ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

Магистратура басқышы

Қол жазба ҳуқықында

Нагметуллаев Аскар

«Оператор алгебраларында автоморфизмлердиң ярым группалары»

5А460101 Математикалық анализ қәнигелиги бойынша

Магистр

академиялық дәрежесин алыў ушын жазылған

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

Магистрлик диссертация функционаллық анализ кафедрасында көрип шығылды ҳәм қорғаўға усынылды

Кафедра баслығы К.К. Кудайбергенов

________« » _________2011 жыл

Илимий басшы:_____________

ф.м.и.к. Тлеумуратов С.

НӨКИС 2011

Мазмуны

.

Кирисиў

<u>Теманың актуаллығы</u>: Дугластың [1] жумысында бир параметрли ярым группаларға изометриялы операторлардан ибарат C^* – алгебра изертлеўге бағышланған болып, ярым группалардан ибарат C^* – алгебраның раўажланыўына түртки болды.

Соның менен бир қатарда C^*–алгебралар теориясы, коммутатив ярым группалардың эндоморфизмлерден ибарат C^*–алгебра интенсив раўажланбақта [3],[4].

Мейли R–тәртипленген кольцо болсын, ал $G_n(R)$ үлес ярым группалардың $GL_n(R)$ группасы терис емес элементлердиң матрицаларынан ибарат. А.В.Михалёв ҳәм М.А.Шаталова [13] жумысында егер R сызықлы тәртипленген дене ҳәм $n \geq 2$ болса, онда $G_n(R)$ ярым группаның барлық автоморфизмлери анықланады. Е.И.Бунина ҳәм А.В.Михалёвлар егер R қәлеген сызықлы тәртипленген ассоциатив кольцо ҳәм $n \geq 3$ болса, онда $G_n(R)$ ярым группаның барлық автоморфизмлери қурылды. Қарастырылып атырған магистрлик жумыста егер R коммуттатив дара тәртипленген кольцо □ ди өзинде сақлайды ҳәм $n \geq 3$ болса, онда $G_n(R)$ ярым группаның барлық автоморфизмлери табылды.

<u>Мақсети ҳәм ўазыйпалары:</u> Автоморфизмлер ҳәм операторлар ярым группасын дәслеп Гильберт кеңислигинде үйренилип, операторлар алгебрасында автоморфизмлердең ярым группасы анықланып ҳәм оның айырым қәсийетлерин келтириўден ибарат.

<u>Изертлеў объекти:</u> операторлар алгебрасы, ярым группа, автоморфизмлер ярым группасы.

<u>Изертлеўди алып барыў усыллары.</u> Магистрлық жумыста тийкарынан функционаллық анализ усылларынан қолланылады.

Изертлеўдиң әмелий әҳмийети: Диссертацияда келтирилген нәтийжелер ҳәм усыллар операторлар алгебрасы ҳәм ярым группа операторлар теориясын изертлеўде өз қолланылыўларына ийе болады.

Жумыстың көлеми ҳәм дүзилиси: Магистрлик диссертация жумысы кирисиў, еки бап, алты параграф, жуўмақлаў ҳәм пайдаланылған әдебиятлар дизиминен ибарат.

Жумыстың биринши бабы үш параграфтан ибарат болып, 1.1-параграфта функционаллық анализдиң элементлери келтирилген [17-20]. 1.2-параграфта Гильберт кеңислигинде шегараланған операторлардың ярым группасы, ярым группаның генераторы ҳәм спектри қарастырылған.

Анықлама 1.2.1. T_t $(t \geq 0)$ семейiствосы ярым группа делинеди, егер төмендеги шәртлер орынлы болса:

1. $T_{t+s} = T_t T_s$ егер $t, s \geq 0$, $T_0 = I$.

2. $T_t\varphi$ фунциясы ҳәр бир фиксерленген $\varphi \in H$ ушын, H кеңислигинде үзликсиз болады.

Мейли T_t $(t \geq 0)$ ярым группасы берилген болсын.

Анықлама 1.2.4. Шегараланбаған G операторы ҳәм $\varphi \in D(G)$ ушын

$$G\varphi = \lim_{h \to +0} \frac{T_h\varphi - \varphi}{h}$$

қатнасы орынлы болса, онда G операторы ярым группаның генераторы деп аталады.

G оператордың резолвентасын $R(\lambda)$ арқалы белгилеймиз, яғный

$$R(\lambda) = (\lambda I - G)^{-1},$$

бунда $\lambda \in C$.

Ярым группа генераторының спектрине шәртлер қойыўы зәрүр. Дара жағдайда бул шәртлер ярым группалардың өсиў тәртибине байланыслы болады.

Теорема 1.2.5. Мейли T_t ярым группа, ал β_0 өсиў тәртиби болсын. Онда $\{\lambda \in C : \operatorname{Re}\lambda > \beta_0\}$ көплиги G оператордың резольвенталар көплигине тийисли болады. Бунда

$$R(\lambda)\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt\,,\ \operatorname{Re}\lambda > \beta_0 \qquad (1.2.5)$$

1.3-параграфта операторлар алгебрасының тийкарғы түсиниклери қаралған.

Анықлама 1.3.4. C^*–алгебра, бул $\|a^*a\| = \|a\|^2$ шәртин қанаатландыратуғын * - банах алгебрасы.

Енди фон Нейман алгебрасында поляр жайылманы қарастырамыз.

Теорема 1.3.10. Мейли M фон Нейман алгебрасы ҳәм $a \in M$ болсын. Сонда a төмендегише жайылады

$$a = u|a|,$$

бул жерде $|a| = ((a^*a)^{\frac{1}{2}})$ ҳәм $u \in M$ дара изометриясы сондай $u^*u = s(|a|)$ ҳәм $uu^* = s(|a^*|)$ шәртлерин қанаатландырады. Бундай жайылма бирден-бир болады. Бул жайылма поляр жайылма делинеди.

Магистрлик диссертация жумысының екинши бабы үш параграфтан ибарат. Бул бапта ярым группалардың автоморфизми ҳәм олардың базы бир қәсийетлери келтирилген.

2.1-параграфта аналитикалық ярым группалардың критериялары қаралған.

Теорема 2.1.5. Мейли H - кеңислигинде T_t аналитикалық ярым группа, ал G оператор оның генераторы болса, онда $\forall t_0 > 0$

$$T_{t_0} : H \to D(G) \qquad (2.1.15)$$

шегараланған оператор болады.

2.2-параграфта ярым группалардың автоморфизмлерин дүзиў қарастырылған.

Лемма 2.2.3. Мейли $n = 3$, Φ –ярым группа $G_n(R)$ автоморфизмлери сондай $\Phi(S_\tau) \quad b\cancel{S}_\tau, b^2 \quad 1$. Сонда $M \in \Gamma_{n(R)}$ матрицасы бар болып, барлық $\rho \in \sum_n$ ушын $\Phi'(S_\rho) = \Phi_M \circ \Phi(S_\rho) = b^{\operatorname{sgn}\rho} S_\rho$ қатнасы орынлы болады.

Автоморфизмлер ярым группасы матрицалар үстинде дүзилген болып, оның айырым қәсийетлери 2.3-параграфта келтирилген

Теорема 2.3.4. Мейли $G_n(R), n \geq 3, 1/2 \in R$ ярым группалардың қәлеген автоморфизми болсын. Сонда $GE_n^+(R)$ ярым группада автоморфизм $\Phi = \Phi_M \Phi^c \Omega$ түрге ийе болады, бунда $M \in \Gamma_n(R), c(\cdot) \in Aut(R_+)$, $\Omega(\cdot)$– орайласқан гомотетия.

1-БАП. ОПЕРАТОРЛАР АЛГЕБРАСЫ ҲӘМ ЯРЫМ ГРУППАЛАР

Бул бапта операторлар алгебралары ҳәм операторлардың ярым группалары қаралған.

Биринши параграфта функционаллылық анализдиң элементлери болған Гильберт кеңислиги, Лебег интералы, Банах кеңислиги, өлшеўли функциялар ҳаққында тийкарғы мағлыўматлар келтирилген.

Екинши параграфта ярым группалардың генераторы ҳәм спектри қарастырылған.

Үшинши параграфта операторлар алгебраларына тийисли мағлыўматлар қарастырылып, олардың қәсийетлери ҳәм мысаллар қаралған.

§ 1.1. Тийкарғы түсиниклер

Сызықлы кеңислик L нормаланған делинеди, егер оның ҳәр бир f элементине $\|f\|$ ҳақыйқый саны сәйкес қойылып ҳәм бул сәйкеслик төмендеги шәртлерди қанаатландырса:

1) $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

2) $\|cf\| = |c|\|f\|$, $c \in C$;

3) $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$, $\forall f_1, f_2 \in L$ (үшмүйешлик теңсизлиги).

Ҳәр қандай нормаланған кеңислик $\rho(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|$, $\forall f_1, f_2 \in L$ метрикаға қарата метрикалық кеңислик болады.

Енди нормаланған кеңисликте жыйнақлылық түсиниклерин келтиремиз. Егер $\|f_m - f\| \to 0$, $m \to \infty$ болса, онда $\{f_m\}$, $f_m \in L$ элементлер избе-излиги $f \in L$ элементке жыйнақлы делинеди,. $\{f_m\}$ элементлер избе-излиги фундаменталь делинеди, егер $\|f_m - f_n\| \to 0$, $m, n \to \infty$.

Егер $f_m \to f$ болса, онда $\|f_m\| \to \|f\|$ болады. Ҳақыйқатында үшмүйешлик теңсизлигинен $\|f_m\| \le \|f_m - f\| + \|f\|$ ҳәм $\|f\| \le \|f_m - f\| + \|f_m\|$ болып, буннан $\big|\|f_m\| - \|f\|\big| \le \|f_m - f\| \to 0, m \to \infty$ келип шығады.

Сызықлы нормаланған кеңислик толық деп аталады, егер оның элементлериниң қәлеген фундаменталь избе-изликлери жыйнақлы болса. Толық сызықлы нормаланған кеңислиги банах кеңислик деп аталады. Банах кеңислиги сепарабель делинеди, егер барлық жерде тығыз санақлы көплик бар болса. Функционаллық кеңисликлерде бир неше мысаллар келтиремиз.

Мысал 1.1. $C[a,b]$ - кеңислиги

$$\|u\| = \max_{a \le x \le b} |u(x)|$$

нормаға қарата нормаланған кеңислик болады. Усы норма арқалы жыйнақлылық тең өлшеўли жыйнақлы делинеди.

Тең өлшеўли жыйнақлылық фундаменталь делинеди, егер $|u_k(x) - u_m(x)| \to 0$. Матемтикалық анализ курсынан белгили $u_m(x)$ избе-излиги $u(x)$ үзликсиз функцияға жыйналады ҳәм $C[a,b]$ толық, демек банах кеңислиги болады.

Мысал 1.2. $C^k[a,b]$ **–** кеңислиги

$$\|u\| = \max_{a \le x \le b} |u(x)| + \sum_{i=1}^{k} \max_{a \le x \le b} |u^i(x)|$$

нормаланған кеңислик болады. 1.1-мысалға уқсас $C^k[a,b]$–банах кеңислиги болады.

Мысал 1.3. $C[a,b]$ - кеңисликте интеграллық норма киритемиз

$$\|u\| = \left(\int_a^b |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

нормаланған кеңислик болады, бунда $p \geq 1$, интеграл Риман мәнисинде. Бирақ банах кеңислик болмайды. Мейли $[a,b]=[-1,1]$ ҳәр қандай $k>1$ ушын

$$u_k(x)=\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ kx, & 0 \leq x \leq 1/k \\ 1, & 1/k \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$u_k(x) \in C[-1;1]$, $\{u_k(x)\}$ избе-излигин фундаментал екенин көрсетемиз. $\forall k,m>0$, $k>m$ болсын, сонда $\|u_k-u_m\| \to 0,\ k,m \to \infty$ фундаменталь болады. Бирақ бул избе-излик

$$u(x)=\theta(x)=\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & 0<x \leq 1 \end{cases}$$

функцияға жыйнақлы болады, ал бул функция үзликсиз емес, яғный $C[-1,1]$ кеңислигине тийисли емес.

Лебег интегралы.

Ҳәзирги заман математикада тийкарынан дифференциаллық теңлемелерде Риман интеграллары жеткиликли емес. XX-әсирдиң басларында Лебег интеграллық теориясы дүзиледи.

Мейли Q - базы бир интервал болсын. Q да дерлик барлық жеринде анықланған функциялар деп, (Q - ҳәр бир точкасында шекли мәнислерди қабыл ететуғын) функцияның мәнислери өлшеўи нольге тең көпликте анықланбаған. $\Lambda_1=\Lambda_1(Q)$ -арқалы жыйнақлы монотон кемейиўши емес функциялар избе-излигиниң шегин белгилеймиз.

Мейли $f(x)$ функция Λ_1 берилген, ал $f_k(x)$, $k=1,2,...$ дерлик барлық жерде $f(x)$ ке жыйнақлы, интеграллар избе-излиги менен шегараланған, $\overline{Q}$ да кемейиўши емес монотон үзликсиз функциялар избе-изликлери берилген болсын.

$$\left\{\int_Q f_k(x)dx,\ \kappa=1,2,...\right\}$$

көплигиниң $f(x)\in\Lambda_1(Q)$ функцияның Лебег интегралы деп аталады:

$$(L)\int_Q f(x)dx=\sup_k \int_Q f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_Q f_k(x)dx$$

Бул жерде Лебег интегралы Λ_1 да анықланған функциялар ушын келтирдик. Q - интервалында берилген ҳақыйқый мәнисли $f(x)$ функцияның Лебег интегралы

$$f(x)=f'(x)-f''(x)$$

көрниске ийе болады, бунда $f'(x), f''(x)$ функциялар $\Lambda_1(Q)$да анықланған. Солай етип, Q да берилген $f(x)$ функцияның Лебег интегралы

$$(L)\int_Q f(x)dx=(L)\int_Q f'(x)dx-(L)\int_Q f''(x)dx$$

Лебег интегралы Λ_1 да анықланған функциялардың айырмаларына байланыслы емес. $\Lambda(Q)$–арқалы Q интервалда Лебег мәнисинде интегралланыўшы барлық функциялар көплигин белгилеймиз.

Гильберт кеңислиги.

H - сызықлы кеңисликте скаляр көбейме киритилген делинеди, егер қәлеген $h_1, h_2 \in H$ элементлер жуплығына комплекс сан сәйкес қойылған болып ҳәм ол төмендеги шәртлер орынлы болса:

1) $(h,h) \geq 0$, $(h,h) = 0 \Leftrightarrow h = 0$;

2) $(h_1, h_2) = \overline{(h_2, h_1)}$;

3) $(ch_1, h_2) = c(h_1, h_2)$;

4) $(h_1 + h_2, h) = (h_1, h) + (h_2, h)$

онда бул жуплық скаляр көбейме деп аталады. Коши–Буняковский теңсизлиги

$$|(h_1, h_2)|^2 \leq (h_1, h_1)(h_2, h_2) \tag{1.1.1}$$

H–кеңисликте скаляр көбейме норма арқалы $\|h\| = \sqrt{(h,h)}$ түрде аңлатылады. Сонда (1.1.1) теңсизлиги $|(h_1, h_2)|^2 \leq \|h_1\| \cdot \|h_2\|$ көрниске ийе болады. Скаляр көбейме жәрдеминде анықланған норма толық сызықлы кеңислик болса, онда Гильберт кеңислик деп аталады. h_1 ҳәм h_2 векторлар арасындағы мүйеш φ болса

$$Cos\varphi = \frac{(h_1, h_2)}{\|h_1\| \cdot \|h_2\|} \tag{1.1.2}$$

формула жәрдеминде анықланады. Егер $(h_1, h_2) = 0$ болса, онда (1.1.2) формулада $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, демек h_1 ҳәм h_2 векторлары ортогонал делинеди.

§ 1.2. Ярым группалардың генераторы ҳәм оның спектры

Мейли H – гильберт кеңислигинде T_t $(t \geq 0)$ шегараланған операторлардың бир параметрлик семействосы берилген болсын.

Анықлама 1.2.1. T_t $(t \geq 0)$ семействосы ярым группа делинеди, егер төмендеги шәртлер орынлы болса:

1. $T_{t+s} = T_t T_s$ егер $t, s \geq 0$, $T_0 = I$.

2. $T_t \varphi$ фунциясы ҳәр бир фиксерленген $\varphi \in H$ ушын, H кеңислигинде үзликсиз болады.

Ярым группалардың анықламасынан ярым группаның нормасын баҳалаймыз.

Теорема 1.2.1. Мейли T_t $(t \geq 0)$ ярым группасы берилген болсын. Сонда β ҳәм $M \geq 1$ турақлылары бар болып, теңсизлик орынлы болса

$$\|T_t\| \leq M e^{\beta t} \tag{1.2.1}$$

Дәлиллеў. Мейли $c_i = \sup\limits_{t \in [0,1]} \|T_t\|$ болсын ҳәм $[t]$ арқалы t ның пүтин бөлегин белгилеймиз, онда

$$T_t = T_{[t]} T_{t-[t]} = (T_1)^{[t]} T_{t-[t]}$$

қәлеген $t \geq 0$ теңликке ийе боламыз. Буннан

$$\|T_t\| \leq c_1 e^{\beta [t]}$$

келип шығады, бул жерде $\beta = \ln\|T_1\|$. Нәтийжеде

$$\|T_t\| \le Me^{\beta t},\ t \ge 0$$

бунда $M = c_1$, егер $\beta \ge 0$ ҳәм $M = c_1 e^{-\beta}$, егер $\beta < 0$. Дәлилленди.

Анықлама 1.2.2. β - санлардың анық төменги шегарасы ушын (1.2.1) теңсизлиги орынлы болса, онда ярым группаның өсиў тәртиби делинеди.

Анықлама 1.2.3. Егер өсиў тәртиби ноль ҳәм M=1 болса, онда

$$\|T_t\| \le 1$$

ярым группа қысқартырыўшы делинеди.

Мейли T_t $(t \ge 0)$ ярым группасы берилген болсын.

Анықлама 1.2.4. Шегараланбаған G операторы ҳәм $\varphi \in D(G)$ ушын

$$G\varphi = \lim_{h \to +0} \frac{T_h\varphi - \varphi}{h}$$

қатнасы орынлы болса, онда G операторы ярым группаның генераторы деп аталады.

Мысал. 1.2.1. Мейли $B : H \to H$ шегараланған оператор болсын. Сонда T_t $(t \ge 0)$ операторлар семейprobablyсы мына формула жәрдеминде анықлаймыз

$$T_t = I + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}B^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}B^n\ . \qquad (1.2.2)$$

Бул қатар барлық $t \ge 0$ оператордың нормасы жыйнақлы болады. Солай етип, операторлар семейprobablyсы ярым группа, ал В операторына қарата генератор болады.

Мысал 1.2.2. $C[0,\infty)$- кеңисликте $f(x)f(y)=f(x+y),\ x,y\geq 0$ теңлигин қанаатландыратуғын функциялар ярым группа болады.

Жоқарыда келтирилген 1.2.1-мысалда қәлеген шегараланған оператор ярым группаның генераторы екенлигин көрдик. Бирақ шегараланбаған ҳәр қандай операторлар генератор бола бермейди.

Теорема 1.2.2. Ярым группаның генераторы Н – кеңисликте тығыз болған анықланыў областына ийе болады.

Дәлиллеў. Мейли T_t ярым группалардың генераторы G болсын. Дәслеп ҳәр қандай $\varepsilon > 0$ ҳәм $\varphi_0 \in H$ элементлер ушын

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T_{t\varphi_0}\,dt \tag{1.2.3}$$

$D(G)$ ға тийисли екенлиги көрсетемиз. (1.2.3) элементлери Н та тығыз көпликти пайда етеди, яғный $\forall\varphi_0 \in H$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\| \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \|T_t\varphi_0 - \varphi_0\|dt = 0\,.$$

Екинши тәрептен

$$\frac{T_h - I}{h}\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon h}\int_0^\varepsilon (T_{t+h}\varphi_0 - T_t\varphi_0)dt =$$

$$\frac{1}{\varepsilon h}\left\{\int_h^{\varepsilon+h} T_t\varphi_0 dt - \int_0^\varepsilon T_t\varphi_0 dt\right\} = \frac{1}{\varepsilon h}\left\{\int_\varepsilon^{\varepsilon+h} T_t\varphi_0 dt - \int_0^p T_t\varphi_0 dt\right\},$$

буннан

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{T_h - I}{h}\varphi_\varepsilon - \frac{T_\varepsilon - I}{\varepsilon}\varphi_0\right\| = 0 .$$

Бизлер $\varphi_\varepsilon \in D(G)$ көрсетик ҳәм

$$G\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\left(T_\varepsilon\varphi_0 - \varphi_0\right).$$

Дәлилленди.

Теорема 1.2.3. Мейли T_t ҳәм G сәйкес түрде ярым группа ҳәм генератор болсын. Сонда T_t оператор-функция $D(G)$ анықланыў областын өзине түрлендиреди ҳәм

$$\frac{d}{dt}\left(T_t\varphi\right) = GT_t\varphi = T_tG\varphi \qquad (1.2.4)$$

$\forall\varphi \in D(G), t \geq 0$ қатнаслар орынлы болады.

Теореманың дәлиллениўи мына теңликтен келип шығады:

$$\frac{T_h - I}{h}T_t\varphi = T_t\frac{T_h - I}{h}\varphi$$

лимитке өтиў жолы менен келип шығады.

Теорема 1.2.4. Ярым группалардың генераторы туйық оператор болады.

Дәлиллеў. Мейли T_t ярым группалардың генераторы G болсын. Сондай қәлеген избе-излик $\{\varphi_k\} \subset D(G)$ алып, яғный φ_k ҳәм G_{φ_k} жыйнақлы, сәйкес шеклери φ_0 ҳәм y_0 болсын. (1.2.4) тен ҳәм $h > 0$ болғанда

$$\frac{1}{h}\left(T_h\varphi_k-\varphi_k\right)=\frac{1}{h}\int_0^h\left(T_t\right)'\varphi_k dt=\frac{1}{h}\int_0^h T_t G\varphi_k dt$$

теңлиги орынлы болады. $k\to\infty$ (h -фиксерленген) шекке өтсек, онда

$$\frac{1}{h}\left(T_h\varphi_0-\varphi_0\right)=\frac{1}{h}\int_0^h T_t y_0 dt\,.$$

h ты нолге умтылдырсақ теңликтиң оң жағының лимити бар болады ҳәм ол y_0 ға тең, нәтийжеде $\varphi_0\in D(G)$ ҳәм $G\varphi_0=y_0$. Дәлиленди.

G оператордың резолвентасын $R(\lambda)$ арқалы белгилеймиз, яғный

$$R(\lambda)=\left(\lambda I-G\right)^{-1},$$

бунда $\lambda\in C$.

Ярым группа генераторының спектрине шәртлер қойыўы зәрүр. Дара жағдайда бул шәртлер ярым группалардың өсиў тәртибине байланыслы болады.

Теорема 1.2.5. Мейли T_t ярым группа, ал β_0 өсиў тәртиби болсын. Онда $\{\lambda\in C:\operatorname{Re}\lambda>\beta_0\}$ көплиги G оператордың резольвенталар көплигине тийисли болады. Бунда

$$R(\lambda)\varphi=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t\varphi dt\,,\ \operatorname{Re}\lambda>\beta_0 \tag{1.2.5}$$

Дәлиллеў. Мейли $\operatorname{Re}\lambda\geq\beta>\beta_0$ болсын. Онда $M(\beta)$ бар болып, (1.2.1) теңсизлиги орынлы болса, онда интеграл

$$J(\lambda)\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt$$

теӊ өлшеўли, абсолют жыйнақлы ҳәм шегараланған операторды анықлайды. G операторы туйық болғанлықтан теореманы дәлиллеў ушын

$$(\lambda I - G)J(\lambda)\varphi = J(\lambda)(\lambda I - G)\varphi = \varphi$$

теӊликти дәлиллесек жеткиликли $\forall \varphi \in D(G)$.

λ ни фиксерлесек ҳәм $\varphi \in D(G)$ болса, онда

$$(\lambda I - G)T_t \varphi = T_t(\lambda I - G)\varphi \tag{1.2.6}$$

теӊликтен $e^{-\lambda t}(\lambda I - G)T_t \varphi$ функцияның $[0,\infty)$ да интегралланыўшы екенлиги келип шығады. $\lambda I - G$ оператордың туйық екенлигинен

$$(\lambda I - G)J(\lambda)\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda I - G)T_t \varphi dt = \lambda J(\lambda)\varphi - \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t)'\varphi dt$$

ийе боламыз ҳәм бөлеклеп интегралласақ, онда

$$(\lambda I - G)J(\lambda)\varphi = \lambda J(\lambda)\varphi + \varphi - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt = \lambda J(\lambda)\varphi + \varphi - \lambda J(\lambda)\varphi = \varphi.$$

(1.2.6) дан

$$J(\lambda)(\lambda I-G)\varphi=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t(\lambda I-G)\varphi dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda I-G)T_t\varphi dt=\varphi$$

келип шығады. Дәлилленди.

Салдар. Теорема 1.2.5 тиң шәртлери орынлы болғанда

$$\frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k}=(-1)^k\int_0^\infty t^k e^{-\lambda t}T_t\varphi dt \qquad (1.2.7)$$

формула орынлы болады, бул жерде $\operatorname{Re}\lambda>\beta_0$, $k=1,2,3,....$.

Дәлиллеў. (1.2.7) формулада барлық интеграллардың абсолют жыйнақлы екенлигинен келип шығады.

§ 1.3. Операторлар алгебрасы

Мейли H - гильберт кеңислиги болсын. Сонда $B(H)$ - арқалы H - кеңислигиндеги барлық шегаралған операторлар көплигин белгилеймиз.

Қәлеген A алгебрасының a,b элементлери ушын $a \to a^*$ түйинлес-сызықлы сәўлелениўинде $a^{**} = a$ ҳәм $(ab)^* = b^* a^*$ теңликлери орынлы болса, онда бул сәўлелениў A алгебрасының инволюциясы деп аталады [8-12].

$(A,*)$ жуплығы инволюцияланған алгебра ямаса * - алгебра деп аталады. Егер $S - A$ ның үлеси көплиги болып, $S^* = \{a^* | a \in S\}$ бунда $S = S^*$ болса, онда S, A да өз-өзине түйинлес болады.

A алгебрадағы B өз-өзине түйинлес үлес алгебра *- үлес алгебра деп аталады.

Анықлама 1.3.1. A ҳәм B *- алгебралар ҳәм $\varphi : A\varphi B$ гомоморфизм, бунда φ түйинлес элементин сақлайды, яғный $a \in A$ ушын $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$ болса, онда φ^*-гомоморфизм деп аталады.

Мейли X - векторлық кеңислик ҳәм сызықлы $p : X \to X$ сәўлелендириўи $p^2 = p$ орынлы болса, онда р идемпотент деп аталады.

Анықлама 1.3.2. Егер $X = X \oplus Z$ бунда X ҳәм $Z - X$ теги векторлық үлес кеңислик болса, онда X та жалғыз p идемпотент бар болады, бунда $p(x) = y$ ҳәм $\ker(p) = z,$ бундай р оператор проектор деп аталады. (Ω,μ)- өлшемли кеңислик пенен бирге $L^\infty(\Omega,\mu) - \Omega$ дағы шегараланған комплекс өзгериўшили функциялар көплиги, $B_\infty(\Omega) - \Omega$ дағы шегараланған комплекс өзгериўшили функциялар көплиги $B(X) - X$ ты өз-өзине өткизетуғын барлық шегараланған сызықлы сәўлелендириўлер көплиги.

Анықлама 1.3.3. Егер $A - x$ алгебра субмультипликатив норма менен толық бөлистирилген ҳәм $\|a^*\| = a,\ a \in A$ шәртин қанаатландырса, онда A^* - банах алгебрасы деп аталады. Буннан тысқары егер A бирлик элементке ийе болып ҳәм $\|1\| = 1$ болса, онда A "1", бирлик элементке ийе *- банах алгебра деп аталады.

Анықлама 1.3.4. $C*$–алгебра, бул $\|a*a\| = \|a\|^2$ шәртин қанаатландыратуғын * - банах алгебрасы.

$C*$- алгебраның туйық үлес *- алгебрасы және де $C*$ - алгебра болады. Соның ушын бизлер оларды $C*$- үлес алгебралар деп айтамыз. Егер $C*$-алгебра "1" бирлик элементке ийе болса, онда автомат түрде $\|1\| = 1$ ҳәм $\|1\| = \|1*1\| = \|1\|^2$ орынлы болады. Жоқарыдағыдан, егер p нольлик емес проектор болса, онда $\|p\| = 1$ болады.

Егер $u - A$ ның унитар бирлик элементи болса, онда $\|u\| = 1$ ҳәм $\|u\|^2 = \|uu*\| = \|1\| = 1$ болады. Егер $\lambda \in \delta(u)$ болса, онда $\lambda^{-1} = \sigma(u^{-1}) = \sigma(u*)$. Солай етип $\|\lambda\| \le 1$ ҳәм $\|\lambda^{-1}\| \le 1$ яғный $\|\lambda\| = 1$ буннан $\sigma(u) \le T$ орынлы болады.

Мысаллар.

1) $\lambda \to \overline{\lambda}$ комплекс түйинлеси менен берилген $\not\subset$ скаляр майдан инволюциясы менен бирлик элементке ийе $C*$- алгебра болады.

2) Егер Ω - локаль компактлы хаусдорф кеңислиги болса, онда $C_0(\Omega)$ сы $f \to \overline{f}$ инволюция менен $C*$ - алгебра болады.

3) (a) $l^\infty(S)$, бунда S - қәлеген көплик;

(b) $L^\infty(\Omega, \mu)$, бунда (Ω, μ) – кеңислик өлшеми менен ;

(c) $C_b(\Omega)$, бунда Ω-топологиялық кеңислик ;

(d) $B_\infty(\Omega)$, бунда Ω - өзгериўши кеңислик;

Жоқарыдағыдан, барлық санап өтилген алгебралар $f \to \overline{f}$ инволюциялы $C*$ - алгебра болады.

4) Егер H - гильберт кеңислиги болса, онда $B(H)$, C^* - алгебра болады.

5) Егер $(A_\lambda)_{\lambda\in\lambda}$ - қәлеген $C*$ - алгебралардың семействосы болса, онда $\oplus_\lambda A_\lambda$ туўры қосындысы ноқатлы инволюциялы $C*$ - алгебра болады ҳәм $\oplus_\lambda^{C_0} A_\lambda$ шекли қосындысы оның туйық өз-өзине түйинлес идеалы болады.

6) Егер Ω - бос емес көплик ҳәм $A-C*$ - алгебра болса, онда $l^\infty(\Omega,A)$ анықланған инволюциялы $C*$ - алгебра болады. Егер Ω - локаль компактлы хаусдорф кеңислиги болса, онда $f:\Omega\to A$ үзликсиз функциясын шексизликте нольге айланады деп айтамыз, егер қәлеген $\varepsilon>0$ саны ушын $\{w\in\Omega\}\|\ f(w)\|\geq\varepsilon\}$ көплиги компактлы болады. Барлық бундай функциялар көплигин $C_0(\Omega,A)$ арқалы белгилеймиз. Бул көплик $l^\infty(\Omega,A)$ $l^\infty(\Omega,A)$ да $C*$ - алгебра болады.

Теорема 1.3.1. Егер $a-C*$ - алгебраның өз-өзине түйинлес элементи болса, онда $r(a)=\|a\|$.

Дәлиллеў. Солай етип $\|a^2\|=\|a\|^2$ ҳәм индукция арқалы $\|a^{2n}\|=\|a\|^{2n}$ болады. Соның ушын $r(a)=\lim\|a^n\|^{\frac{1}{n}}=\lim\|a^{2n}\|^{\frac{1}{2n}}=\|a\|$. Теорема дәлилленди.

Нәтийже 1.3.2. *-алгебраның $C*$ - алгебраға айланыўында көби менен бир норма бар болады.

Дәлиллеў. Егер A - * -алгебрада $\|\bullet\|_1$ ҳәм $\|\bullet\|_2$ нормалар оны $C*$- алгебраға айландырса, онда $\|a\|_j^2=\|a*a\|_j=r(a*a)=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(a*a)}|\lambda|\quad j=1,2,$ буннан $\|a\|_1=\|a\|_2$. Нәтийже дәлилленди.

Лемма 1.3.3. Мейли A – банах алгебрасы болсын, сондай инволюция тәминленген, бунда $a\in A$ ушын $\|a^2\|\leq\|a*a\|$. Онда A, $C*$ - алгебра болады.

Дәлиллеў. $\|a\|^2\leq\|a*a\|\leq\|a*\|\,\|a\|$ бул теңсизликтен барлық a ушын $\|a\|\leq\|a*\|$ болады. Буннан $\|a\|=\|a*\|$ ҳәм соның ушын $\|a\|^2\leq\|a*a\|$. Лемма дәлилленди.

Ҳәр бир A $C*$ - алгебраға биз қандайда бир $M(A)$ A ны идеал сыпатында өз ишине алатуғын $C*$ - алгебрасын сәйкес қойамыз. Бул алгебра теорияның айрым бөлимлерине керек болады, $A-C*$- алгебра ҳәм қәлеген $a,b \in A$ ушын $L(ab)=L(a)b, R(ab)=aR(b)$ ҳәм $R(a)b=aL(b)$ орынлы болса, онда шегараланған A ға сызықлы сәўлелендириўши (L,R) жуплығы екилик централизатор деп аталады.

Мысал. Егер $c \in A$ ҳәм $L_c(a)=ca$ ҳәм $R_c(a)=ac$, бул жерде L_c ҳәм R_c F ға сызықлы сәўлелендириўлер болса, онда $(L_c, R_c)-A$ алгебраның екилик централизаторы болады. Барлық $c \in A$ ушын тәкирарлаў аңсат $\|c\|=\sup\limits_{\|b\|\le 1}\|cb\|=\sup\limits_{\|b\|\le 1}\|bc\|$ ҳәм соның ушын $\|L_c\|=\|R_c\|=\|c\|$ теңлиги орынлы болады.

Лемма 1.3.4. Егер (L,R) жуплығы $A*$ - алгебраның екилик централизаторы болса, онда $\|L\|=\|R\|$.

Дәлиллеў. Егер $\|a\,L(b)\|=\|R(a)b\|\le\|R\|\|a\|\|b\|$ || болса, онда

$$\|L(b)\|=\sup_{\|a\|\le 1}\|aL(b)\|\le\|R\|\|b\|$$

буннан

$$\|L\|\le\|R\|$$

Егер $\|R(a)b\|=\|aL(b)\|\le\|L\|\|a\|\|b\|$ болса, онда $\|R(a)\|=\sup\limits_{\|b\|\le 1}\|R(a)b\|\le\|L\|\|a\|$ ҳәм соның ушын $\|R\|\le\|L\|$.

Солай етип $\|L\|\le\|R\|$ теңлиги орынлы екен. *Лемма дәлилленди.*

Енди $B(H)$ –кеңислигинде проекторлардың базы бир қәсийетлерин қарастырамыз [2]:

$n(a)$ – проектор $\ker\ a=\{\varphi\in H : a\varphi=0\}$ ядросына.

$l(a)$ – проектор $\overline{Ran}\ \ a=a(\overline{H})$ туйық образына;

$r(a) = 1 - n(a).$

Жоқарыда анықланған проекторлар ушын төмендеги теңликлер орынлы,

1) $r(a) = l(a^*)$;

2) $l(a)$ (сәйкес $r(a)$) орынлы болатуғын $e \in B(H)$ проекторлардың ең кишиси бар болады (сәйкес $ae = a$). $l(a) - a$ операторының шеп тасыўшысы, ал $r(a)$ – оң тасыўшысы деп аталады. Егер $a = a^*$ болса, онда $l(a) = r(a)$ ҳәм $s(a) = l(a)$ проекторы a проектордың тасыўшысы деп аталады. Бундай проекторлар ушын $r(a) = s(a^*a)$ ҳәм $l(a) = r(a^*) = s(aa^*)$ орынлы болады. Егер $N \subset H$ үлес кеңислиги бар болып ҳәм барлық $\varphi \in N, \varphi \in N^{\perp}$ ҳәм $\vartheta\varphi = 0$ ушын $\|\vartheta\varphi\|=\|\varphi\|$ орынлы болса, онда $\vartheta \in \vartheta \in B(H)$ операторы дара изометрия деп аталады. ϑ ушын N үлес кеңислиги басланғыш кеңислик, ал $\vartheta(N)$-ақырғы үлес кеңислиги деп аталады. ϑ - дара изометриясы ушын $r(\vartheta) = \vartheta\vartheta^*$ $l(\vartheta) = \vartheta^*\vartheta$ тенликлер орынлы $\vartheta^*\vartheta$ проекторы (сәйкес $\vartheta\vartheta^*$ проекторы) ϑ дара изометриясының басланғыш проекторы (сәйкес ақырғы) проекторы деп аталады [11].

Тастыйықлаў 1.3.5. Егер $\vartheta \in B(H)$ ҳәм $\vartheta^*\vartheta$-проектор болса, онда $\vartheta\vartheta^*$-проектор ҳәм $\vartheta^*\vartheta(H)$ үлес кеңисликтиң ϑ-басланғыш дара изометрия болады.

Дәлиллеў. Егер $\vartheta \in B(H)$ ҳәм $\vartheta\vartheta^*$ -проектор болса, онда $(\vartheta^*\vartheta)^2=\vartheta^*\vartheta$ теңлигинен,

$$\|\vartheta-\vartheta\vartheta^*\vartheta\|^2=\|(\vartheta^*-\vartheta^*\vartheta\vartheta^*)(\vartheta-\vartheta\vartheta^*\vartheta)\|=0$$

келип шығады.

Буннан $\vartheta=\vartheta\vartheta^*\vartheta$ ҳәм $(\vartheta\vartheta^*)^2=\vartheta\vartheta^*$, яғный $\vartheta\vartheta^*$ - проектор.

Егер $\varphi \in (\vartheta^*\vartheta)(H)$ болса, онда $\varphi = (\vartheta^*\vartheta)\varphi$ ҳәм

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi,\varphi) = (\vartheta^*\vartheta\varphi,\varphi) = \|\vartheta\varphi\|^2$$

Егер $\varphi\in((\vartheta^*\vartheta)(H))^{\perp}$ болса, онда $\vartheta^*\vartheta\varphi=0$ ҳәм $\vartheta\varphi=\vartheta\vartheta^*\vartheta\varphi=0$. Солай етип ϑ-басланғыш $\vartheta^*\vartheta(H)$ үлес кеңисликтиң дара изометрия болады. Тастыйықлаў дәлилленди.

Теорема 1.3.6 [11]**.** Ҳәр бир $a\in B(H)$ ушын жалғыз оң $b\in B(H)$) операторы ҳәм жалғыз $\vartheta\in B(H)$ дара изометриясы бар болса, онда $a=\vartheta b$ ҳәм $\vartheta^*\vartheta = s(b)$ теңликлери орынлы болады

Дәлиллеў. Мейли $b=(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ болсын, онда $B(H)$ тағы ϑ_0 операторын төмендегише анықлаймыз.

$$\vartheta_0(b\varphi) = a\varphi,\ \varphi\in H$$

Буннан барлық $\varphi\in H$ ушын,

$$\|\vartheta_0(b\varphi)\|^2 = \|a\varphi\|^2 = (a^*a\varphi,\varphi) = (b^2\varphi,\varphi) = \|b\varphi\|^2$$

орынлы болса, онда берилген $\overline{b(H)} = s(b)(H)$ үлес кеңислигинде ϑ_0 операторы изометриялық операторға шекем даўам етеди.

$$\vartheta\varphi = \begin{cases} \vartheta_0\varphi, & \varphi\in s(b)(H); \\ 0, & \varphi\in(s(b)(H))^{\perp} \end{cases}$$

деп $\vartheta\in B(H)$ дара изометриясын анықлаймыз. Онда $a=\vartheta b$ ҳәм $\vartheta^*\vartheta = r(a) = s(b)$

Мейли $a = \vartheta_1 b_1,\ b_1\vartheta_1 \in B(H),\ b_1 \ge 0, \vartheta_1 * \vartheta_1 = s(b_1)$ болсын, онда $a * a = b_1\vartheta_1 * \vartheta_1 b_1 = b_1 s(b_1) b_1 = b_1^2$. Буннан $b_1 = (a * a)^{\frac{1}{2}} = b$. Егер $b\varphi \in s(b)(H)$ болса, онда

$$\vartheta(b\varphi) = a\varphi = \vartheta_1(b_1\varphi) = \vartheta_1(b\varphi)$$

ҳәм $\varphi \in (s(b)(H))^{\perp}$ ушын

$$\vartheta(\varphi)=0=\vartheta_1(\varphi)$$

Сонлықтан $\vartheta=\vartheta_1$. Теорема дәлилленди.

Бунда $b = (a * a)^{\frac{1}{2}}$ операторы a операторының модули деп аталады ҳәм $|a|$ көринисинде белгиленеди. Бул жерде

$$a = \vartheta|a|;$$

теңлик $-a$ операторының поляр жайылмасы деп аталады, бунда $\vartheta * \vartheta = s(|a|)$. Бул жерде соны айтыўымыз керек $|a| = \vartheta * a$ ҳәм ϑ ның қурылыўында шеп тасыўшы $l(a)$ менен $\vartheta\vartheta*$ сәйкес келеди.

Мейли $a \in B(H)$ болсын ҳәм $R_0(a) - a$ ҳәм l ден пайда болған B(H) тың *-үлес алгебрасы. Ҳәлсиз топологияда $R_0(a)$ ның туйықланыўын $R(a)$ арқалы аңлатамыз. $R(a) - a$ ҳәм l ди өз ишине алатуғын ең киши ҳәлсиз туйықланған *-үлес алгебра болады. Солай етип, $R(a)$ $B(H)$ кеңислигиндеги нормадан пайда болған туйық топологияда, дара жағдайда қәлеген өз-өзине түйинлес $b \in R(a)$ ушын $\Phi(C(\sigma(b))) \subset R(a)$ болады.

Лемма 1.3.7. Мейли $a = \vartheta|a| - a$ операторының поляр жайылмасы болсын, онда $\vartheta|a| \in R(a)$ болады.

Дәлиллеў. Мейли $|a| = (a^* a)^{\frac{1}{2}},\ a^* a \in R(a),\ \Phi(C(\sigma(a^* a))) \subset R(a)$ болсын, онда $|a| \in R(a)$. $f_n(t) = t(t + n^{-1})^{-1}$ болса, онда

$$a_n = |a|\left(|a| + n^{-1}l\right)^{-1} = f_n\left(|a|\right) \in R(a)$$

so-топологияда $a_n \to l$ да wo-топологияда $a(|a| + n^{-1}l)^{-1} \to \vartheta a_n \to \vartheta$ буннан $a\left(|a| + n^{-1}l\right)^{-1} \in R(a)$ болса, онда $\vartheta \in R(a)$. Лемма дәлилленди.

Салдар 1.3.8. Ҳәр бир $a \in B(H)$ ушын $\vartheta^* \vartheta = r(a),\ \vartheta\vartheta^* = l(a)$ орынлы болатуғын $\vartheta \in R(a)$ дара изометриясы бар болады.

Дәлиллеў. Мейли $a = \vartheta|a| - a$ ның поляр жайылмасы болсын, онда жоқарыдағы лемма бойынша $\vartheta \in R(a)$ болады, бунда $\vartheta^* \vartheta = s\left(|a|\right) = r(a),\ \vartheta\vartheta^* = l(a)$. Салдар дәлилленди.

Мейли p, q -$B(H)$ тағы қәлеген проектор болсын. $R(p,q)$ арқалы $B(H)$ тағы ең киши ҳәлсиз туйықланған p, q ҳәм l ди өз ишине алатуғын *-үлес алгебрасын белгилеймиз.

Тастыйықлаў 1.3.9. Қәлеген $p, q \in B(H)$ проекторы ушын $\vartheta^* \vartheta = p \vee q - q$, $\vartheta\vartheta^* = p - p \wedge q$ орынлы болатуғын $\vartheta \in R(p,q)$ дара изометриясы бар болады.

Дәлиллеў. Мейли $p, q \in B(H)$ болсын. Сонда

$$r(p(l-q)) = l - q - (l-q) \wedge (l-p),\ l(p(l-q)) = r((l-q)p) = p - p \wedge q$$

теңликлерин жаза аламыз, солай етип

$$l = p \vee q + (p \vee q)^{\perp} = p \vee q + (l-p) \wedge (l-q)$$

болса, онда

$$p \vee q - q = l - q - (l - q) \wedge (l - p) = r(p(l - q)).\ R(p(l - q)) \subset R(p, q)$$

екенлиги анық, ал, онда $\vartheta * \vartheta = p \vee q - q,\ \vartheta\vartheta * = p - p \wedge q$ лар ушын $\vartheta \in R(p, q)$ бар болады. Бул жоқарыдағы салдардан келип шығады. Тастыйықлаў дәлилленди.

Енди фон Нейман алгебрасында поляр жайылманы қарастырамыз [5].

Теорема 1.3.10. Мейли M фон Нейман алгебрасы ҳәм $a \in M$ болсын. Сонда a төмендегише жайылады.

$$a = u|a|,$$

бул жерде $|a| = ((a * a)^{\frac{1}{2}})$ ҳәм $u \in M$ дара изометриясы сондай $u * u = s(|a|)$ ҳәм $uu* = s(|a*|)$ шәртлерин қанаатландырады. Бундай жайылма бирден-бир болады. Бул жайылма поляр жайылма делинеди.

Дәлиллеў. Мейли $b(n) = \left(a * a + \frac{1}{n}1\right)^{\frac{1}{2}}$ (n - оң пүтин сан) ҳәм

$$a(n) = a\left(a * a + \frac{1}{n}1\right)^{-\frac{1}{2}};$$

болсын, онда

$$a(n) * \cdot a(n) = \left(a * a + \frac{1}{n}1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot a * a\left(a * a + \frac{1}{n}1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a * a}{a * a + \frac{1}{n}1};$$

Буннан $\left\|a(n)\right\| \leq 1$ ҳәм $a(n)\left(a*a+\frac{1}{n}1\right)^{\frac{1}{2}}=a$ буннан $h(n)\to\left(a*a\right)^{\frac{1}{2}}$ болғанлықтан, қәлеген ε>0 ушын сондай n_0 саны (точкасы) табылып

$$\left\|h(n)-(a*a)^{\frac{1}{2}}\right\| < \varepsilon(n\geq n_0).$$

фон Нейман алгебрасының s бирлик сферасының ҳәлсиз компактлы болғанлықтан $\{a(n)\}$ да жыйналатуғын b точкасы бар болады. Бул жерде

$$\left\{a(n)(a*a)^{\frac{1}{2}}\right\}\subset a+\varepsilon s \quad (n\geq n_0),\ b(a*a)\in a+\varepsilon s.$$

Бунда ε қәлеген болғанлықтан, $a=b(a*a)^{\frac{1}{2}}$.

Мейли p (сәйкес q) $(a*a)^{\frac{1}{2}}$ (сәйкес $(aa*)^{\frac{1}{2}}$) болсын. Сонда $a=qa$ ҳәм

$$\{(1-q)a\}\{(l-q)a\}*=(l-q)aa*\ (l-q)\ aa*=0.$$

Ал, буннан

$$a=qa=qb(a*a)^{\frac{1}{2}}.\ a*a=(a*a)^{\frac{1}{2}}\ pb*qbp(a*a)^{\frac{1}{2}}$$

ҳәм сонлықтан $(a*a)^{\frac{1}{2}}(p-pb*qbp)(a*a)^{\frac{1}{2}}=0.$ Бул жерде $||b||\leq 1$ болғанлықтан, бизлер $p=pb*qbp$ ийе боламыз. Егер $u=qbp$ анықласақ, сонда u дара изометриясы p бирлик проекторына ийе боламыз. Буннан тысқары,

$aa^* = u(a^*a)u^*$ ҳәм сонлықтан шекли проекторы upu*=q болады. Мейли a арқалы басқа полярлық жайылмаға ийе болсын деп уйғарамыз, яғный $a = u|a| = u'|a|$ сонда $u'^*a = |a| = u'^*u|a|$. Буннан $\left(p - u'^* u\right)|a| = 0$. Мейли $\Re = \{x \mid (p - u'^*u)x = 0, x \in M\}$ болсын. Онда R σ-туйық оң идеал болып есапланады ҳәм базы бир l проекциясы ушын $R = lM$. Сонда $s(|a|) = p \le l$ ҳәм $p - u'^*u$. Ал, бул бир тәрептен $pu'^*up = u'^*u$. Буннан $p = u'^*u$ ҳәм сонлықтан $u' = u$. Теорема дәлилленди.

Биринши бап бойынша жуўмақ

Биринши бапта операторлар алгебралары ҳәм операторлардың ярым группалары қаралған. Биринши баптың биринши параграфинде функционаллық анализдиң элементлери болған Гильберт кеңислиги, Лебег интералы, Банах кеңислиги, өлшеўли функциялар ҳаққында тийкарғы мағлыўматлар келтирилген. Ал екинши параграфте болса, ярым группалардың генераторы ҳәм спектри қарастырылған. Үшинши параграф операторлар алгебраларына бағышланған болып, бунда олардың қәсийетлери ҳәм мысаллар қаралған.

2-БАП. АВТОМОРФИЗМЛЕРДИҢ ЯРЫМ ГРУППАСЫ

Екинши бап үш параграфтан ибарат болып, бунда операторлар алгебраларында автоморфизмлер ярым группасының қәсийетлери қаралған. Биринши параграфта аналитикалық ярым группа критериялары келтирилген. Екинши параграфта ярым группа автоморфизмлери ҳәм оның қәсийетлери үйренилген. Үшинши параграфта матрицалар ушын автоморфизмлер ярым группасы қаралып өтилди.

§ 2.1. Аналитикалық ярым группалар

Бул параграфта ярым группа генераторының критерияларын қарастырамыз.

Теорема 2.1.1. Тығыз анықланыў областына ийе болған, туйық G операторы ярым группа генераторы болады сол ўақта, тек сол ўақта егер сондай λ_0 саны табылып, барлық $\lambda, \operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0$ санлары G операторының резольвентасы болады ҳәм бул санлар ушын теңсизликлер орынлы:

$$\left\| (R(\lambda))^k \right\| \leq \frac{c_1}{(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_0)^k}, \; k = 1,2,... \qquad (2.1.1)$$

бунда $c_1 > 0$ турақлы k ға ғәрезли емес.

Дәлиллеў. Зәрүрлиги. Мейли T_t ярым группа генераторы G болсын. Онда 1.2.5-теоремадан, егер $\operatorname{Re}\lambda > \beta_0$, бунда β_0 - өсиў тәртиби, онда λ резольвенталар көплигине тийисли болады. Сондай-ақ, резольвента аналитикалық оператор-функция болса, онда Тейлор қатарының коэффициентлери ҳәм (1.2.7) формуладан:

$$\left(R(\lambda)\right)^k \varphi = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1} e^{-\lambda t} T_t \varphi dt$$

(1.2.1) баҳалаў жәрдеминде $\left(R(\lambda)\right)^k$ баҳаласақ, қәлеген фиксерленген $\beta > \beta_0$ ҳәм $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ ушын

$$\left\|(R(\lambda))^k\right\| \le \frac{M}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1} e^{(\beta - \operatorname{Re}\lambda)t} dt = \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \beta)^k}.$$

Жеткиликли. Мейли G оператор теорема шәртин қанаатландырсын. Операторлардан G операторы болатуғын ярым группа дүземиз.

Шегараланған оператор киритемиз (Иосида аппроксимации):

$$G_n = nGR(n),$$

бунда $n > \lambda_0$ пүтин мәнислерди қабыл етеди. Енди G_n операторлардың G ға жыйнақлы екенлигин көрсетемиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|G_n\varphi - G\varphi\right\| = 0 \tag{2.1.2}$$

Дәслеп $\forall \varphi \in H$ ушын

$$\lim_{n\to\infty}\left\|n(nI - G)^{-1}\varphi - \varphi\right\| = 0 \tag{2.1.3}$$

теңликтиң орынлы екенин дәлиллеймиз. Егер $\varphi \in D(G)$ болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}\left\|n(nI-G)^{-1}\varphi-\varphi\right\|=\|R(n)G\varphi\|\le\frac{c_1}{n-\lambda_0}\|G\varphi\|.$$

(2.1.3) қатнастан $\varphi\in D(G)$ келип шығады. Басқа $\varphi\in H$ элементлер ушын (2.1.3) орынлы екенлиги $D(G)$тың H-кеңислигинде тығызлығыдан келип шығады ҳәм тең өлшеўли шегараланған операторлардың нормасы $nR(n)$:

$$\|nR(n)\|\le|n|\|R(n)\|\le\frac{c_1|n|}{n-\lambda_0}.$$

(2.1.3) ҳәм қатнастан

$$G_n\varphi-G\varphi=nR(n)G\varphi-G\varphi$$

(2.1.2) ға ийе боламыз. G_n шегараланған оператор болғанлықтан. Онда 1.2.1-мысалдағы (1.2.2) қатарды қоллансақ, $e^{G_n t}$ операторды анықлаймыз. Сонда

$$G_n=n^2(nI-G)^{-1}-nI$$

онда

$$e^{G_n t}=e^{-nt}e^{n^2(nI-G)^{-1}t}=e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k n^{2k}}{k!}(R(n))^k.$$

(2.1.1) теңсизлиги жәрдеминде баҳалаймыз

$$\left\|e^{G_n t}\right\|\le e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k n^{2k}}{k!}\left\|(R(n))^k\right\|\le c_1e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{tn^2}{n-\lambda_0}\right)^k\le c_1e^{\left(-n+\frac{n^2}{n-\lambda_0}\right)t}.$$

Солай етип, мүмкин болғанынша үлкен n лер ушын

$$\left\| e^{G_n t} \right\| \le e^{\frac{n\lambda_0 t}{n-\lambda_0}} \le c_2 e^{(\lambda_0+\varepsilon)t} \tag{2.1.4}$$

ийе боламыз, бунда $\varepsilon > 0$ қәлеген фиксерленген сан.

Мейли $\varphi \in D(G)$ болсын. Онда мүмкин болғанынша үлкен m ҳәм n лер ушын

$$e^{G_m t} - e^{G_n t} = \int_0^t \frac{d}{ds} e^{G_n(t-s)+G_m s} \varphi ds = \int_0^t e^{G_n(t-s)+G_m s}(G_m - G_n)\varphi ds,$$

(2.1.4) ден мынаған ийе боламыз

$$\left\| (e^{G_m t} - e^{G_n t}) \right\| \le c_2 e^{(\lambda_0+\varepsilon)t} t \left\| (G_m - G_n)\varphi \right\| \le c_3 \left\| (G_m - G_n)\varphi \right\|$$

ҳәм (2.1.2) дан

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \left(e^{G_m t} - e^{G_n t} \right)\varphi \right\| = 0 .$$

Буннан $e^{G_n t}$ операторы жыйнақлы, шегке ийе ҳәм оны T_t арқалы белгилеймиз. $e^{G_n t}$ оператор-функция үзликсиз t бойынша тең өлшеўли жыйнақлы болса, онда T_t оператор-функцияда үзликсиз болады. Теңликтен

$$e^{G_n(t+s)} = e^{G_n t} e^{G_m t}$$

ярым группаның қатнасларына ийе боламыз $T_{t+s} = T_t T_s$, $T_0 = I$. Нәтийжеде T_t күшли үзликсиз ярым группа болады.

Енди T_t ярым группалардың генераторы G оператор екенлигин көрсетемиз.

T_t ярым группалардың генераторын $\tilde{G}$ операторы арқалы белгилеймиз. Мейли $\varphi \in D(G)$ болсын. Теңликтен

$$e^{G_n t}\varphi - \varphi = \int_0^t e^{G_n s} G_n \varphi ds$$

төмендеги қатнасқа келемиз

$$T_t\varphi - \varphi = \int_0^t T_s G\varphi ds \qquad (2.1.5)$$

буннан $\varphi \in D(\tilde{G})$, яғный $\tilde{G}\varphi = G\varphi$, бунда $\varphi \in D(G)$. 2.5-теорема бойынша үлкен $\lambda > 0$ санлары ушын $\left(\lambda I - \tilde{G}\right)$ операторының образы H пенен үстпе-үст түседи, демек $\left(\lambda I - G\right)$ ның образыда, нәтийжеде G ҳәм $\tilde{G}$ операторлары бирдей болады. Дәлилленди.

Салдар 2.1.1. Егерде (2.8) шәртин

$$\left\| R(\lambda) \right\| \le \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \lambda_0} \qquad (2.1.6)$$

шәрти менен алмастырсақ теорема 1.2.6 орынлы болып қала береди. Егер $\lambda_0 = 0$ бул салдар Хилле-Иосида теоремасы болады. Толық формулировкасын келтиремиз.

Теорема 2.1.2 (Хилле-Иосида). Тығыз анықланыў областына ийе туйық G операторы қысқартырыўшы ярым группаның генераторы делинеди сол ўақта тек сол ўақта, егер барлық $\lambda > 0$ санлар G операторының резольвентасы болса, онда

$$\|R(\lambda)\| \le \frac{1}{\lambda} \tag{2.1.7}$$

теңсизлиги орынлы болады.

Дәлиллеў. Ярым группаның қысқартырыўшы екенин көрсетсек жетерли. Ҳақыйқатында (2.1.4) теңсизликтен

$$\left\| e^{G_n t} \varphi \right\| \le e^{\frac{1}{n}} \|\varphi\|$$

келип шығады, $n \to \infty$ лимитке өтсек,

$$\|T_t\| \le 1$$

теңсизлигине ийе боламыз. Дәлилленди.

Бир текли емес параболалық мәселелердиң күшли шешимлеринде аналитикалық ярым группа пайда болады.

Анықлама 2.1.1 [4]. Күшли үзликсиз T_t ярым группа аналитикалық делинеди, егер базы бир секторға

$$\nabla_\delta = \{\lambda \in C : |\arg\lambda| < \delta, \operatorname{Re}\lambda > 0\}, \;\; 0 < \delta \le \pi/2$$

аналитикалық даўам еттирилген болып, онда T_λ - $\overline{\nabla}_\delta$ да үзликсиз болады.

2.1.1-анықлама қолланыў қолай емес. Сонлықтан аналитикалық ярым группалардың критериясын келтиремиз.

Анықлама 2.1.2 [5]. Күшли үзликсиз ярым группа аналитикалық деп аталады, егер ω ҳәм $q \geq 0$ санлары табылып $\Omega_{q,\omega} = \{\lambda \in C : \operatorname{Re}\lambda > \omega, |\lambda| > q\}$ көплиги G генераторының спектрларынан ғәресиз ҳәм

$$\left\|(\lambda I - G)^{-1}\right\| \leq \frac{c_1}{|\lambda|},\ \lambda \in \Omega_{q,\omega} \tag{2.1.8}$$

теңсизлиги орынлы болады.

Теорема 2.1.3. Анықлама 2.1.1 ҳәм 2.1.2 өз-ара эквивалент.

Мейли T_t ярым группалардың генераторы G болсын. Мәселени қараймыз:

$$u'(t) - Gu(t) = f(t),\ t \in [0,1] \tag{2.1.9}$$

$$u(0) = 0. \tag{2.1.10}$$

Теорема 2.1.4 Мейли қәлеген $f \in C([0,1]; H)$ (2.1.9)-(2.1.10) мәселери күшли шешимге ийе ҳәм

$$\|Gu(\cdot)\| \leq c_1 \|f\| \tag{2.1.11}$$

теңсизлиги орынлы болса, онда T_t аналитикалық ярым группа болады.

Дәлиллеў. Қәлеген $\varphi \in D(G)$ алып ҳәм оны $v(t) = tT_t\varphi$ түрде жазамыз. Бунда v (2.1.9)-(2.1.10) мәселелердиң күшли шешими болады, $f(t) = T_t\varphi$. (2.1.11) ҳәм (2.1.12) теңсизликлерден

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \|tT_t\varphi\| \leq c_2 \|\varphi\|$$

келип шығады. Буннан G анықланыў областының тығызлығын H–та есапқа алсақ, онда $t>0$ ушын

$$\|GT_t\| \le c_2 t^{-1} \qquad (2.1.12)$$

баҳалаўына ийе боламыз. (2.1.12) дан $\forall \psi \in H$ ҳәм $t>0$ бизлер $T_t\psi \in D(G)$ ийе боламыз.

$$\frac{d^k}{dt^k} T_t \psi = \left(\frac{d}{dt} T_{t/k}\right)^k \psi \qquad (2.1.13)$$

қатнасының орынлы екенин көрсетемиз.

Ҳақыйқатында G операторының туйық екенлигин есапқа алсақ, онда

$$\frac{d^2}{dt^2} T_t \psi = \frac{d}{dt}(GT_t)\psi = G \lim_{n\to\infty} n(T_{t+1/n} - T_t)\psi =$$

$$G(GT_t)\psi = GT_{t/2} GT_{t/2}\psi = \left(\frac{d}{dt} T_{t/2}\right)^2 \psi \ .$$

Усы келитирилгенлерди тәкрарласақ (2.1.13) келип шығады. Буннан оператор-функция T_t дифференциалланыўшы ҳәм туўындыға қарата баҳалаўға

$$\left\|\frac{d^k T_t}{dt^k}\right\| = \left\|G^k T_t\right\| \le c^k k^k t^{-k} \qquad (2.1.14)$$

Бул баҳалаўлардан c_2 турақлы шама бар болып $|t-t_0| < c_2 t_0$ ушын Тейлор қатары

$$T_t = \sum_{k=0}^{\infty} (t - t_0)^k \frac{1}{k!} \frac{d^k T_{t_0}}{dt^k}$$

жыйнақлы болады. Нәтийжеде T_t, секторға∇_δ, $\delta > 0$ аналитикалық даўам етириў мүмкин екен.

Ескертиў 2.1.2 (2.1.12) шәрти аналитикалық ярым группалар ушын тек жеткиликли болып қалмастан, зәрүрли екенлигинде көрсетиўге болады.

Теорема 2.1.4 дан әҳмийетли теорема келип шығады.

Теорема 2.1.5. Мейли Н- кеңислигинде T_t аналитикалық ярым группа, ал G оператор оның генераторы болса, онда $\forall t_0 > 0$

$$T_{t_0} : H \to D(G) \qquad (2.1.15)$$

шегаралanған оператор болады.

Ескертиў 2.3. Теорема 2.1.3 ярым группа ушын орынлы емес.

§ 2.2. **Ярым группа автоморфизмлери ҳәм оның қәсийетлери**

Мейли R бирлик элементке ийе ассоциатив ҳәм коммутатив кольцо болсын.

Анықлама 2.2.1. R дара тәртипленген кольцо делинеди, егер бунда $\leq$ дара тәртиби берилген болып, төмендеги шәртлерди қанаатландырса:

1) $\forall x, y, z \in R \left(x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \right)$;

2) $\forall x, y \in R \ \ (0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy)$.

Бизлер ${}^{1}\!/_{m} \geq 0$, $m \in □$ болған дара тәртипленген кольцоларды қарастырамыз.

R кольцоның r элементи, терис емес деп атаймыз, яғный $0 \leq r$.

Мейли R–дара тәртипленген кольцо болсын. $G_n\left(R\right)$ арқалы, терис емес элементлерден ибарат барлық матрицалардан дүзилген $GL_n(R)$ группаның үлес ярым группаларын белгилеймиз.

R кольцоның барлық терис емес элементлер көплигин R^* арқалы белгилеймиз. Егер $\dfrac{1}{2} \in R$ болса, онда R^* шексиз болады. $R_+ \cap R^*$ көплигин R_+^* арқалы белгилеймиз. Егер $\dfrac{1}{2} \in R$болса, ол да шексиз болады.

Бунда фиксирленген базы бир автоморфизмлер $\Phi \in Aut\left(G_n\left(R\right)\right)$, $n \geq 3$, $□ \subset R$ жәрдеминде жаңа автоморфизм дүземиз $\Phi' \in Aut\left(G_n\left(R\right)\right)$ сондай $\Phi'=\ \Phi_{M'}$, базы бир матрица ушын $M' \in \varGamma_n\left(R\right)$ ҳәм барлық $\delta \in \sum\ _n$ушын $\Phi'\left(S_\delta\right) \quad \alpha^{\operatorname{sgn}\delta} S_\delta, \alpha^2 \quad 1$.

Лемма 2.2.1. Барлық $x, y \in R_+$, егер $x + y = 0$ болса, онда $x = 0$ ҳәм $y = 0$ болады.

Дәлиллеў. Дара тәртипленген кольцоның анықламасынан, егер $0 \leq y$ болса, онда $x \leq x + y$ болады. Буннан $x \leq 0$, демек $x = 0$, усыған уқсас $y = 0$.

Лемма 2.2.2. Егер Φ ярым группаның $G_n(R)$, $n \geq 3$, $\square \subset R$ автоморфизми болса, онда

1) $\Phi\left(\Gamma_n(R)\right) = \Gamma_n(R)$;

2) $\Phi\left(D_n(R)\right) = D_n(R)$.

Дәлиллеў. $\Gamma_n(R)$ барлық керилениўши матрицалардың $G_n(R)$ ярым группасы болғанлықтан, $\Phi\left(\Gamma_n(R)\right) = \Gamma_n(R)$ келип шығады. 1)–дәлилленди.

2)–дәлилеймиз. F арқалы А матрицасына түйинлес болған коммутатив барлық матрицаларды көплигин қарастырамыз.

Мейли

$$B = diag\left[\alpha_1 ... \alpha_n\right] \in D_n(R)$$

ҳәм

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \Gamma_n(R), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

болсын. Сонда

$$\sum_{k=1}^{n} a'_{ik} \cdot a_{kj} = 0 \text{ барлық } i \neq j .$$

Демек $a'_{ik} \cdot a_{kj} = 0$ барлық $i \neq j$ (2.2.1-лемма бойынша). Онда $A^{-1}BA$– диоганал матрица, сонлықтан $D_n(R) \subset F$.

Мейли С матрицасы бар болсын $C \in F \setminus D_n(R)$,

$$
C=\begin{pmatrix}
c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
c_{i1} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
c_{j1} & \cdots & c_{ji} & \cdots & c_{jj} & \cdots & c_{jn}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
c_{n1} & \cdots & c_{in} & \cdots & c_{jn} & \cdots & c_{nn}
\end{pmatrix}
$$

С матрицаның түйинлесин $diag[d,1,...,1]\cdot S_{ij}\ (i,j\neq 1)$ жәрдеминде таўып, ол мына көрниске ийе болады

$$
C'=\begin{pmatrix}
c_{11} & \cdots & c_{1j}d^{-1} & \cdots & c_{1i}d^{-1} & \cdots & c_{1n}d^{-1}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
c_{j1}d & \cdots & c_{jj} & \cdots & c_{ji} & \cdots & c_{jn}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
c_{i1}d & \cdots & c_{ji} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{in}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
c_{n1}d & \cdots & c_{jn} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$CC'=C'C$ қатнастан пайдалансақ (1-бағана ҳәм 1-қатарды алсақ)

$$
c_{11}^2+c_{12}c_{21}d+\cdots+c_{1i}c_{j1}+\cdots+c_{1j}c_{i1}d+\cdots+c_{1n}c_{n1}d
$$
$$
=c_{11}^2+c_{21}c_{12}d^{-1}+\cdots+c_{i1}c_{1j}d^{-1}+\cdots+c_{j1}c_{1i}d^{-1}+\cdots+c_{n1}c_{1n},
$$

Егер $d=2$ болса, онда

$$3\cdot\left(c_{12}c_{21}+\cdots+c_{1i}c_{j1}+\cdots+c_{1j}c_{i1}+\cdots+c_{1n}c_{n1}\right) \quad 0.$$

Демек лемма 2.2.1. бойынша

$$c_{1i}c_{j1}=0 \text{ барлық } i,j\neq 1.$$

буннан

$$c_{ki}c_{jk}=0 \text{ барлық } i,j\neq 1$$

келип шығады.

Мейли

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn}\end{pmatrix}$$

болсын, сонда 1-қатарды ҳәм к-шы бағананы алсақ $CC^{-1}=E$ қатнастан

$$0=\gamma_{11}c_{1k}+\gamma_{12}c_{2k}+\cdots+\gamma_{1n}c_{nk},$$

ийе боламыз, буннан $\gamma_{11}c_{1k}=0,\ k\neq 1$. Оннан басқа

$$1=\gamma_{11}c_{11}+\gamma_{12}c_{21}+\cdots+\gamma_{1n}c_{n1}.$$

Усы теңликти c_{1k} көбейтсек $c_{1k}=0$, яғный $c_{ij}=0$, егер $i\neq j$ келип шығады. Солай етип, $F=D_n(R)$ ҳәм $\varphi\left(D_n(R)\right)=D_n(R)$.

Лемма 2.2.3. Мейли $n=3$, Φ –ярым группа $G_n(R)$ автоморфизмлери сондай $\Phi(S_\tau) \quad bS_\tau, b^2 \quad 1$. Сонда $M\in\Gamma_{n(R)}$ матрицасы бар болып, барлық $\rho\in\sum_n$ ушын $\Phi'(S_\rho)=\Phi_M\circ\Phi(S_\rho)=b^{\operatorname{sgn}\rho}S_\rho$ қатнасы орынлы болады.

Дәлиллеў. Лемма 2.2.2 ден, қәлеген $\alpha,\beta\in R_{+}^{*}$

$$\Phi\left(diag\left[\alpha,\alpha,\beta\right]\right)=diag\left[\alpha',\alpha',\beta'\right],$$

$\Phi\left(S_{(12)}\right)=bS_{(12)}$ ҳәм матрицалардың ишиндеги биринщиси $S_{(12)}$ матрица менен коммутатив болады. Егер $\alpha\neq\beta$ болса, онда $\alpha'\neq\beta'$, себеби $diag\left[\alpha,\alpha,\beta\right]$ скаляр матрицаға өтпейди.

Мейли

$$\Phi\left(S_{(\overline{2}3)}\right)=A\quad\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

болып, $A^2=I$ есапқа алсақ, онда

$$a_{ik}a_{kj}=0,\ a_{1i}a_{i1}+a_{2i}a_{i2}+a_{3i}a_{i3}=1 \qquad (2.2.1)$$

А матрицасы $diag\left[\alpha',\alpha',\beta'\right]$ коммутатив емес. Буннан төмендеги шәртлердиң биреўи орынланады:

$$\alpha a_{13}\neq\beta a_{13},\ \alpha a_{23}\neq\beta a_{23},\ \alpha a_{31}\neq\beta a_{31},\ \alpha a_{32}\neq\beta a_{32}.$$

$A^2=I$ болғанлықтан $\varsigma=a_{12}a_{21}-$ идемпотент болады. Мейли $\varsigma\neq 0$ болсын, сонда $\alpha'=1+\varsigma$, $\beta'=1$ аламыз (α' кери элементке ийе ҳәм ол $1-\varsigma/2$). Онда жоқарыда келтирилген шәртлердиң биреўи де орынлы болмайды. Қарама–қарсылыққа ийе боламыз, демек $a_{12}a_{21}=0$. $A^2=I$ болғанлықтан, $a_{11}^2+a_{13}a_{31}=1$ келип шығады. Бул теңликти a_{12} көбейтсек $a_{12}=0$ болады, усыған уқсас $a_{21} = 0$. $S_{(12)}S_{(23)} = S_{(123)}$ матрицаның тәртиби 3 ке тең екенлигинен пайдалансақ $\left(bS_{(12)}A\right)^3 = I$. Ал буннан (2.2.1.) дан

$$a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{13}a_{31} = b,\ a_{11}^2 a_{22} = 0,\ a_{11}a_{22}^2 = 0 \qquad (2.2.2)$$

(2.2.1) формуланы есапқа алсақ

$$a_{11}^3 = a_{11},\ a_{22}^3 \quad a_{22} ,= a_{11}a_{23}a_{32} \quad a_{11} ,= a_{22}a_{13}a_{31} \quad a_{22} =$$

нәтийжеде $a_{11} + a_{12} = b$. Басқаша айтқанда $a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{33}^3 = b$, демек $a_{33}^3 = 0 = a_{33}$. Солай етип, (2.2.1) мына көрнисте жазамыз

$$a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 1,\ a_{11}^2 + a_{31}a_{13} = 1,\ a_{22}^2 + a_{32}a_{23} = 1.$$

$e_1 = a_{23}a_{32}$, $e_2 = a_{13}a_{31}$ белгилеймиз. Бул ортогональ идемпотентлердиң қосындысы 1 ге тең. Солай етип, $a_{11}e_1 + a_{22}e_2 = b$. Демек $a_{11}e_1 = be_1$, бирақ a_{11} элементи e_2 ортогональ екенлигинен ол e_1R кольцоға тийисли, сонлықтан $a_{11} = ba_{11}e_1 = be_1$. Буннан $a_{22} = be_2$ ҳәм А матрица

$$A = \begin{pmatrix} be_1 & 0 & a_{13} \\ 0 & be_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

көрниске ийе болады. Енди С матрицаны алып

$$C = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 0 \\ e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ол кери матрицаға ийе ҳәм $S_{(12)}$ коммутатив, нәтийжеде Φ_C автоморфизми $S_{(12)}$ матрицаны $bS_{(12)}$ матрицаға өткизеди. Сонда A матрицасы

$$A' = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\left(a_{13}+a_{23}\right) \\ 0 & b\left(a_{31}+a_{32}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

матрицаға өтеди. $\left(a_{13}+a_{23}\right)\left(a_{31}+a_{32}\right) = e_1+e_2=1$ теңлиги орынлы болады. Енди $C' = diag\left[1,1,a_{13}+a_{23}\right]$ матрицасын алып олар жәрдеминде A' түйинлесин табамыз. Сонда $bS_{(23)}$ ийе боламыз. Түрлендириў группасы (12) ҳәм (23) түрлендириўлерден ибарат болып, изленип атырған автоморфизм $\Phi' = \Phi_M \circ \Phi$ түрде болады. Лемма дәлилленди.

Лемма 2.2.4. Мейли $n=4$, Φ –ярым группа $G_n\left(R\right)$ автоморфизмлери сондай $\Phi\left(S_\tau\right)=S_\tau$. Мейли $\rho=\left(13\right)\left(24\right)$ болсын, сонда $M \in \Gamma_{n(R)}$ матрицасы бар болып, $\Phi_M \circ \Phi\left(S_\rho\right)=S_\rho$ ҳәм $\Phi_M \circ \Phi\left(S_\tau\right)=S_\tau$ қатнасы орынлы болады.

Дәлиллеў. Мейли $X=\Phi\left(S_\rho\right)$ болып, S_ρ, S_τ лар коммутатив, онда

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_2 & c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix}.$$

X матрицаны 2×2 көрнистеги матрица ретинде қараймыз:

$$X=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\ A,B,C,D\in M_2(R).$$

$X^2=I$ болғанлықтан $A^2+BC=I_2$, егер

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

болса, онда

$$A^2=\begin{pmatrix} a_1^2+a_2^2 & 2a_1a_2 \\ 2a_1a_2 & a_1^2+a_2^2 \end{pmatrix}.$$

A^2 ҳәм BC матрицаларының диагоналлары бирдей элементлер болғанлықтан олардың қосындысы диагонал элементлерден басқалары нолге тең, онда A^2 ҳәм BC диагонал матрицалар болады. Демек олар 2×2 матрицалардың кольцосының орайласқан идемпотенти болады.

§ 2.3. Матрицалар ушын автоморфизмлердиң ярым группасы

Алдыңғы параграфте берилген Φ автоморфизмлер жәрдеминде жаңа $\Phi' = \Phi_M \Phi$ автоморфизмлерди дүзген едик.

Φ'–автоморфизмди фиксерленген деп уйғарамыз.

Лемма 2.3.1. Егер $n \geq 3, 1/2 \in R$, автоморфизмлер $\Phi' \in Aut\left(G_n\left(R\right)\right)$ барлық $\sigma \in \sum_n$ сондай $\Phi'\left(S_\sigma\right) = \alpha^{\operatorname{sgn}\sigma} S_\sigma$, $\alpha^2 = 1$, онда барлық $\alpha, \beta \in R_+^*$ ушын

$$\Phi'\left(diag\left[\alpha, \beta, \ldots \beta\right]\right) = diag\left[\gamma, \delta, ..., \delta\right], \quad \gamma, \delta \in R_+^*.$$

Егер $\alpha \neq \beta$ болса, онда $\gamma \neq \delta$.

Дәлиллеў. Лемма 2.2.2 бойынша

$$\Phi'\left(diag\left[\alpha, \beta, \ldots \beta\right]\right) = diag\left[\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\right].$$

Енди мына түрлендиреўин қарастырамыз $\sigma = \left(2, 3, ..., n\right)$. Егер $\Phi'\left(S_\sigma\right) = \alpha S_\sigma$ болса, онда $\Phi'\left(C_{D_n(R)}\left(S_\sigma\right)\right) = C_{D_n(R)}\left(S_\sigma\right)$ болады. Солай етип, $diag\left[\gamma_1, ..., \gamma_n\right]$ матрицасы S_σ коммутатив болып, буннан $\gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = \gamma_n$. Енди $\gamma_1 \neq \gamma_2$ дәлиллеймиз. Ал бул $diag\left[\alpha, \beta, ..., \beta\right]$ матрицасы $S_{(12)}$ менен коммутатив емеслигинен келип шығады. Дәлилленди.

Лемма 2.3.2. Егер $n \geq 3, 1/2 \in R$, автоморфизмлер $\Phi' \in Aut\left(G_n\left(R\right)\right)$ барлық $\sigma \in \sum_n$ сондай $\Phi'\left(S_\sigma\right) = \alpha^{\operatorname{sgn}\sigma} S_\sigma$, $\alpha^2 = 1$, онда барлық $X \in G_2\left(R\right)$ ушын мына теңлиги орынлы болады

$$\Phi'\begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \cdots\cdots & & \ddots & \cdots \\ 0 & & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & & 0 \\ \cdots\cdots & & \ddots & \cdots \\ 0 & & \cdots\cdots & a \end{pmatrix}, \text{ бунда } Y \in G_2(R),\ a \in R_+^*.$$

Дәлиллеў. C матрицасы арқалы

$$C = \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \cdots\cdots & & \ddots & \cdots \\ 0 & & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

белгилеймиз. Лемма 2.3.1 диң дәлиллеўлерине уқсас қәлеген матрицалар

$$A = diag[\alpha, \alpha, \beta, ..., \beta] \in D_n(R),\ \alpha \neq \beta$$

қатнаслар орынлы

$$\Phi'(A) = diag[\gamma, \gamma, \delta, ..., \delta] \in D_n(R),\quad \gamma \neq \delta.$$

C матрицасы A ҳәм $S_{(2,3,...,n)}$ матрицалары менен коммутатив болғанлықтан изленип атырған $\Phi'(C)$ көрнисте болады.

Лемма 2.3.3. Егер $n \geq 3, 1/2 \in R$, автоморфизмлер $\Phi' \in Aut(G_n(R))$ барлық $\sigma \in \sum_n$ сондай $\Phi'(S_\sigma) = \alpha^{\mathrm{sgn}\,\sigma} S_\sigma$, $\alpha^2 = 1$, онда $c(\cdot): R_+ \to R_+$ сәўлелендириўлери бар болып ҳәр қандай $x \in R_+$ ушын $\Phi'(B_{12}(x)) = B_{12}(b(x))$ орынлы болады.

Дәлиллеў. Лемма 2.3.2 бойынша

$$\Phi'\left(B_{12}(1)\right)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & & & \\ \gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \\ & & & & \end{pmatrix},\ \ a\in R_+^*,\ \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in G_2(R).$$

Мейли $\forall x\in R_+^*\quad \Phi'\left(diag[x,1,...,1]\right)=diag\left[\xi(x),\gamma(x),...,\gamma(x)\right],\ \xi(x),\eta(x)\in R_+^*$. болсын. Сонда $\forall x\in R_+^*$

$$\Phi'\left(B_{12}(x)\right)=\ \Phi'\left(diag[x,1,...,1]B_{12}(1)diag\left[x^{-1},1,...,1\right]\right)=$$

$$=diag\left[\xi(x),\eta(x),...,\eta(x)\right]\begin{pmatrix}\alpha & \beta & & & \\ \gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \\ & & & & \end{pmatrix}\times$$

$$\times diag\left[\xi(x)^{-1},\eta(x)^{-1},...,\eta(x)^{-1}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha & \nu(x)\beta & & & \\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \\ & & & & \end{pmatrix},$$

бунда $\nu(x)=\xi(x)\eta(x)^{-1}$. Егер $x_1 \neq x_2$ болса, онда $\nu(x_1)\neq \nu(x_2)$. Ҳәр қандай $x\in R_+$ матрицалар $\Phi'(B_{12}(1))$ ҳәм $\Phi'(B_{12}(x))$ коммутатив. Бул шәртлерди матрицалық көрнисте жазамыз $x\in R_+$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \nu(x)\beta \\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \nu(x)\beta \\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Нәтийжеде,

$$\begin{pmatrix} \alpha^2+\nu(x)^{-1}\beta\gamma & \nu(x)\alpha\beta+\beta\delta \\ \gamma\alpha+\nu(x)^{-1}\delta\gamma & \nu(x)\alpha\beta+\delta^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+\nu(x)\beta\gamma & \alpha\beta+\nu(x)\beta\delta \\ \nu(x)^{-1}\gamma\alpha+\delta\gamma & \nu(x)^{-1}\gamma\beta+\delta^2 \end{pmatrix}.$$

Солай етип, $\nu(x)^{-1}\beta\gamma=\nu(x)\beta\gamma$ ҳәр қыйлы $x\in R_+$. Демек $\beta\gamma=0$.

$$\left(B_{12}(1)\right)^2=diag\left[2,1,...,1\right]B_{12}(1)diag\left[1/2,1,...,1\right].$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta(\alpha+\delta) & & & \\ \gamma(\alpha+\delta) & \delta^2 & & & \\ & & a^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \nu(2)\beta & & & \\ \nu(2)^{-1}\gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix}.$$

Буннан $\alpha^2=\alpha$, $\delta^2=\delta$, $a=1$келип шығады. Мына қатнасларды есапқа алсақ

$$B_{12}(1)B_{13}(1)=B_{13}(1)B_{12}(1)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta & \alpha\beta \\ \alpha\gamma & \delta & \gamma\beta \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta\alpha & \beta \\ \gamma & \delta & 0 \\ \alpha\gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

$\alpha\gamma = \gamma$ ийе боламыз. Енди

$$B_{12}(1)B_{13}(1) = B_{13}(1)B_{23}(1)B_{12}(1),$$

есапқа алсақ, онда

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha\beta & \beta^2 \\ \gamma & \alpha\delta & \beta\delta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta\delta \\ \gamma & \alpha\delta & \beta \\ \alpha\gamma + \gamma^2\delta & \gamma\delta^2 & \delta^2 \end{pmatrix}$$

Демек $\alpha\gamma + \gamma^2\delta = 0$, буннан $\alpha\gamma = \gamma = 0$ келип шығады. Егер $\gamma = 0$ болса, онда α ҳәм δ керилениўши, егер α ҳәм δ идемпотентлер болса, онда $\alpha = \delta = 1$ болады. Солай етип, $\Phi'(B_{12}(1)) = B_{12}(\beta)$.

Енди $B_{12}(x)$, $x \in R_+$ қарастырамыз. Төмендеги қатнастан

$$B_{12}(1)B_{13}(1) = B_{13}(1)B_{23}(1)B_{12}(1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta & b\beta \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \alpha\beta + bc & bd \\ 0 & a & b \\ c & c\beta + cd & d^2 \end{pmatrix}$$

ийе боламыз. Демек $c = 0$, сонлықтан a ҳәм d керилениўши. Бул қатнаслардан

$$B_{12}(x)^2 = diag[2,1,...,1]^{-1} B_{12}(x) diag[2,1,...,1]$$

$a^2 = a,\ d^2 = d$ теңликлерден $a = d = 1$ ийе боламыз. Солай етип, $\Phi'(B_{12}(x)) = B_{12}(b(x))$. Дәлилленди.

Егер G–ярым группа болса, онда $\lambda(\cdot): G \to G$ гомоморфизм G–ярым группаның орайласқан гомоморфизм делинеди, егер $\lambda(G) \subset Z(G)$. $\Omega(\cdot): G \to G$ сәўлелендириўи барлық $X \in G$ ушын

$$\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X$$

орынлы, бунда $\lambda(\cdot)$–орайласқан гомоморфизм орайласқан гомотетия делинеди.

Қәлеген автоморфизми $y(\cdot) \in Aut(R_+)$ ушын Φ^y арқалы $G_n(R)$ ярым группалардың автоморфизмин белгилеймиз, яғный

$$\Phi^y(X) = \Phi^y((x_{ij})) = (y(x_{ij}))$$

барлық $X = (x_{ij}) \in G_n(R)$.

Теорема 2.3.4. Мейли $G_n(R), n \geq 3, 1/2 \in R$ ярым группалардың қәлеген автоморфизми болсын. Сонда $GE_n^+(R)$ ярым группада автоморфизм $\Phi = \Phi_M \Phi^c \Omega$ түрге ийе болады, бунда $M \in \Gamma_n(R), c(\cdot) \in Aut(R_+)$, $\Omega(\cdot)$–орайласқан гомотетия.

Екинши бап бойынша жуўмақ

Екинши бап операторлар алгебраларында автоморфизмлер ярым группасын дүзиў ҳәм оның қәсийетлери қарастырылған. Екинши баптың биринши параграфинде аналитикалық ярым группа ҳәм оның базы бир критериялары қаралған. Ал екинши параграфта болса ярым группа автоморфизмлерин қурыў ҳәм оның қәсийетлери үйренилген. Үшинши параграфта матрицалар ушын автоморфизмлер ярым группасы қаралған.

Жуўмақлаў

Операторлар алгебрасында соңғы жыллары актуал мәселелерден бири дифференциалланыўшы операторлар ҳәм автоморфизмлер группасы болып табылады. Бул тараў бойынша бир қанша илимпазлардың илимий ҳәм методикалық мийнетлери бағышланған.

Магистрлик жумыста автоморфизмлер ярым группасын шекли өлшеўли B(H)-кеңислигинде қарастырылған ҳәм оның базы бир қәсийетлери келтирилген.

Магистрлик диссертация жумысы кирисиў, еки бап, алты параграф, жуўмақлаў ҳәм пайдаланылған әдебиятлар дизиминен ибарат.

Жумыстың биринши бабында операторлар алгебрасы ҳәм ярым группалардың тийкарғы түсиниклери келтирилген.

1.1-параграфта Банах кеңислиги, Лебег интегралы, Гильберт кеңислиги ҳ.т.б. белгилеўлер ҳәм мысаллар келтирип өтилген.

1.2-пaverграфта Гильберт кеңислигинде шегараланған операторлардың ярым группасы, ярым группаның генераторы ҳәм спектри қарастырылған.

1.3-параграфта операторлар алгебрасының тийкарғы түсиниклери қаралған.

Магистрлик диссертация жумысының екинши бабы ярым группалардың автоморфизми ҳәм олардың базы бир қәсийетлери қарастырылған.

2.1-параграфта аналитикалық ярым группалардың критериялары қаралған.

2.2-параграфта ярым группалардың автоморфизмлерин қурыў мәселеси қарастырылған.

2.3-параграфта автоморфизмлер ярым группасы шекли өлшеўли Гильберт кеңислигинде операторлар үстинде дүзилген болып, оның айырым қәсийетлери дәлилленген.

Пайдаланған әдебиятлар

1. Douglas R.G. On the C^* – algebra of a one-parameter semigroup of isometries // Acta Math. 1972. V. 128. P. 143-152.

2. Phillips J. Raeburn I. Semigroups of isometries, Toeplitz algebras and twisted crossed products // Integral Equation Oper. Theory. 1993. V.17, № 4. –P.579–602.

3. Бунина Е.И., Семёнов П.П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над коммутативными частично упорядоченными кольцом. Фундаментальная и прикладная математика, 2008. том 14, №2.с 69-100.

4. Шамин Р.В. Полугруппы операторов. Учебное пособие. – М.:РУДН, 2008.– 173 с.

5. Григорян С.А., Салахутдинов А.Ф. C^*- алгебры, порожденные полугруппами с сокращением. Сибирский математический журнал, 2010. том 51, №1.с 16-25.

6. Салахутдинов А.Ф. C^*- алгебры, порожденные полугруппами // Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна, 2008: Тез.докл. Воронеж: ВорГУ, –2008. –С.120-121.

7. E. M. Alfsen and F. W. Shultz, 'On non-commutative spectral theory and Jordan algebras', *Proc.London Math. Soc.* 38 (1979) 335-344.

8. E. M. Alfsen, F. W. Shultz and E. Stormer, 'A Gelfand-Naimark theorem Jordan algebras', *Adv.in Math.* 28(1978) 11-56 p.

9. Dixmier J. C^*-algebrı i ix predstavleniya. – M.: Nauka, 1974. – 400 s.

10. Sakai S. C^* and W^*- algebras. Springer, - Berlin: -1971. – 256 p.

11. Stratila S. and Zido L. Lectures on von Neumann algebras. – Abacus Press, 1979. – 478 p.

12. Михалев А.В., Шаталова М.А. Автоморфизми и антиавтоморфизми полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Мат.сб.– 1970. –Т. 81, –№ 4. –С. 600-609.

13. Merfi Dj. C^*-algebrı i teoriya operatorov. – M.: “Faktorial” – 1997. – 336 s.
14. Аюпов Ш.А., Бердикулов М.А., Тургунбаев Р.М. Функционал анализ. Тошкент. ТДПУ. 2007.
15. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Киев: Выша школа, 1990.
16. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Т. 1.: Общая теория. Изд. иност. лит. 1962.
17. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
18. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М: Наука, 1977.
19. Саримсаков Т.А. Функционал анализ курси. Тошкент, Ўқитувчи, 1980.
20. Шерстнев А.Н., Луговая Г.Д. Функциональный анализ. Казань, 2008.
21.Нағметуллаев А. Банах кеңислигиндеги операторлардың ярым группасы \\ «Өзбекстан Республикасы кономикасы ҳәм жәмийет раўажландырыўының ҳәзирги заман принциплери» атамасындағы Респ.магис.илмий-әмелий конф. Матер. Топламы, 30 апрель 2011 жыл. Нөкис «Қарақалпақстан» 2011.126-127 б.