайды өз алдына бөлеклеп қаралса белгили муғдарда өзгешеликлергеде ийе. Қаралып атырған магистрлик жумыста ҳақыйқый симметриялы матрицалардың меншикли мәнислерин есаплаўларға бағышланады. Бул жағдай әпиўайы болғаны менен, киритилип атырған нәтийже сәйкес түрде үлкен болады.

Матрицалар яки киши, яки үлкен өлшемде болыўы мүмкин. Киши өлшемдеги матрицалар ушын ҳәзирги ўақытта көпшилик есаплаў орайларында пайдаланыўшының қәлеген түрдеги талапларын қанаатландыратуғын жақсы программалар бар. Соның менен бирге бул программаларда қолланылатуғын методлар арасында толық бир-бирине сәйкеслилик орнатылған. Көп мәртебе қайта исленген теория сондай дәрежеде әпиўайыластырылып, жүдә сыпайылық дәрежесине жетистирилген.

Соңғы ўақытлары изертлеўшилердиң дыққатын үлкен өлшемдеги матрицалар қызықтырмақта. Мәселелер қыйынласты, биращта базыбир жақсыда методлар ислеп шығылды, сонда-да сыпайылық дәрежесине еле жетисе қойған жоқ. Усы ўақытқа шекем қандайда мәселе ушын қайсы методларды қолланыў керeклиги ҳаққында улыўма қабылланған шешим жоқ.

Меншикли мәнислерди есаплаўлардағы дәрежели метод ҳәм кери итерация[3,4] – жүдә әпиўайы процесслер болып, бирақта олардың артында узаққа баратуғын идеялар жатыр. Әдетте бул методлар меншикли векторлар бойынша жайыў арқалы анализлейди. Бирақта айырым тригонометриялық қосымшалары әпиўайы тәриплеўлерге қарағанда анығырақ ҳәм дәл нәтийжелерди алыўға мүмкиншилик береди.

Релл қатнасындағы итерация[4] – өзгермели жылжыўға ийе белгили кери итерация варианты болыўы мүмкин. Егерде бул итерация өзиниң меншикли жуплығына жыйнақлы болса онда ол жүдә тез жыйнақлы болады. Кохан тәрепинен анықланған жағдай[7], яғный қәлеген басланғыш жуўықласыўда метод жыйнақлы болатуғыны, бул методтың теориясын сәтли жуўмақлайды.

Қәлеген ортогоналлық матрицаны сәўлелендириў матрицаларының көбеймеси түринде көрсетиўге болатуғыны жүдә кең дәрежеде белгили емес. Солай етип сәўлелендириў классы жеткиликли қәлеген жағдай ушын бай болады; соның менен бирде оның ҳәр бир ағзасы бирден-бир вектор менен характерленеди. Бул матрицаларға жүдә үлкен статус берилип, бурын буған итибар қаратылмаған, ал 1958-жылы Хаусхолдер оларды санлы алгебра методларында қолланыў бойынша усынысынан соң кең қолланылыў имканияты пайда болады[12].

1960-жылларда тегис айландырыў модаға киргизилди. Уилкинсон [12] тәрепинен дөңгелеклеў қәтеликлериниң уқсас анық ортогоналлық түрлендириўлердиң нәтийжелерине күшли тәсирин тийгизбейтуғыны анықланғаннан соң. Грам-Шмидтиң процессти ортонормалластырыўға арналған матрицалық тәриплери тийкарында QR-жайылыўы киргизилди[5,7,10,12].

1954-жылы Уоллес Гивенс[10,12] аз толықлықтағы матрицаларда үш диагоналлы матрицаларға әкелиў арқалы дәслепки матрицаның меншикли мәнислерин есаплаў мүмкиншилигин усынды. Үш диагоналлы матрицаларды диагоналластырыўда QR-алгоритм өзин жүдә жақсы көрсетти. Бул алгоритмниң соңғы варианты QL алгоритм деп аталады. QR алгоритмнен жүз жыл алдын симметриялы матрицаны диагоналластырыў ушын Якоби методы исленип шығылған еди[10,12,15].

Үлкен өлшемдеги A матрицасы ушын мына төмендеги әмеллердиң қайсылары орынланатуғынына қарап методты сайлап алыўға болады:

1. Қәлеген x векторын A матрицасына көбейтиў.
2. A матрицасын H+V суммасы түринде жайыў, бунда V нормасы бойынша киши, ал H матрицасы ушын үш мүйешли көбейтиўшилерди есаплаў жеңил болады.
3. A матрицасын үш мүйешли жайыў.
4. σ -көп мәниси ушын $A-\sigma I$ матрицасын үш мүйешли жайыў.

Усы дизимнен қаншама көп әмеллерди A ушын орынлаў керек болса, оның меншикли мәнислерин есаплаў ушын соншама нәтийжели методларды қолланыў талап етиледи.

Жумыстың актуаллығы: Тербелис тәбияттың барлық жеринде ушырасады, ҳәм бул меншикли мәнис пенен (ямаса жийилик) байланыслы мәселелерди пайда етеди. Қаншама математикалық моделлер сонша таза илимниң бағдарларын ийелеген сайын, меншикли мәнислерди есаплаўларға да талаплар соншама артып барады.

Изертлениў дәрежеси: Үлкен өлшемдеги матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли мәнислерин есаплаўда кең қолланылатуғын QR ҳәм QL алгортмлериниң жетискенликлери дәлиллеп көрсетилди ҳәм оларды әмелий мәселелерди шешиўде қолланылыў ушын пакет программалар дүзилди.

Изертлеўдиң мақсети ҳәм ўазыйпасы: Магистрлик диссертация аз толықлықтағы матрицаларды үш диагоналлы матрицаларға әкелиў арқалы дәслепки матрицаның меншикли мәнислерин есаплаў мүмкиншилигин усынлады. Үш диагоналлы матрицаларды диагоналластырыўда QR-алгоритм өзин жүдә жақсы көрсетти. Бул алгоритмниң соңғы варианты QL алгоритм деп аталады.

Изертлеў объекти ҳәм изертлеў предмети: Изертлеў жумысының объекти ретинде үлкен өлшемли симметриялы матрицалардың меншикли мәнислерин табыўда эффектив методларды жаратыўға қаратылған.

Изертлеўдиң алып барыў усыллары: Илимий жумыс шолыў ҳәм илимий изертлеў характерине ийе болып, QR ҳәм QL алгоритмлери пайда болғаннан соң симметриялық матрицалардың барлық меншикли мәнислерин табыўда ең нәтийжели усыл есабында тез танылды. Дәслеп избе-из сәўлелендириў жәрдеминде толық матрица үш диагоналлық формаға келтириледи, соңынан QL-алгоритм диагоналлық емес элементлерди итибарға алынбаслықтай дәрежеде киши шамаға шекем тез киширейтеди. Алгоритмниң ҳәр бир адымында жетерли қурамалы болған уқсас түрлендириў жүргизиледи ҳәм нәтийжеде диагоналлық матрицаға жыйнақлы болатуғын матрицалар избе-излигин пайда етеди. Буннан басқа үш диагоналлық форма сақланып қалынады.

Изертлеўдиң илимий жаңалығы: Симметриялы матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын есаплаўда пайдаланылатуғын QR ҳәм QL алгортмлериниң жыйнақлылығы дәлилленди ҳәм олардың шекли адымларда тийисли нәтийжелерди бериўлиги әмелий мысаллар менен көрсетилди.

Изертлеўдиң әмелий әҳмийети ҳәм илимий нәтийжелериниң аппробациясы: Үлкен өлшемдеги симметриялы матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли функцияларын есаплаўда кең қолланылатуғын QR ҳәм QL алгортмлериниң жыйнақлылық тезликлериниң дәллиги ҳаққындағы теоремалар дәллиленип көрсетилди ҳәм алынған теориялық нәтийжелер практикалық мысаллар менен көрсетилди.

Жумыстың дүзилиси ҳәм қурамы: Магистрлик диссертация жумысы кирисиў бөлиминен, үш баптан, биринши бап 8 параграфтан, екинши бап 11 параграфтан ҳәм үшинши бап 8 параграфтан дүзилген болып, үшинши бапта санлы мысаллар қаралып, оған ЭЕМ де алгоритмлик программа дүзилип тийисли нәтийжелер алынды.

I-Бап. Өз-өзине түйинлес матрицалар ҳаққында тийкарғы мағлыўматлар

1-§. Евклид кеңислиги

Биз бул бапта симметриялы матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын жуўық есаплаў методларына қатнасы бар сызықлы алгебраның айырым тийкарғы түсиниклери менен танысамыз. Соның менен бирге керекли белгилеўлерде жол жөнекей киргизиледи.

Барлық n өлшемли ҳақыйқый компонентли вектор бағаналардың векторлық кеңислигин R^n арқалы белгилеймиз. Бул жумысымызда барлық скалярлар грек алфавитиниң киши ҳәриплери менен белгиленеди- α,β,γ; ал векторлар болса латын алфавитиниң киши ҳәриплери менен белгиленеди-x,y,z. n-өлшемли барлық комплекслик векторлардың, кеңислиги ζ^n арқалы белгиленеди. Ҳақыйқый симметриялы матрица менен байланыслы қолайлы орталық болып әдеттеги R^n кеңислигинен басқа n-өлшемли E^n-деп аталыўшы Евклидлик кеңислиги болып табылыда. E^n кеңислиги R^n кеңислигинен парқы, ондағы қәлеген x ҳәм y жуплығы базыбир мүйешти дүзеди. Анығырағы, ҳәр бир векторлардың $x(\xi_1,\xi_{2,...,}\xi_n$ компонентлери менен) ҳәм $y(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ компонентлери менен) жуплығы ушын сәйкес санды қояды ҳәм ол (x, y) белгиси менен белгиленеди ҳәм

$$(x,y) \equiv \sum_{i=1}^{n} \eta_i \xi_i \tag{1.1}$$

қатнасы менен анықланады.

Жумыстың улыўма көлеминде $\equiv$ белгиси менен анықламаны белгилеймиз,ал $\overline{\alpha}$-арқалы α менен түйинлес комплекслик санды белгилеймиз.

(1) –анықламасы әпиўайы болып, ол басқа кеңисликлерден Евклидлик кеңисликти скаляр көбейме менен ажыратып турады.

Ортогоналлық, мүйеши ҳәм узынлық қусаған тийкарғы түсиниклер скаляр көбейме менен тиккелей байланысқа ийе ҳәм олар төмендегише анықланады.

x векторының Евклидлик узынлығы ямаса нормасы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{1.2}$$

аңлатпасы менен анықланады.

Буннан басқада нормалар бар болып, олар ζ^n ямаса R^n кеңисликлеринде киргизиледи, ал E^n кеңислиги ушын тәбийғый норма бул (2) аңлатпасы менен анықланған норма есапланады.

Қәлеген $x, y \in \mathrm{E}^n$ ушын белгили болған Коши-Шварц теңсизлиги, атап айтқанда

$$|(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \tag{1.3}$$

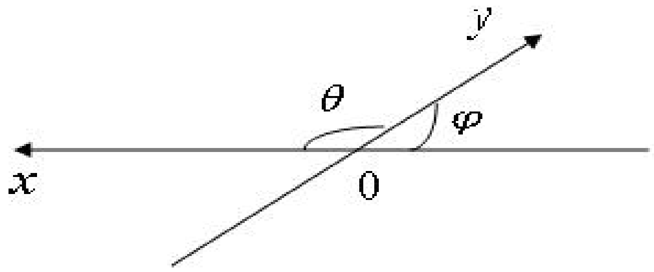
төменде берилетуғын мүйеши түсинигин киргизиўге жәрдем береди. < (x, y) арқалы белгиленетуғын x ҳәм y векторлары арасындағы мүйеши радианда өлшенетуғын шама θ ҳақыйқый саны болып, ол $0 \le \theta \le \pi$ теңсизлигин қанаатландырады ҳәм төмендегише анықланады

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re}(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{1.4}$$

Әдетте x векторының өзи ғана қызықтырып қалмастан, ал оның менен анықланатуғын толық туўрының өзи, яғный барлық x қа скаляр еселилердиң көплиги, атап айтқанда -x та киреди. Биз бул туўрыны Span(x) арқалы белгилеймиз. x векторы бағдары менен y векторы бағдары арасындағы φ сүйир мүйеши шамасы $0 \le \varphi \le \pi/2$ теңсизлигин қанаатландыратуғын ҳақыйқый сан болып

$$\cos\varphi = \frac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{1.5}$$

аңлатпасы менен анықланады. θ ҳәм φ мүйешлери арасындағы өзгешеликти төмендеги сүўрет жәрдеминде көрсетемиз.



Дара жағдайда, х ҳәм у векторлары өз-ара ортогонал деп аталады,егерде (х, у)=0 болса. х векторы *нормалласқан* ямаса *бирлик вектор* деп аталады, егерде $\|x\| = 1$ болса.

Үлкен ҳәриплер менен белгиленетуғын матрицалар әдетте векторлар менен көбейтириледи. Егерде F$(m \times n)$-өлшемли матрица, ал ω векторы ζ^n кеңислигине дерек болса, онда $F \cdot \omega$ көбеймесиде ζ^n кеңислигине дерек болады. F матрицасының ζ^n кеңислигиндеги барлық векторларға көбейтирилетуғын билип қойған мақул ҳәм солай етип ζ^n кеңислигин ζ^m кеңислигине түрлендиреди. Бул түрлендириў сызықлы болыўы, яғный

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F x + \beta F y$$

теңлиги орынлы болады ҳәм қәлеген ζ^n кеңислигинен ζ^m кеңислигине сызықлы түрлендириўи базыбир $(m \times n)$-өлшемли F матрицасы менен тәриплениўи мүмкин.

Квадратлық ҳәм түрлендирилетуғын F матрицасын ζ^n кеңислигине векторлардың түрлендириўи ғана сыпатында қарап қоймастан, ал ζ^n кеңислигиндеги тап әпиўайы базисти өзгертиў сыпатында қарастырыў мүмкин. Солай етип, $F \cdot \omega$ көбеймеси F матрицасы тәсиринде ω образы болады ямаса ω векторы ийе болған координаталы усы вектордың таза координаталарына ийе боламыз.

$(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n)$-вектор қатары ушын y^* белгилеўи кең тарқалған; бирақта, * операциясы мазмуны бойынша Евклидлик скаляр көбеймесиниң структурасының тағы бир көриниси болады.

Мейли F-$(m \times n)$-өлшемли матрица болсын. Оның түйинлес F^* матрицасы $n \times m$ өлшемге ийе болады ҳәм E^m кеңислигиниң u елементи ушын F^*u векторы бирден-бир вектор болатуғын абстрактлик қәсийети менен анықланады ҳәм мына қатнасты қанаатландырады

$$(x, F^*u) = (Fx, u) \tag{1.6}$$

F^* матрицасы F матрицасын транспонирлеў арқалы алынатуғын ҳәм комплекслик түйинлеслигинен алынған белгили матрица болады. Мысал ушын, егерде $i^2 = -1$, α ҳәм β ҳақыйқый санлар болса, онда

$$\begin{bmatrix} i & \alpha+\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} i & 0 \\ \alpha i+\beta & 1 \end{bmatrix}$$

болады.

Егерде $F \cdot G$ көбеймеси анықланған болса, онда

$$(F \cdot G)^* = G^* \cdot F^* \tag{1.7}$$

теңлиги орынлы. Дара жағдайда, $(F \cdot \omega)^* = \omega^* \cdot F^*$. Ҳәттеки егерде F ҳақыйқый болса ,онда F^*белгиси , ал F^H емес ямаса F^T емес, ямаса F^t емес, транспонирленген матрицаны белгилеў ушын қолланылады. Тағыда, егерде F квадратлық ҳәм кери матрицасы бар матрица болса, онда

$$(F^*)^{-1} = (F^{-1})^* \tag{1.8}$$

қатнасы орынлы ҳәм бул еки матрицаныда F^{-*}түринде жазамыз. $m \times n,\ m \geq n$ өлшемли P матрицасын *ортонормаллық* деп атаймыз, егерде оның, бағаналары ортонормалласқан болса, яғный егерде

$$P^*P = I_n \tag{1.9}$$

(=1 қысқалық ушын), болса.

Квадратлық ортонормалласқан матрицаларды *унитарлық* деп аталады, егерде олар комплекслик болса ҳәм *ортогоналлық* деп аталады, егерде олар ҳақыйқый болса. Бул еки матрицаларда ортонормалласқан болады. Бул матрицалардың әҳмийетлилиги сонда, (1) формуласы менен анықланатуғын скаляр көбейме олардың тәсириниң астында сақланып қалады, яғный

$$(P_x, P_y) = y^* P^* P_x = y^* x = (x, y) \quad (1.10)$$

Егерде E^n кеңислигинде базисти ортогоналлық алмаслаў жүргизилсе, онда барлық векторлардың координаталары базыбир ортонормалласқан матрицасына көбейтириледи ҳәм бул жағдайда норманың мәниси ҳәм мүйешлери сақланып қалынады. Ҳақыйқатында да, барлық ортогоналлық түрлендириўлердиң көплиги әпиўайы өзгертиўлер менен бирге Евклидлик геометрияның ҳәрекетлериниң көплигин дүзеди.

2-§. Меншикли мәнислер

Меншикли мәнис ҳәм меншикли вектор түсиниклери скаляр көбейтмениң, мүйештиң ямаса узынлықтың мәнислеринен ғәрезсиз болады, сонлықтан биз бул параграфта E^n кеңислигин ζ^n кеңислиги менен алмаслаймыз. $(n \times n)$-өлшемли B матрицасын үйрениўде орайлық хызметти ζ^n кеңислигиндеги сондай арнаўлы матрицалар атқарады, оларды B матрицасына көбейтирилгенде олардың бағдары өзгермейди (бул жағдайда белги есапқа алынбайды). Усындай қәлеген z векторы

$$Bz = z\lambda = \lambda z, \quad z \neq 0 \quad (2.1)$$

теңлигин базыбир λ скаляры ушын қанаатландырыўы зәрүр ҳәм скаляр B матрицасының *меншикли мәниси* деп аталады.

Ҳәр бир нолден өзгеше z векторына есели болған векторы меншикли вектор есапланады ҳәмде λ ҳәм z бир-бирине сәйкес келеди. Келисим бойынша нол меншикли вектор болыўы мүмкин емес.

Тастыйықлаў 1. Мейли $C = FBF^{-1}$ болсын. Егерде {λ, z}-B матрицасы ушын жуплық болса, онда {λ, Fz}-жуплығы C матрицасы ушын меншикли жуплық болады.

$B \to FBF^{-1}$ сәўлелендириў В-матрицасының *уқсас түрлендириўи* деп аталады ямаса қысқаша *уқсаслық* делинеди. Алгебралық көз-қарастан уқсаслық бул $(n \times n)$-өлшемли матриcаның көплигинде эквивалентлик қатнасы болып, онда меншикли мәнислер сақланады, ал меншикли векторлар болса әпиўайы усылда өзгериске ийе болыўы мүмкин.

χ характеристикалық көпағзалысы

$$\chi(\xi) \equiv \chi_B(\xi) \equiv \det[\xi I - B] \tag{2.2}$$

қатнасы менен анықланады.

(2.1) сызықлы теңлемеси теорияға тийкарланып ноллик емес z шешимге ийе болады, сонда тек ғана егерде $\chi(\lambda) = 0$ болса. Сонлықтан В матрицасы n санынан көп болмаған меншикли мәнислерине ийе болыўы мүмкин. Усы меншикли мәнислерлердиң көплиги комплекслик тегисликте В матрицасының спектрин дүзеди.

3-§. Өз-өзине түйинлес матрицалар

Биз енди E^n кеңислигиндеги $(n \times n)$-өлшемли матрицаларды қарастырамыз ҳәм

$$M^* = M \tag{3.1}$$

теңлигин қанаатландыратуғын матрицаларға тоқтаймыз. Улыўма айтқанда ζ^n ямаса R^n кеңислигинде ерикли түрде базисти алмаслағанда (3.1) теңлиги сақланбайды. Улыўма алғанда E^n кеңислигиндеги (3.1) қәсийетине ийе сызықлы операторлар *өз-өзине түйинлес* деп аталады ҳәм бул матрицалардың ҳақыйқый ямаса комплекслик екенлигиниң парқы жоқ. Тилекке қарсы n өлшемли матрицалар жағдайында оларды *эрмитлик* деп атайды, егерде олар комплекслик болса, ҳәм *симметриялық* деп аталады, егерде олар ҳақыйқый болса.

Тастыйықлаў 2. Өз-өзине түйинлес матрицалардың барлық меншикли мәнислери ҳақыйқый болады.

2-тастыйықлаўды пайдалана отырып меншикли мәнислерди өсиўи тәртибинде төмендегише номерлеймиз:

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le ..., \lambda_n \qquad (3.2)$$

ҳәм $\lambda_j(M)$-арқалы M матрицасының төменнен j-меншикли мәниси белгиленеди. λ_j-меншикли мәнисине сәйкес келиўши қәлеген нормалластырылған меншикли векторы z_j арқалы белгиленеди; $Az_j = \lambda_j z_j,\ j = 1,2,...,n.$ Үлкен мәнистеги n ушын ең үлкен меншикли мәнислерди өлшемлерге көрсетпе берилмеген ҳалда белгилеў қолай болады. Сонлықтан биз меншикли мәнислерди төмендегише тәртиплестириўимиз мүмкин:

$$\lambda_{-n} \le ... \le \lambda_{-2} \le \lambda_{-1} \qquad (3.3)$$

Солай етип, λ_{-1} барқулла ең үлкен (алгебралық) меншикли мәнис болады.

<u>Тастыйықлаў 3.</u> Егерде $\lambda_k \ne \lambda_j$ болса, онда $(z_j, z_k) = z_k^* z_j = 0$ болады.

Енди есели меншикли мәнислер ҳаққында бир-еки аўыз сөз етемиз. Өз-өзине түйинлес матрицаның ҳәрқыйлы меншикли матрицалары ортогонал болады. I бирлик матрицасын қарастырыўымыз соны көрсетеди, буның дурыс тәриплениўи басқаша екенлигин: A матрицасының меншикли векторларын жуп-жуптан ортогонал етип барқулла таңлап алыў мүмкин. Есели меншикли мәнислерде болса сәйкес меншикли векторларды сайлап алыўда кең мүмкиншиликлер болады.

Егерде λ - A матрицасының меншикли мәниси болса, яғный егерде $\lambda = \lambda_j[A]$ болса, онда N_λ үлес кеңислиги A-λ матрицасының ядросы болады, яғный $(A - \lambda)x = 0$ теңлигин қанаатландыратуғын барлық x векторларының көплиги λ меншикли мәнисине сәйкес келиўши *меншикли үлес көплиги* деп аталады. N_λ үлес көплигиндеги меншикли мәнис болмайтуғын бирден-бир вектор - бул ноллик векторы болады. λ

меншикли мәнисиниң еселилиги N_λ үлес кеңислигиниң өлшемин аңлатады. (Симметриялық емес матрицалар ушын меншикли мәнистиң еселилик түсиниги анағурлым қурамалырақ болады.). Инвариантлық үлес кеңисликлердиң ең әпиўайысы- меншикли үлес кеңислик болады ҳәм барлық инвариантлық үлес кеңисликлер меншикли векторларға созылыўы мүмкин.

Тастыйықлаў 4. (Спектраллық теорема). Ҳәр қандай А матрицасы ортогоналлық уқсас түрлендириў жәрдеминде $\wedge$ диагоналлық матрицасына уқсас болады. Символларда

$$A = Z \wedge Z^* = \sum_{i-1}^{n} \lambda_i z_i z_i^*,$$

$$I = Z \cdot Z^* = \sum_{i=1}^{n} z_i z_i^*, \quad \text{болады.}$$

$Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$- А матрицасының ортонормалласқан меншикли векторының матрицасы.

Анықлама. Е матрицасы *проектор (сәўлелендириўши)* деп аталады, егерде $E^2 = E$ болса.

Ол ортогоналлық проектор деп аталады, егерде Е мәнислер областына ортогонал қәлеген у ушын Еу=0 болса (мәнислер областы span E деп белгиленеди).

Буның шәрти жүдә әпиўайы

$$E^* = E \tag{3.4}$$

Ерикли В матрицасы ушын λ меншикли мәниси ушын E_λ спектраллық проекторы мына төмендеги қатнасын қанаатландырады:

$$B \cdot E_\lambda = E_\lambda \cdot B = \lambda \cdot E_\lambda \tag{3.5}$$

Есели меншикли мәнислер болған жағдайда бирден-бир жайылыўға ерисиў ушын N_λ меншикли үлес кеңислиги қолланылады ямаса эквивалентли H_λ спектраллық проекторлары қолланылады ҳәм ол төмендеги формула менен анықланады:

$$H_\lambda x = \begin{cases} x, & \textit{егерде} \quad x \in N_\lambda \quad \textit{болса}, \\ 0, & \textit{егерде} \quad x \in N_\mu, \ \mu \neq \lambda \ \textit{болса}, \end{cases} \tag{3.6}$$

Енди спектраллық теореманы анықсызлықларсыз мына теңлик пенен жазыў мүмкин.

$$A = \sum \lambda_j H_j, \qquad\qquad I = \sum H_j, \tag{3.7}$$

бундағы суммалар A матрицасының спектри бойынша алынады. Себеби A матрицасы өз-өзине түйинлес, оның спектраллық проекторлары ортогонал болады, сонлықтан биз (3.6) ҳәм (3.7) аңлатпаларында симметриялық H ҳәрибин пайдаландық.

<u>Тастыйықлаў 5</u>. H эрмитлик матрицаның меншикли системасын есаплаўда еки еселенген тәртипли ҳақыйқый симметриялық $\hat{H}$ матрицасы менен алмаслаў мүмкин.

5-тастыйықлаўы еки жағдайда пайдалы болады: комплеслик эрмитлик матрицасы ушын программа болмаған жағдайда ғана емес, ал сондай программалар бар болған жағдайларда да, комплекслик арифметикалық әмеллер нәтийжели қолланылмағанда да. Бул жағдайлар бойынша жергиликли есаплаў орайының қәнийгелери менен мәсләҳәтлесип көрген мақул. Егерде комплекслик арифметика жақсы пайдаланылған болса онда дәслепки берилген H эрмитлик матрица менен ислеўши программа $\hat{H}$ ҳақыйқый симметриялы матрицасы менен ислеўши программаға салыстырғанда еки есе күшлирек тезликке ийе болады.

4-§. Квадратлық формалар

Квадратлық формаларды (ямаса функцияларды) үйрениўде егерде олар өзлериниң төменги ағзаларына ийе болмаса, өз-өзине түйинлес матрицалар тәбийғый түрде пайда болады. Улыўма жағдайда квадратлық форма төмендеги көринисте болады:

$$\psi(x) = x^{*}Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i x_j \qquad (4.1)$$

Бул формалар көбинесе энергияның анаў ямаса мынаў системасын тәрийплейди. Атап айтқанда атом ямаса космослық әлемди, өзгериўшини сызықлы кери алмастырыўлар, атап айтқанда $x \to y = F^{-1}x$, алмаслаўы форманы өзгериўши қәсийетине ийе болады, яғный барлық х ушын

$$\psi(x) = \psi(y) = y^{*}Ay \qquad (4.2)$$

болады, егерде тек ғана

$$A = F^{*}AF \quad \text{болса.} \qquad (4.3)$$

$A \to F^{*}AF$ сәўлелендириўи А матрицасының *конгруэнтлик сәўлелениўи* деп аталады. Бул сәўлелендириў өз-өзине түйинлесликти сақлап қалады, бирақта улыўма айтқанда меншикли мәнислерди сақлап қалмайды. Соған қарамастан конгруэнтликте базыбир мағанада меншикли мәнислердиң (±) белгилери сақланып қалады. Төмендеги тастыйықлаўдың мағанасыда усыдан ибарат.

Тастыйықлаў 6. (Инерция ҳаққында Сильвестр теоремасы). Ҳәр қандай А матрицасы базыбир диагоналлық матрица түриндеги $diag\,(I_{\pi}, -I_{\nu}, O_{\xi})$ матрицасына конгруэнтлик болады, бунда (π, ν, ξ) санлық үшлиги тек ғана А матрицасынан ғәрезли болады ҳәм А матрицасының *инерциясы* деп аталады. Соның менен бирге π, ν, ξ санлары сәйкес оң, терис ҳәм ноллик А матрицасының меншикли мәнислери болады. Тағы қосымша,

$$\begin{aligned} &\pi + \nu + \xi = n \\ &\pi + \nu = \text{ранг}\ (A) \\ &\pi - \nu = \text{сигнатура}\ \ (A) \end{aligned} \qquad (4.4)$$

6-тастыйықлаўы соны көрсетеди, еки өз-өзине түйинлес матрицалар сонда тек ғана конгруэнтлик болады, егерде олар бирдей инерцияға ийе болса.

Квадратлық формалардың арасында сондайларыда бар болып, олар барлық ноллик емес векторлар ушын қатал түрде оң анықланады: $\psi(x) > 0,\ егерде\, x \neq 0$ болса. Усындай формалар ҳәм олар менен байланысқан өз-өзине түйинлес матрицалар *оң анықланған* деп аталады.

Егерде барлық $x \neq 0$ ушын $\psi(x) \geq 0$ болса, онда Ψ ҳәм оның матрицасы *ярым оң анықланған* деп аталады. Егерде $\psi(x)$ оң ҳәм терис мәнислерди қабылласа онда ол анықланбаған форма болады.

<u>Тастыйықлаў 7</u>. Мына тастыйықлаўлар өз-өзине эквивалент:

1. *A матрицасы оң анықланған.*
2. *A матрицасы (n, 0, 0) инерциясына ийе.*
3. *A матрицасының меншикли мәнислери оң анықланған.*
4. *A матрицасы бирден-бир Холесскийдиң C көбейтиўшисине ийе болады, яғный $A = C^*C$ теңлигин қанаатландыратуғын диагоналлық элементлери оң болған жоқарғы үшмүйешлик матрицасына ийе болады.*

Таза Ψ квадратлық формасы 2-дәрежели биргеликли функция болады: $\psi(\alpha x) = \alpha^2 \psi(x)$. Нәтийжеде, егерде оның мәнислерин E^n кеңислигиндеги бирлик сферада қараған информацияның ҳеш қандай жоғалыўына жол қойылмайды. Бул таза функция ρ Релей қатнасы болады ҳәм ол әдетте

$$\rho(u) \equiv \rho(u; A) \equiv \frac{u^* A u}{u^* u}, \qquad u \neq 0. \tag{4.5}$$

формуласы менен анықланады.

<u>Тастыйықлаў 8</u>. Релей қатнасы мына төмендеги тийкарғы қәсийетлерге ийе:

Биргеликлик: $\rho(\alpha u) = \rho(u), \qquad \alpha \neq 0$ (0 дәрежели).

Шегараланғанлық: $\rho(u)$ мәниси $[\lambda_1, \lambda_{-1}]$ интервалында жайласады, егерде u барлық ноллик емес n-векторлардың көплигин қабыллағанда.

Стационарлық: $\rho(u)$ қатнасы u точкасында стационар болады (яғный ρ градиенти 0^* өзи болады), егерде ҳәм тек егерде u – A матрицасының меншикли векторы болса.

Релей қатнасы матриканың меншикли мәниси ҳәм меншикли векторларын есаплаўда үлкен рол ойнайды ҳәм оны биз кейинги параграфларда қарастырамыз.

Бирақта оның бир әҳмийетли қәсийетин ҳәзир еске түсирип кеткен мақул болады.

Ерикли $u \neq 0$ ушын арнаўлы $r(u)$ байланыссызлық векторын

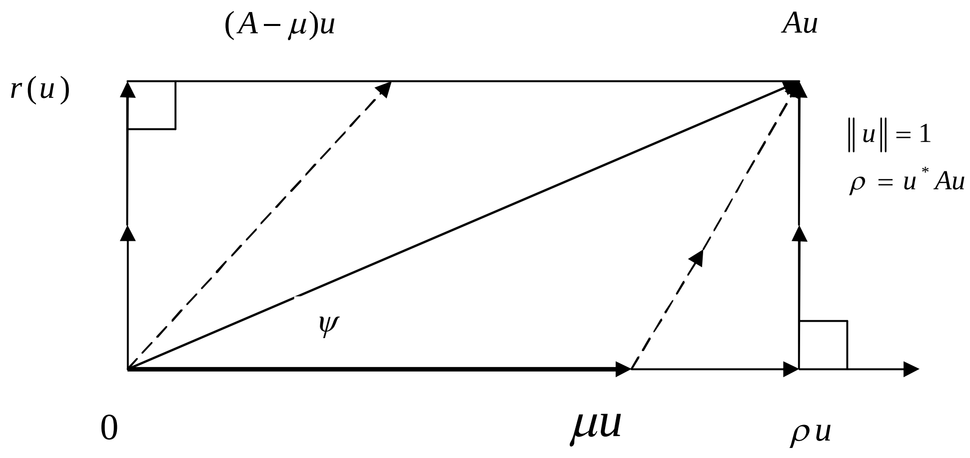
$$r(u) = [A - \rho(u)]u \qquad (4.6)$$

қатнасы менен анықлаймыз.

Төмендеги сүўретте

$$Au = \rho(u)u + r(u) \qquad (4.7)$$

аңлатпасы Au жайылмасының ортогонал екенлигин сүўретлейди.



Басқаша айтқанда

<u>Тастыйықлаў 9</u>. (Минимал байланыссызлық қәсийети). Қәлеген E^n кеңислигиндеги u ушын

$$\|[A - \rho(u)]\| \le \|[A - \mu]u\|,$$

теңсизлиги орынлы болады, ζ кеңислигиндеги μ диң қандай болыўынан қатий нәзер.

5-§. Матрицалық нормалар

Векторлардың Евклидлик нормасы менен байланыслы сондай арнаўлы матрицалық нормасыда бар, атап айтқанда

$$\|B\| = \max_{u \neq 0} \frac{\|Bu\|}{\|u\|} = \sqrt{(\lambda_{-1}[B^* B])} \qquad (5.1)$$

Бул норманы *спектраллық* ямаса *шегаралық норма* деп аталады. Бул норма барлық $u \in E^n$ ушын

$$\|Bu\| \leq \textit{норма}\ (\mathrm{B}) \|\mathrm{u}\| \qquad (5.2)$$

пайдалы нормасын қанаатландыратуғын ең киши норма болады. Тилекке қарсы бул норманы есаплаў жүдә қурамалы. Усындай (5.2) аңлатпасын қанаатландыратуғын норма бул матрицалық элементлердиң әпиўайы функциясы болатуғын – Фробениус нормасы болады (ямаса Шура, ямаса Гильберт-Шмид нормасы):

$$\|B\| \equiv \sqrt{[\textit{след}\,(B^* B)]} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2\right]^{1/2} \qquad (5.3)$$

Ерикли $(m \times n)$ өлшемли В матрицасы ушын $m \geq n$ болғанда

$$\|B\| \leq \|B\|_F \leq \sqrt{(\textit{ранг}(\mathrm{B})}\|B\| \leq \sqrt{u}\|B\| \qquad (5.4)$$

Егерде $B = A = A^*$ болса, онда

$\|A\| = \max \{|\lambda_1|, |\lambda_n|\} = A$ матрицасының спектраллық радиусы,

$$\|A\|_F = \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right]^{1/2} \qquad (5.4)$$

Келеси тастыйықлаўымыз унитар түрлендириўлердиң избе-излиги бул еки норманыда өзгертпейтуғынын көрсетеди.

<u>Тастыйықлаў 10</u>. (Норманың унитарлық инвариантлығы). Қәлеген $(m \times n)$ өлшемли В матрицада

$$\|JBG\| = \|B\|, \ \|JBG\|_F = \|B\|_F$$

теңлиги орынланыў ушын J ҳәм G матрицалары ортонормаллы болыўы зәрүрли ҳәм жеткиликли, яғный

$$J^*J = JJ^* = I_m, \qquad G^*G = GG^* = I_n$$

Бул еки нормада мына төмендеги пайдалы теңсизликлеринде қатнасады.

Тастыйықлаў 11. (Меншикли мәнислер жүдә жақсы шәртлестирилген).

$$\max_j \left|\lambda_j[A] - \lambda_j[M]\right| \le \|A - M\|,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_j[A] - \lambda_j[M])^2 \le \|A - M\|_F^2$$

Соңғы теңсизлиги *Виландт-Хоффан теңсизлиги* деп аталады. Бул теңсизлигиниң дәлиллениўин [12] китабынан табыўға болады.

Көпшилик жағдайлар оны былайынша тәрийпленеди: өз-өзине түйинлес матрицаның ҳәрбир меншикли мәнислери жақсы шәртлестирилген, яғный меншикли мәнистиң (абсолютлик) өзгеиўи матрицаның (абсолютлик) өзгериўинен асып кетпейди. Басқаша айтқанда, өз-өзине түйинлес матрицаның меншикли мәнислерин есаплаў мәселеси барқулла корректли қойылған; меншикли мәнислерди табыў мәселесин шешиў дәслепки берилгенлер менен исенимли анықланады. Ал симметриялы емес матрицалар ушын бул мәселе басқаша характерге ийе болады.

Меншикли векторлар ушын жағдай анағурлым сыпайырақ болады. Мейли $Az = z\alpha, \quad Ms = s\mu$ болсын. Егерде M A матрицасының α меншикли мәниси менен бирдей болмайтуғынын меншикли мәнисинен γ аралыққа бөлекленип турса, онда төмендеги тастыйықлаў орынлы.

Тастыйықлаў 12.

$$\left|\sin \angle (z, s)\right| \le \|A - M\| / \gamma$$

Бул тастыйықлаў ҳәм оның базыбир улыўмаластырылыўлары кейинги параграфларда қаралады.

Бул баҳалар асимтотикалық емеслиги менен баҳалы, бул жерде M-A аз болыў кереклиги айтылмайды (соралмайды). Басқа тәрептен меншикли мәнислердиң бөлекленгенлиги болмағанда меншикли векторлар дәслепки берилгенлердиң жүдә сезгир функциясы болар еди. Мейли, егерде $A(t_0)$ -

есели меншикли мәнисине ийе болсын, онда нормалластырылған меншикли векторлардың үзликсиз түрде t_0 дөгерегинде өзгеретуғынлығына кепиллик берип болмайды.

6-§. Санлы усыллар

Математикалық моделлестириў жәрдеминде илимий-техникалық мәселени шешиў, оның модели болған математикалық мәселени шешиўге келтириледи. Математикалық мәселелерди шешиў ушын, жоқарыда атап өтилгениндей, есаплаў усылларының мына тийкарғы топарлары: графикалық, аналитикалық ҳәм санлы усыллар қолланылады.

Графикалық усыллар айырым жағдайларда изленип атырған шешимниң тәртибин баҳалаўға мүмкиншилик береди. Бул усыллардың тийкарғы идеясы шешимди геометриялық жасаўлар жолы менен табыўдан ибарат. Мәселен, f(x)=0 теңлемениң шешимлерин (коренлерин) табыў ушын y=f(x) функциясының графиги жасалады. Бул графиктиң абцисса көшери менен кеслисиў ноқатлары изленип атырған шешимлери болады.

Аналитикалық усылларды қолланғанда мәселениң шешими формулалар менен аңлатылады. Дара жағдайда, егерде математикалық мәселе әпиўайы алгебралық ямаса трансцендент теңлемелерди, дифференциал теңлемелерди ҳ.т.б. шешиўден ибарат болса, онда математика курсынан мәлим болған усылларды қолланыў, қойылған мәселениң шешимин табыўға алып келеди. Тилекке қарсы, ис жүзинде бундай жағдайлар оғада сийрек ушырасады.

Ҳәзирги ўақытта қурамалы математикалық мәселелерди шешиўдиң тийкарғы қуралы санлы усыллар болады. *Санлы усыллар* дегенде, мәселелерди шешиўди санлар үстинде арифметикалық ҳәм базы бир әпиўайы логикалық әмеллерди орынлаўға, яғный ЭЕМ орынлай алатуғын әмеллерге алып келетуғын усыллар түсиниледи. Оларды қолланыўдың нәтийжелери барлық ўақытта санлы мәнислер түринде алынады. Көплеген санлы усыллар буннан көп ўақыт бурын исленип шығылған. Бирақта олар, есаплаўларды қолдан орынлағанда, тек ғана аз көлемдеги есаплаўларды талап ететуғын, әпиўайы мәселелерди шешиў ушын қолланылыўы мүмкин еди.

ЭЕМниң пайда болыўы менен санлы усыллардың тез пәт пенен раўажланыўы ҳәм практикаға енгизилиў дәўири басланды. Ҳәзирги заманғы қурамалы мәселелерди шешиў ушын бир неше миллионлаған ҳәм миллиардлаған әмеллерди орынлаў талап етиледи. Бундай көлемдеги есаплаўларды тек ғана есаплаў машиналар орынлай алады. Егерде мәселени шешиў ушын орынланыўы керек болған әмеллердиң саны мыңнан артық болмаса, онда бундай мәселени қалта ЭЕМлери микрокалькуляторлар жәрдеминде шешиў мүмкин. Егерде қойылған мәселени шешиў ушын, мәселен, миллион тәртибиндеги ҳәм оннанда көп әмеллерди орынлаў ҳәм оның үстине, мәселени қысқа ўақыт ишинде шешиў талап етилсе, онда бундай мәселени тез есаплағыш ЭЕМсиз шешиў мүмкин емес. Мәселен, суткалық ҳаўа райын болжаўға байланыслы мәселелерди бир неше саат ишинде, ракетаның траекториясын (ушыў жолын) дүзетиў мәселесин бир неше минут ишинде, метал қуйыўшы пештиң жумыс тәртибине байланыслы мәселени бир неше секунд ишинде, тез болып өтетуғын технологиялық процесслерди басқарыў мәселесин секундтың бир неше үлеслери ишинде шешиў талап етиледи.

Сондай-ақ, ҳәзирги заманғы ядролық физиканың, балластиканың (теориялық механиканың бөлими), әмелий аспан механикасының оғада үлкен ҳәм қурамалы мәселлелерин шешиўдеги жетискенликлер санлы усылларды ҳәм ЭЕМди қолланыўсыз мүмкин болмас еди.

Солай етип, ҳәзирги заманғы санлы усыллар ҳәм тез ҳәрекет етиўши ЭЕМлер, буннан ярым әсир бурын шешилиўи әрман болған мәселелерди шешиўге имканият жаратып берди. Бирақта ҳәзирги ўақытта массалық түрде қолланылып жүрген есаплаў машиналары тек санлар үстинде арифметикалық ҳәм әпиўайы логикалық әмеллерди ғана орынлай алады.

Сонлықтан мәселениң математикалық модельин жасағаннан соң, барлық есаплаўларды арифметикалық ҳәм логикалық әмеллердиң избе-излигине алып келетуғын, есаплаў алгоритмин дүзиў талап етиледи. Модельди ҳәм есаплаў алгоритмин қолда бар ЭЕМниң тезлигин ҳәм ядының көлемин есапқа алып таңлаў керек: егер модель оғада қурамалы болса, онда алгоритмди иске асырыўға машинаның күши жетпеўи, ал оғада әпиўайы болса, шешим керекли дәллик пенен алынбаўы мүмкин.

7-§. Есаплаў алгоритми

Дәслепки берилген объектти математикалық модельлестириў ҳәм есаплаў тәжирийбеси (ЕТ) усылы менен изертлеў сөзсиз жуўық характерге ийе болады. Өйткени бул усылдың ҳәр бир басқышында анаў ямаса мынаў түрдеги қәтеликлер пайда болады. Мәселен, математикалық моделин жасаў дәслепки қубылысты әпиўайыластырыў менен, теңлемениң коэффициентлериниң ҳәм басқа да басланғыш мағлыўматлардың жеткиликли дәл берилиўмеўи менен байланыслы. Бул модельди иске асыратуғын санлы усылға қарата көрсетилген қәтеликлер жоқ етиўге (сапластырыўға) болмайтуғын қәтеликлер болады. Себеби олар берилген модель шегарасында сөзсиз пайда болатуғын қәтеликлер.

Мәселениң математикалық модельинен санлы усылға өткенде усылдың қәтеликлери келип шығады. Олардың пайда болыўы ҳәр қандай санлы усылдың дәслепки математикалық модельди жуўық түрде сәўлелендириўине байланыслы. Санлы усылдың қәтеликлери дискретлестириў қәтелиги ҳәм дөңгелеклеў қәтелиги болып, екиге бөлинеди (“дискретлик” сөзи латынның “discretus” деген сөзинен алынған болып, бизиңше “үзликли”, “бөлинген” деген мәнислерди аңлатады). Бундай қәтеликлердиң пайда болыў себеплерин түсиндиремиз.

Әдетте берилген математикалық модель ушын санлы усылды жасаў еки этаптан турады: а) дискретлестирилген (үзликли) мәселениң қәлиплестирилиўи; б) дискретлестирилген мәселениң шешимин табыўға мүмкиншилик беретуғын есаплаў алгоритмин ислеп шығыў. Мәселен, егерде дәслепки математикалық мәселе дифференциал теңлемелериниң системасы түринде қәлиплестирилген болса, онда санлы усыл менен шешиў ушын оны сызықлы ямаса сызықлы емес алгебралық теңлемелериниң шекли системасы менен алмастырыў керек. Бул жағдайда дәслепки математикалық мәселени дискретлестириў орынланды деп атайды. Дискретлестириўдиң әпиўайы мысалы, дифференциал аңлатпаларын шекли айырмалар қатнаслары менен алмастырыў жолы менен, айырма схемаларын жасаўға болады. Улыўма жағдайда, дискретли модельге дәслепки математикалық мәселениң шекли өлшемли кеңисликтеги сәйкеслиги (аналоги) деп қараўға болады. Сонлықтан дискретлестирилгенмәселениң шешими дәслепки мәселениң шешиминен парқ қылады. Бул шешимлердиң айырмасы дискретлестириў қәтелиги деп аталады. Әдетте дискретли модель базы бир дискретлестириў параметрлеринен ямаса бундай параметрлердиң көплигинен ғәрезли болады. Бул параметр ямаса олардың көплиги нольге умтылғанда дискретлестириў қәтелиги де нольге умтылыўы керек. Бул жағдайда дискретли модельди дүзетуғын алгебралық теңлемелердиң саны шексиз өседи. Айырмалар усыллары жағдайларында бундай параметр тордың адымы болады. Солай етип, дискретли модель көп сандағы алгебралық теңлемелердиң системасы болады. Бундай системаның шешимин дәл табыў мүмкин емес. Сонлықтан алгебралық теңлемелердиң системаларын шешиўдиң анаў ямаса мынаў санлы усылынан пайдаланыўға туўра келеди. Бул системаның басланғыш мағлыўматлары, яғный коэффициентлери ҳәм салтаң ағзалары ЭЕМге дәл берилмейди, ал дөңгелекленип бериледи. Есаплаў алгоритмниң орынланыў барысында, әдетте дөңгелеклеў қәтеликлери жыйналып барылады. Нәтийжеде, ЭЕМнен пайдаланып табылған шешим дискретлестирилген мәселениң дәл шешиминен парқ қылады. Бул шеимлердиң айырмасы дөңгелеклеў қәтелигиниң шамасы мына еки нәрсе менен анықланады: ҳақыйқый санларды ЭЕМге жазыўдың дәллиги ҳәм қолланылған алгоритмниң дөңгелеклеў қәтеликлерине сезимталлығы менен.

Егерде есаплаў алгоритмниң орынланыў барысында дөңгелеклеў қәтелиги аз шамаға өссе, онда бундай алгоритм турақлы (орнықлы) деп, ал кери жағдайда, турақлы емес алгоритм деп аталады. Турақлы емес есаплаў алгоритмлеринен пайдаланғанда, есаплаў процессинде дөңгелеклеў қәтеликлериниң жыйналып барылыўы ЭЕМниң арифметикалық қурылмасының толып кетиўине алып келеди, яғный машина есаплаўларды тоқтатады.

Солай етип, ЭЕМнен пайдаланып математикалық мәселлерди шешкенде модельдиң, усылдың ҳәм дөңгелеклеў (есаплаў) қәтеликлери менен ушырасамыз. Бул қәтеликлердиң қайсысы басқаларынан басым келеди? деген саўал туўады. Бул сораўға бир мәнисли жуўап бериў мүмкин емес. Бирақта әмелий мәселелерди турақлы алгоритмлерди қолланып ЭЕМде шешкенде, модельдиң қәтелиги усылдың қәтелигинен артық, ал дөңгелеклеў қәтелиги усылдың қәтелиги менен салыстырғанда есапқа алмастай киши болатуғын жағдайлар көбирек ушырасады. Улыўма жағдайда, бул қәтеликлердиң бирдей тәртипте болыўына умтылыў керек. Мәселен, егерде дәслепки берилген дифференциал теңлемелериниң коэффициентлери $\varepsilon = 10^{-2}$ дәллиги менен берилген болса, онда дискретли модельге өтиў ушын дәллиги $\varepsilon = 10^{-2}$ болған айырмалар схемаларынан пайдаланыў мақсетке муўапық келеди.

8-§. Санлы усылларға қойылатуғын талаплар

Бир математикалық мәселеге ҳәр қыйлы дискретли (үзликли) модельлердиң көплигин сәйкес келтириўге болады. Бирақта олардың барлығы иске асырыў ушын жарамлы бола бермейди. Сонлықтан тез ҳәрекет етиўши ЭЕМлер ушын арналған есаплаў алгоритмлери ҳәр қыйлы ҳәм айырым жағдайларда бир-бирине қарама-қарсы келетуғын талапларды қанаатландырыўлары керек болады.

Санлы усылларға қойылатуғын талаплар еки үлкен топарға бөлинеди. Биринши топардағы талаплар дискретли модельдиң дәслепки математикалық мәселеге уқсас (адекватлы) болыўы, ал екинши топардағы талаплар-санлы усылды ЭЕМде иске асырыў менен байланыслы.

Биринши топардағы талапларға санлы усылдың жыйнақлылығы, сақланыў нызамларының дискретли сәйкеслериниң орынланыўы, дискретли мәселениң шешиминиң сапа жағынан дурыс минез-қулқы сыяқлы талаплар киреди.

Бул талапларды түсиндиремиз. Мейли математикалық мәселениң дискретли модели көп сандағы алгебралық теңлемелердиң системасынан ибарат болсын. Әдетте, шешимди қаншелли дәлирек анықлаў керек болса, бул системада соншелли көп теңлемелерди алыў керек. Егерде системадағы теңлемелердиң санын шексиз арттырғанда дискретли мәселениң шешими дәслепки математикалық мәселениң шешимине умтылса, онда санлы усыл жыйнақлы болады деп аталады.

Бирақта ЭЕМнен пайдаланып тек шекли сандағы теңлемелер системасын ғана шешиў мүмкин болғанлықтан, ис жүзинде бундай жыйнақлылықты әмелге асырыў мүмкин емес. Сонлықтан дискретли модельди дүзген теңлемелердиң санына байланыслы санлы усылдың қәтелигин баҳалаў үлкен әҳмийетке ийе. Усы себепли дискретли модельди, ҳәтте ондағы теңлемелердиң саны салыстырмалы аз болғанда да, ол дәслепки мәселениң шешиминиң минез-қулқын сапа жағынан дурыс сәўлелендиргендей етип, жасаўға ҳәрекет етеди.

Мәселен, математикалық физиканың мәселесиниң дискретли модели айырма схемасы болыўы мүмкин. Бул схеманы жасаў ушын ғәресиз өзгериўшилердиң өзгериў областы ноқатлардың дискретли көплиги менен тор менен, ал дәслепки теңлемедеги туўындылар торда шекли айырмалар қатнаслары менен алмастырылады. Нәтийжеде изленип атырған функцияның тордың түйинлериндеги мәнислерине қарата алгебралық теңлемелердиң системасына ийе боламыз. Бул системадағы теңлемелердиң саны тордағы түйинлердиң санына тең болады. Математикалық физиканың дифференциал теңлемелери интеграллық нызамларының салдары болатуғыны мәлим. Сонлықтан айырма схемасы ушын бундай сақланыў нызамларының сәйкесликлериниң орынланыўын талап етиў тәбийғый нәрсе. Бул талапты қанаатландыратуғын айырма схемалары консервативлик айырма схемалары деп аталады. Тордың түйинлериниң саны тең болғанда консерватив айырма схемалары консерватив емес схемаларға салыстырғанда, дәслепки мәселениң шешиминиң минез-қулқын дурысырақ сәўлелендиретуғыны анықланған.

Санлы усылдың жыйнақлылығы, оның корректлиги менен тығыз байланыслы (“корректли” атамасы латынның “correctus” деген сөзинен алынған болып, бизиңше “сыпайы”, “әдепли” деген мәнислерди аңлатады). Мейли дәслепки математикалық мәселе корректли қойылған болсын, яғный оның шешими бар, шешим бирден-бир ҳәм дәслепки берилген мағлыўматлардан үзликсиз ғәрезли болсын. Сонда бул мәселениң дискретли модели, оның корректлик қәсийети сақланғандай етип жасалыўы керек. Солай етип, санлы усылдың корректлилиги түсинигине сәйкес келетуғын алгебралық теңлемелериниң системасының бир мәнисли шешимге ийе болыў ҳәм оның дәслепки мағлыўматлар бойынша турақлы болыў қәсийетлери киреди. Бул жерде теңлемелер системасының турақлылығы дегенде, оның шешиминиң дәслепки берилген мағлыўматлардан (коэффициентлеринен, салтаң ағзаларынан) үзликсиз ғәрезли болыўы түсиниледи.

Санлы усылларға қойылатуғын екинши топардағы талаплар берилген дискретли модельди қолымызда бар ЭЕМде иске асырыў мүмкиншилиги менен, яғный белгили ўақыт ишинде сәйкес келетуғын алгебралық теңлемелериниң системасының шешимин ЭЕМде алыў мүмкиншилиги менен байланыслы. Корректли алгоритмди иске асырыўдағы тийкарғы иркинши ЭЕМниң тез ядының көлеминиң ҳәм оның есаплаў ўақтының шекленгенлиги болады. Ҳақыйқый есаплаў алгоритмлери усы жағдайларды есапқа алыўы, яғный олар орынланатуғын арифметикалық әмеллердиң саны ҳәм машинаның ядының талап етилетуғын көлеми бойынша қолайлы болыўлары керек.

Жуўмақлаў

Жумыстың I бабында Евклид кеңислиги тийкарғы түсиниклери, вектор, скаляр, норма, векторлық мүйеш, скаляр көбейме, бирлик вектор, түйинлес матрица, торанспонирленген матрица, унитарлық, ортогоналлық матрицалар түсиниклери берилген. Меншикли мәнислер деп аталған параграфта меншикли мәнис анықламасы, меншикли вектор түсиниги, уқсас түрлендириў, характеристикалық көпағзалылық түсиниклери берилген.

3-§ та өз-өзине түйинлес матрицалар түсиниги, 2,3,4 тастыйықлаў, есели меншикли мәнислер, сәўлелендириўши матрица түсиниклери берилди.

4-§ та квадратлық формалар, конгруэнтлик сәўлелендириў, Сильвестр теоремасы, матрица инерциясы, 6,7,8,9 тастыйықлаўлары берилген. 5-§ та матрицалық нормалардың түрлери, олар арасындағы байланыслар тастыйықлаўлар менен берилген.

Есаплаў алгоритми деп аталған параграфта есаплаў тәжирийбеси, математикалық моделлестириўдиң әҳмийети, санлы усыл қәтеликлериниң пайда болыў себеплери, санлы усылларды жасаў этаплары ҳ.т.б. сөз етилген.

8-§ та санлы усылларға қойылатуғын талаплар жыйнақлылығы, корректлилиги мәселелери сөз етилди.

II-Бап. Симметриялы проблемаларға байланыслы алгоритмлер

Кирисиў

1958-жылға шекем QR ҳәм QL алгоритмлерине уқсас ҳеш қандай есаплаў усыллары болмасада, олар пайда болғаннан соң киши симметриялық матрицалардың барлық меншикли мәнислерин табыўда ең нәтийжели усыл есабында тез танылды. Дәслеп избе-из сәўлелендириў жәрдеминде толық матрица үш диагоналлық формаға келтириледи, соңынан QL-алгоритм диагоналлық емес элементлерди итибарға алынбаслықтай дәрежеде киши шамаға шекем тез киширейтеди. Алгоритмниң ҳәр бир адымында жетерли қурамалы болған уқсас түрлендириў жүргизиледи ҳәм нәтийжеде диагоналлық матрицаға жыйнақлы болатуғын матрицалар избе-излигин пайда етеди. Буннан басқа үш диагоналлық форма сақланып қалынады.

Бул түрлендириў, атап айтқанда B матрицасын ортогонал-үшмүйешлик жайылыўларға тийкарланған болып, ал бул жайылыў болса Грам-Шмидттиң ортогоналластырыў процессиниң матрицалық формулировкасы болып, ол бағаналарға қолланылған. Егерде бағаналар $b_1, b_2, ..., b_n$ тәртибинде алынса, онда B матрицасын $B = Q_R R$ аңлатпасы менен көрсетемиз, бунда R оң (ямаса жоқарғы) үшмүйешлик матрица, ҳәм $Q_R^* = Q_R^{-1}$ болады.

Егерде бағаналарды керисинше тәртипте $b_n, b_{n-1}, ..., b_1$ избе-излигинде алынса, онда нәтийже $B = Q_L L$ түринде болады, бундағы L – шеп (ямаса төменги) үшмүйешлик матрицасы ҳәм $Q_L^* = Q_L^{-1}$ болады.

Бул алгоритмлердиң ашылыўына тосқынлық жасаўшы күшли психологиялық иркиўши фактор, бул жайылыўдың қыйыншылығы болса керек. Биракта Q_R ҳәм Q_L ортонормалласқан матрицалар қаншама көп қолланылмағаны менен анық түрде ҳеш қашан есапланбайды. QR ҳәм QL түрлендириўлери қәлеген квадратлық матрицалары ушын анықланған. Сонлықтан айырым жағдайларда матрицаның симметриялық қәсийетлеринде пайдаланбаймыз.

Мейли B матрицасы берилген болсын ҳәм басланғыш жылжыў деп аталыўшы σ сколяры берилген болсын. $B-\sigma$ матрицасының ортогоналлық көбеймелерге ҳәм шеп үшмүйешликлерге жайылыўын қарастырамыз.

$$B-\sigma = QL \tag{1.1}$$

Q, L ҳәм σ бойынша B матрицасын анықлаймыз. QL-B матрицасының түрлендириўи болып, төмендеги формулалар менен анықланады.

$$\begin{aligned} \overline{B} &\equiv LQ+\sigma \\ &= Q^{*}(B-\sigma)Q+\sigma \\ &= Q^{*}BQ \end{aligned} \tag{1.2}$$

Себеби $Q^{*}=Q^{-1}$. $\overline{B}$ матрицасының B матрицасынан қандай тәрепинен жақсы екени түсиниксиз; ҳеш қандай ноллик элементлери онда пайда болмады. Соған қарамастан басланғыш жылжыўға ийе QL алгоритми $B \to \overline{B}$ түрлендириўин қатал түрде қайталай береди.

k=1,2,…, ушын ҳәм берилген $\{\sigma_k\}$ избе-излиги ушын төменде талқыланатуғын шәртлеринде көремиз:

1. $\theta_k-\sigma_k$ матрицасының Q_kL_k матрицалы QL- жайылыўын табыў керек.

2. $B_{k+1}\equiv Q_k^{*}B_kQ_k$ матрицасын анықлаў керек.

B_k матрицаларының барлығы бир-бирине ортогонал уқсас. B_{k+1} ҳәм B_k матрицалары арасындағы байланыс төмендегише:

$$
\begin{aligned}
B_{k+1} &= Q_k^* B_k Q_k \\
&= Q_k^* (Q_{k-1}^* B_{k-1} Q_{k-1}) Q_k \\
&\quad \dots \\
&= P_k^* B_1 P_k ,
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

бунда $P_k \equiv Q_1 Q_2 \dots Q_k$ (1.4)

ортонормалласқан матрицалардың көбеймеси ҳәм нәтийжеде ортонормаллық болады.

QR – түрлендириўиде дәл усындай анықланады, бирақта (1.1) аңлатпада QL матрицасын QR менен алмасланады. (1.2) аңлатпадағы Q ҳәм $\overline{B}$ матрицалары әлбетте өзгеше болады.

Егерде $B = A = A^*$ теңлиги орынланса, онда симметриялық сақланып қалынады, себеби бизиң түрлендириўимиз бир ўақыттың өзинде конгруэнтлик ҳәм уқсас болады.

$\overline{A}$ матрицасының диагоналы үстиндеги ноллик элементлердиң сақланатуғынын Q ҳәм L матрицаларының түриниң өзи ақ көрсетеди.

Ал, диагонал асты элементлериниң өз-ара көбейтиўлер нәтийжесинде нолге айланатуғынлығы $\overline{A}$ матрицасының симметриялығынан болады. Матрицаның үш диагоналлық форманы түрлендириўлерден соң сақлап қалыўы жүдә баҳалы қәсийети болады. Q_k матрицасының бундай үш диагоналлық форманы сақлап қалыўы жүдә әжайып қәсийет.

1-§. Меншикли мәнистиң улыўмаласқан мәселеси

Табийғый илимлердиң көпшилик бөлимлеринде пайда болатуғын мәселелеринде өзлерине еки квадратлық форманы киргизеди. Мысал ушын механикада U(t) базы бир системаның аўҳалын белгилеўи мүмкин болса, $\dot{U}$ - ўақыт бойынша оның туўындысын, $\dot{U}^* Mu$ - оның кенетикалық энергиясын, ал $U^* Au$ - аңлатпасы болса оның потенциаллық энергиясын аңлатады.

Физиканың нызамлықлары саны тастыйықлайды, егерде сыртқы күшлер болмаса, онда U шамасының ҳақыйқый аўҳалы бул энергиялардың қатнасын минимумластырады. Нәтийжеде еки А ҳәм М квадратлық формалы мәселелерде тийкарғы функцияны Релл қатнасы болып, ол $U \neq 0$ ушын

$$\rho(U) = \rho(U; A, M) = \frac{U^* Au}{U^* Mu} \text{ (М-оң анықланған)} \qquad (1.1)$$

формуласы менен анықланады.

Бул жерде ρ шамасы z точкасында базы бир λ скаляры ушын стационарлық болады, сонда тек ғана, егерде

$$(A - \lambda M)z = 0 \qquad (1.2)$$

теңлиги орынланса.

(λ, z) жуплығын жуп квадратлық форма ушын, ямаса (А, М) түйини ушын *меншикли жуплық* деп атаймыз. 8-тастыйықлаўы $\rho(U, A, M)$ ушын өзиниң ҳақыйқатлығын сақлайды, егерде ямаса А, ямаса М, ямаса $\alpha A + \mu M$ базыбир комбинациясы оң анықланған болса. Буннан былай биз М матрицасы оң анықланған деп есаплаймыз.

Бул мәселеге қолайлы орталық болып енди E^n кеңислиги емес, ал сколяр көбеймесине ийе M^n кеңислиги болып, ол ζ^n (ямаса R^n) кеңислигин аңлатады ҳәм онда сколяр көбейме

$$(x, y) = y^* M^{-1} x \quad \text{ямаса} \quad (x, y) = y^* Mx \qquad (1.3)$$

түринде киргизилген.

Узынлық ҳәм мүйеш қусаған I баптың (1.2), (1.4), (1.5) қатнаслары менен анықланатуғын тийкарғы фундаменталлық шамалар таза мәнисти қабыл етеди, егерде әдеттеги Евклидликке (1.3) скаляр көбеймеси қабылланса, бирақта спектраллық теорема ҳәм 3-параграфтың көпшилик үлеси оң анықланған М матрицасы менен (А, М) түйинине ғана тийисли болады.

Абстракт түрде айтатуғын болсақ, бул мәселе стандартлық меншикли мәнис проблемасынан ҳеш қандай айырмашылыққа ийе болмайды (бир скаляр көбейме екиншисинен ҳеш қандай жаман емес), бирақта практикада M шамасының қатнасыўы мәселени қурамалыластырады ҳәм оның шешилиў баҳасының артыўына алып келеди.

2-§. Үш мүйешли жайылыўлар

Үшмүйешли теңлемелер системасын сондай себеп бенен аңсат шешиўге болады, ондағы белгисизлерди биринен соң екиншисин избе-из жоғалтыў арқалы, егерде теңлемелерди дурыс тәртипте сайлап алынса. Бул болса сондай фактке үлкен мәнис береди, көпшилик квадратлық матрицалар үшмүйешлик матрицалардың көбеймеси түринде сүўретлениўи мүмкинлиги жағынан. Мысал ушын

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 \\ 8 & 26 & 28 \\ -4 & -6 & -27 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{D}{\begin{bmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{bmatrix}}$$

Бул жерде ноллик элементлер орны бос көрсетилген. B матрицаның алдынғы үлес матрицалары төмендегише болады:

$$B_1 = [4], \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 26 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = B$$

Бул көринис квадратлық матрицаны үшмүйешли жайылыўы еди.

Теориялық көз қарастан D ҳәм U матрицаларын DU көбеймесинен ажыратыў қолайлы болады.

Сызықлы алгебралық теңлемелер системасын шешиў ушын стандартлық Гаусс усылын матрицаның коефициентлерин үшмүйешли жайылыў сыпатында, есаплаў процесси сыпатында қараған бәршесинен жақсы болады. Белгисизлерди жоқ етиўдеги зәрүрли көбеймелер L матрицасының тийкары болады, ал нәтийже болса DU матрицасы болады.

Усы жайылыў жәрдеминде Bx=b толық системасын тиккелей шешиў еки үшмүйешли теңлемелер системасын шешиўге алып келеди.

Bx=b системасын шешиў алгоритми:

1. B=LDU (Үшмүйешли жайылыў).
2. LC=B системасынан C элементин табыў (Туўры қойылыўы).
3. (DU)x=C системасынан x элементин табыў (Кери қойылыўы).

Булардың бәри киши өлшемдеги матрицалар ушын керек.

Сондай B матрицаларыда бар болып, онда 1-адымды орынлаў мүмкин болмайды. Бундай матрицалар әлбетте әжеп тәўир болмайды ямаса нормадан бир қанша аўысыўғада ийе болмаўы мүмкин. Олардың ең әпиўайыларынан

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

матрицасы болады. Бул мысал сондай ойға алып келеди, A матрицасының қатарларын қайтадан тәртиплестиргеннен соң, оны үшмүйешли жайылыў мүмкин болмайды. Ҳақыйқатында да, егерде A айнымалы болмаса, онда сондай тәртиплестириўди табыўға болады, бирақта ол симметриялықты бузады.

Практикада үшмүйешли жайыўға мүмкиншилигин орнатыўдың ең жақсы усылы – оны есаплаўға урыныў болады ҳәм процесстиң, үзилиске ийе болатуғынына ямаса болмайтуғынына исениў керек. Теориялық жумысларда үшмүйешлик жайылыўлар кепилленген шәртлерди билген пайдалы болады; соның менен бирге L ҳәм U матрицаларын диагоналлық элементлерине 1 мәнисин берип нормалластырған қолайлы.

Үшмүйешлик жайылыўға тийкарланыўға жататуғын теорема B матрицасының баслаўшы үлес матрицаларын пайдаланады. Олар B_j белгиси менен белгиленеди ҳәм олар жоқарыда параграф басында көрсетилген. D-симметриялы емес ҳәрип болғанлықтан биз оны буннан кейин Δ менен алмаслаймыз. Тилекке қарсы U- симметриялы ҳәрип болып, оны биз L^* ҳәриби менен алмастырамыз.

Теорема LDU. Егерде j=1,2,…,n-1 ушын $\det B_j \neq 0$, болса, онда бир мәнисли анықланған нормалластырылған сондай L, Δ, U үшмүйешли көбейтиўшилери бар болады, онда $B = L\Delta U$ болады. Керисинше, егерде $j \leq n-1$ ушын $\det B_j = 0$ болса, онда жайылыў бар болмаўыда мүмкин; егерде ол жайылыў бар болса, онда көбейиўшилер ҳақыйқый мағанада анықланбаған болады.

Ескертиўлер.

1. $\det B = 0$ болыўына жол қойылады. n-1 рангли айнымалы матрицалар үшмүйешли жайылыўлардың болыўына жол қойыўыда мүмкин ямаса жол қоймаўыда мүмкин.

2. Егерде $A = L\Delta U$ болса, онда $U = L^*$, себеби $A^* = A$ болады.

3. Егерде А оң анықланған болса, онда $A = L \Delta L^*$ болады ҳәм Δ олда оң анықланған болады. Жайылыўды төмендеги түрде жазыўға болады

$$A = (L\Delta^{1/2})(L\Delta^{1/2})^* \equiv C^* C,$$

бундағы $C \equiv \Delta^{1/2} L^*$ матрицасы А матрицасының *Холесский көбеймеси* деп аталады. С матрицасын жағдайларда А ның квадратлық көрени депте аталады, сондай болсада бул терминди $X^2 = A$ теңлемесиниң бирден-бир оң анықланған симметриялы шешимине бекитиў керек болады.

4. Егерде А- ленталық матрица болса, онда L де ленталық структуралы матрица болады; бул болса, егерде $|i-j| > m$ болғанда $a_{ij} = 0$ болса, онда $i - j > m$ болғанда $l_{ij} = 0$ болады. Мысалы:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

m саны А матрицасының ярым ени.

5. Айырым жағдайларда үшмүйешли жайылыўдың болклық формасы пайдалы болады. Блоклы матрицаларды ақыл менен қолланыў (яғный элементлери өз гезегинде матрицалар болатуғын матрицалар) көп үнемлеўди береди. Мысалы, егерде B_{11} - кери матрицаға ийе болса, онда

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ B_{21}B_{11}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & B_{11}^{-1}B_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

бунда $B_{22} = B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}$.

Айырым жағдайда B_{22} матрицасы B_{22} матрицасының *Гаусслық түрлендириўи* деп аталады, айырым жағдайда *Шура толықтырыўы* деп аталады.

Үшмүйешли жайылыў – сондай пайдалы қурал болып, оны биз буннан былай үйренемиз.

Толық матрица жағдайында L, Δ, ҳәм U матрицаларын сақлаў ушын $n \times n$ өлшемли массивтен пайдаланыў керек болады. Егерде орын алмаслаў болмаса лентаның ени сақланып қалады. Лента ишинде болса толықтырыў болыўы мүмкин. A матрицасы лenталық болғанда ҳәм лентаның ярым ени m болғанда L ҳәм Δ ушын көпшилик жағдайда $n \times (m+1)$ өлшемли әдеттеги массивти қолланады. Үлкен өлшемдеги кесимге ийе әдеттегидей нолик емес элементлери жайласқан матрицалар ушын берилгенлердиң арнаўлы структуралы талап етилиўи мүмкин.

Төмендеги кестеде еки әҳмийетли жағдайда зәрүрли арифметикалық әмеллердиң саны көрсетилген.

Матрица типи	Бөлиў	Көбейтиў ҳәм қосыў	n→0
Улыўма көринистеги $n \times n$ толық матрица	$\frac{1}{2}n(n-1)$	$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$	$\frac{1}{3}n^3$
Симметриялы ярым ени m болған $n \times n$ матрица	$m(n-m) + \frac{1}{2}m(m-1)$	$\frac{1}{2}m(m+1)(n-m) + \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$	$\frac{1}{2}m(m+1)$

$O(n^3)$ процесстен (улыўма жағдайда) $O(n)$ процесске шекемги (жиңишке лентaлы симметриялы матрицалар) драматикалық эволюция сонны көрсетеди, кесилгенлик структурасы алгоритмниң эффективлилиги ушын үлкен әҳмийетке ийе болады. Егерде A - үш диагоналлы матрица болса, онда $A^{-1}u$ аңлатпасын есаплаў Au аңлатпасын есаплаўдан азғантай көплеў әмелге ийе болады. “Толтырыў” проблемасы үлкен дыққатты өине тартты ҳәм айрықша областқа айналды ҳәм оны *кесилген матрицалар технологиясы* деп аталады. Қәлеген матрицалық түрлендириўдеги “Толтырыў”лар дәслепки ўақытлары ноллерден ибарат болса, ал түрлендириўлерден соң ноллик емес элементлерден ибарат көплик болады.

3-§. Спектрлерди бөлиў

Қәлеген алдын-ала берилген σ ҳақыйқый санынан киши болатуғын A матрицасының меншикли мәнислериниң санын анықлайтуғын жақсы усыллар бар. Нәтийже пүтин сан болғанлығы себепли, бул усыл машиналық дөңгелеклеўлердиң майда жумысларынан қутқаратуғындай болады; бул исенимниң қандай дәрежеде ақланатуғынын биз төменде изертлестирип көремиз. Теориялық физика бойынша қәнийгелер узақ ўақытлардан бери, атап айтқанда 1950-жыллардың басынан бери бул методты қолланып келмекте.

Бул метод Сильвестрдиң инерция ҳаққындағы теоремасының нәтийжеси болып, W матрицасының конгруэнтлик түрлендириўдеги терис меншикли мәнислериниң $\nu(W)$ санының инвариантлығын орнатады. Метод туўрыдан-туўры меншикли мәнислердиң $A-\lambda M$ улыўмаласқан проблемасына жол қойыўы үлкен әҳмийетке ийе.

Теорема. Мейли, $A-\sigma M$ үшмүйешли $A-\sigma M = L_\sigma \Delta_\sigma L_\sigma^*$ жайылыўына ийе болсын, бунда Δ_σ - диагоналлық, ал M оң анықланған матрица. Сонда

$$\nu(\Lambda - \sigma I) = \nu(A - \sigma M) = \nu(\Delta_0),$$

теңликлери орынлы, бунда $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, ал $\lambda_i - (A, M)$ жуплығының меншикли мәнислери.

Дәлиллениўи. $L_\sigma -$диагоналлары бирге тең төменги үш мүйешли матрица болғанлықтан, ол кери матрицасына ийе ҳәм нәтийжеде, $A-\sigma M$ матрицасы Δ_σ матрицасына конгруэнтли болады. Онда [6] жуп квадратлық формаларды бир ўақытта келтириў ҳаққындағы теоремасы бойынша кери матрицасына ийе F матрицасы бар болып

$$F^*(A - \sigma M)F = \Lambda - \sigma I$$

теңлиги орынланады, сонлықтан $A - \sigma M$ матрицасы $\Lambda - \sigma I$ матрицасына конгруэнтлик болады. Теореманың тастыйықлаўы Сильвестрдиң инерция ҳаққындағы теоремасынан келип шығады. Сильвестр теоремасын конгруэнтлик диагоналлы $\Lambda-\sigma I$ ҳәм Δ_σ матрицаларына қолланғаннан кейин келип шығады. Бир тәрептен $\nu(\Delta_\sigma) - \Delta_\sigma$ матрицасының диагоналындағы терис элементлердиң саны. Екинши тәрептен, $\nu(\Lambda - \sigma I) - (A, M)$ түйинининиң σ санынан киши меншикли мәнислериниң саны.

Δ_σ ҳәм $\nu(\Delta_\sigma)$ санларын есаплаўлар соны көрсетеди, σ қандай етип спектрди еки үлеске бөледи. $\nu(\Delta_\sigma)$ аңлатпасын (ямаса $\pi(\Delta_\sigma)$, егерде оң мәнислерди қәлейтуғын болсаңыз) спектрдиң бөлиўшиси деп атаймыз.

3.1. Үш диагоналлы жағдай

Бул әҳмийетли қосымшада L ҳәм Δ элементлери өзлерин сақлаўды талап етпейди. Тек ғана рабочий ядтың бир ячейкасы ғана талап етиледи.

Келеси көрсетпелер ушын процедураның толық тәрийплениўин келтиремиз. Мейли α-диагоналлық элементлерди сақласын, γ - диагоналлық емес элементлердиң квадратларын сақласын, δ - қосымша ячейка, ал σ-сайланған точка (ямаса басланқыш ҳалдан жылжыйтуғын болсын). Мақсет соннан ибарат, $\nu = \nu[A - \sigma]$ мәнисин есаплаў керек.

Басы: $\delta \leftarrow \alpha_1 - \sigma,$

$$\nu \leftarrow \begin{cases} 1, & \textit{егерде} \quad \sigma < 0 \quad \textit{болса}, \\ 0, & \textit{кери} \quad \textit{жагдайда} . \end{cases}$$

Цикл: k=2,…,n ушын орынла

$$\begin{cases} \delta \leftarrow (\alpha_k - \gamma_{k-1} / \delta) - \sigma, \\ \textit{егерде} \quad \delta = 0 \ \textit{болса}, \ \textit{онда} \quad \delta \leftarrow \varepsilon(|\alpha_k| + |\sigma| + \varepsilon, \\ \textit{егерде} \quad \delta < 0 \ \textit{болса}, \ \textit{онда} \quad \nu \leftarrow \nu + 1. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Ҳақыйқатында, мен $\delta = 0$ жағдайында σ мәнисин азы-кем өзгертип ҳәм процессти тағы қайтадан жүргизген болар едим.

3.2. Бөлеклеў дәллиги

Ерикли симметриялы А матрицасы ушын $A - \sigma$ айырмасын қарастырамыз, бундағы σ ҳақыйқый санлар көшеринде өзгереди. LDU теоремасы соны көрсетеди, үшмүйешли жайылыў бар болмайды сонда ҳәм тек ғана сонда, егерде бир ямаса бир неше баслаўшы бас $A_k - \sigma$ үлес матрицалары айнымалы болса. Бөлеклеў ҳаққындағы Коши теоремасы бойынша [6], A_k матрицасының $\lambda_i^{(k)}$ меншикли мәнислери A_{k+1} матрицасының меншикли мәнислерин бөлеклейди. $A_n = A$ екенлигин аңғарыў мүмкин. Нәтийжеде σ ның ҳәр қыйлы болыўы шәрт болмаған мәнислеринен $A - \sigma$ айырмасы $L \Delta L^*$ жайылыўына жол қоймаўы ушын $\sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)/2$ қатнасы бар болады. Егерде σ усы мәнислердиң дөгерегиндеги қандайда бир киши интервалына дерек болса, онда жайылыў дөңгелеклеў нәтийжесинде орнықлы болмайды.

Не ушын А матрицасын төмендеги блоклық түрде көрсетилиўин түсиниў ушын:

$$A = \begin{bmatrix} V & C^* \\ C & M \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

σ параметри базы-бир $\lambda_j[V]$ меншикли мәнислери менен бетлеседи деп есаплайық. Бул бетлесиў дәслепки р мәнисли онлық ханалардағы цифрларда болады. Онда жайылыў процессиндеги ушырасатуғын келтирилген матрицалардың биреўинде

$$M = M - \sigma - C(V-\sigma)^{-1}C^{*} \tag{3.3}$$

қатнасы орынланады ҳәм σ параметриниң мәниси V матрицасының меншикли мәниси жүдә жақын болғанлықтан

$$\|(V-\sigma)^{-1}\| > 10^{P} / |\lambda_j[V]| > 10^{P} / \|A\| \tag{3.4}$$

$\|C\| \approx \|A\|$ қатнасының орынлы болыў итималлығы бар ҳәм егерде тек өз-ара сәтли жоқ етиўлер болмаса,

$$\|C(V-\sigma)^{-1}C^{*}\| \approx 10^{P}\|A\| \tag{3.5}$$

қатнасыда орынлы болады.

σ параметри ушын $n(n-1)/2$ қәўипли орынларының бар екенлигин ескертиледи. (Атап айтқанда A_j, $j = 1, ..., n-1$ бас үлес матрицаларының меншикли мәнислери). $A-\sigma$ үш мүйешлик жайылыўында сәтсизликтиң болыўы итималлығы жүдә үлкен емес. Бул болса мына әпиўайы стратегияны келтирип шығарады. Егерде $A-\sigma$ жайылыўында элементлердиң көзде тутылмаған өсиўи бақланса, онда σ мәнисин 0,01% ке өзгертиў керек болады ҳәм бастан қайталаў керек болады.

Есапланған L_σ ҳәм Δ_σ көбейтиўшилери

$$L_\sigma \Delta_\sigma L_\sigma^{*} = (A-\sigma) - H_\sigma \tag{3.6}$$

қатнасын қанаатландырады ҳәм сонлықтан үшмүйешли жайылыўда спектрлердиң бөлиниўи дөңгелеклеўлер қәтеликлерине сезимтал болмайды, егерде

$$\nu(A - H_\sigma - \sigma) = \nu(A-\sigma) \tag{3.7}$$

қатнасы орынланса.

Егерде элементлердиң өсиўи жүз бермесе, онда H_σ мәниси жүдә киши болады. А менен салыстырғанда ҳәм бөлистириў сондай жақсы нәтийжелерди береди, есаплаўлар дәллиги қаншама мүмкиншилик бергенше. Бирақта V шамасының еки мәниси сол ўақытта бирдей болыўы-бетлесиўи мүмкин, егерде H_σ элементлери киши болмаса. Солай етип, дәл емес үшмүйешли жайылыў бөлистириўдиң дәл емеслигин билдирмейди. Екинши тәрептен, дурыс есаплаўлардың нәтийжелеринде атап өтемиз. Манотонлық ҳаққында Вейл теоремасы бойынша [6]

$$\left|\lambda_j[A - H_\sigma] - \lambda_j[A]\right| \le \|H_\sigma\|, \quad j=1,\dots,n \tag{3.8}$$

Нәтийжеде, егерде

$$\nu(A - H_\sigma - \sigma) \ne \nu(A - \sigma) \tag{3.9}$$

болса, онда

$$\|H_\sigma\| > \min_j \left|\lambda_j[A] - \sigma\right|$$

Спектрди бөлиў нәтийжесинде меншикли мәнислерди локалластырыў-жеккелестириў мүмкин болатуғындағы дәллик жүдә төмен қанаатландырады, егерде базыбир i ҳәм j ларда бир-бирине жүдә жақын $\lambda_i[A]$ ҳәм $\lambda_j[V]$ меншикли мәнислери бар болса, бундағы V - (8.2) аңлатпадағы матрица.

3.3. Бөлистириў процедурасының сәтсизлиги

Δ_σ шамасын есаплаўдың еки ҳәр қыйлы бир-биринен ажыралып турыўшы усыллары бар. Соның ең тәбийғыйсы $U = L^{-1}A$ аңлатпасын есаплаўдан ибарат болып, онда элементлерди жоқ етиў жолы ҳәм соң диагоналлық элементлерди пайдаланыў турады. Бирақта егерде А матрицасы компактлық формада сақланатуғын болса, онда U ушын орын болмаўыда мүмкин; бул жағдайда А матрицасының элементлери

$$a'_{ij} \leftarrow a_{ij} - \sum_{k=1}^{\min(i,j)-1} l_{ik}\delta_k l_{jk}$$

формуласы бойынша модификациаланады. Төмендеги мысалда бул еки усыл арасындағы айырмашылықлар жүдә үлкен екенин көрсетеди. Бул қаралып атырған мысалда есаплаўлар еки еселенген дәлликте жылжып жүриўши үтир менен жүргизилди.

<u>Мысал.</u>

$$\begin{bmatrix} 1.0E+0 & 2,8E-2 & 1.0E+1 & 1,5E+1 & 1.0E+0 & 1.0E+1 \\ 2,8E-2 & 2,7E+1 & 2,7E+1 & 1,3E+1 & 2,7E+1 & 2.0E+0 \\ 1.0E+1 & 2,7E+1 & 1,3E+2 & 1,9E+1 & 2,8E+1 & 1,2E+1 \\ 1.5E+1 & 1.3E+1 & 1,9E+1 & -3,0E+2 & -8,7E+1 & 2,8E+1 \\ 1.0E+0 & 2.7E+1 & 2,8E+1 & -8,7E+1 & 2,7E+1 & 1,2E+1 \\ 1.0E+1 & 2.0E+0 & 1,2E+1 & 2,8E+1 & 1,2E+1 & 1,0E+1 \end{bmatrix} = A$$

LU-методика бойынша жайылғаннан алынған Δ_σ ҳәм L шамаларын $L(L\Delta)^*$ методикасы бойынша есаплаўлардан алынған Δ_σ ҳәм L шамаларын салыстырып көремиз.

LU-методика бойынша нәтийжелер:

$$\Delta_\sigma = (1.0E+0, \quad 2,6E+1, \quad 8,5E-7, \quad \underline{2,4E+11}, \quad 1,5E+1, \quad 1,4E+2)$$

$$\nu(\Delta_\sigma) = 1$$

$$A - LU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4,9E+2 & 6,4E+1 & -1,1E+2 \\ 0 & 0 & 0 & -8,4E+1 & -2,9E+0 & 1,2E+1 \\ 0 & 0 & 0 & -4,3E+2 & 3,2E+0 & -4,8E+2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1.0E+0 & & & & & \\ 2,8E-2 & 1.0E+0 & & & & \\ 1.0E+1 & 1.0E+0 & 1.0E+0 & & & \\ 1.5E+1 & 4.8E-1 & -1,7E+8 & 1,0E+0 & & \\ 1.0E+0 & 1.0E+1 & -1,1E+7 & 6,2E-2 & 1,0E+0 & \\ 1.0E+1 & 6.6E-2 & -1,1E+8 & 6,2E-2 & \underline{\underline{6,0E+1}} & 1,0E+0 \end{bmatrix}$$

А матрицасының меншикли мәнислери

$$(-3,3E+2, \quad -5,9E+0, \quad 1,1E+1, \quad 1,7E+1, \quad 5,0E+1 \quad 1,5E+2)$$

$$\sigma = -8,5E-6.$$

$L(L\Delta)^*$ ***методикасы бойынша нәтийжелер:***

$$\Delta_\sigma = (1.0E+0,\quad 2,6E+1,\quad 8,5E-7,\quad \underline{-2,4E+10},\quad 1,8E+1,\quad -2,3E+1)$$

$$\nu(\Delta_\sigma) = 2$$

$$A - L(L\Delta)^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4,9E+2 & 6,4E+1 & -1,1E+2 \\ 0 & 0 & 0 & 3,9E+1 & 9,0E-1 & 7,3E+0 \\ 0 & 0 & 0 & -4,3E+2 & 3,1E+0 & -4,8E+2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1.0E+0 & & & & & \\ 2,8E-2 & 1.0E+0 & & & & \\ 1.0E+1 & 1.0E+0 & 1.0E+0 & & & \\ 1.5E+1 & 4.8E-2 & -1,7E+8 & 1,0E+0 & & \\ 1.0E+0 & 1.0E+0 & -1,1E+7 & 6,2E-2 & 1,0E+0 & \\ 1.0E+1 & 6.6E-2 & -1,1E+3 & 6,2E-1 & \underline{\underline{4,8E+0}} & 1,0E+0 \end{bmatrix}$$

Мейли $\chi_j(\tau)$ арқалы A матрицасындағы бас баслаўшы $(i \times j)$ үлес матрицасының характеристикалық көп ағзалысын белгилейик. Сонда $\chi_1(\tau) = \tau - a_{11}$ болады. $\chi_0(\tau) = 1$ болсын. $\{\chi_0, \chi_1, ..., \chi_n\}$ көпағзалыларының избе-излигин бөлиў ҳаққындағы Коши теоремасы бойынша яғный қоңсылас көпағзалылардың ниллери бир-бирин өз-ара ажыратады. $\{\chi_0, \chi_1, ..., \chi_n\}$ көпағзалыларының избе-излиги Штурм избе-излиги болады. Дәлиллеўлер сонны көрсетеди, $\{\chi_j(0),\quad j = 0,1,...,n\}$ санлы избе-изликлериниң қоңсылас ағзаларының белгилериниң бетлесиў (бирдей болыў) саны $\sigma^{(2),(3)}$ тен киши χ_n көпағзалысының ноллериниң санына тең болады.

Улыўма түрдеги A матрицасы ушын, $\chi_j(\sigma)$ *ны* $\chi_i(\sigma)$. $i < j$ бойынша есаплаў усылы жоқ, бирақта егерде A матрицасы үш диагоналлы болса онда үш ағзалы жақсы белгили реккурентлик қатнасы бар

$$\chi_{j+1}(\sigma) = (\sigma - a_{j+1,\,j+1})\,\chi_j(\sigma) - a_{j+1,\,j}^2\,\chi_{j-1}(\sigma), \qquad (3.10)$$

Бул қатнаслар σ-дан киши болған меншикли мәнислердиң санын есаплаўда қолланылады.

Егерде $A-\sigma = L\Delta L^{*}$ үшмүйешли жайылыў болса, онда

$$(-1)^{j}\chi_{j}(\sigma)=\delta_{1},...,\delta_{j}=\det\Delta_{j},\ \ j=1,...,n, \qquad \delta_{j}=-\chi_{j}(\sigma)/\chi_{j-1}(\sigma) \tag{3.11}$$

Солай етип, $\{\chi_{j}(\sigma)\}$ избе-излигинде белгилердиң бетлесиўине $\{\delta_{j}\}$ избе-излигиндеги терис мәнислер сәйкес келеди. Биракта δ_{j} рационаллық функциялары χ_{j} көпағзалысына характери бойынша салыстырғанда жайлырақ, сонлықтан оларды шекли дәлликли есаплаўларда есапқа алыў керек болады. Машиналық ноллерге ҳәм толып кетиў мүмкиншилигине байланыслы проблемалар әпиўайыласады, егерде (3.10) аңлатпасының орнына үшмүйешли жайылыўларды пайдалансақ.

Штурм избе-излигинде (яғный (3.10)) турақлы таяныш санлы анализ шегарасында ленталық матрицаларға спектрлерди бөлиў методының ҳәм меншикли мәнистиң улыўмаласқан проблемасына қолланылыўын иркти.

Айырым авторлар спектрди бөлиўди *Штурм избе-излиги методы* депте атайды.

4-§. Жасырын меншикли мәнислер

(3.11) аңлатпасы бойынша, $A-\sigma$ жайылыўыда соңғы бас элемент $-\chi_{n}(\sigma)/\chi_{n-1}$ шамасына тең ҳәм сонлықтан χ_{n} қандай ноллерге ийе болса олда сондай ноллерге ийе болады. Нәтийжеде, кесимлер методын ҳәм оның қәлеген вариантын $\delta_{n}(\sigma)$ рационаллық бенен бирге $\chi_{n}(\sigma)$ функциясын белгили болғанн $\delta_{i}(\sigma),\ i=1,...,n$ бас элементлери менен есаплаў ушын зәрүрли болған n-1 көбейтиў әмеллеринен қутыламыз. χ ны δ ға алмаслаўды туўры сызықлы жол менен әмелге асырсақ мына қызықлы ҳәдийсени көз астымыздан аңсат ғана сезбей қалыўымыз мүмкин.

λ саны χ_0 функциясының жақсы ажыратылған әпиўайы ноли болыўы мүмкин, соның менен бирге $\chi_{n-1},$ $\chi_{n-2},$ $\chi_{n-3},$ ҳәм т.б. Көпағзалылардың базы бириниң ноллериниң биреўине жүдә жақын болыўы мүмкин.

Басқаша сөз бенен айтсақ, $|\chi'_n(\lambda)|$ шамасы жүдә үлкен болғанда, усы ўақытқа $|\chi_{n-1}(\lambda)|$ шамасы жүдә киши болады. Нәтийжеде сол болады, λ ға жақын жайласқан дерлик барлық σ мәнислери ушын полюс функциясы болатуғын δ_n шешимди нейтралластырады ҳәм соның менен λ мәнисинде нолди жасырады. Бул жағдайда мына шешимге келиў мүмкин; λ ның дөгерегинде ғазийнени табыў мүмкин емес.

Уилкинсон әжайып мысалды дүзди. Ол төмендеги қатнаслары менен анықланатуғын үш диагоналлы W_{21} матрицасы еди.

$$w_{ii} = 11 - i, \qquad i = 1,\ldots, 21,$$
$$w_{i,i+1} = w_{i+1,i} = 1, \qquad i = 1,\ldots, 20,$$

Ең үлкен меншикли мәнис $\lambda_{21}(=10{,}746\ldots)$ 20-тәртипли бас үлес матрицаның ең үлкен меншикли мәниси менен дәслепки он бес ханасында бетлеседи. $\delta_{21}(\tau)$ шамасының графиги -20 шамасына [10, 11] интервалының барлық жеринде жақын болады, бирақта λ_{21} мәниси орайы болған, ени 10^{-13} шамасынан киши үлес интервалда болса бундай болмайды. Көпшилик есаплаў машиналарында бул критикалық интервал сезилмейди.

Сонны атап өтиў керек, W_{21} шамасы ең үлкен матрица болып қалмайды. Егерде 3-§ теги алгоритмди кери бағдарда жүргизсек (k ушын k=n, …, 2), онда жаңа $\delta(\sigma)$ шамасы ушын λ_{21} мәниси жасырын болмайды ҳәм аңсат табылады. Биз бул жерде соны ескерткимиз келди, практикада базыбир рационаллық функциялар өзиниң ноллерин қызыўшы көзлерден жасырады.

Егерде χ_A көпағзалысы берилген болса ямаса аңсат жол менен табылған болса, онда матрицалық мәселе көпағзалының барлық ямаса базыбир ноллерин есаплаўға байланыслы классикалық мәселеге алып келинеди. Бул ўақытта биз есаплаў усыллары пәнинде үйренилген көпағзалының ноллерин табыў усылларының бирин қолланып мәселени шешиўимиз мүмкин.

Бирақта егерде тек А матрицасы берилген болса, онда χ_A көпағзалысының коэффициентлерине сезимтал функция болады. Егерде n=300 болса (матрица ушын орташа көрсеткиш) онда барлық ноллерди үтирден соң еки ханалы дәлликте есаплаўларда коэффициентлердиң дәллигин үтирден соң қанша алыў керeклиги анық болмайды. Сол себепли буннан соң χ_A шамасының коэффициентлерин қарастырмаймыз.

Басқа тәрептен $\chi_A(\sigma)$ шамасын үш мүйешли жайыў арқалы қанаатландырарлы дәрежеде есаплаў мүмкин.

5-§. Ортогоналлық матрицалар

Анықлама. F ҳақыйқый матрицасы *ортогоналлық* деп аталады, егерде

$$F^*F = FF^* = 1$$

қатнасы орынланса.

F матрицасының ортогоналлығы *меншикли* деп аталады, егерде detF=+1 болса.

Ортогоналлық анықламасын мына тастыйықлаў сыпатында да түсиндириўгеде болады: F матрицасының бағаналары жуп-жуптан ортонормаллы ҳәм сондай-ақ жолларыда ортонормаллы.

Егерде F ҳақыйқый матрицасы ушын

$$F^* = F^{-1}$$

теңлиги орынланатуғын болса, онда F матрицасы ортогоналлық болады, ал усындай түрлендириўди, F матрицасы жәрдеминде жүргизилетуғын, *ортогоналлық конгруэнция* ямаса *ортогоналлық уқсаслық* деп аталады.

Келеси адымымыз ортогоналлық матрицаларды пайдаланыўда жеңил классларды излеўден ибарат. Олар қәлеген ортогоналлық матрицаны әпиўайы ортогоналлық матрицалардың көбеймеси сыпатында көрсетип алыўға болатуғын жеткиликли бай имканиятларға ийе.

6-§. Тегис айландырыў

Матрицалық түрлендириўде, оны E^2 кеңислигинде саат стрелкасына қарсы θ мүйешке бурады ҳәм ол төмендеги аңлатпа менен анықланады:

$$R(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$$

R аңлатпасы менен еки тийкарғы мәселелер байланысқан:

1. Сондай θ мәнисин табыў керек, берилген $b = (\beta_1,\ \beta_2)^*$ мәнислеринде $R(\theta)b = e,\mu$ болатуғын болсын. Буның шешими $tg\theta = -\beta_2\ \beta_1$ теңлемеси менен бериледи.

2. Сондай θ шамасының мәнисин табыў керек $R(\theta)AR(-\theta)$ - диагоналлық матрица болатуғын болсын. $0 \le \theta < \pi$ шәртин қанаатландыратуғын еки шешими $ctg2\theta = (a_{22} - a_{11})/2a_{12}$ теңлемесинен табылады.

n-өлшемли кеңисликте $R(i,\ j,\theta)$ тегис айландырыў пайдаланып, ол *(i, j)* тегисликти бурады, яғный e_i ҳәм e_{j} базислердеги тегисликти θ мүйешке бурады, ал усы тегисликтеги ортогоналлық қосымшалар болса өзгериссиз қалады. Солай етип, $R(i,\ j,\theta)$ түрлендириўи

$$r_{ij} = r_{ji} = \cos\theta, \qquad -r_{ij} = r_{ji} = \sin\theta \qquad (i < j)$$

элементлеринен басқасын бирлик матрица менен бирдей қылады. Тегисликти айландырыў меншикли ортогоналлық матрицалар класын дүзеди ҳәм I матрицасыда оған киреди. Ҳәрбир $R(i,\ j,\theta)$ айландырыўы элементар матрица болады.

Жоқарыда атап өтилген бир мәселениң мысалы сыпатында b берилген векторын e_1 есели векторына тегис айландырыўлардың избе-излигиниң қуралы жәрдеминде түрлендириўи болады. Мына төмендеги избе-изликлердиң ҳәр бири бул түрлендириўге жарайды:

$$R(1,\ n,\ \theta_n)\dots R(1,3,\theta_3)\ R(1,2,\theta_2)b = e_1\mu$$
$$R(1,\ 2,\ \varphi_2)\dots R(1,\ n-1,\ \varphi_{n-1})\ R(1,n,\varphi_n) = e_1\nu$$

бунда $|\mu| = |\nu| = \|b\|$.

$$\underset{R(3,5,\theta)^*}{\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & c & & s & \\ & & & 1 & & \\ & & -s & & c & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} * & * & a'_{13} & * & a'_{15} & * \\ * & * & a'_{23} & * & a'_{25} & * \\ a'_{31} & a'_{32} & a''_{33} & a'_{34} & a''_{35} & a'_{36} \\ * & * & a'_{43} & * & a'_{45} & * \\ a'_{51} & a'_{52} & a''_{53} & a'_{54} & a''_{55} & a'_{56} \\ * & * & a'_{63} & * & a'_{65} & * \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & c & & -s & \\ & & & 1 & & \\ & & s & & c & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

бундағы

* - элемент өзгерген,

a' - элемент бир рет өзгерилди,

a'' - элемент еки рет өзгерилди, ноллер көрсетилмеди.

Тегисликлердиң басқада бундай избе-изликлери болыўы мүмкин. Улыўма жағдайда ҳәр бир избе-излик b векторын $\pm e_1\|b\|$ шамасына түрлендиретуғын өзиниң орогоналлық түрлендириўин пайда етеди. Бул шешимлер еки сәўлелендириў менен конкурент болады. 2-мәселе еки вариантқа ийе.

Якоби айландырыўы.

Сондай θ шамасының мәнисин табыў керек, $R(i,\ j,\theta)AR(i,\ j,-\theta)$ матрицасындағы $(i,\ j)$ ҳәм (j,i) элементлери нол болатуғын.

Гивенс түрлендириўи.

Сондай φ шамасын табыў керек, $R(i,\ j,\varphi)AR(i,\ j,-\varphi)$ матрицасындағы (k,l) ҳәм (l,k) элементлери нолге тең болатуғын.

Түрлендириўде тек i ҳәм j қатарлары өзгериске ушырайтуғынлықтан, онда $(i,\ j)$ жуплығының бир индекси (k,l) жуплығының бир индекси менен бирдей болыўы керек.

Якоби өзиниң айландырыўын 1846-жылы қолланды, бирақта Гивенс сәўлелендириўи ҳәм айландырыўы болса 1950-жыллары пайдаланыўға усынылды. Көпшилик жағдайларда Якоби айландырыўына қарағанда Гивенс айландырыўы пайдалырақ. Якоби айландырыўының өзине тән жери содан ибарат, берилген $i,\ j$ мәнислеринде мүмкин болған барлық айландырыўларының ишинен θ айландырыўы диагоналлық емес элементлердиң квадратларының суммасын ең аз болыўын тәмийнлейди.

Әмеллер саны мыналардан ибарат.

Егерде $B' = R(i,\ j,\theta)B$ болса, онда

$$b'_{ik} = b_{ik}\cos\theta - b_{jk}\sin\theta = \cos\theta(b_{ik} - b_{jk}tg\theta),$$
$$b'_{jk} = b_{jk}\sin\theta + b_{jk}\cos\theta = \cos\theta(b_{ik}tg\theta + b_{jk})$$

барлық k ушын. Бул операция 4n көбейтиў әмеллерин талап етеди. Усындай сан RAR^{-1} матрицасын жаратыўда да алынады, егерде симметриялық қолланылса.

7-§. Үш диагоналлық форма

Биз бул параграфта ерикли симметриялы A матрицасын үш диагоналлық матрицаға уқсас T матрицасына түрлендириў мәселелерин, соның менен бирге T матрица ийе болатуғын спектраллық қәсийетлери ҳаққындағы сораўларды қарастырамыз.

Анықлама. T матрицасы үш диагоналлы деп аталады, егерде $|i-j|>1$ болғанда $t_{ij} = 0$ болса.

Белгилеўлерди әпиўайыластырыў ушын $t_{ii} = \alpha_i$, $t_{i,i+1} = \beta_i$ (айырым жағдайда $t_{i,i+1} = \beta_{i+1}$ деп) етип белгилеп жазыў пайдалы ҳәм

$$T_{\mu,\nu} = \begin{bmatrix} \alpha_\mu & \beta_\mu & & & & \\ \beta_\mu & \alpha_{\mu+1} & \beta_{\mu+1} & & & \\ & \beta_{\mu+1} & & & & \\ & & & & \alpha_{\nu-1} & \beta_{\nu-1} \\ & & & & \beta_{\nu-1} & \alpha_\nu \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

<u>Анықлама.</u> $T\ (= T_{1n})$ матрицасы жайылмайтуғын деп аталады, егерде $\beta_i \neq 0,\quad i = 1,\ldots,\ n-1$ болса.

Егерде қандайда бир k мәнисинде $\beta_k = 0$ болса, онда Т матрицасы еки-үш диагоналлық матрицаларын туўры қосындысы болады, атап айтқанда k тәртипли T_1 матрицасының ҳәм n-k тәртипли T_2 матрицаларының қосындылары сыпатында қаралады. Т матрицасының меншикли мәнислери ҳәм меншикли векторлары T_1 ҳәм T_2 матрицаларының меншикли мәнислери ҳәм меншикли векторларынан аңсат алынады. Солай етип, есаплаўларды жайылмайтуғын үш диагоналлы матрицалардан кишкентай матрицалардың меншикли мәнислерине ҳәм меншикли векторларына алып келинеди. Сонлықтан, биз буннан былай матрицалардың жайылмайтуғын жағдайлары менен шегаралансақ көп нәрсени жоғалтпаймыз.

Мына факторлар тийкарғы есапланады:

1. Т матрицасының меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын А толық матрицасының меншикли мәнислери ҳәм меншикли векторларын есаплаўларға қарағанда аз сандағы арифметикалық есаплаўлар арқалы ерисиўге болады.

2. Қәлеген А матрицасын оған уқсас болған Т матрицасына шекли сандағы элементар ортогоналлық уқсас түрлендириўлер жәрдеминде келтириўге болады. Ал матрицаны диагоналлық түрге келтириў ушын негизинде шексиз сандағы түрлендириўлер талап етилиўи мүмкин.

3. Егерде Т матрицасы жайылмайтуғын болса, онда оның меншикли мәнислери ҳәр қыйлы болады (айырым жағдайларда жүдә жақын

болыўыда мүмкин), ал оның меншикли векторлары базы бир пайдалы болған арнаўлы қәсийетлерине ийе болады.

Үш диагоналлы матрицалардан барлық ўақытта нәтийжели пайдаланыўға ерисиле берилмейди. Матрица қаншама диагоналының ени киши болса, онда меншикли мәнислерин ямаса меншикли векторларын толық есаплаў ушын үш диагоналлы түрге басқа методлар менен келтириўде есаплаўлар баҳасыда сонша артады.

Ерикли А матрицасын үш диагоналлы Т матрицасына келтириўдиң бир неше усыллары бар. Бирақта олардың қандайда биреўин толық талықлаўдан алдын, жуўмақлаўшы Т матрицасы қандай дәрежеде методтан ғәрезли болатуғынын шешип алған мақул. Бул сораўға төменде келтирилетуғын теорема жуўап береди, бирақта оны келтирместен алдын базы бир қосымша тәртиплестириўлер зәрүр.

Лемма. Мейли Т матрицасы жайылмайтуғын болсын ҳәм мейли T_+ матрицасы Т матрицасындағы ҳәр бир β_i элементин $|\beta_i|$, $i=1,...,n-1$ элементине алмаслаў арқалы алынған болсын.

Сонда

$$T_+ = \Delta T \Delta = \Delta T \Delta^{-1}, \tag{7.2}$$

бунда $\Delta = diag(\delta_1, ..., \delta_n)$, ҳәм $\delta_i = \pm 1$

Лемма соны көрсетеди, $\beta_i > 0$, $i=1,...,n-1$ деп есаплаўға болатуғынын.

Теорема. Мейли $Q^* AQ = T_+$ болсын, бунда Q-ортогоналлық матрицасы. Сонда T_+ ҳәм $Q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ матрицалары бирден-бир жол менен А ҳәм q_1 векторы арқалы ямаса А ҳәм q_n векторы арқалы анықланады.

Дәлилллениўи. $Q^* = Q^{-1}$ болғанлықтан, онда теорема бойынша

$$QT_+ = AQ \tag{7.3}$$

теңлемесин жазыў мүмкин. Енди (7.3) теңлемесиниң еки жағдайындағы j-бағаналарды теңлестиремиз. Бунның ушын, T_+ матрицасының j-бағанасы нолден өзгеше үш элементке ийе екенлиги ҳаққындағы жағдайдан пайдаланамыз ҳәм ағзалардың орнын алмастырымыз. Нәтийжеде жүдә әҳмийетли қатнасына ийе боламыз:

$$q_{j+1}\beta_j = Aq_j - q_j\alpha_j - q_{j-1}\beta_{j-1} = r_j \qquad (7.4)$$

Егерде $\beta_0 = \beta_n = 0$ деп алсақ, онда бул теңлиги j-диң барлық $j = 1, ..., n$ мәнислери ушын орынланады. Солай етип, $r_n = 0$ ҳәм q_0, q_{n+1} шамалары анықланбаған. Буннан соң Q матрицасының ортогоналлығынан пайдаланып, яғный $q_i^* q_k = \delta_{ik}$ (δ – Кронекер символы) формасынан пайдаланып мына қатнасларын аламыз:

1. $0 = q_j^*(q_{j+1}\beta_j) = q_j^* Aq_j - 1 \cdot \alpha_j - 0 \cdot \beta_{j-1}$,
2. $\beta_j = \|q_{j+1}\beta_j\| = \|r_j\|$,
3. $q_{j+1} = r_j / \beta_j$,

себеби жол қойыўымыз бойынша $\beta_j > 0$.

Солай етип, β_{j-1}, q_{j-1} ҳәм q_j шамалары α_j, r_j, β_j ҳәм q_{j+1} шамаларын көрсетилген тәртипте $j = 1, 2, ..., n$ ушын анықлайды. $\beta_0 = 0$ болғанлықтан, онда α_1, r_1, β_1 ҳәм q_2 шамалары тек q_1 шамасы арқалы анықланады. Нәтийжеде шекли индукция жолы менен q_1 шамасы T ҳәм Q матрицаларының барлық элементлерин бир мәнисли анықлайды.

(7.4) теңлигин төмендегише жазып

$$q_{j-1}\beta_{j-1} = Aq_j - q_j\alpha_j - q_{j+1}\beta_j \equiv \bar{r}_j$$

β_j, q_{j+1} ҳәм q_j шамалары $\alpha_j, \bar{r}_j, \beta_{j-1}$ ҳәм q_{j-1} шамаларын анықлайтуғынын көрсетиўимизге болады. $\beta n = 0$ болғанлықтан, онда q_n шамасында T_+ ҳәм Q матрицаларын бир мәнисли анықлайды.

Ҳәр қандай A матрицасын әпиўайы ортогоналлық уқсас түрлендириўлердиң избе-излигиниң жәрдеминде үш диагоналлы T матрица түрине әкелиўге болады. Биринши адым процесс ушын әдеттегидей болады ҳәм жүдә әпиўайы тәрийпленеди, егерде A матрицасы төмендегише клеткаларға бөлекленген болса:

$$A = A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1^* \\ c_1 & M_1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_1 = a_{11}$$

Енди (1,1) елементин өзгериссиз қалдыратуғын A_1 матрицасын түрлендириўши ерикли уқсас ортогоналлық түрлендириўди қарастырамыз:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0^* \\ 0 & P_1^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1^* \\ c_1 & M_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^* \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1^* P_1 \\ P_1^* c_1 & P_1^* M_1 P_1 \end{bmatrix}$$

Ҳәр қандай $P_1^* c_1 = e_1 \beta_1$ қатнасын қанаатландыратуғын ортогоналлық P_1 матрицасы, биринши бағансы үш диагоналлық $\overline{A_1}$ матрицасына алып келеди. P_1 матрицасы ортогоналлық болғанлықтан, онда

$$|\beta_1| = |e_1 \beta_1| = \|P_1^* c_1\| = \|c_1\|$$

Төменде P_1 ушын еки әмелий таңлап алыў усыллары бериледи. P_1 матрицасы таңлап алынса, онда A_2 матрицасы деп аталыўшы $P_1^* M P_1$ шамасы анық түрде есапланады. Бул адым-алгоритмниң тийкары болғанлықтан, методтың нәтийжелилиги ушын оның баҳасы шешиўши мәниске ийе болады. Биринши көз қарастан бул жерде еки матрицалық көбейтиўлер болады, ал бул болса $2(n-1)^2$ әмеллерди талап етеди. Бирақта биз буннанда жақсы нәтийжелерди аламыз.

Екинши адымда усы әмеллер төмендеги матрицасына қолланылады:

$$P_1^* M_1 P_1 \equiv A_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & c_2^* \\ c_2 & M_2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 : (n-1) \times (n-1),$$

A_2 - матрицасы n-1 тәртипке ийе, P_2 ортогоналлық матрицасын $P_2^* c_2 = e_1 \beta_2$ қатнасы орынланатуғындай етип сайлап алынады, соң $A_3 = P_2^* M_2 P_2$ матрицасын есаплаўға болады.

Екинши адымдағы уқсас түрлендириў биринши адымда алынған ноллик элементлерди сақлаўы шешиўши жағдай болады. Буны мына төмендеги үш матрицаның көбеймесинде көриўимизге болады:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0^* \\ 0 & 1 & 0^* \\ 0 & 0 & P_2^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0^* \\ \beta_1 & \alpha_2 & c_2^* \\ 0 & c_2 & M_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0^* \\ 0 & 1 & 0^* \\ 0 & 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

Есаплаў процесси даўам етеди, матрица үш диагоналлық түрге келтириледи, қысқартылады ҳәм соңында, n-2 адымнан соң T матрицасы алынады.

Тағы бир жағдайды атап өтиўимиз керек:

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0^* \\ 0 & P_{n-2}^* \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0^* \\ 0 & P_1^* \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0^* \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_2 & 0^* \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0^* \\ 0 & P_{n-2} \end{bmatrix} = Q^* A Q,$$

Q матрицасы төмендегише анықланған:

$$Qe_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0^* \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0^* \\ 0 & P_{n-2} \end{bmatrix} e_1 = e_1$$

Өзинде P_i матрицасын услайтуғын n-2 ортогоналлық түрлендириўши көбейменің бирден-бирлиги ҳаққындағы усы параграф басындағы тоерема бойынша P_i, $i = 1,..., n-3$ матрицаларын ҳәр қыйлы таңлап алыў мүмкиншиликлерине қарамастан бир мәнисли анықланады.

Егерде A- толық матрица болса ҳәм тез ҳәрекетлениўши ядта сақланатуғын болса, онда P ушын $Pc = e_1 \beta$ шәртин қанаатландыратуғын мүмкин болған таңлап алыў, сәўлелендириў матрицасы болады.

$$P = H(w) = 1 - \gamma ww^*, \quad \gamma = 2 / w^* w,$$

болса $w = c + \beta e_1, \quad \beta = \|c\| sign(e_1^* c).$

Бул таңлап алыў еки қатнаста сезилерли пайданы береди. Бириншиден, P матрицасы еки өлшемли матрица сыпатында керек емес; ол w векторы арқалы анықланады, ал w векторы c векторынан тек өзиниң биринши элементи арқалыажыралып турады. Солай етип, қосымша $n \times n$ массиви талап етилмецди.

Екиншиден, $H(w)MH(w)$ түриндеги уқсас түрлендириўлер жоқары нәтийжелилик пенен орынлаўы мүмкин. $(j \times j)$- өлшемли H массивин толтырып, соңынан $2j^3$ санлы сколярлық көбеймели еки матрицалық көбеймени орынлаў жансызлық болады. Оның орнына H-тың әпиўайы матрица екенлигинен пайдаланып, оны төмендегише жазамыз:

$$\begin{aligned}HMH^* &= (I-\gamma ww^*)M(I-\gamma ww^*) = M-\gamma w(w^*M)-\gamma(Mw)w^*+\gamma^2 w(w^*Mw)w^* = \\ &M-w\rho^*-\rho w^*+(\gamma w^*\rho)ww^*,\end{aligned} \qquad (*)$$

бунда $\rho = \gamma M w$.

ρ векторының сәтли киргизилиўи орынланатуғын әмеллердиң санын $3j^2$ көбейтиўге шекем қысқартады. Бирақта Уилкинсонға тийисли тағы бир әжайып әмел бар болып, ол программа дүзиў әмелиятында үлкен әҳмийетке ийе. $\gamma w^*\rho = \gamma^2 w^*Mw$ мәниси ҳақыйқый болады, сонлықтан (*) аңлатпасындағы төртинши ағзаны екинши ҳәм үшинши ағзалар арасында төмендегише бөлистириўге болады.

$$q = \rho - w(\gamma w^*\rho)/2$$

шамасын есаплаймыз, соңынан

$$HMH = M - wq^* - qw^*.$$

Есаплаўлар тәртиби ҳәм әмеллер саны төмендеги кестеде келтирилген.

Есаплаўлар	w	γ	ρ	$w^*\rho$	q	$M-wq^*-qw^*$	Барлығы
Әмеллер саны	0	j	j(j+1)	j	j	j^2	2j(j+2)

Үш диагоналлық түрге келтириўдиң ҳәр бир адымында j диң тәртиби бир-бирликке азайады.

Әмеллердиң улыўма саны

$$\sum_{j=2}^{n-1} 2j(j+2) = \frac{2}{3}n^3 + n^2 + O(n)$$

шамасына тең. Квадрат коренлердиң саны (n-2) шамасына тең.

Т матрицасының меншикли мәнислери мына төмендеги леммадан басқа ҳеш қандай айырықша қәсийетлерге ийе емес.

Лемма. Жайылмайтуғын Т матрицасының барлық меншикли мәнислери ҳәр қыйлы болады.

Дәлиллениўи. $T-\xi$ матрицасында (1,n) элементи ушын, барлық ξ ушын қосымша минор $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1} \neq 0$ шамасына тең. Нәтийжеде, ранг $[T-\xi] \geq n-1$ болады ҳәм $T-\xi$ ядросының өлшеми 0 (егерде ξ меншикли мәнис болмаса) ямаса 1 (егерде ξ меншикли мәнис болса) болады. Бул болса, ҳәр бир меншикли мәнис ушын тек бир ғана меншикли векторы бар болатуғынын билдиреди. Т матрицасы ортогонал векторлардың толық системасына ийе болатуғынлықтан, онда ҳәр бир меншикли мәнистиң еселилиги бирге тең болыўы тийис.

Бул нәтийже теориялық жумыста жүдә пайдалы.

Теорема. Егерде Т матрицасы жайылмайтуғын болса, онда оның меншикли векторларының матрицасы шетки меншикли мәнислерине сәйкес келетуғын биринши ҳәм ақырғы бағаналарында ҳәмде қатарларында ноллик элементлерине ийе болмайды.

Дәлиллеиўи. [10] та берилген.

8-§. QR ҳәм QL алгоритмлери арасындағы байланыслар

QL-алгоритм QR-алгоритминиң дәслепки берилген ҳалында әпиўайы түрлендирилген усылы болады ҳәм теориялық мағанада еки усылдыда бир-биринен ажыратыўға болмайды.

Бул еки усыл арасындағы байланысты тәриплеў ушын В квадратлық матрицасының бағаналарын $b_1, b_2, ..., b_n$ тәртибинде ортонормалластырыў нәтийжесин $Q_R[B]$ арқалы белгилегенимиз қолайлы болады, ал $Q_L[B]$ белгилеўи арқалы, $b_n, b_{n-1}, ..., b_1$ кери тәртибинде бағаналарын белгилеймиз. В матрицасының қандай матрица екенлиги белгили болғанлықтан, буннан соң әпиўайы түрде Q_R ямаса Q_L деп жазамыз.

Бирлик матриcаның бағаналарын кери тәртипте тәртиплестирип алынған матрицаны $\bar{I}$ арқалы белгилеймиз. Мына қатнаслары орынлы:

$$\bar{I}^* = \bar{I}^{-1} = \bar{I}$$

$Q_R[B]$ ҳәм $Q_L[B]$ ортонормалласқан матрицалар арасында тривиаллық қатнаслары жоқ. Басқа тәрептен, егерде В матрицасының кери матрицасы бар болса, онда төмендеги лемма орынлы.

Лемма.

$$Q_L\left[\bar{I}B\bar{I}\right] = \bar{I}Q_R[B]\bar{I} \tag{8.1}$$

қатнасы орынлы.

Дәлиллениўи:

$$\begin{aligned} \bar{I}B\bar{I} &= \bar{I}Q_R[B]R_B\bar{I} \\ &= (\bar{I}Q_R[B]\bar{I}(\bar{I}R_B\bar{I})) \end{aligned} \tag{8.2}$$

R_B - жоқары үшмүйешли матрицасы болғанлықтан, (8.2)-аңлатпасының екинши қатары $\bar{I}B\bar{I}$ матрицасының бирден-бир QL-жайылыўын береди ҳәм бул лемма нәтийжесин тастыйықлайды.

Мына еки түрлендириўге ораламыз.

$$QL: B \to Q_L^* B Q_L, \qquad Q_L = Q_L[B - \sigma],$$
$$QR: B \to Q_R^* B Q_R, \qquad Q_R = Q_R[B - \sigma],$$

Лемма. Мейли $\{B_K^L\}$ ҳәм $\{B_K^R\}$- избе-изликлери сәйкес QL ҳәм QR алгоритмлери арқалы бирдей болған жылжыўлар избе-излиги жәрдеминде пайда болған болсын. Егерде $B_i^R = \bar{I}B_i^L\bar{I}$ қатнасы орынланса, онда барлық k>1 ушын

$$B_k^R = \bar{I} B_k^L \bar{I} \tag{8.3}$$

теңлиги орынлы болады.

Лемманың дәлиллениўи алдынғы лемма дәлиллениўине уқсас. Сонлықтан оны бул жерде қарастырмаймыз.

Егерде B_k^L матрицасы k→∞ умтылғанда төменги үшмүйешлик формаға жыйнақлы болса, соның менен бирге абсолют шамасы бойынша ең киши меншикли мәниси жоқарғы үшмүйешликте болса, онда B_k^R матрицасы жоқары үшмүйешлик формаға жыйнақлы болады ҳәм ең киши меншикли мәнис төмендеги үшмүйешликте болады.

Ал симметриялы матрицалар ушын ҳәм QL алгоритми ҳәм QR алгоритми диагоналлық формаға жыйнақлы болады.

Енди биз QL алгоритминиң бизге жақсы таныс болған дәрежели методы менен байланысын орнатайық. Мейли бизге A матрицасы берилген болсын ҳәм базы бир жылжыўлардың $\{\sigma_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ избе-излиги берилген болсын. QL алгоритми дәрежели метод ҳәм кери итерациялар сәйкес үш ҳәр қыйлы избе-изликлерди пайда етеди.

QL ($A_1 = A$ болғанда) : $\{A_k\}$, бунда $A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k$ ҳәм $A_k - \sigma_k = Q_k L_k$.

Дәрежели метод (v_1 – ерикли бирлик вектор) : $\{v_k\}$, бунда $v_{k+1} = (A - \sigma_k) v_k / v_k$ ҳәм $\| v_k \| = 1$.

Кери итерация (u_1 – ерикли бирлик вектор) : $\{u_k\}$, бунда $(A - \sigma_k) u_{k+1} = u_k \tau_k$ ҳәм $\| u_k \| = 1$.

Бул избе-изликлердиң сонысы қызық, v_k ҳәм u_k векторлары қолайлы етип сайлап алынса бул үш избе-изликлер өз-ара тығыз байланысқан болады. Бул байланысларды алдынғы параграфта киргизген ортогоналластырылған матрица жүргизеди, A_{k+1} ҳәм A матрицалары арасындағы байланысты тәрийплеў ушын, атап айтқанда

$$P_k = Q_1 Q_2 ... Q_k, \quad P_0 = I \tag{8.4}$$

(1.3)-аңлатпасы бойынша, $A_{k+1} = P_k^* A P_k$ болатуғынын еске аламыз.

Теорема. Мейли ҳеш бир σ_k жылжыўы A матрицасының меншикли мәниси менен бирдей болмасын. Егерде $u_1 = e_1$ ҳәм $v_1 = e_n$ болса, онда $k \geq 1$ ушын төмендеги қатнаслары орынлы

$$u_k = P_{k-1} e_1 \text{ ҳәм } v_k = P_{k-1} e_n \tag{8.5}$$

Дәлиллениўи. $A_k = P_{k-1}^* A P_{k-1}$ теңлигин мына төмендеги түрде қайта жазамыз.

$$P_{k-1} A_k = A P_{k-1} \tag{8.6}$$

Тағыда

$$\begin{aligned} P_k L_k &= P_{k-1} Q_k L_k && \text{((8.4)-аңлатпасы бойынша),} \\ &= P_{k-1}(A_k - \sigma_k) && \text{(QL-формуласы бойынша),} \\ &= (A - \sigma_k) P_{k-1} && \text{((8.6)-формуласы бойынша).} \end{aligned} \tag{8.7}$$

L_k-төменги үш мүйешли матрица екенин есапқа алып (8.7)-аңлатпадағы соңғы бағаналарды теңлестиремиз:

$$P_k e_n = (A - \sigma_k) P_{k-1} e_n / v_k, \quad v_k = e_k^* L_k e_n \tag{8.8}$$

(8.8)-избе-излиги A ҳәм $P_0 e_n$ лерди пайда ететуғын жылжыўға ийе дәрежели избе-изликти анықлайтуғынын аңғарыўға болады. Сонлықтан жоқарыда көрсетилген дәрежели метод алгоритминде $v_1 = P_0 e_n (= e_n)$ болса, онда $v_{k+1} = P_k e_n$ болады.

u_k ушында усыған уқсас қатнасын алыў ушын, онша үлкен болмаған матрицаның қатарларын бағаналарға айландыратуғын түрлендириўлер керек болады. (8.7)-аңлатпасын транспонирлеп

$$L_k^* P_k = P_{k-1}^* (A - \sigma_k)$$

қатнасын аламыз. Бул теңликтиң шеп тәрепинен P_{k-1} матрицасына, ал оң тәрепинен P_k матрицасына көбейтемиз, сонда

$$P_{k-1} L_k^* = (A - \sigma_k) P_k \tag{8.9}$$

қатнасын аламыз. L_k^*-жоқарғы үш мүйешли матрица болғанлықтан, онда

$$P_{k-1} e_1 \tau_k = (A - \sigma_k) P_k e_1, \qquad \tau_k = e_1^* L_k^* e_1 \tag{8.10}$$

$P_0 = I$ болғанлықтан, (8.10)-аңлатпасы e_1 векторынан басланатуғын жылжыўына ийе кери итерацияны анықлайды. Сонлықтан жоқарыда көрсетилген кери итерация алгоритминде $u_1 = P_0 e_1 = e_1$ болса, онда

$$P_k e_1 = u_{k+1}$$

болады.

9-§. QL алгоритминиң жыйнақлылығы

Егерде барлық k ушын жылжыўлар қолланылмаса ямаса, яғный $\sigma_k = 0$ болса, онда QL алгоритми тийкарғы деп аталады. Ол жылжыўларсыз жүргизилетуғын бир ўақыттың өзинде ҳәм туўры итерация менен ҳәм кери итерация менен байланысқан болады. Тийкарғы QL алгоритминиң жыйнақлылығын усы әпиўайы итерациялық методлардың жыйнақлылықларының жуўмағы сыпатында алыўға болады.

Теорема. Мейли A матрицасының меншикли мәнислери төмендеги теңсизликлерин қанаатландырсын

$$0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n| = \|A\|.$$

Мейли $z_i - \lambda_i$, $i = 1, n$ меншикли мәнислерине сәйкес келиўши нормалласқан меншикли вектор болсын ҳәм мейли $\{A_k\}$−избе-излиги $A_1 \equiv A$ матрицасынан алынған тийкарғы QL избе-излиги болсын. Егерде

$e_i^* z_i \neq 0, \quad i = 1, n$ болса, онда k→∞ умтылғанда

$$A_k e_1 \to e_1 \lambda_1 \qquad A_k e_n \to e_n \lambda_n \tag{9.1}$$

қатнаслары орынлы.

Дәлиллениўи. Мейли $\{u_k\}-$избе-излиги $u_1 = e_1$ қатнасынан жылжыўсыз кери итерациядан пайда болған болсын. Бул жол қойыўлар - теоремасының нәтийжесине сәйкес k→∞ умтылғанда $u_k = z_1 + O(|\lambda_1|\lambda_2|^k)$ теңлигиниң орынланатуғынына кепиллик береди. 3-§ тағы теорема бойынша

$$e_1 = P_{k-1}^*(P_{k-1}e_1) = P_{k-1}^* u_k = P_{k-1}^* z_1 = O(|\lambda_1|\lambda_2|^k)$$

(1.3)-қатнасынан пайдаланып k→∞ умтылғанда

$$\begin{aligned} A_k e_1 &= P_{k-1}^* A u_k \\ &= P_{k-1}^*[z_1\lambda_1 + O(|\lambda_1|\lambda_2|^k)] \\ &= e_1\lambda_1 + O(|\lambda_1|\lambda_2|^k) \end{aligned}$$

қатнасларын аламыз.

Дәл усындай $\{V_k\}-$дәрежели избе-излигинен пайдаланып, $A_k e_n \to e_n \lambda_n$ болатуғынын көрсетемиз.

QL ҳәм QR алгоритмлери менен жыйнақлылық ҳаққындағы еки көз-қарас өз-ара байланысқан. Қатал түрде айтсақ жыйнақлылықты базы бир шеклик матрицаға $\{A_k\}$ матрицалық избе-излигиниң жыйнақлылығын түсиниў керек болады. АЛ практикада болса, $\|A_k e_1 - e_1 a_{11}^{(k)}\|$ шамасы жеткиликли итибарға алмайтуғындай киши шама болыўдан, $a_{11}^{(k)}$ элементин меншикли мәнис сыпатында қабылланады, ал есаплаўларды болса матрицаның биринши бағанасын ҳәм биринши қатарын таслап жиберилген үлес матрицада даўам еттириледи. Басқаша айтқанда, QL ҳәм QR алгоритмлери турақлы түрде шығарып таслаўларға тийкарланған. Сонлықтан екинши көрсетиўлер $\{A_k e_1\}$ векторлық избе-излигиниң $e_1\lambda$ шегине жыйнақлылығына ғана тийисли болады.

Теоремада орнатылған нәтийже әҳмийетли, биракта жеткиликли дәрежеде жақсы нәтийже емес. Толық матрицалар ушын QL алгоритминиң ҳәр бир адымы қымбат болған n^3 әмелден турады, ал жыйнақлылық сызықлы болып, ол белгисиз коеффициентли ҳәм айырым ўақытлары жүдә жаман жыйнақлылық коеффициентли болады. Практикалық алгоритмниң күши мыналардан тамам болады: а) лентаның енин сақлаўға (ҳәр бир адымда үш диагоналлық матрица ушын O(n) әмелге шекем) ҳәм б) адымлар санын қысқартыў ушын жылжыўларды пайдаланыў.

Енди σ_k жылжыўларын сайлап алыў ҳаққындағы сораўды қарастырайық.

Тийкарғы QL алгоритми A үш диагоналлы жайылмайтуғын матрицасы ушын бир адымда-ақ жыйнақлы болады, егерде A айнымалы болса. Сонлықтан жылжыўлар меншикли мәнисти аппроксимациялайтуғын етип таңлап алынады.

Тийкарғы алгоритмниң жыйнақлылығы k→∞ умтылғанда $a_{11}^{(k)} = e_1^* A_k e_1 \to \lambda_1$ болатуғынын тәмийнлейди, сонлықтан $a_{11}^{(k)}$ элементин жылжыў сыпатында пайдаланғанымыз ақылға сай келеди. Биракта төменде талқыланатуғын жылжыўлар стратегиясы сақлықты таслап ҳәм $a_{11}^{(k)}$ элементин бастан баслап ақ жылжыў сыпатында қолланады. Ҳақыйқатында да

$$\sigma_k = a_{11}^{(k)} = e_1^* A_k e_1, \qquad k = 1,2,... \qquad (9.2)$$

σ_k жылжыўы Релл қатнасы ρ_k шамасы менен бирдей екенлиги күтилмеген ўақыя Релл итерациялық қатнасын кери итерациядан ажыратыў ушын u_k дың орнына x_k ны жазамыз.

Теорема. Егерде Релл итерациялық қатнасы $x_1 = e_1$ элементинен басланса ҳәм QL алгоритми (9.2) жылжыўын пайдаланса, онда барлық k ушын

$$\rho_k (\equiv x_k^* A x_k) = \sigma_k \qquad (9.3)$$

болады.

Дәлиллениўи. Дәслеп

$$\sigma_1 = e_1^* A_1 e_1 = x_1^* A x_1 = \rho_1$$

болады. Индукция сыпатында жол қойыўлар бойынша k=1,…,j ушын $\sigma_k = \rho_k$ деп аламыз. Сонда (8.5) теоремасы k=1,…,j ушын $P_k e_1 = x_{k+1}$ екенлигин көрсетеди. Нәтийжеде

$$\sigma_{j+1} = e_1^* A_{j+1} e_1 = e_1^* P_j^* A P_j e_1 = x_{j+1}^* A x_{j+1} = \rho_{j+1}$$

Индукция принципи бойынша нәтийже барлық k ушын орынлы. Релл итерациялық қатнасының барлық жыйнақлылық қатнасларын енди конкрет жылжыўлы QL алгоритмине байланыслы тастыйықлаўға алмасыўға болады.

Дара жағдайда, мейли $r_k \equiv (A - \rho_k) x_k$ қатнасы x_k ушын байланыссызлық векторын белгисин ҳәм мейли (9.2) жылжыўлы QL алгоритминде

$$A_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & b_k^* \\ b_k & M_k \end{bmatrix}$$

матрицасы алынған болған. Сонда $\| b_k \| = \| r_k \|$ болады. Тағыда мейли $\varphi_k =< (x_k, z_1) -$ қәтелик мүйеши болсын. Егерде k→∞ умтылғанда $\varphi_k \to 0$ болса, онда

$$\| r_k \| / |\sin \varphi_k| \to |\lambda_2 - \lambda_1| \tag{9.4}$$

φ_k дың нолге асимтотикалық кублық жыйнақлылығы $\| r_k \| (= \| b_k \|)$ қатнасын келтирип шығарады.

10-§. Үш диагоналлы QL алгоритминиң жыйнақлылығы

Мейли

$$A = T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & & \\ & & & \beta_{n-1} \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \qquad (10.1)$$

$$T - \sigma = QL, \qquad \overline{T} = Q^{*}TQ.$$

матрицасы берилген болсын. Уилкинсон бойынша ω жылжыўы – бул

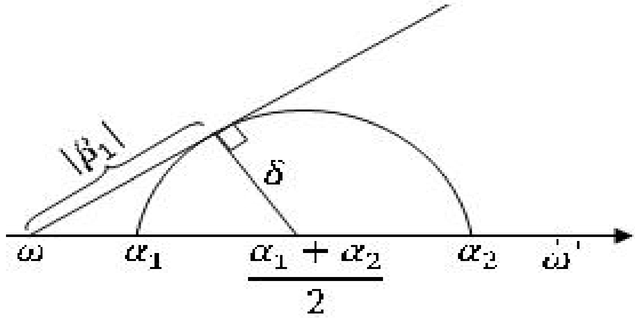
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

матрицасының α_1 элементине жақын болатуғын сол меншикли мәниси болады. $\alpha_1 = \alpha_2$ теңлиги жағдайында меншикли мәнислердиң кишисин сайлап аламыз, атап айтқанда $\alpha_1 - |\beta_1|$. Усындай жылжыў α_1 ге салыстырғанда жақсы екени айқын, егерде β_1 ямаса β_2 киши болса ω ушын формулалардың бири

$$\omega = (\alpha_1 + \alpha_2)/2 - sign(\delta)\sqrt{\delta^2 + \beta_1^2},$$

болады, бунда $\delta = (\alpha_2 - \alpha_1)/2$, бирақта төмендеги формула жақсырақ болады:

$$\omega = \alpha_1 - sign(\delta)\beta_1^2 /(|\delta| + \sqrt{\delta^2 + \beta_1^2}).$$



Уилкинсон бойынша жылжыўдың сүўретлениўи.

Бул сүўреттен көринип турғанындай

$$|\alpha_1 - \omega| \le |\alpha_2 - \omega| \qquad (10.2)$$

қатнасы орынлы болады, ал $\delta = 0$ болғанда тек ғана сонда теңлик жағдайы орынлы болады. $|\beta_1|$ шамасының $|\alpha_1 - \omega|$ ҳәм $|\alpha_2 - \omega|$ шамаларының геометриялық ортасы екенлигинен төмендеги қатнасын табамыз:

$$\frac{|\alpha_1 - \omega|}{|\beta_1|} = \frac{|\beta_1|}{|\alpha_2 - \omega|} = \sqrt{\left|\frac{\alpha_1 - \omega}{\alpha_2 - \omega}\right|} \le 1 \tag{10.3}$$

соның менен бирге теңлик сонда тек ғана орынлы болады, егерде $\delta = 0$ болса.

Бизиң мақсетимиз соннан ибарат

$$\tau = \|(T - \omega)q_1\| = 1/\|p\|$$

шамасы ушын баҳа алыў керек, бундағы p мына теңлемесинен анықланады.

$$(T - \omega)\, p = e_1 \tag{10.4}$$

Лемма. Егерде ω Уилкинсон бойынша жылжыўы T матрицасының меншикли мәниси болмаса, онда q_1 бирлик векторы $(T - \omega)q_1 = e_1\tau$ теңлемесинен анықланады ҳәм

$$\|(T-\omega)q_1\|^2 = \tau^2 \le \min\{2\beta_1^2, \beta_2^2, |\beta_1\beta_2|/\sqrt{2}\} \tag{10.4}$$

қатнасы орынлы.

Дәлиллениўи. Мейли (10.4) аңлатпасындағы p щамасы (векторы) $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$ шамаларына ийеболсын. Сонда

$$\tau^2 = 1/\|p\|^2 \le 1/(\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2) \tag{10.5}$$

қатнасы орынлы. Қолайлылық ушын $\overline{\alpha_i} = \alpha_i - \omega$ деп аламыз. Сонда дәслепки еки теңлиги (10.4) аңлатпадағы төмендеги түрде жазыўға болады.

$$\overline{\alpha}_1\pi_1 + \beta_1\pi_2 = 1 \tag{10.6}$$

$$\beta_1\pi_1 + \overline{\alpha}_2\pi_2 + \beta_2\pi_3 = 0 \tag{10.7}$$

π_1 шамасын шығарып таслап ҳәм $\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2 = \beta_1^2$ теңлигин пайдаланып төмендеги теңлигин табамыз.

$$0+0+\beta_2\pi_3=-\beta_1/\overline{\alpha}_1 \qquad (10.8)$$

π_3 шамасының тек $\overline{\alpha_1}, \beta_1, \beta_2$ шамаларынан ғәрезли, ал π_1 ҳәм π_2 шамалары болса керисинше барлық $T-\omega$ элементлеринен ғәрезли. Бирақта $\pi_1^2+\pi_2^2$ ушын әпиўайы баҳаны (10.6) сызықлы теңлемесинен ҳәм элементар геометриядан алыўға болады

$$\pi_1^2+\pi_2^2\geq 1/(\overline{\alpha}_1^2+\beta_1^2) \qquad (10.9)$$

(10.8) ҳәм (10.9) аңлатпаларын (10.5) аңлатпасына апарып қойып,

$$\tau^2\leq\{\frac{1}{\overline{\alpha}_1^2+\beta_1^2}+\frac{1}{\overline{\alpha}_1^2\cdot\beta_2^2}\}^{-1} \qquad (10.10)$$

теңсизлигин аламыз. Бул теңсизлик кереклигиненде бетер қурамалы түрге ийе.

(10.2) аңлатпасы бойынша

$$\tau^2\leq(1/2\beta_1^2+1/\beta_2^2)^{-1}\leq\min\{2\beta_1^2,\beta_2^2\} \qquad (10.11)$$

Жуўмағында, геометриялық орталық арифметикалық орталықтан артып кетпейтуғынлығынан, (10.11) аңлатпадан

$$\tau^2\leq\frac{1}{2}\sqrt{(2\beta_1^2)\beta_2^2} \qquad (10.12)$$

баҳасын аламыз. Лемма дәлилленди.

Ерикли жайылмайтуғын үш диагоналлы T_1 матрицасы ушын QL алгоритми үш диагоналлы жайылмайтуғын матрицалардың $\{T_k, \quad k=1,2,...\}$ избе-излигин пайда етеди. Әжайып факт соннан ибарат, Уилкинсон бойынша жылжыўда $\beta_1^{(k)}$ шамасы k→∞ умтылғанда тез нолге умтылады.

Теорема. Уилкинсон бойынша жылжыўға ийе үш диагоналлы QL алгоритми барқулла жыйнақлы болады, яғный k→∞ умтылғанда $\beta_1^{(k)}\to 0$ умтылады.

Дәлилллениўи. Мейли T ҳәм $\overline{T}$ үш диагоналлы QL алгоритминиң қоңсылас ағзалары болсын. (4.4)-леммасы бойынша

$$\overline{\beta}_1^2<\tau^2\leq\min\{2\beta_1^2,\beta_2^2,|\beta_1\beta_2|/\sqrt{2}\}.$$

Усы минимумға биринши ҳәм үшинши кандидатураларды пайдаланып

$$\left|\overline{\beta_1}\right|^2 = \left|\overline{\beta_1}\right|\left|\overline{\beta_1}^2\right| < (\sqrt{2}\,|\beta_1|)(\,|\beta_1\beta_2|/\sqrt{2}\,) = \left|\beta_1^2\beta_2\right| \qquad (10.13)$$

аңлатпасын аламыз. Енди $\{(\beta_1^{(k)})^2\ \beta_2^{(k)}\}$ избе-излигин қарастырамыз. $\left|\overline{\beta_1}\right| < \tau$ ҳәм $\left|\overline{\beta_1}\,\overline{\beta_2}\right| < |\beta_1|\tau$ қатнасларының көбеймеси

$$\left|\overline{\beta_1}^2\,\overline{\beta_2}\right| < |\beta_1|\tau^2 \le |\beta_1|\cdot|\beta_1\beta_2|/\sqrt{2} \qquad (10.14)$$

қатнасын береди.

Нәтийжеде k→∞ умтылғанда

$$\left|\beta_1^{(k+1)}\right|^3 < \left|(\beta_1^{(k)})^2\beta_2^{(k)}\right| < \left|(\beta_1^{(1)})^2\beta_2^{(1)}\right|/(\sqrt{2})^{k-1} \to 0$$

Мейли u-берилген A симметриялы матрицасы ушын кери итерациядағы ағымдағы вектор болсын. Үш диагоналлы матрицаға келтириўдиң бирден-бирлигине байланыслы бирден-бир сондай Q ортогоналлық түрлендириўи бар болады, онда $Q^*u = e_1$ ҳәм $Q^*AQ = T$ - үш диагоналлы матрица.

Анықлама. Мейли A ҳәм u берилген болсын, соның менен бирге $\|u=1\|$ болсын. Мейли $\alpha_1 = u^*Au,\ r = Au - u\alpha_1,\ \beta_1 = \|r\|,\ \alpha_2 = r^*Ar/\beta_1^2,$

$$W_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Сонда W_2 матрицасының ω α_1 ге жақын жердеги сол меншикли мәнислери ушын Уилкинсон бойынша жылжыўы болады:

$$(A-\omega)\overline{u} = u\tau$$

Егерде A матрицасы толық болса, онда ω меншикли мәнислерин есаплаў Au сяқлы Ar шамасында қәлиплестириўди талап етеди. QL алгоритми ушын $u = e_1$ болады ҳәм сонлықтан Ar аңлатпасын есаплаў улыўма түрдеги матрицалар ушын қарсы аргумент болады.

11-§. Жыйнақлылықтың асимтотикалық тезлиги

Релле қатнасы бойынша жылжыўда QL алгоритми дерлик барлық ўақытта жыйнақлы болады ҳәм егерде ол ҳақыйқатында да жыйнақлы болса, онда жыйнақлылықтың асимтотикалық тезлиги кублық болады. Үш диагоналлы матрица жағдайында β_1 шамасының избе-из шамалары $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-9}, 10^{-27}$ санлары болыўы мүмкин. Уилкинсон бойынша жылжыўда жыйнақлылықтың асимтотикалық тезлиги кублық тезликке салыстырғанда барқулла жақсы болады: биракта усы ўақытқа шекем ҳеш ким квадратлық жыйнақлылықтың бир шеклик матрицаға жыйнақлы болмайтуғынын дәлиллеп көрсете алалмады. Асимтотикалық режимди талқылаўда барлық шамалар ғәрезли болатуғын k индексин таслап жазыў қолайлы болады.

QL-алгоритминиң әдеттеги адымы T үш диагоналлық матрицасын $\overline{T} = Q^* T Q$ матрицасына түрлендиреди, бунда

$$\left|\overline{\beta_1}\right| < \tau = 1 / \left\|(\tau - \sigma)^{-1} e_1\right\| \qquad (11.1)$$

ҳәм σ-жылжыў. Алдымыздағы леммадағы τ ушын баҳасы асимтотикалық режим ушын жүдә турпайы.

Соған қарамастан $\left|\overline{\beta_1}\right|$ ушын анық аңлатпаны аламыз.

Лемма. Мейли $\overline{T} = Q^* T Q$ σ-жылжыўлы T матрицасының QL түрлендириўи болсын, яғный

$$(T - \sigma) q_1 = e_1 \tau \qquad (11.2)$$

Сонда

$$|\beta_1| = \tau |\sin < (q_1, e_1)| \qquad (11.3)$$

болады.

Дәлилледиўи. Мейли $\theta = < (q_1, e_1)$ болсын. $Q\overline{T} e_1 = T q_1$ теңлигиниң ағзаларын қайтадан тәртиплестирип, мыналарды табамыз:

$$q \overline{\beta_1} = T q_1 - q_1 \overline{\alpha_1}$$

$= (I - q_1 q_1^*) T q_1,$ себеби $\overline{\alpha_1} = q_1^* T q_1,$

$= (I - q_1 q_1^*)(q_1 \sigma + e_1 \tau)$ (2-аңлатпа тийкарында)

$= \tau (e_1 - q_1 \cos\theta).$

$q_2 -$ бирлик вектор болғанлықтан, онда

$$\overline{\beta_1}^2 = \tau^2 (1 - 2q_1^* e_1 \cos\theta + \cos^2\theta) = \tau^2 \sin^2\theta$$

Әдетте егерде β_1 нолге умтылса, онда β_2 ҳәм β_3 шамаларында нолге умтылады, бирақта олар әстерек тезликте болады. Нәтийжеде барлық α_1, α_2 ҳәм α_3 үш элементлери меншикли мәнислерге жақынласады; бирақта атап айтқанда қайсы меншикли мәниске жақынласатуғынын улыўма жағдайда айта-алмаймыз. Нәтийже, көпшилик жағдайда басланғыш жылжыўды сайлап алыўдан ғәрезли болады. Бирақта егерде меншикли мәнислер тәбийғый тәртипте алынса, асимтотикалық жыйнақлылық тезлиги ҳаққындағы тастыйықлаўды дәл айтыў мүмкин. Бурын атап өткенимиздей k итерациялық индексин таслап кетемиз:

$\overline{\beta_1}$ элементи q_1 векторы арқалы толық анықланады. q_1 векторына қолайлы есели болып $p = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)^*$ векторы болады. Бул вектор алдынғы параграфта

$$(T - \sigma) p = e_1 \qquad (11.4)$$

теңлеме менен киргизилген.

Теорема. Мейли Уилкинсон бойынша жылжыўға ийе QL-алгоритми жайылмайтуғын үш диагоналлы Т матрицасына қолланылсын.

Сонда $k \to \infty$ да $\beta_1 \to 0$ умтылады. Соның менен бирге, егерде

$$\beta_2 \to 0, \ \beta_3 \to 0 \text{ ҳәм } \alpha_i \to \lambda_i[T], \quad i = 1,2,3. \qquad (11.5)$$

онда $k \to \infty$ да

$$\left|\overline{\beta_1} / \beta_1^3 \beta_2^2\right| \to 1/|\lambda_2 - \lambda_1|^2 |\lambda_3 - \lambda_1| \neq 0 \qquad (11.6)$$

$\overline{\alpha_i} \equiv \alpha_i - \omega$ деп алыў қолайлы болады. Сонда (11.2) қатнасы тийкарында $\overline{\alpha_1}\overline{\alpha_2} = \beta_1^2$ болады.

Дәлиллениўи. Мейли $\sigma = \omega$ болсын. (11.4)-аңлатпаның дәслепки үш теңлемесинен π_1, π_2 ҳәм π_3 лерди π_4 арқалы аңлатамыз. Сонда мыналарға ийе боламыз:

$$\pi_1 = \frac{\overline{\alpha}_2^2\overline{\alpha}_3}{\beta_1^2\beta_2^2} + \frac{\overline{\alpha}_2\beta_3\pi_4}{\beta_1\beta_2} + \frac{\overline{\alpha}_2}{\beta_1^2},$$

$$\pi_2 = \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_3}{\beta_1\beta_2^2} - \frac{\beta_3\pi_4}{\beta_2}, \tag{11.7}$$

$$\pi_3 = -\frac{\overline{\alpha}_2}{\beta_1\beta_2},$$

QL алгоритминиң кепиллик берген жыйнақлылығы мыналарды тәмийинлейди, $k \to \infty$ да $\beta_1 \to 0$, $\overline{\alpha_1} \to 0$ болады, бирақта β_2 тәғдири белгисиз анықланбаған болады. (11.5)-жол қойыўлар $\beta_2 \to 0$ жыйнақлылығын береди ҳәм p векторының барлық қалған элементлери, атап айтқанда $\pi_4,...,\pi_n$ $k \to \infty$ да $O(|\beta_3\pi_3|)$ шамасындай тутады. Жуўмағында p векторында π_1 ҳәм π_2 компоненталары артықмашлыққа ийе болады, ал (11.7)-аңлатпасының оң тәрепиндеги π_1 ҳәм π_4 лер ушын биринши ағзалары артықмашлыққа ийе болады. Сонлықтан $k \to \infty$ да

$$\tau = \frac{1}{\|p\|} \sim \frac{\beta_1^2\beta_2^2}{\overline{\alpha}_2^2|\overline{\alpha}_3|},$$

$$|\sin\theta| = \left\{\frac{\pi_2^2 + ... + \pi_n^2}{\pi_1^2 + \pi_3^2 + ... + \pi_n^2}\right\}^{1/2} \sim \left|\frac{\pi_2}{\pi_1}\right| \sim \left|\frac{\beta_1}{\overline{\alpha}_2}\right|.$$

Керекли нәтийже (11.3)-лемма арқалы келип шығады.

Жуўмақлаў

Диссертация жумысының II бабы кирисиў бөлиминен ҳәм 11 параграфтан дүзилген. Бул баптың кирисиў бөлиминде тийкарынан QR ҳәм QL алгоритмлериниң ислеў принциплери, Грим-Шмидтиң ортогоналластырыў процесси тийкарында ислейтуғын алгоритм екенлиги атап өтиледи.

Меншикли мәнистиң улыўмаласқан мәселеси Релл қатнасы менен байланыслығы айтылады. Үш мүйешли жайылыўлар параграфында матрицаларды үш мүйешли жайылыўға байланыслы теорема ҳәм ескертиўлер берилди. Соның менен оның пайдалы тәреплери келтирилди, кесилген матрицалар технологиясыатап өтилди. 3-§ та спектрлерди бөлиўге байланыслы теорема дәлилленген болып, үш диагоналлы матрица жағдайы, бөлеклеў дәллиги, бөлеклеў ҳаққындағы Коши теоремасы, бөлистириў процедурасының сәтсизлиги ҳаққында сөз етилген. Жасырын меншикли мәнислер параграфында характеристикалық көп ағзалының коренлерин есаплаўларда ушырасатуғын жасырын шешимлерди жабыўды мысаллар менен көрсетилди. 5-§ та ортогоналлық матрицалар, ортогоналлық уқсаслықлар сөз етилди. 6-§ та тегис айландырыўлар ҳаққында сөзетилип, онда Якоби айландырыўы, Гивенс түрлендириўи ҳаққында айтылды.

7-§ та үш диагоналлық форма анықламасы, олардың үш диагоналлық формаға келиў шәртлери, булар ҳаққында лемммалар ҳәм теорема дәлилленди. 8-§ та QL ҳәм QR алгоритмлери арасындағы уқсаслықлар ҳаққында леммалар ҳәм теорема келтирилген. 9-§ та QL алгоритминиң жыйнақлылығы теорема жәрдеминде дәлилленди.

10-§ та Үш диагоналлы QL алгоритминиң жыйнақлылығы Уилкинсон бойынша жылжыўға ийе болғанда жыйнақлылығы теорема бойынша дәлилленди. 11-§ та QL алгоритминиң асимтотикалық тезлиги ҳаққында сөз етилген болып, ол тийисли лемма ҳәм теоремалар менен дәлилленип көрсетилген.

III Бап. Алгоритмлердиң әмелий қолланылыўы

1-§. Хаусхолдер методы

Хаусхолдер алгоритми $(n \times n)$ өлшемдеги A симметриялық матрицаны *(n-2)* ортогонал өзгериўшилер тәртибинде үшдиагоналлы формаға келтиреди. Ҳәр бир өзгериў пүтин қатардың талап етилген бөлегин ҳәм сайкес бағананы жоғалтады.

$P = 1 - 2ww^T$ формасына ийе P түрдеги Хаусхолдер матрицасы базалық матрица болып табылады, бунда w-$|w|^2 = 1$болган ҳақықый вектор. (Бул жерде берилген мәнислер бойынша, a ҳәм b векторлардың матрицалық ямаса диадлық көбеймеси ab^T деп жазылса, ал бул векторлардың скаляр көбеймеси a^Tb болып жазылады). P матрицасы ортоганал себеби, $P^2=(1-2ww^T)(1-2ww^T)=1-4ww^T+4w(w^Tw)w^T=1$. Солай етип $P = P^{-1}$. Бирақ $P^T = P$, соған бола $P^T = P^{-1}$, бул ортоганаллық екенлигин дәлийллейди.

P ны $P = 1 - (uu^T)/H$, деп жазамыз,бунда $H = |u|^2 / 2,$ Енди u қәлеген вектор болыўы мүмкин. Мейли x-A матрицасының биринши қатарынан дүзилген вектор болсын, $u = x - s|x|e_1$ деп таңлаймыз, бунда e_1-$[1,0,....0]^T$ болган бирлик вектор, ал s белгисиниң 1 ямаса -1 таңланыўы соң болады. Сонда

$$Px=x-(u(x-s|x|e_1)^Tx)/H =x-(2u(|x|^2 -s|x|x_1))/(2|x|^2-2s|x|x_1)=x-u=s|x|e_1$$

Демек бул, Хаусхолдер P матрицасы берилген x векторында, бириншиден басқа, барлық элементти жоғалта отырып ҳәрекетленеди.

A түрдеги симметриялық матрицаны үшдиагоналлы формаға өткериў ушын, Хаусхолдердиң биринши матрицасын қураўшы x векторын биринши қатардың n-1 төменги элементлеринен дүземиз. Сонда төменги n-2 элементи ноль болады. Бул жерде матрицалар блок формада жазылган. Себеби ${}^{n-1}P_1$ мәниси $((n-1) \times (n-1))$ өлшемдеги Хаусхолдер матрицасын белгилейди. Бунда $k=[a_{21},.....a_{n1}]^T$ вектор модулиниң минус яки плюс белгиси.

Енди толық ортогонал трансформация төмендеги көринисте болады:

$$A' = PAP = \begin{pmatrix} a_{11} & k & 0 & \dots & 0 \\ k & & & & \\ 0 & & & & \\ \cdots & & \text{Керек емес} & & \\ & & & & \\ 0 & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Бул жерде $P^T = P$ ҳақықый екенлиги қолланылды.

Екинши трансформация ушын Хаусхолдер матрицасы екинши бағананың төменги (n-2) элементи тийкарында дүзиледи, ол арқалы өзгериўши матрица қәлиплеседи.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \dots & \dots & & & \\ & & {}^{(n-2)}P_2 & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Шеп тәрептиң жоқары мүйешиндеги бирлик блок,алдыңғы стадияда алынған, үшдиагоналлықтың сақланыўын тәмийинлейди, сол ўақытта (n-2) өлшемдеги ${}^{(n\text{-}2)}P_2$ Хаусхолдер матрицасы үшдиагоналлы нәтийжеге бир бағана менен қатарды қосады. Бундай өзгериўшилердиң (n-2) дизбеги A матрицасын үшдиагоналлы түрге келтиреди. PAP мәнисиндеги матрицалық көбейтиўди орынлаў орнына бизлер векторды есаплаймыз: $p=(Au)/H$. Сонда

$$AP=A(1-(uu^T)/H)=A-pu^T, \quad A'=PAP=A-pu^T-up^T+2Kuu^T,$$

бунда K скаляр $K = (u^T p)/(2H)$ сыпатында анықланады. Егер биз q=p-Ku, деп белгилесек онда $A' = A - qu^T - uq^T$. Ең соңғы формула есаплаў ушын қолайлы.

Хаусхолдер редукциясының программасы [2] алгоритм бойынша тийкарланып, ҳәрекетти биринши емес ал A матрицасының *n*-бағанасынан баслайды.Алгоритм көриниси былайынша; *m=(m=1,2…n-2)* стадиясында *u* векторының көриниси төмендегише: $u=[a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{i,i-2}, a_{i,i-1}+s, 0, ..., 0]$.

Бул жерде i=n-m+1=n, n-1, ..., 3. s көрсеткиши (алдыңғы $s|x|$ белгисине сәйкес) $s^2=(a_{i1})^2+...+(a_{i,i-1})^2$ деп анықланады. s белгиси дөңгелеклеў қәтесин төменлетиў ушын $a_{i,i-1}$ белгиси менен сәйкес ҳалда алынады.

Өзгериўшилер төмендеги тәртипте есапланады: s, u, H, p, K, q, A'. Ҳәр бир *m* стадияның ең соңғы *m-1* қатары менен бағанасында A матрицасы үшдиагоналлы болады.

Егер үшдиагоналлы матрицаның жеке векторлары табылған болса, онда A ның жеке векторлары топланган транформациялаўшы матрицалардың $Q = P_1P_2...P_{n-2}$ усы векторлар матрицасына көбеймеси менен табылады. Трансформациялаўшы Q матрицалардың көбеймеси барлық P_i: $Q_{n-2}=P_{n-2}, ...,Q_j=P_jQ_{j+1}, ..., Q=Q_1$ табылғаннан соң рекурсия менен дүзиледи. Программа киритиўде a[1...n][1...n] массивиндеги ҳақықый симметриялық матрица бериледи. Ал шығыўда бул массив Q матрицасының элементлерин курайды. $d(1....n)$ векторы A' диагонал элементлер көплигинен ибарат, $e(1.....n)$ векторы $e[2]$ басланатуғын A' диагоналдан тыс элементлерден ибарат. Еслетип өтейик, a массивиниң дәслепки қурамы жоқ етилгенликтен, онда A дан баслап избе из есаплаў сериясы барысында ол программаға узатылмастан алдын копияланады. Аралық нәтийжелер қосымша ядты талап етпейди. T стадиясында p ҳәм q векторлары 1….i индексиндеги элементлер ушын нольге тең болмайды (еслейик, i=n-m=1), ал u --- векторы 1…..i-1 индексиндеги элементлер ушын. e векторының элементлерин n,n-1,….тәртибинде анықланады, сонлықтан p векторын e ниң белгисиз элементлеи орнында услаў мүмкин. q векторы p дан жоқары жазылады, себеби q анықланғаннан соң p енди талап етилмейди. u –векторы a-массивиниң i-ши қатарында жайласады, ал u/H–i-ши бағанада. Редукция өткерилгеннен соң Q_j матрицасы a массивине жазылган u ҳәм u/H векторларын қолланған ҳалда есапланады. Себеби Q_j матрицасы ең соңғы n-j+1 қатар ҳәм бағаналар ушын жалғыз болады, онда оның элементлерин n-j қатар ҳәм бағанасына шекем есаплаў талап етиледи. Бунда u ҳәм u/H ты сәйкес қатар менен баганаға қайта жазыў мүмкин, себеби олар енди керек болмайды.

Төмендеги берилген программа tred2 өзиниң нәзик тәрепине ийе. Егер s^2 көрсеткиши нольге тең болса ямаса қандай да бир стадияда «киши» болса, онда сәйкес өзгериўшилер өткерилип жиберилиўи мүмкин. $s^2 <$ түриндеги әпиўайы критерия (көрсетилиўши ең киши сан)/(машиналық анықлылық) көпшилик жағдайларда жүдә күшли болады. Ҳақыйқатында анық критерия қолланылады. $e = S_{k=1}^{i-1}(|a_{ik}|)$ санын анықлаймыз. e ниң нольден баслап машиналық анықлыққа шекемги аралығында өзгериўши өткерилип жибериледи. Кери жағдайда биз a_{ik}-->a_{ik}/ ни қайта есаплаймыз ҳәм өзгериўшини масштабласқан қорсеткиште өткеремиз. (Хаусхолдер өзгериўи элементлер қатнасына ғана байланыслы).

Еслетип өтейик, егер биз көрсеткиш тәртиби бойынша айырмашылыққа ийе матрица менен ислессек, онда матрицаның қатар ҳәм бағаналары мүмкин болғанынша, ең киши элемент жоқарыдағы шеп мүйеште жайласқаны мақул. Себеби, процесс оң тәрептеги төменги мүйештен басланады, ал киши ҳәм үлкен көрсетикишлердиң сәйкес есапласыўлары дөңгелекдеўдиң сезилерли қәтелерине алып келиўи мүмкин. Келеси секцияда жайласқан tred2 программасы tqli программасы менен биргеликте қолланыў ушын арналған. Tqli жеке векторлар менен симметриялы үшдиагоналлы матрица көрсеткишлерин анықлайды. tred2 ҳәм tqli комбинациялары ҳақықый симметриялық матрицаның санларының алгоритмин табыўда қолланылады (зәрүр болса жеке векторларды да).

2-§. Үш диагоналлы матрицаның меншикли мәнислери ҳәм меншикли векторлары. QL ҳәм QR алгоритмлери

QR алгоритминиң тийкарғы идеясы мыналардан ибарат: қәлеген ҳақыйқый А матрицасы $A = QR$ түринде көрсетилиўи мүмкин, бундағы Q-ортогоналлық , R-жоқары үш мүйешлик матрицасы. Улыўма көринистеги матрицалар ушын бул жайылыў А матрицасының бағаналарының диагоналының төмендеги элементлерди жоғалтыў ушын Хоусхолдер түрлендириўиниң алгоритмиин пайдаланып дүзиледи.

Енди усы фактлер бойынша кери бағдарда жүргизилгеннен пайда болған матрицаны қараймыз:

$$A^* = RQ$$

Q-ортогонал болғанлықтан, $R = Q^T A$ теңлигин аламыз. Солай етип, $A^* = Q^T AQ$ болады. Бундағы A^* матрицасы А матрицасының ортогоналлық трансформациясы екени көринип тур. QR-түрлендириўиниң мына қәсийетлерди сақлап қалатуғынын тексерип көриў мүмкин: симметриялықты, үшдиагоналлықты ҳәм Гиссенберг формасын.

А матрицасының факторлериниң биреўин жоқарғы үш мүйешли матрица сыпатында таңлап алыў шәрт емес, ал дәл сондай төменги үшмүйешлик матрицасында алыў мүмкин.

Бул болса QL-алгоритмине алып келеди, себеби А матрицасын жайыў

A=QL

түринде болады, бундағы L-төменги үшмүйешлик матрицасы.

Хаусхолдер есаплаўларында биз берилген матрицаның n-ши (соңғы) бағанасынан басланғанын еслеп өтейик. Дөңгелеклеў қәтеликлерин азайтыў ушын биз көп элементлерин оң төменги мүйешке жайластырылыўын мәсләҳәт етиледи. Егерде биз усыдан соң үш диагоналлы матрицаны диагоналластырыўымыз керек болса, онда QL алгоритми QR алгоритмине салыстырғанда кемирек дөңгелеклеў қәтелигине алып келеди. Солай етип биз буннан соң QL-алгоритми ҳаққында сөз етемиз.

QL-алгоритми ортогоналлық түрлендириўлердиң төменги избе-излигинен дүзиледи:

$$A_S = Q_S L_S, \qquad A_{S+1} = L_S Q_S (= Q_S^T A_S Q_S)$$

Улыўма түрдеги матрица ушын ҳәр бир итерацияда QL-алгоритминде $O(n^3)$ тәртипли арифметикалық әмеллер орынланады, ал бул болса жүдә көп. Бирақта бул әмеллер үш диагоналлы матрицалар ушын ҳәр бир итерацияға O(n) тәртипти қурайды, ал Гиссенберг формасындағы матрицалар ушын $O(n^2)$ тәртипти қурайды, бул болса матрицалардың уқсас формасын жоқары нәтийжели екенин көрсетеди.

Биз бул жерде ҳақыйқый, симметриялы, үш диагоналлы жағдайын қарастырамыз. Сонда λ_i бирлик меншикли мәнислери ҳақыйқый болады. Егерде λ_i меншикли мәниси p еселикке ийе болса, онда диагоналдан жоқарыда ҳәм төменде ең болмағанда p-1 ноль болыўы тийис. Солай етип матрицаны үлес матрицаларға бөлиўге болады ҳәм оларды өз алдына диагоналластырыў мүмкин.

Диагонал үстинде элементлер нолге $a_{ij}^{(S)} - (\lambda_i / \lambda_j)^S$ қатнасында умтылады, $\lambda_i < \lambda_j$ болсада бул мәнислердиң жақынлығы есабынан жыйнақлылық болыўыда мүмкин. Жыйнақлылықты арттырыўғада болады жылжытыў методы арқалы: егерде k-қәлеген турақлы болса, онда (A-k1) аңлатпасы $(\lambda_1 - k)$ меншикли мәнисине ийе болады. Егерде $A_S - k_S 1 = Q_S L_S$ аңлатпаны жайсақ

$$A_{S+1} = L_S Q_S + k_S 1 = Q_S^T A_S Q_S$$

онда жыйнақлылық тезлиги $(\lambda_i - k_S)/(\lambda_j - k_S)$ қатнасы менен анықланады. Бул жерде ҳәр бир стадияда k_S ти сондай етип сайлап алыў талап етиледи, жыйнақлылықты максимал тезлетиў ушын. Басланғыш этапта k_S шамасын λ_1 меншикли мәнисине жақын етип сайлап алған мақул. Бул жағдайды диагоналдан тысқарыдағы биринши бағана элементлери нольге айланады. Бирақта λ_1 мәниси белгисиз. Практикада нәтийжели стратегия сыпатында (2×2) өлшемли A матрицасының басланғыш миорының меншикли мәнислерин есаплаған мақул. Соннан соң k_S шамасын a_{11} элементине жақын меншикли мәнисти алған мақул.

Жуўмақлаў

Диссертация жумысның бул үшинши бабы 2 параграфтан дүзилген болып, үшинши бапта тийкарынан санлы мысаллар қаралып, оған ЭЕМ де алгоритмлик программа дүзилип тийисли нәтийжелер алынды.

Яғный үш диагоналлы матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын табыўда QL ҳәм QR алгоритмлерин пайдаланыў ҳаққында сөз етилди. Ҳәр бир алгоритмге арнаўлы түсиниклер берилип, олардың есапланыў жоллары түсиндирилди. Мәселен, QR алгоритминиң тийкарғы идеясы мыналардан ибарат: қәлеген ҳақыйқый A матрицасы $A = QR$ түринде көрсетилиўи мүмкин, бундағы Q-ортогоналлық , R-жоқары үш мүйешлик матрицасы. Улыўма көринистеги матрицалар ушын бул жайылыў A матрицасының бағаналарының диагоналының төмендеги элементлерди жоғалтыў ушын Хоусхолдер түрлендириўиниң алгоритмиин пайдаланып дүзиледи.

Ал, QL-алгоритми ортогоналлық түрлендириўлердиң төменги избе-излигинен дүзиледи: $A_S = Q_S L_S$, $A_{S+1} = L_S Q_S (= Q_S^T A_S Q_S)$

Улыўма түрдеги матрица ушын ҳәр бир итерацияда QL-алгоритминде $O(n^3)$ тәртипли арифметикалық әмеллер орынланады, ал бул болса жүдә көп. Бирақта бул әмеллер үш диагоналлы матрицалар ушын ҳәр бир итерацияға O(n) тәртипти қурайды.

Ж у ў м а қ л а ў

Тербелис тәбияттың барлық жеринде ушырасады, ҳәм бул меншикли мәнис пенен (ямаса жийилик) байланыслы мәселелерди пайда етеди. Қаншама математикалық моделлер сонша таза илимниң бағдарларын ийелеген сайын, меншикли мәнислерди есаплаўларға да талаплар соншама артып барады.

Меншикли мәнистиң мәселелеринде айырмашылықлар болғаны менен, конкрет мәселелерде олар квадратлық матрицалардан ибарат ҳақыйқый коэффициентли ямаса комплекслик элементли қандайда бир меншикли мәнислерге байланыслы мәселеге алып келеди. Бул мәселелерде биреўлери тек ҳақыйқый меншикли мәнислерине ийе матрицаларға алып келсе, екиншилери комплекслик меншикли мәнисли матрицаларға алып келеди. Ҳақыйқый меншикли мәнисли матрицалар – бул өз-өзине түйинлес мәселелер менен байланыслы болып, бундай мәселелер менен жумыс алып барыў жүдә унамлы болады.

Магистрлик диссертация жумысының дүзилиси кирисиў бөлиминен, үш баптан, биринши бап 8 параграфтан, екинши бап 11 параграфтан ҳәм үшинши бап 8 параграфтан дүзилген болып, үшинши бапта санлы мысаллар қаралып, оған ЭЕМ де алгоритмлик программа дүзилип тийисли нәтийжелер алынды

Жумыстың I бабында Евклид кеңислиги тийкарғы түсиниклери, вектор, скаляр, норма, векторлық мүйеш, скаляр көбейме, бирлик вектор, түйинлес матрица, торанспонирленген матрица, унитарлық, ортогоналлық матрицалар түсиниклери берилген. Меншикли мәнислер деп аталған параграфта меншикли мәнис анықламасы, меншикли вектор түсиниги, уқсас түрлендириў, характеристикалық көпағзалылық түсиниклери берилген.

3-§ та өз-өзине түйинлес матрицалар түсиниги, 2,3,4 тастыйықлаў, есели меншикли мәнислер, сәўлелендириўши матрица түсиниклери берилди.

4-§ та квадратлық формалар, конгруэнтлик сәўлелендириў, Сильвестр теоремасы, матрица инерциясы, 6,7,8,9 тастыйықлаўлары берилген. 5-§ та матрицалық нормалардың түрлери, олар арасындағы байланыслар тастыйықлаўлар менен берилген.

Есаплаў алгоритми деп аталған параграфта есаплаў тәжирийбеси, математикалық моделлестириўдиң әҳмийети, санлы усыл қәтеликлериниң пайда болыў себеплери, санлы усылларды жасаў этаплары ҳ.т.б. сөз етилген.

8-§ та санлы усылларға қойылатуғын талаплар жыйнақлылығы, корректлилиги мәселелери сөз етилди.

II бап кирисиў бөлиминен ҳәм 11 параграфтан дүзилген болып, кирисиў бөлиминде QR ҳәм QL алгоритмлериниң ислеў принциплери, Грим-Шмидтиң ортогоналластырыў процесси тийкарында ислейтуғын алгоритм екенлиги атап өтиледи.

Меншикли мәнистиң улыўмаласқан мәселеси Релл қатнасы менен байланыслығы айтылады. Үш мүйешли жайылыўлар параграфында матрицаларды үш мүйешли жайылыўға байланыслы теорема ҳәм ескертиўлер берилди. Соның менен оның пайдалы тәреплери келтирилди, кесилген матрицалар технологиясыатап өтилди. 3-§ та спектрлерди бөлиўге байланыслы теорема дәлилленген болып, үш диагоналлы матрица жағдайы, бөлеклеў дәллиги, бөлеклеў ҳаққындағы Коши теоремасы, бөлистириў процедурасының сәтсизлиги ҳаққында сөз етилген. Жасырын меншикли мәнислер параграфында характеристикалық көп ағзалының коренлерин есаплаўларда ушырасатуғын жасырын шешимлерди жабыўды мысаллар менен көрсетилди. 5-§ та ортогоналлық матрицалар, ортогоналлық уқсаслықлар сөз етилди. 6-§ та тегис айландырыўлар ҳаққында сөзетилип, онда Якоби айландырыўы, Гивенс түрлендириўи ҳаққында айтылды.

7-§ та үш диагоналлық форма анықламасы, олардың үш диагоналлық формаға келиў шәртлери, булар ҳаққында леммmалар ҳәм теорема дәлилленди.

8-§ та QL ҳәм QR алгоритмлери арасындағы уқсаслықлар ҳаққында леммалар ҳәм теорема келтирилген.

9-§ та QL алгоритминиң жыйнақлылығы теорема жәрдеминде дәлилленди.

10-§ та Үш диагоналлы QL алгоритминиң жыйнақлылығы Уилкинсон бойынша жылжыўға ийе болғанда жыйнақлылығы теорема бойынша дәлилленди.

11-§ та QL алгоритминиң асимтотикалық тезлиги ҳаққында сөз етилген болып, ол тийисли лемма ҳәм теоремалар менен дәлилленип көрсетилген.

Диссертация жумысның үшинши бабы 2 параграфтан дүзилген болып, үшинши бапта тийкарынан санлы мысаллар қаралып, оған ЭЕМ де алгоритмлик программа дүзилип тийисли нәтийжелер алынды.

Яғный үш диагоналлы матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын табыўда QL ҳәм QR алгоритмлерин пайдаланыў ҳаққында сөз етилди. Ҳәр бир алгоритмге арнаўлы түсиниклер берилип, олардың есапланыў жоллары түсиндирилди.

Пайдаланылған әдебиятлар

1. Алланазаров Ж. Даўекеев С. Спектраллық мәселе ушын дәл схемалар// ҚМУ, “Хабаршысы” 3-4. 16-17-б.
2. Алланазаров Ж. Даўекеев С. Схема высокого порядка точности для эллиптического уравнения со смещанной пройзводной// ҚМУ.магистрантлардың илимий мийнетлери топламлары.2013.55-56.
3. Бортаковский А. С., Пантелеев А. В. Линейная алгебрав примерах и задачах. В Ш. 2010. 592 стр.
4. Вержбицкий В. М. Основы численных методов.- М.Высшая школа,2002.
5. Воеводин В. В. Линейная алгебра. Лань 2006.416 стр.
6. Исроилов М. Ҳисоблаш методлари. –Тошкент: Ўзбекистон,2003.
7. Мальцев И. А. Линейная алгебра. Лань. 2010.384 стр.
8. Отаров А.О., Алланазаров Ж.П. Есаплаў усыллары I бөлим. -Нөкис: Билим,2001.
9. Отаров А.О., Алланазаров Ж.П. Есаплаў усыллары II бөлим. -Нөкис: Билим,2006.
10. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. М. Мир.1983.
11. Приказчиков В. Г., Алланазаров Ж. П. Точность дискретной спектральной задачи со смешанной произведной // Вычислительные и прикладной математика. 1992, Вып.71,-с. 57-63.
12. Уилкинсон Дж. Алгебрическая проблема собетвенных значеней. – М.: Наука, 1970
13. Фаддеев Д. К., Фаддеев Д. Н. Вычислительные методы линейной алгебры.
14. www.Lib.ru
15. www.cyberguru.ru
16. www.twirpx.com