

**ЎЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА
АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ**

**Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университети
Математика факультети**

**Әмелий математика хәм информатика кафедрасы
«Әмелий математика хәм информатика» бағдарының
2 курс магистри**

Палекеева Гулчехраның

Питкерийү диссертация жумысы

**Темасы: Стационар емес мәселелерди шекли айырмалар хәм
шекли элементлер усыллары менен шешиў хәм оларды
салыстырыў**

Илимий басшы:

доц. Д. Утебаев

Кафедра баслығы:

доц. Ш. Ешмуратов

Нөкис-2011

Мазмуны

Кирисиў	4
1-бап. Базыбир қосымша мағлыўматлар	9
1-§. Функционал анализ элементлери.....	9
2-§. Шекли айырмалар ҳаққында тийкарғы түсиниклер.....	12
3-§. Шекли элементлер ҳаққында тийкарғы түсиниклер.....	14
II-бап. Стационар емес теңлемелер ушын шегаралық мәселелер	18
1-§. Гиперболалық типтеги теңлемелер.....	18
2-§. Цилиндрлик пьезовибратордагы сестин нурланыўы ҳаққында мәселениң математикалык модели.....	19
3-§. Шеңбер бойынша поляризацияланған пьезокерамикалык цилиндрдиң тербелиси ҳаққында мәселе.....	22
Жуўмақлаў.....	24
III-бап. Стационар емес мәселелерди шекли айырмалар усылы менен шешиў	25
1-§. Гиперболалық типтеги теңлемелерди шешиў ҳәм орнықлығын изертлеў жоллары.....	25
2-§. Цилиндрлик пьезовибратор жәрдемінде сестин нурланыўы мәселесин шешиў.....	29
3-§. Шеңбер бойынша поляризацияланған пьезокерамикалык цилиндрдиң тербелиси мәселесин шешиў ҳәм изертлеў.....	36

Жуўмақлаў.....	43
IV-бап. Стационар емес мәселелерди шекли элементлер	
усылы менен шешиў.....	46
1-§. Шекли элементлер усылының улыўма схемасы.....	46
2-§. Жоқары тәртиптеги дәлликтеги схемалар дүзиў жоллары.....	48
3-§. Қәтелик мәселеси, априор бақалар ҳәм схеманың жыйнақлылығы.....	54
Жуўмақлаў.....	56
V-бап. Ишки толқынлар теориясы.....	57
1-§. Мәселениң қойылыўы.....	57
2-§. Схемалар дүзиў ҳәм оны реализациялаў.....	58
3-§. Санлы экспериментлер.....	65
Жуўмақлаў.....	67
Әдебиятлар.....	68

Кирисиў

Бизге мәлим, табиятта болып атырған хәр қыйлы процеслердиң (физикалық, химиялық, механикалық х.т.б.) математикалық моделлери хәр қыйлы теңлемелерге алып келеди. Мәселен, бундай теңлемелер тийкарынан әпиўайы дифференциалы теңлемелер ямаса дара туўындыларға ийе дифференциалы теңлемелер болыўы мүмкин. Дара туўындыларға ийе дифференциалы теңлемелер екиге бөлинеди. Бириншиси стационар теңлемелер, яғный бундай теңлемелердиң изленип атырған шешимлери ўақытқа байланыссыз болады. Мысалы, эллиптикалық теңлемелер усылар қатарына жатады. Бирақта, табияттың көплеген мәселелериниң математикалық моделлери стационар емес теңлемелерге алып келеди, яғный бундай теңлемелердиң шешимлери ўақытқа байланыслы болады. Базыбир қағыйдаға қарай бизге $t = 0$ ўақыт моментинде үйренип атырған системаның жағдайы бериледи хәм кейинги ўақыт моментлеринде усы системаның жағдайын анықлаў керек болады. Көбинесе бундай мәселелерди басланғыш шәртлерге ийе мәселелер деп атайды. Бундай мәселелерге биз көбинесе жыллылықтың тарқалыў процессин, толқынлардың тарқалыў процессин хәм конструкциялардың динамикалық жағдайларын изертлегенимизде дуўшар келемиз. Мысалы, дара туўындыларға ийе параболалық хәм гиперболалық теңлемелер стационар емес теңлемелер қатарына жатады. Стационар емес теңлемелердиң мысалы оғада көп. Мәселен, конвекция-диффузия теңлемеси, акустика теңлемеси, Максвелл теңлемелери, Фохта теңлемеси х.т.б. теңлемелер. Буд диссертациялық жумыста усындай стационар емес теңлемелердиң айрымлары шекли айырмалар хәм шекли элементлер усыллары тийкарында шешиледи. Бул еки усыл бүгинги күнде стационар емес мәселелерди, әсиресе сызықсыз мәселелерди шешийде тийкарғы усыллардың бири болып табылады. Әсиресе жоқары тәртипли дәлликти беретугын схемалар дүзиў хәм олардың жыйнақлылығын дәлиллеў, априор баҳалар алыў, алынған жуўмақлардың дурыслығын көрсетиўши экспериментлер өткерий бүгинги күндеги есаплаў математикасының

тийкарығы мәелелери болып табылады. Шекли айырмалар усылы өзиниң әпиұайылығы менен ажыралып турады. Бул усылдың схемаларына алгоритмлер дүзиў аңсат хәм олар есаплаў машиналарында жеңил реализацияланады. Бул усылдың теориясын салыўшылар, белгили илимпазлар, академиклер А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, С.К.Годунов, Н.Н.Яненко, Г.И.Марчук, В.Л.Макаров хәм олардың көплеген оқыўшылары болып табылады [1-7]. Усындай изертлеўлер хәзирги күндеде даўам етпекте. Бул изертлеўлер тийкарынан математикалық физиканың базалық стационар емес мәселелери ушын еки хәм үш қатламлы айырмалар схемасын дүзиўден хәм оларды толық изертлеўден ибарат. Булар тийкарынан екинши тәртипли жыллылық өткизгишлик теңлемеси хәм екинши тәртипли толқын теңлемеси ушын басланғыш хәм шегаралық мәселелер тийкарында әмелге асырылған. Бунда кеңислик өзгериўшилери бойынша эллиптикалық оператор өзи-өзине түйинлес болып келиўи мүмкин ямаса өзи-өзине түйинлес болмай да келиўи мүмкин. Бул кейинги жағдай әсиресе конвекция-диффузия мәселелери ушын орынлы. Бундай мәселелер А.А.Самарский хәм П.Н.Вабищевичлер тәрәпинен әмелге асырылған [1,2,9,14,15]. Кеңислик өзгериўшилери бойынша алынған эллиптикалық оператор өз-ара түйинлес болмаған жағдайда шәртсиз орнықты схемалар, тийкарынан оператордың өз-ара түйинлес емес бөлегиниң оның өз-ара түйинлес бөлегине ғәрезли етип дүзиледи. Бул айтылған мағлыўматлар операторлы-айырмалы схемалар теориясында жаңа мағлыўматларға алып келеди. Бул жағдайда математикалық физиканың басланғыш-шегаралық мәселелериниң кеңислик бойынша алынған өзгериўшилери ушын хәр қыйлы кеңисликлерде операторлы формулировкаларды қолланыўға мүмкиншилик береді. Демек бул, математикалық физиканың хәр қыйлы стационар емес мәселелерин бир көз қарастан қараўға мүмкиншилик береді. Яғный бул дифференциалы теңлемелер хәм шегаралық шәртлердиң хақыйқый тәбий қәсиетлерине айрықша итибар қаратпаўға жол ашып береді. Хәзирги ўақытта еки хәм үш қатламлы операторлы-айырмалы схемалардың басланғыш шәртлери

бойынша хәм оң тәрәплеме орнықлығы дәлилленген. Бул бойынша көплеген изертлеўлер А.А.Самарский хәм А.В.Гулинлер тәрәпинен әмелге асырылған [4].

Көп өлшемли дара туўындылы мәселелер ушын басланғыш-шегаралық мәселелерди жуўық шешкенде илимпазлар көбирек аддитив схемаларды дүзиўге итибар қаратқан. Бундай аддитив схемаларды айрым жағдайларда бөлеклеў схемалары депте атайды. Бундай бөлеклеў көп өлшемли мәселелерди бир өлшемли мәселелер шынжырына алып келеди. Бул өз гезегинде экономлы айырмалар схемасын дүзиў мүмкиншилигин жаратады.

Жоқарыдағы айталғанларға қарамастан, шекли айырмалар усылы жоқары тәртипли схемаларды тек ғана шегараланған класстағы мәселелерге дүзиўге мүмкиншилик береді. Мысалы, эпиўайы формадағы кеңислик областлары: туўрымүйешлик, шеңбер, цилиндр х.тб. Бул усылда жоқары тәртипли схема дүзиў ушын тийкарынан төмендеги подходлар қолланылады:

- шаблон точкаларының санын көбейтиў;
- дәлликте асырыў ушын дифференциалы теңлемени пайдаланыў;
- дифференциалы жуўықласыў усылын пайдаланыў;
- дәл айырмалы схемалар операторын қолланыў;
- Рунге принципін ямаса Ричардсон экстраполяциясын пайдаланыў.

Шекли элементлер усылында бундай кемшиликлер жоқ. Ол ерикли формадағы областларда жоқары тәртипли дәлликтеги схемалар дүзиўге толық мүмкиншилик береді. Бул усылда тийкарынан дәрежеси $k > 1$ болған полиномиал ямаса сплайн функциялары арқалы аппроксимациялаў усылы қолланылады. Шекли айырмалар усылы өткен әсирдің басларында пайда болған. Ол тийкарынан инженерлик есаплаўлар жүргизиўде пайдаланылған. Оның теориясы өткен әсирдің 60-жалларында жаратыла баслады. Бул теорияның тийкарын салыўшылар С.Г.Михлин, Г.Стренг, Дж.Фикс,

О.Зенкевич, К.Морган, Г.И.Марчук х.т.б. [19-23]. Бул усыл менен шуғылланыўшылардың саны бүгинги күнде оғада көп.

Бул диссертациялық жұмыстың кирисиў бөлиминде үйренип шығылған әдебиетлардан жуўмақ жасап қойылған мәселениң есаплаў математикасындағы орны, ҳазирги ўақыттағы үйренилген дәрежеси хәм қойылған мәселениң жуўық шешиў усыллары ҳаққында айтылады. Питкериў диссертация жұмысында дара туўындылы бир хәм еки өлшемли параболалақ хәм гиперболалық теңлемелерге шекли айырмалар хәм шекли элементлер усыллары тийкарында дүзилген схемалар қаралады.

Питкериўшиниң диссертация жұмысының биринши бабында үйренилип шыққан әдебиетлардан, атап айтқанда, математикалық анализ, функционаллық анализ хәм есаплаў математикасы теорияларының кейинги изертлеўлер ушын керекли материаллар келтириледі. Булар үзликсиз функциялар, Гильберт хәм Соболев кеңисликлери, сеткалар, сеткалық функциялар хәм нормалар, сеткалық функциялар кеңислиги х.т.б.

Жұмыстың екинши бабында диссертациялық жұмыста қаралатуғын мәселелердиң математикалық моделлери келтирилген. Оларға басланғыш хәм шегаралық шәртлердиң қойлыўы мәселеси қаралған. Биринши параграфта толқын теңлемеси ушын шегаралық мәселелер қаралады. Екинши параграфта цилиндрлик пьезовибратордағы сестин нурланыўы ҳаққындағы мәселениң математикалық модели қаралған. Үшинши параграф шеңбер бойынша поляризацияланған пьезокерамикалық цилиндрдиң тербелиси ҳаққында мәселениң математикалық моделине арналған.

Үшинши бапта жоқарыдағы екинши баптағы мәселелерге шекли айырмалы схемалар дүзиў мәселеси қаралады. Үшинши баптың биринши параграфында шекли айырмалар усылы дара туўындылы гиперболалық типтеги теңлемелерди шешиўге, атап айтқанда толқын теңлемесин шешиўге арналған. Алынған шешимниң жыйнақлылығын изертлеў жоллары көрсетилген. Жұмыстың екинши параграфында усындай изертлеўлер

цилиндрлік пьезовибратордағы сестің нурланыуы хаққындағы мәселениң математикалық моделине қолланылған. Үшинши баптың үшінши параграфы шеңбер бойынша поляризацияланған пьезокерамикалық цилиндрдің тербелісі хаққында мәселениң математикалық моделине шекли айырмалар схемасын дүзиўге хәм оны изертлеўге арналған.

Төртинши баптың биринши параграфында шекли элементлер усылының улыўма схемасы келтирилген. Төртинши баптың екінши параграфында шекли элементлер усылы тийкарында жоқары дәлликтеги схемалар дузиўдің айрым жоллары хәм усыллары қарап өтиледі. Төртинши баптың үшінши параграфы шекли элементлер усылының қәтелик мәселесине, априор баҳаларды алыў усылларына хәм схеманың жыйнақлылығын дәлиллеўге арналған.

Жумыстың бесинши бабы ишки толқынлар теориясының айрым мәселелерин шешиўге арналған. Биринши параграфта мәселениң математикалық жақтан қойылыуы қаралады. Екінши параграфында жоқарыдағы мәселеге шекли айырмалар хәм шекли элементлер усылы тийкарында хәр қыйлы схемалар дүзиледі. Дүзилген схемаларды санлы реализациялаў жоллары көрсетілген. Соңғы үшінши параграфта санлы экспериментлер жәрдемінде схемалардың артықмашылықлары айтылады.

Жумыстың хәр бир бабының ақырында қысқаша жуўмақлаў келтириледі. Ең соңында пайдаланылған әдебиятлар дизими келтириледі.

1-бап. Базыбир қосымша мағлыұматлар

1-§. Функционал анализ элементлери.

Сызықлы кеңислик. Биз хақыйқый сызықлы H кеңислигин караймыз. Яғный, хәр-бир $y \in H, v \in H$ жуплығы ушын $y + v \in H$ элементи хәм хәр-бир $y \in H$ хәм λ хақыйқый саны ушын $\lambda y \in H$ элементлери сәйкес қойылған. Буған қосымша $y, v, z \in H$ элементлери хәм λ, μ хақыйқый санлары ушын төмендеги аксиомалар орынлы болсын:

1) $y + v = v + y, y + (v + z) = (y + v) + z;$

2) $\lambda(\mu y) = (\lambda \mu)y;$

3) $\lambda(y + v) = \lambda y + \lambda v, (\lambda + \mu)y = \lambda y + \mu y;$

4) биргелкили анықланған сондай бир 0 элементи бар болып, қәлеген $y \in H$ ушын $y + 0 = y$ теңлиги орынлы;

5) қәлеген $y \in H$ ушын биргелкили анықланған $(-y) \in H$ элементи бар болып $y + (-y) = 0$ теңлиги орынлы;

6) $1 \cdot y = y.$

H сызықлы кеңислигиниң элементлери $y_i, i = 1, 2, \dots, n$ сызықлы ғәрезсиз деп аталады, егерде төмендеги $\sum_{i=1}^m \lambda_i y_i = 0$

теңлигинен $\lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$ келип шықса. Кери жағдайда $y_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$ элементлери сызықлы ғәрезли деп аталады..

H кеңислиги k өлшемли деп аталады, егерде H та k сызықлы ғәрезсиз элементлер бар болып, ал қәлеген $(k + 1)$ -ши элемент сызықлы ғәрезли болса.

H сызықлы кеңислиги нормаланған деп аталады, егерде хәр-бир $y \in H$ элементи ушын усы элементтиң нормасы деп аталатуғын $\|y\|$ хақыйқый саны анықланған болып ол төмендеги шәртлерди қанаатландырса:

- 1) $\|y\| \geq 0$ хэм $\|y\| = 0$ егерде $y = 0$ болса;
- 2) $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$;
- 3) $\|y + v\| < \|y\| + \|v\|$ (үшмүйешлик теңсизлиги).

Бир сызықлы кеңісликте норманы хәрқыйлы усыллар менен киргизиў мүмкин.

H сызықлы нормаластырылған кеңіслигиниң y_i элементлериниң избе-излиги $y \in H$ элементине жыйнақлы деп аталады, егерде $i \rightarrow \infty$ да $\|y_i - y\| \rightarrow 0$ орынланса. Егерде, $i, j \rightarrow \infty$ да $\|y_i - y_j\| \rightarrow 0$ орынланса, онда y_i избе-излиги фундаментал деп аталады.

H сызықлы нормаласқан кеңіслиги толық деп аталады, егерде ондағы кәлеген фундаментал избе-излик y_i усы кеңісликтиң y элементине жыйнақлы болса. H толық сызықлы нормаласқан кеңіслиги Банах кеңіслиги деп аталады. Қәлеген шекли өлшемли сызықлы нормаласқан кеңіслик Банах кеңіслиги болып табылады. Қәлеген еки y, v жуплығы ушын H хәқыйқый сызықлы кеңіслигинде төмендеги шәртлерди қанаатландыратуғын (y, v) скаляр көбеймесин анықлаймыз:

- 1) $(y, v) = (v, y)$;
- 2) $(y + v, z) = (y, z) + (v, z)$;
- 3) $(\lambda y, v) = \lambda (y, v)$;
- 4) $(y, y) \geq 0$, $u(y, y) = 0$ тек ғана $y = 0$ ушын.

H сызықлы хәқыйқый нормаласқан кеңіслигинде норманы $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ деп анықласақ, онда ол унитар кеңіслик деп аталады. Толық унитар кеңіслик H Гильберт кеңіслиги деп аталады. Кеңісликтиң элементлери y хәм v ортогональ деп аталады, егерде $(y, v) = 0$ болса. H кеңіслигиниң элементлери $y_i, i = 1, 2, \dots, m$ ортогональ система дүзеди деп

айтылады, егерде $(y_i, y_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ теңлиги орынланса. Бул жерде

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases} \text{ - Кронекер белгиси.}$$

H унитар кеңислигинин y, v элементлери ушын төмендеги **Коши-Буняковский (Шварц)** теңсизлиги орынлы: $|(y, v)| < \|y\| \|v\|$.

Бул жерде теңлик тек y хэм v сызықты байланыслы болған жағдайда ғана орынлы болады.

H унитар кеңислигинин еки y хэм v элементлери ушын

$$\|y + v\|^2 + \|y - v\|^2 = 2(\|y\|^2 + \|v\|^2)$$

параллелограмм теңлиги орынлы болады. Буған қосымша кәлеген еки y хэм v элементлери ушын төмендеги теңлик орынлы:

$$(y, v) = \frac{1}{4}(\|y + v\|^2 - \|y - v\|^2).$$

Гильберт кеңислиги. Кеңислик Гальберт кеңислиги деп аталады, егерде онда

$$(u, \vartheta) = \int_{\Omega} u(x)\vartheta(x)dx.$$

теңлиги арқалы скаляр көбеймеси киритилсе.

$D^\alpha f(x) \in L_p(\Omega)$ функциясы Ω областында $f(x) \in L_p(\Omega)$ функцияның α тәртіпли улыұмаластырылған туұындысы деп аталады, егерде кәлеген $\varphi \in D(\Omega)$ функциясы ушын

$$\int_{\Omega} D^\alpha f(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)D^\alpha \varphi(x)dx$$

теңлиги орынланса. Бул жерде

$$D_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

Кәлеген пүтин $m \geq 0$ хэм $1 \leq p \leq \infty$ шәртин қанаатландыратуғын p хақыйқый саны берилген болсын.

Барлық дара туўындылары $D^\alpha u(x)$ (улыўмаластырылған туўынды мәнисинде) $|u| \leq m$ болғанда $L_p(\Omega)$ кеңислигине тийисли $u \in L_p(\Omega)$ функцияларынан туратуғын $W_p^m(\Omega)$ Соболев кеңислигин анықлаймыз.

Нормалары

$$\|u\|_m = \|u\|_{m,\Omega} = \|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{s=0}^m |u|_{s,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad |u|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{o,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

түринде киритилсе, онда $W_p^m(\Omega)$ көплиги Соболев кеңислиги деп аталады.

2-§. Шекли айырмалар хаққында тийкарғы түсиниклер.

Торлар. Ең әпиўайы тор $0 \leq x \leq l$ туўрысындағы

$$\bar{\omega} = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}; h = l/N\}, \quad \omega = \bar{\omega} \setminus (x_0 = 0, x_N = l)$$

пүтин түйинли тең өлшемли торы болып табылады [1]. Шегаралық шертлерге байланыслы буннан басқада торлар қолланылады. Мысалы, $\omega^* = \{\bar{x}_i = (i + 0.5)h, i = \overline{0, N-1}; h = l/N\}$ сеткасы.

Буннан басқада

$$\tilde{\omega} = \{x_i = i\tilde{h}, i = \overline{0, N}; \tilde{h} = 2l/(2N+1)\},$$

$$\tilde{\omega}^* = \{\bar{x}_i = (i + 0.5)\tilde{h}, i = \overline{0, N}; \tilde{h} = 2l/(2N+1)\}$$

торларынан пайдаланамыз.

Ўақыт бойынша өзгеріўши $0 \leq t \leq T$ ушын

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, M}; \tau = T/M\}, \quad \omega_\tau = \bar{\omega}_\tau \setminus (t = 0),$$

$$\bar{\omega}_\tau^* = \{\bar{t}_n = (n + 0.5)\tau, n = \overline{0, M-1}; \tau = T/M\}$$

торлары қолланылады.

Тордағы функциялар хәм кеңислик. Бир өлшемли кеңисликтеги торлық функциялар ушын төмендеги белгилеўлерди киритемиз:

$$y = y(x), \quad y_x = \frac{y^{(+1)} - y}{h}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y - y^{(-1)}}{h}, \quad y_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{y^{(+1)} - 2y + y^{(-1)}}{h^2}.$$

Бунда D^\pm торлық функциялардың операторы. Егерде функция ұақыт өзгеріуісінде ғәрезли болса, онда төмендеги белгилерден пайдаланамыз:

$$y = y(x, t), \quad \overset{\vee}{y} = y(x, t + \tau), \quad \overset{\vee}{y} = y(x, t - \tau), \quad y_t = \frac{\overset{\vee}{y} - y}{\tau},$$

$$y_{\bar{t}} = \frac{y - \overset{\vee}{y}}{\tau}, \quad y_0 = \frac{\overset{\vee}{y} - y}{2\tau}, \quad y_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{\overset{\vee}{y} - 2y + \overset{\vee}{y}}{\tau^2},$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma \overset{\vee}{y} + (1 - \sigma)y, \quad y(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 \overset{\vee}{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \overset{\vee}{y},$$

$$\bar{y} = y(x, \bar{t}) = y(x, t + 0.5\tau).$$

Схемалардың орнықлығын изертлеу үшін, биз бөлеклеп интеграллау формуласының торлық аналогин пайдаланамыз:

$$\int_a^b u' \mathcal{G} dx = u \mathcal{G} \Big|_a^b - \int_a^b u \mathcal{G}' dx.$$

Мейли бизге $y = y(x_i), \mathcal{G} = \mathcal{G}(x_i)$ функциялары $\bar{\omega}$ торында берілген болсын. Скаляр көбеймелерди

$$(y, \mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{N-1} h y(x_i) \mathcal{G}(x_i), \quad [y, \mathcal{G}] = \sum_{i=0}^{N-1} h y(x_i) \mathcal{G}(x_i), \quad (y, \mathcal{G}] = \sum_{i=1}^{N-1} h y(x_i) \mathcal{G}(x_i)$$

формулалары арқалы киргиземиз. Онда бөлеклеп интераллау формуласының тордағы аналогин

$$(y, \mathcal{G}_x) = -(\mathcal{G}, y_x] + (y \mathcal{G})_N - y_0 \mathcal{G}_1$$

формуласы болып табылады. $\bar{\omega}$ торының шегаралық түйинлерде

$$y_0 = y_N = 0 \quad \text{ямаса} \quad y_0 = \mathcal{G}_N = 0 \quad \text{болса, онда жоқарыдағы формула}$$

$$(y, \mathcal{G}_x) = -(\mathcal{G}, y_x]$$

түрине ийе болады. $\bar{\omega}$ торында берілген функциялар көплигинде

$$(y, \mathcal{G}) = \sum_{i=0}^N h y(x_i) \mathcal{G}(x_i) \quad \text{скаляр көбеймесин хәм} \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)} \quad \text{нормасын}$$

киритемиз.

Солай етип, торлық функциялардың сызықлы кеңислигине ийе боламыз хәм оны H арқалы белгилеймиз..

Булардан басқа биз төмендеги сеткалық нормаларды пайдаланамыз:

$$\|y\| = (y, y)^{\frac{1}{2}}, \quad \left\| [y\| = [y, y]^{1/2}, y] \right\| = (y, y)^{\frac{1}{2}},$$
$$\|\varphi\|_0 = \left(\sum_{t'=0}^{t_1} \tau \|\varphi(t')\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < t_1 \leq T, \quad \|\varphi\|_A = \left(\sum_{t'=0}^{t_1} \tau \|\varphi(t')\|_A^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3-§. Шекли элементлер хаққында тийкарғы түсиниклер.

Шекли элементлер усылының тийкарғы концепциясы. Шекли элементлер усылының тийкарғы идеясы, қәлеген үзликсиз шаманы, мысалы температура, басым, жылжыў х.т.б. оның дискрет модели менен аппроксимациялаўдан ибарат. Бул аппроксимация шекли сандағы төменги областларда анықланған бөлек-бөлек үзликсиз функциялар көплигинде дүзиледи.

Улыўма жағдайда үзликсиз шама алдын ала белгисиз хәм оның шамасын берилген областтың ишки точкаларында анықлаў керек. Егерде бул шаманың санлы мәнислери областтың ишиндеги қәлеген точкаларда алдынан белгили болса, онда дискрет моделди дүзиў қыйыншылық туўдырмайды. Буннан соң улыўма жағдайға өтиўге болады. Солай етип, үзликсиз шаманың дискрет молелин дүзиў ушын төмендеги әмеллерди орынлаймыз:

1. Қаралып атырған областта шекли сандағы точкаларды белгилеп аламыз. Бул точкалар түйин точкалары ямаса әпиўайы сөз бенен түйинлер деп аталады.

2. Хәр бир түйиндеги үзликсиз шаманың мәниси өзгериўши деп аталады хәм бул анықланыўы керек.

3. Үзликсиз шаманың анықланыўы областы шекли сандағы киши областларға бөлинеди. Бул киши областлар элементлер деп аталады. Бул

элементлердің хәммеси бири-бири менен улыўма түйинлерге ийе болады хәм олар биргеликте тийкарғы берилген област формасын аппроксимациялайды.

4. Үзликсиз шама хәр бир элементе усы шаманың түйининдеги мәнислериниң жәрдеминде полиномлар менен аппроксимацияланады. Хәр бир элемент ушын өзиниң полинимы анықланады. Бирақ бул полиномлар элементтиң шегарасында шаманың үзликсизлиги сақланатуғындай етип сайлап алынады.

Хәзирги ўақытта шекли элементлер усылының қолланылыў областы оғада кең. Бул усылдың ең әхмийетли артықмашылықлары төмендегилер болып табылады:

1. Аралас элементлердің материалларының қәсийети бирдей болыўы шәрт емес. Бул шекли элементлер усылын хәр қыйлы материаллардан куралған денелерге қолланыўға мүмкиншилик береді.

2. Иймексызықлы областлар туўрысызықлы элементлер жәрдеминде ямаса иймексызықлы элементлер менен дәл аппроксимацияланыўы мүмкин. Солай етип усыл тек шегарасы жақсы областларға ғана емес, ал шегарасы курамалы болған областларғада қолланылады.

3. Элементлердің размерлери өзгериўши болыпта келиўи мүмкин.

4. Шекли элементлер усылын шегаралық функциялар үзликли болған жағдайдада хәм аралас шегаралық шәртлер жағдайындада табыслы қолланыў мүмкин.

5. Шекли элементлер усылының және бир артықмашылығы, белгили бир класстағы дара мәселелер жыйындысына улыўма бир алгоритм хәм программа дүзиў мүмкиншилигин береді.

Бул усылдың ең бир кемшиликлериниң бири, бул есаплаў машиналары ушын есаплаў алгоритмлерин хәм программаларын дүзиў болып табылады. Буған қосымша бул усыл көбирек арифметикалық әмеллерди орынлаўға алып келеді. Мысалы, шекли айырмалар усылы менен салыстарғанда шекли элементлер усылы шама менен төрт есе арифметикалық әмеллерди көбирек

орынлау талап етеді. Бірақ жоқарыда келтирилген артықмашылықтар хәм хәзирги заман оғада тез есаплау машиналарының пайда болыуы шекли элементлер усылының бүгинги күнде практикада көп қолланылуына алып келмекте.

Шекли элементлердің типі. Шекли элементлер усылы менен мәселелерди шешкенимизде хәр қыйлы типтеги элементлер пайдаланылады. Элементлердің ишиндеги ең әпиуайысы, бул бир өлшемли элементлер болып табылады. Бул әдеттеги тууры сызық. Бундай элементлер әдетте бир өлшемли мәселелерди шешкенде пайдаланылады. Бул бир өлшемли элемент еки түйиннен турады. Буннан басқа үш түйинли (квадратлық), төрт түйинли (кублық) элементлерде қолланылады. Еки өлшемли областтың дискрет моделин дүзиу ушын элементлердің еки тийкарғы семействосы қолланылады. Булар үш мүйешликлер хәм төрт мүйешликлер болып табылады. Хәр бир семействоның сызықлы элементлериниң тәреплери тууры сызықлардан турады. Квадратлық хәм кублық элементлер туурысызықлы ямаса иймек сызықлы тәреплерден турууы мүмкин. Элементтиң қалыңлығы турақлы ямасы координат функциясы болыуы мүмкин. Ең көп ушырасатуғын үш өлшемли элементлер тетраэдр хәм параллелепипедлер болып табылады.

Областты элементлерге бөлиу. Дискретизация процессин еки этапқа бөлиу мүмкин: бириншиси денени элементлерге бөлиу, екиншиси элементлерди хәм түйинлерди номерлеп шығыу болып табылады. Кейинги этап оғада әпиуайы екенлиги көринип тур, бірақ областтың үлкейиуи менен олды қыйынласады.

Ең әпиуайы жағдай бул, мысалы, еки өлшемли областты сызықлы үш мүйешли элементлерге бөлиуден ибарат. Себеби, областты дәлирек етип моделлестирюу ушын элементлердің санын көбирек етип алыуға туура келеди.

Жуўмақлаў

Бул бапта үйренилип шыққан әдебиятлардан, атап айтқанда, математикалық анализ, функционаллық анализ хәм есаплаў математикасы теорияларының кейинги изертлеўлер ушын керекли материаллар келтириледи. Булар үзликсиз функциялар, Гильберт хәм Соболев кеңисликлери, шекли айырмалар ўаққында қысқаша түсиниклер, торлар, торлық функциялар хәм нормалар, торлық функциялар кеңислиги ҳ.т.б. Буннан кейин шекли элементлер ўаққында қысқаша түсиниклер берилди.

II-бап. Стационар емес теңлемелер үшін шегаралық мәселелер

1-§. Гиперболалық типтегі теңлемелер.

Бир текли тардың тербелісінің математикалық модели

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f(x_1, t_1), \quad 0 < x_1 < l, \quad t_1 > 0$$

түрінде жазылады. Егерде $x = \frac{x_1}{l}, \quad t = \frac{t_1}{l}$ жаңа өзгеріушілерін киргизсек, онда бул теңлеме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

түрине ийе болады. Бул теңлеме үшін басланғыш шәртлер төмендегіше қойлады:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x), \quad (2)$$

($u_0(x)$ - дәслепки өзгеріс; $\bar{u}_0(x)$ - дәслепки тезлік).

Улыұма жағдайда екінші тәртіпті гиперболақ теңлеме

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad \rho > 0$$

түрінде жазылады. Бунда Lu - эллиптикалық оператор, мысалы,

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right),$$

$k(x, t) > 0$ – жыллылық өткізгішлік коэффициенті, ρ - тығызлық.

Бир текли орталық үшін мембрананың тербелісінің теңлемесі төмендегі түрге ийе болады:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \Delta u + f(x, t), \quad \rho > 0, \quad k > 0, \quad (3)$$

бунда $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, k - мембрананың тартылыуы.

(1)-тенлеме ушын (2)-басланғыш шәртлери хәм $x=0$ $x=l$ точкаларында төмендеги шегаралық шәртлер қойлады:

$$\text{а) } u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2; \quad (4)$$

$$\text{б) } k \frac{du}{dx} = \mu_1 \quad x=0, \quad -k \frac{du}{dx} = \mu_2 \quad x=l;$$

$$\text{в) } k \frac{du}{dx} - \sigma_1 u = -\mu_1 \quad x=0, \quad -k \frac{du}{dx} - \sigma_2 u = -\mu_2 \quad x=l;$$

Буннан басқа, $x=0$ хәм $x=l$ точкаларында а)-в) шәртлериниң қәлеген комбинациясы менен алынған шегаралық шәртлер қойылыуы мүмкин. Усындай шегаралық шәртлер (3)-тенлеме ушында қойылады [1].

2-§. Цилиндрлик пьезовибратордагы сестин нурланыуы хаққында мәселенин математикалык модели.

Шенбер бойынша поляризацияланған шексиз узын ярым цилиндр туринде берилген пьезовибратордын стационар емес тербелисинин математикалык модели томендеги тенлемелер аркалы жазылады:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) - \frac{\sigma_\theta}{r} + f, \quad R_1 < r < R_2, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\sigma_r = c_{11} \varepsilon_r + c_{22} \varepsilon_\theta - e_{11} E_\theta, \quad \sigma_\theta = c_{12} \varepsilon_r + c_{22} \varepsilon_\theta - e_{12} E_\theta, \quad (6)$$

$$D_\theta = e_{11} \varepsilon_r + e_{12} \varepsilon_\theta + \varepsilon_{33} E_\theta,$$

$$\varepsilon_r = \partial u / \partial r, \quad E_\theta = u / r. \quad (7)$$

Бунда u – радиаллык козгалыс, σ_r , σ_θ , ε_r , ε_θ - сәйкес кернеу хәм деформациянын тензорларынын компоненталары, E_θ , D_θ - сәйкес кернеу векторлары хәм индукцияларынын компоненталары, c_{ij} , ε_{33} , l_{kl} - сәйкес диэлектрик хәм пьезоэлектрик тураклылар, $f = f(r, t)$ - массалык куштин тыгызлыгы.

Поляризациянын сайлап алынган багыты бойынша деформация майданы хэм электр майданы бири-бири менен байланыссыз хэм

$$E_{\theta} = \frac{1}{r} G(t). \quad (8)$$

Цилиндрдин ишки бети кернеусиз, ал сырткы бети цилиндрди коршап турган акустикалык орталык пенен оз-ара байланысы себепли кернеуге ийе.

Бул томендеги шегаралык шэртлерге алып келеди:

$$\sigma_r = 0, \quad r = R_1, \quad \sigma_r = -p_1(t), \quad r = R_2, \quad (9)$$

бунда $p_1(t) - r = R_2$ деги акустикалык орталыктын басымы.

Акустикалык орталыктын козгалысынын тенлемеси томендеги турге ийе болады:

$$\frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad R_2 < r < \infty, \quad t > 0. \quad (10)$$

Бунда φ - тезлик потенциалы, c_o - сестин тезлиги. Орталыктагы акустикалык басым хэм тезлик томендеги анлатпалар аркалы аныкланады:

$$p = -\rho_o \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (11)$$

Бунда ρ_o - акустикалык орталыктын тыгызлыгы.

Шексизликте $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r, t) = 0$ шэрти орынлы. Бул шэртти потенциалдын нолге тен шэрти менен алмастырамыз:

$$\varphi = 0, \quad r = R_3. \quad (12)$$

Бундай шекли R_3 ушын, каралып атырган $t \in [0, T]$ уакыт интервалында тэбийй емес шегеранын койылыуы цилиндрдин деформациялык халына хэм шегарага жакын жердеги акустикалык орталыктын тербелисине тэсирин тийгизбейди. Еки орталыктын арасындагы шегарада кушлик характеристикалардын хэм тезликлердин узликсизлик шэрти койылады:

$$p_1(t) \equiv -\rho_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\sigma_r, \quad \vartheta_1(t) \equiv \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad r = R_2. \quad (13)$$

Цилиндрдеги хэм акустикалык орталыктагы баслангыш шэртлер томендегише койылады:

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad (14)$$

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad R_2 \leq r \leq R_3, \quad t = 0.$$

Бул (1)-(14) - мэселени шешиу ушын томендеги энергетикалык бирдейлик орынлы:

$$\frac{dE}{dt} = \int_{R_1}^{R_2} r f \frac{\partial u}{\partial t} dr, \quad (15)$$

бунда $E = K + U$ - толык, ал K , U – системанын кинетикалык хэм потенциаллык энергиялары:

$$K = K_1 + K_2,$$

$$K_1 = \frac{\rho}{2} \int_{R_1}^{R_2} r \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dr, \quad K_2 = \frac{\rho_o}{2} \int_{R_2}^{R_3} r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 dr,$$

$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} r (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + D_\theta E_\theta) dr = U_\varepsilon + U_E,$$

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} r (c_{11} \varepsilon_r^2 + 2c_{12} \varepsilon_r \varepsilon_\theta + c_{22} \varepsilon_\theta^2) dr,$$

$$U_E = \frac{E_{33}}{2} \int_{R_1}^{R_2} r E_\theta^2 dr, \quad U_2 = \frac{\rho_o}{2c_o^2} \int_{R_2}^{R_3} r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dr.$$

Бунда K_α, U_α – пьезомайыскак ($\alpha = 1$) хэм акустикалык ($\alpha = 2$) орталыктын кинетикалык хэм потенциаллык энергиялары. Кэлеген ξ_1, ξ_2 ушын

$$c_{11} \xi_1^2 + 2c_{12} \xi_1 \xi_2 + c_{22} \xi_2^2 \geq \delta (\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad \delta > 0, \quad (16)$$

шэртинин орынланыуы U_ε дын он болыуына алып келеди. Буган косымша, $\rho, \rho_o, \varepsilon_{33}$ о тураклы санлар.

3-§. Шеңбер бойынша поляризацияланған пьезокерамикалық цилиндрдің тербелісі хақында мәселе

Мәселенің қойылыуы. Бул параграфта шеңбер бойынша поляризацияланған пьезокерамикалық цилиндрдің тербелісі хақында мәселенің математикалық моделин қарап өтеміз.

Ишки радиусы $r = R_0$ хәм сыртқы радиусы $r = R_1$ болған шексиз узын ярым пьезокерамикалық цилиндрдің радиаллық электрли майысқақлық тербелісін қараймыз.

Кернеу цилиндрлик симметрияда пьезокерамикалық орталықтың жағдайын анықлаушы теңлеме бойынша табылады:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_r &= \sigma_r - e_{13}E_\varphi, & \sigma_r &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi, \\ \tilde{\sigma}_\varphi &= \sigma_\varphi - e_{33}E_\varphi, & \sigma_\varphi &= \lambda\varepsilon_r + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_\varphi,\end{aligned}\tag{17}$$

бунда $\varepsilon_r = \partial u_r / \partial r$, $\varepsilon_\varphi = u_r / r$ – радиаллық бағыт бойынша деформациялар, u_r – радиаллық бағыт бойынша қозғалыс, σ_r, σ_φ – сәйкес бағытлар бойынша кернеулер, E_φ – электр майданының кернеулиги векторының компоненталары, $(\vec{E} = (0, 0, E_\varphi))$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ – Ляме тұрақлылары, e_{13}, e_{33} – керамиканың пьезомодули.

Цилиндрлик симметрия жағдайында пьезокерамикалық орталықтың хәрекетинің теңлемесі төмендегі түрге ийе болады:

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\varphi}{r}.\tag{18}$$

Бунда $\rho > 0$ – пьезокерамикалық материалдың көлемлик тығызлығы.

Усындай поляризация жағдайында электр майданының нолден өзгеше компоненталары төмендегіше анықланады: $E_\varphi = G(t)/r$, бунда $G(t)$ – берілген электрли потенциал.

Мейли, цилиндрдің бетінде сыртқы механикалық кернеу беріген болсын, яғни

$$\tilde{\sigma}_r = m_1(t), \quad r = R_0, \quad \tilde{\sigma}_r = m_2(t), \quad r = R_1. \quad (19)$$

Бұған қосымша мейли, $t = 0$ жағдайында басланғыш шарттер төмендегіше берілсін:

$$u_r = u_r^0(r), \quad \mathcal{G}_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} = \mathcal{G}_r^0(r), \quad \sigma_r = \sigma_r^0(r). \quad (20)$$

Әдетте бұндай мәселелер (17)-ни (18)-ға апарып қойыу нәтижесінде пайда болатуғын екінші тәртіпті дифференциалы теңleme түрінде шешіледі. Ал практикада болса көбірек кернеуді табыу мәселесі қызықтырады. Бұл жағдайда қозғалыстан туынды алынуы керек болады. Ал бұл өз гезегінде қосымша қыйыншылықтарға алып келеді, әсіресе санлы шешімлерді табыуда. Сонлықтан мәселені басқаша қойыуға хәрекет етеміз.

Биз (17)-ден

$$\sigma_\varphi = \lambda \varepsilon_r + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_\varphi = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_r + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \sigma \varepsilon_\varphi \quad (21)$$

аңлатпасын анықлаймыз хәм усы (21)-ны есапқа ала отырып (17)-ге қоямыз.

Енди σ_r ди t бойынша дифференциаллап хәм тезликті $\frac{\partial u_r}{\partial t} = \mathcal{G}_r$ арқалы

белгилесек, онда төмендегі бирінші тәртіпті дифференциалы теңлемелер системасына ийе боламыз:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\sigma_r}{r} - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\varepsilon_\varphi}{r} + f, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} + \lambda \frac{\mathcal{G}_r}{r}, \\ \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial t} &= \frac{\mathcal{G}_r}{r}. \end{aligned} \quad (22)$$

Буннан $\varepsilon_\varphi = u_r / r$ екенін есапқа алсақ хәм r , φ индекслерін түсіріп жазсақ, онда (19), (20), (22)-лерден төмендегілерге ийе боламыз:

$$\rho \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma) - a \frac{\sigma}{r} - b \frac{u}{r^2} + f,$$

$$\frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + a \frac{\mathcal{G}}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{G},$$

$$u = u^0(r), \quad \sigma = \sigma^0(r), \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}^0(r),$$

$$\sigma = \mu_1(t) + e_{13}E, \quad r = R_0, \quad \sigma = \mu_2(t) + e_{13}E, \quad r = R_1.$$

Бнда $a = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$, $b = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$, $f = -e_{13} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{e_{13} - e_{33}}{r}$.

Жуўмақлаў

Солай етип, бул бапта стационар емес теңдемелерге шегаралық мәселелердин қойылыўы қаралды. Биринши параграфта улыўма гиперболалық типтеги теңдемелерге шегаралық мәселелер көрсетилген. Екинши параграфта цилиндрлик пьезовибратор жәрдеминде сестин нурланыўы мәселесиниң математикалық модели хәм оған қойылатуғын шегаралық шәртлер сөз етилди. Үшинши параграфта шеңбер бойынша поляризацияланған пьезокерамикалық цилиндрдин тербелиси ҳаққында мәселесиниң математикалық модели хәм оған қойылатуғын шегаралық шәртлер сөз етилди.

III-бап. Стационар емес мәселелерди шекли айырмалар усылы менен шешиў

1-§. Гиперболалық типтеги теңдемелерди шешиў хәм орнықлығын изертлеў жоллары.

Мәселениң қойылыўы. Берилген

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

туўрымүйешлигинде екинши тәртипли гиперболалық типтеги эпиўайы шегаралық мәселелердиң бирин қарайық:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \quad (26)$$

Бул мәселе бир текли орталықта тербелистиң тарқалыў процесиниң математикалық моделин береді. Шегаралық хәм басланғыш шәртлер төмендегише қойылады:

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (27)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v^0(x), \quad x \in \Omega. \quad (28)$$

Мейли $H = L_2(\Omega)$ (27) шегаралық шәртлерди қанаатландыратуғын $u(x, t)$ функцияларының көплиги болсын.

Дифференциалы оператор

$$Du = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) \quad (29)$$

H та өзи-өзине түйинлес хәм оң анықланған, яғный

$$D = D^* \geq k\lambda_0 E. \quad (30)$$

Бул жерде $\lambda_0 > 0$ — Дирихле шегаралық шәртли Лаплас операторының минимал(ең киши) меншикли мәніси.

Жоқарыдағы (26) — (28) мәселесин орнықты айырмалық схемалар дүзгенимизде, априор баға ретинде

$$\|u(x, t)\|_*^2 \leq \exp(t) \left(\|u^0\|_A^2 + \|v^0\|^2 \right) + \int_0^t \exp(t - \theta) \|f(\theta)\|^2 d\theta \quad (31)$$

баҳасы көзде тутылады. Бунда

$$\|u(x, t)\|_*^2 \equiv \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \|u\|_A^2.$$

Бул орнықты баҳасы (26) — (28) мәселениң шешиминиң басланғыш шәртлерден хәм оң тәрәпинен үзликсиз ғәрезли екенин көрсетеди.

Кеңислик бойынша аппроксимациялаў. Қойылған мәселени санлы шеший ушын тең өлшемли туўрымүйешли сеткалар

$$\varpi_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}.$$

қолланылады.

Мейли $H = L_2(\omega)$ шегаралық точкаларда нольге айланатуғын, төмендеги скаляр көбеймеси хәм нормасы менен анықланған:

$$(y, \omega) = \sum_{x \in \omega} y(x) \omega(x) h_1 h_2, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$$

$k(x)$ коэффициенти $k \leq k(x) \leq \bar{k}$, $k > 0$ шәртин қанаатландыратуғын болсын.

Енди дифференциалы оператор D ны төмендеги

$$D = \sum_{\alpha=1}^2 D^{(\alpha)}, \quad D^{(\alpha)} y = - \left(a^{(\alpha)} y_{x_\alpha} \right)_{x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \omega \quad (32)$$

айырмалар операторы менен алмастырамыз.

$$a^{(1)}(x) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2), \quad a^{(2)}(x) = k(x_1, x_2 - 0,5h_1).$$

Бир өлшемлі айырмалар операторлары $D^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ тийкарғы қасиетлериниң бири, олар өзи-өзине түйинлес хәм оң анықланған:

$$D^{(\alpha)} = \left(D^{(\alpha)} \right)^* \geq \delta_\alpha E, \quad D^{(\alpha)} \leq \Delta_\alpha E. \quad (33)$$

Буған қосымша,

$$\delta_\alpha = \frac{8K}{l_\alpha^2}, \quad \Delta_\alpha = \frac{4\bar{K}}{h_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Бул мәселени кеңислик өзгериўшилери бойынша дискретизациялағанымызда, биз төмендеги екинши тәртиптеги операторлы теңдеме ушын Коши мәселесин аламыз:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + Ay = \varphi(x, t), \quad x \in \omega, \quad t > 0, \quad (34)$$

$$y(x, 0) = u^0(x), \quad \frac{dy}{dt}(x, 0) = v^0(x), \quad x \in \omega. \quad (35)$$

Аддитивли айырмалар схемаларын дүзгенимизде A операторын төмендеги аддитивлик көрнисте көрсетемиз:

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)} \right)^* > 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (36)$$

Бунда

$$A^{(\alpha)} = D^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (37)$$

үшқатламлы схемалар ҳаққында айрым факторларды киритейик.

Параметрли айырмалар схемасы.

Берилген (34), (35) –

мәселени ұақыт бойынша тең өлшемлі сеткаларда τ адымы менен жууық шешіу үшін екінші тәртіпті аппроксимацияға ийе үш қатламлы, σ параметрлі

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + A(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma)y_n + \sigma y_{n-1}) = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

$$y_0 = u^0, \quad y_1 = u^1 \quad (39)$$

айырмалы схемасын қарайық.

Бұл схема үшін екінші басланғыш шәртлерді төмендегіше аламыз:

$$y_1 = y_0 + \tau \tilde{v}, \quad \tilde{v} = v^0 + \frac{\tau}{2}(\varphi_0 - Dy_0).$$

Енді улыуа орнықлылық теориясының мағлыұматларынан пайдаланыу үшін (38), (39) – айырмалар схемасын төмендегі үш қабатлы схемалардың каноникалық түрінде жазамыз:

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + Ay_n = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (40)$$

Бунда y_0, y_1 берилген шамалар. (38), (39) лер үшін

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2} E + \sigma A, \quad A = A^* > 0 \quad (41)$$

(40) – схемасының орнықлылық шәрти:

$$B \geq 0, \quad A > 0, \quad R > \frac{1}{4} A. \quad (42)$$

Бунда B, R, A операторлары турақлы хәм өзи-өзине түйинлес.

Егерде $\sigma = 0$ болса, онда (42) – шәрт ұақыт бойынша адымға төмендегі шәртти береді:

$$\tau < \frac{2}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2}} = O(|h|).$$

Егерде $\sigma \geq 0,25$ болса, онда (38), (39)-схемасы шәртсиз орнықлы болады. Буннан басқа, басланғыш шәртлер хәм оң тәрепи бойынша алынған

бақаларды пайдалана отырып (38), (39) айырмалар схемасының жыйнақшылығы кеңіслік хәм ұақыт бойынша екінші тәртіпте екенін дәлилдеу қыйын емес.

2-§. Цилиндрлік пьезовибраторындағы сестің нурланыуы мәселесін шешиу.

Схеманы дүзиу. Айырмалы схемаларды дүзиу еки этаптан турады: дифференциалы теңлеме дәслепп кеңіслік бойынша дискретизацияланады, буннан соң ұақыт бойынша. (5)-(14) - мәселені кеңіслік бойынша аппроксимациялау үшін төмендеги торларды киритемаиз: $\bar{\omega}_{h_1} = \{r = R_1 + i_1 h_2, i_1 = \overline{0, N_1}, h_1 = (R_2 - R_1) / N_1\}$, $\bar{\omega}_{h_2} = \{r = R_2 + i_2 h_2, i_2 = \overline{0, N_2}, h_2 = (R_3 - R_2) / N_2\}$.

Путин түйінлерден басқа $\bar{r} = \tau - h_\alpha / 2$, $r \in \omega_{h_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ ярым түйінлерінде киритемиз.

Кеңіслік бойынша аппроксимациялауды E энергиясының квадрат функционалын аппроксимациялау усылы бойынша әмелге асырамыз [45]. Энергияның аңлатпасындағы интегралды сәйкес квадратуралық формулалар менен алмастырып, ал тууындыларды сәйкес шекли айырмалар менен алмастырып төмендеги дискрет орталықтағы өзгеріуі законын аламыз:

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = \sum_{r \in \bar{\omega}_{h_1}} \hbar_1 r f \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}. \quad (43)$$

Бунда

$$\tilde{E} = \tilde{K} + \tilde{U}, \quad \tilde{K}_1 = \frac{\rho}{2} \sum_{\bar{\omega}_{h_1}} \hbar_1 r \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right)^2, \quad \tilde{K}_2 = \frac{\rho_0}{2} \sum_{\omega_{h_2}^+} h_2 \bar{r} (\tilde{\varphi}_{\bar{r}})^2,$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2, \quad \tilde{U}_1 = \frac{1}{2} \sum_{\bar{\omega}_{h_1}^+} h_1 \bar{r} \left(c_{11} \tilde{\varepsilon}_r^2 + 2c_{12} \tilde{\varepsilon}_r \tilde{\varepsilon}_\theta + c_{22} \tilde{\varepsilon}_\theta^2 \right) + \frac{\varepsilon_{33}}{2} \sum_{\bar{\omega}_{h_1}^+} h_1 \bar{r} \bar{E}_\theta^2,$$

$$\tilde{U}_2 = \frac{\rho_0}{2c_0^2} \sum_{\bar{\omega}_{h_2}} \hbar_2 r \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right)^2.$$

Бул жерде $\tilde{u} = \tilde{u}(r, t)$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(r, t)$ - дискрет өзгериўши $r \in \bar{\omega}_{h_1}$, $r \in \bar{\omega}_{h_2}$ хэм үзликсиз өзгериўши $t \in [0, T]$ ның функциялары болады. Булар сәйкес $u(r, t)$ и $\varphi(r, t)$ функцияларына жақынлаўшы функциялар болып бабылады:

$$\tilde{\varepsilon}_r = \tilde{u}_{\bar{r}} = \frac{\tilde{u} - \tilde{u}^{(-1)}}{h_1}, \quad \tilde{\varepsilon}_\theta = \frac{\tilde{u} + \tilde{u}^{(-1)}}{2\bar{r}},$$

$$\bar{E}_\theta = \frac{1}{\bar{r}} G(t), \quad \tilde{u}^{(\pm)} = \tilde{u}(r \pm h_1, t),$$

$$\omega_{h_\alpha}^+ = \{r = R_\alpha + i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{1, N_\alpha}\},$$

$$\hbar_\alpha = h_\alpha, \quad r \in \omega_{h_\alpha}, \quad \hbar_\alpha = \frac{h_\alpha}{2}, \quad r \in \gamma_{h_\alpha} = \{r = R_\alpha, r = R_{\alpha+1}\}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Енди (43)-ден бөлеклеп қосындылаў формуласына тийкарланып r бойынша шекли хэм t бойынша дифференциалы теңлемелер системасына ийе боламыз. Бул алынған системадағы ўақыт бойынша туўындыны $\bar{\omega}_\tau = \{t = n\tau, n = \overline{0, N_0}, \tau = T/N_0\}$ торында орайлық шекли айырмалар менен алмастыры отырып төмендеги анық айырмалар схемасына ийе боламыз:

$$\rho y_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{1}{r} (\bar{r} \bar{\sigma}_r)_r - \frac{\bar{\sigma}\theta^{(+1)} + \bar{\sigma}\theta}{2r} + f, \quad r \in \omega_{h_1}, t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (44)$$

$$\rho y_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{2}{h_1} \frac{1}{r} \bar{r}^{(+1)} \bar{\sigma}_r^{(+1)} - \frac{\bar{\sigma}\theta^{(+1)}}{r} + f, \quad r = R_1,$$

$$\rho y_{\bar{t}\bar{t}} = -\frac{2}{h_1} \frac{1}{r} \bar{r} \bar{\sigma}_r - \frac{\bar{\sigma}\theta}{r} + f - \frac{2}{h_1} \bar{P}_1, \quad r = R_2, \quad (45)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \mu_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{1}{r} (\bar{r} \mu_{\bar{r}})_r, \quad r \in \omega_{h_2}, \quad t \in \bar{\omega}_\tau,$$

$$\frac{1}{c_0^2} \mu_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{2}{h_2} \frac{1}{r} \bar{r}^{(+1)} \mu_r - \frac{2}{h_2} \bar{g}_1, \quad r = R_2, \quad \mu = 0, \quad r = R_3.$$

Бунда

$$\bar{\sigma}_r = c_{11}\bar{\varepsilon}_r + c_{12}\bar{\varepsilon}_\theta - e_{11}\bar{E}_\theta, \quad \sigma_\theta = c_{12}\varepsilon_r + c_{22}\bar{\varepsilon}_\theta - e_{22}\bar{E}_\theta, \quad (46)$$

$$\bar{\varepsilon}_r = y_{\bar{r}}, \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \frac{y + y^{(-1)}}{2\bar{r}}, \quad (47)$$

$$\bar{p}_1 = -\rho_0\mu_t^0, \quad \bar{\vartheta}_1 = y_0, \quad r = R_2. \quad (48)$$

Басланғыш шәртлерди төмендегише киритемиз:

$$y = y_0 = 0, \quad r \in \bar{\omega}_{h_1}, \quad \mu = \mu_0 = 0, \quad r \in \bar{\omega}_{h_2}, \quad t = 0. \quad (49)$$

(49)-теңлеме $t=0$ де (44), (45)-лер менен бирге, $t = -\tau$ слойында y, μ мәнислерин жоғалтыўға мүмкиншилик береді.

(44)-(49)-схемасын орталықты бөлиўши шегарада жайласқан точкалардан басқа точкалардың барлығында қабаттан-қабатқа өтиўши анық формула жәрдемінде реализациялаў мүмкин. $r=R_2$ жағдайы ушын (44),(45)-теңлемелер (48)-ни есапқа алғанда $y(R_2, t+\tau)$ и $\mu(R_2, t+\tau)$ мәнислерине қарата сызықлы теңлемелер системасын береді. Бул системаның анықлаўышы

$\Delta = \frac{\rho}{h_2} + \frac{\rho_0}{h_1 c_0^2} > 0$ болғанлықтан, бул мәнислерде аңсат есапланады.

Схеманың орнықтылығы. Схеманың қәтелиги $z = y - u$ хәм $\zeta = \mu - \varphi$ төмендеги операторлы-айырмалы схеманың шешими болып табылады:

$$D_1 z_{\bar{t}\bar{t}} + A_1 z = c_1 \zeta_0 + \psi, \quad D_2 \zeta_{\bar{t}\bar{t}} + A_2 \zeta = c_2 z_0 + \chi, \quad t \in \omega_{\bar{\tau}}, \quad (50)$$

$$z = 0, \quad D_1 z_t = \psi, \quad \zeta = 0, \quad D_2 \zeta_t = \chi, \quad t = 0. \quad (51)$$

Бунда $z=z(t)$ хәм $\zeta = \zeta(t)$ барлық $t \in \bar{\omega}_{\bar{\tau}}$ ушын скаляр көбеймеси

$(y, \vartheta)_1 = \sum_{\bar{\omega}_{h_1}} \hbar_1 r y \vartheta, (\mu, \nu)_2 = \sum_{\bar{\omega}_{h_2}} \hbar_2 r \mu \nu$ болған $H_1 = \{z(r) : r \in \bar{\omega}_{h_1}\}$ хәм

$H_2 = \{\zeta(r) : r \in \bar{\omega}_{h_2}, \zeta = 0, r = R_3\}, \quad \omega_{h_2}^- = \bar{\omega}_{h_2} \setminus (r = R_3)$ Гилберт

кеңисликлериниң элементлери борлып табылады. Схеманың операторлары төмендегише анықланады:

$$D_1 z = \rho z, D_2 \zeta = \frac{\rho_0}{c_0^2} \zeta,$$

$$A_1 z = \begin{cases} -\frac{2}{h_1} \frac{1}{r} \bar{r}^{(+1)} \sigma_r^{(+1)} + \frac{\sigma_\theta^{(+1)}}{r}, & r = R_1, \\ -\frac{1}{r} (\bar{r} \sigma_r^0)_r + \frac{\sigma_\theta^{(+1)} + \sigma_\theta^0}{2r}, & r \in \omega_{h_2}, \\ \frac{2}{h_1} \frac{1}{r} \bar{r} \sigma_r^0 + \frac{\sigma_\theta^0}{r}, & r = R_2, \end{cases}$$

$$\sigma_r^0 = c_{11} \varepsilon_r + c_{12} \varepsilon_\theta, \quad \sigma_\theta^0 = c_{12} \varepsilon_r + c_{22} \varepsilon_\theta, \quad \varepsilon_r = z_{\bar{r}}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{z + z^{(-1)}}{2\bar{r}},$$

$$A_2 \zeta = \begin{cases} -\frac{2}{h_2} \frac{\rho_0}{r} \bar{r}^{(+1)} \zeta, & r = R_2, \\ -\frac{\rho_0}{r} (\bar{r} \zeta_{\bar{r}})_r, & r \in \omega_{h_2}, \end{cases}$$

$$C_1 \zeta = \begin{cases} 0, & r \in \bar{\omega}_{h_1}, \\ -\frac{2}{h_1} \frac{\rho_0}{r} \zeta, & r = R_2, \end{cases}$$

$$C_2 z = \begin{cases} \frac{2}{h_2} \frac{\rho_0}{r} z, & r = R_2, \\ 0, & r \in \omega_{h_2}. \end{cases}$$

(14)-(19)-схемасының аппроксимация қәтелиги әдеттегіше анықланады, мысалы,

$$\psi = -\rho u_{\bar{t}\bar{t}} + \frac{1}{r} (\bar{r} \sigma_r^*) - \frac{\sigma_\theta^{(+1)} + \sigma_\theta^*}{2r} + f, \quad r \in \omega_{h_1},$$

$$\psi = -\rho u_{\bar{t}t} - \frac{2}{h_1} \frac{1}{r} \bar{r} \sigma_r^* - \frac{\sigma_\theta}{r} - \frac{2}{h_1} \frac{\rho_0}{r} \varphi_{0t} + f, r = R_2,$$

$$\chi = -\frac{\rho_0}{c_0^2} \varphi_{\bar{t}t} + \frac{\rho_0}{r} (\bar{r} \varphi_{\bar{r}})_r, r \in \omega_{h_2},$$

Бунда

$$\sigma_r^* = c_{11} \varepsilon_r + c_{12} \varepsilon_\theta - e_{11} \bar{E}_g, \sigma_\theta^* = c_{12} \varepsilon_r + c_{22} \varepsilon_\theta - e_{12} \bar{E}_\theta,$$

$$\varepsilon_r = u_{\bar{r}}, \varepsilon_\theta = (u + u^{(-1)}) / 2\bar{r}.$$

Қәлеген $t \in \bar{\omega}_\tau$ ушын аппроксимация қәтелиги

$\psi = \psi^0 + \delta(\gamma_{h_1}) \psi^*$, $\chi = \chi^0 + \delta(\gamma_{h_2}) \chi^*$, түрінде көрсетилиуі мүмкин:

$$\delta(\gamma_{h_1}) = \begin{cases} 2/h_1, & r \in \gamma_{h_1}, \\ 0, & r \in \omega_{h_1}, \end{cases} \quad \delta(\gamma_{h_2}) = \begin{cases} 2/h_2, & r = R_2, \\ 0, & r \in \omega_{h_2}. \end{cases}$$

Бунда (5)-(14)-мәселесиниң үшінши тәртіпли дара туўындыларға хәм шегараланған төртінши тәртіпли туўындыларға ийе шешими ушын $\psi^0 = O(\tau^2 + h_1^2)$, $\chi^0 = O(\tau^2 + h_2^2)$. Ал енди үшінши тәртіпли шегараланған туўындыларға ийе u, φ шешимлери ушын $\psi^* = O(\tau^2 + h_1^2)$, $\chi^* = O(\tau^2 + h_2^2)$ болады.

Схеманың жыйнақлылығы. Шекли айырмалар схемасының дәллик бақаларын алыў ушын (50), (51)-мәселениң операторларының базыбир қәсиетлерин изертлеймиз.

Схемаларды дүзиў жоллары хәм операторлардың түрлеринен төмендеги жуўмаққа келиў мүмкин:

$$D_\alpha^* = D_\alpha, \quad A_\alpha^* = A_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad C_1^* = -C_2.$$

Л е м м а 1. Қәлеген $z \in H_1$ хәм $\zeta \in H_2$ сеткалық функциялары ушын

$$z^2(r) \leq M_1(A_1 z, z)_1, \quad r \in \bar{\omega}_{h_1}, \quad \zeta^2(r) \leq M_2(A_2 \zeta, \zeta)_2, \quad r \in \bar{\omega}_{h_2}. \quad (52)$$

бақалары орынлы болады.

Бул лемманың дәлилленіуі төмендеги айқы бақаларға байланыслы:

$$(A_1 z, z)_1 = (\sigma_r, \varepsilon_r)_{1^*} + (\sigma_\theta, \varepsilon_\theta)_{1^*} \geq \delta \left(\left\| \sigma_r \right\|_{1^*}^2 + \left\| \sigma_\theta \right\|_{1^*}^2 \right),$$

$$\sum_{\bar{\omega}_{h_1}} h_1 z^2 \leq \frac{1}{R_1} \left(\left\| \varepsilon_\theta \right\|_{1^*}^2 + \frac{h_1^2}{4} \left\| \varepsilon_r \right\|_{1^*}^2 \right),$$

Бунда $(\sigma, \varepsilon) = \sum_{\omega_{h_1}^+} h_1 \bar{r} \sigma \varepsilon$, $\|\varepsilon\|_{1^*}^2 = (\varepsilon, \varepsilon)_{1^*}$.

(52)-баҳадан A_α , $\alpha = 1, 2$. операторларының оң анықланғанлығын көреміз. A_α операторларының нормасы үшін

$$\|A_\alpha\| \leq \Delta_\alpha, \alpha = 1, 2, \quad (53)$$

баҳалары орынлы, бунда

$$\Delta_1 = \frac{4c_{11}}{h_1^2} \left(1 + \frac{h_1}{2R_1}\right) \left(1 + \frac{c_{12}}{c_{11}} h_1 + \frac{c_{22}}{4c_{11}} h_1^2\right), \quad \Delta_2 = \frac{4\rho_0}{h_2^2} \left(1 + \frac{h_2}{2R_2}\right).$$

(53)-нің екінші баҳасы төмендегіше баҳаланады

$$\begin{aligned} (A_2 \zeta, \zeta)_2 &= \rho_0 \sum_{\omega_{h_2}^+} h_2 \bar{r} (\zeta_{\bar{r}})^2 \leq \frac{2\rho_0}{h_2^2} \left(\sum_{\omega_{h_2}} h_2 \bar{r} \zeta^2 + \sum_{\omega_{h_2}^+} h_2 \bar{r} (\zeta^{(-1)})^2 \right) = \\ &= \frac{2\rho_0}{h_2^2} \left(\sum_{\omega_{h_2}^+} h_2 r \frac{\bar{r}}{r} \zeta^2 + \sum_{\omega_{h_2}^-} h_2 r \frac{\bar{r}^{(+1)}}{r} \zeta^2 \right) \leq \frac{4\rho_0}{h_2^2} \left(1 + \frac{h_2}{2R_2}\right) \sum_{\bar{\omega}_{h_2}} h_2 r \zeta^2. \end{aligned}$$

Буннан $\alpha = 2$ болғанда (53)-ни аламыз. $\alpha = 1$ жағдайы да ұсылай дәлилленеді.

Енді $\bar{D}_\alpha = D_\alpha - \frac{\tau^2}{4} A_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ операторларын киритеміз хәм

$|\psi, z|_1 = \psi^* z^* |_{r=R_1} + \psi^* z^* |_{r=R_2}$, $|\chi, \zeta|_2 = \chi^* \zeta^* |_{r=R_2}$ деп белгилейміз. Егерде

$\bar{D}_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2$ болса, онда төмендегі энергетикалық ярым норманы киритиуіміз мүмкін:

$$\overset{\circ}{E}(t) = \|z_{\bar{r}}\|_{D_1}^2 + \left\| \frac{z + \bar{z}}{2} \right\|_{A_1}^2 + \|\zeta_{\bar{r}}\|_{D_2}^2 + \left\| \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right\|_{A_2}^2.$$

Солай етип төмендегі жуўмақ орынлы.

1-теорема. Егерде (50), (51)-схемасының операторлары

$$A_{\alpha}^* = A_{\alpha} > 0, D_{\alpha}^* = D_{\alpha}, \alpha = 1,2, C_1^* = -C_2, \quad (54)$$

$$\bar{D}_{\alpha} = D_{\alpha} - \frac{\tau^2}{4} A_{\alpha} \geq \varepsilon E, \quad \varepsilon > 0,$$

шәртлерин қанаатландырса, онда $\tau \leq \tau_o$ (ε, τ_o - оң тұрақлы санлар)

болғанда оның шешімлері үшін

$$\overset{o}{E}(t + \tau) \leq M \left\{ \max_{0 \leq t' \leq t} (\|\overset{o}{\psi}(t')\|_1^2 + \|\overset{o}{\chi}(t')\|_2^2) + \max_{0 \leq t' \leq t} (\|\overset{*}{\psi}_{\bar{t}}(t')\|_1^2 + \|\overset{*}{\chi}_{\bar{t}}(t')\|_2^2) \right\}, \quad (55)$$

априор бақалары орынлы болады. Бунда $\|\overset{*}{\psi}_{\bar{t}}\|_1^2 = \|\overset{*}{\psi}_{\bar{t}}\|_1^2, \|\overset{*}{\psi}_{\bar{t}}\|_1 = \|\overset{*}{\psi}_{\bar{t}}\|_1, \|\overset{*}{\chi}_{\bar{t}}\|_2^2 = \|\overset{*}{\chi}_{\bar{t}}\|_2^2, \|\overset{*}{\chi}_{\bar{t}}\|_2 = \|\overset{*}{\chi}_{\bar{t}}\|_2$

(55)-бақаның дәлилленіуі

$$\overset{o}{E}(t + \tau) = \overset{o}{E}(t) + 2\tau \overset{o}{(\psi, z_o)}_1 + 2\tau \overset{o}{(\chi, \zeta_o)}_2 + 2\tau \overset{*}{(\psi, z_o)}_1 + 2\tau \overset{*}{(\chi, \zeta_o)}_2 \quad (56)$$

энергетикалық бірдейлигине хәм

$$2\tau \overset{o}{(\psi, z_o)}_1 = \tau \overset{o}{(\psi, z_t)}_1 + \tau \overset{o}{(\psi, z_{\bar{t}})}_1 \leq \tau (\|z_t\|_{D_1}^2 + \|z_{\bar{t}}\|_{D_1}^2) + \frac{\tau}{2\zeta} \|\overset{o}{\psi}\|_1^2,$$

$$\begin{aligned} 2\tau \overset{*}{(\psi, z_o)}_1 &= \tau \overset{*}{(\psi, z_{\bar{t}})}_1 + \tau \overset{*}{(\psi, z_{\bar{t}})}_1 \leq \\ &\leq \tau \overset{*}{(\psi, z_{\bar{t}})}_1 + \frac{\tau}{2} \|z + z_{\bar{t}}\|_1^2 + \frac{\tau}{2} \|\overset{*}{\psi}_{\bar{t}}\|_1^2 \leq \tau \overset{*}{(\psi, z_{\bar{t}})}_1, \end{aligned}$$

$$\leq \tau \overset{*}{(\psi, z_{\bar{t}})}_1 + 4M_1 \tau \left\| \frac{z + z_{\bar{t}}}{2} \right\|_{A_1}^2 + \frac{\tau}{2} \|\overset{*}{\psi}_{\bar{t}}\|_1^2$$

бақаларына тийкарланған. Бул кейинги бақа 1-леммадан келип шағады.

Бул бақаларды хәм сәйкес $\overset{o}{\chi}, \overset{*}{\chi}$ дың скаляр көбеймелерин (56)-ға қойып, оған Гронуол леммасын қолланып хәм t бойынша қосындылау арқалы (55)-ни аламыз. 1-теореманың шәртлеринен (54)-орнықтық шәртін тексеріу қалды. (53)-ни есапқа ала отырып, төмендегиге ийе боламыз:

$$\tau \leq \frac{h_2}{c} \left\{ \left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho}\right) / \left[\left(1 + \frac{h_1}{2R_1}\right) \left(1 + \frac{c_{12}}{c_{11}} h_1 + \frac{c_{22}}{4c_{11}} h_1^2\right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (57)$$

$$\tau \leq \frac{h_2}{c_o} \left[\left(1 - \frac{c_o^2 \varepsilon}{\rho_o} \right) / \left(1 + \frac{h_2}{2R_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < \varepsilon < \min\left(\rho, \frac{\rho_o}{c_o^2}\right),$$

бунда $c = \sqrt{c_{11} / \rho}$. (57)-шәрти (44)-(49)-схеманың ўақыт бойынша адымына шегара қояды хәм бул киши ε, h_1, h_2 шамалары ушын орынлы болады, егерде $\tau < \min(h_1 / c, h_2 / c_o)$ шәрти орынланса.

Аппроксимация қәтелигин хәм u, φ функцияларының шегараланған төртинши тәртипли туўындыларға ийе екенлигин хәм $\psi, \chi, \psi^*, \chi^*$ функцияларының үшінши тәртипке дейин үзликсиз туўындыларға ийе екенлигин есапқа алсақ, онда төмендеги айырмалы схеманың қәтелиги хаққындағы теореманаң орынлы екенине исеним пайда етемиз.

2-теорема. Егерде (57) шәрти орынланса, онда (44)-(49)-айырмалы схемаларының шешими энергетикалық нормада τ, h_1, h_2 адымларының хәр бири бойынша екинши тәртипли дәлликте (5)-(14)-мәселесиниң жеткиликли тегис шешимине жыйнақлы болады.

3-§. Шеңбер бойынша поляризацияланған пьезокерамикалық цилиндрдиң тербелиси мәселесин шеший хәм изертлей.

Айырмалар схемасын дүзий. r бойынша торларды төмендегише дүземиз:

$$\bar{\omega}_h = \left\{ r_i = R_0 + ih, \quad i = \overline{0, N} \right\}, \quad \bar{\omega}_h^* = \left\{ \bar{r}_i = R_0 + (i + 0.5)h, \quad i = \overline{0, N-1} \right\},$$

$h = r_N / N$ ал ўақыт бойынша торлар: $t - \bar{\omega}_\tau, \bar{\omega}_\tau^*$.

Мейли $y, w, ж$ торлық функциялары сәйкес u, ϑ, σ ларды аппроксимацияласын. Торлық функция w ды

$$\bar{\omega}(w) = \bar{\omega}_h^* \times \bar{\omega}_\varphi, \quad ж - \bar{\omega}(ж) = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau^* \quad \text{торында хәм} \quad y - \bar{\omega}(y) = \bar{\omega}_h^* \times \bar{\omega}_\tau^*$$

торында анықлайық.

Т өмендеги операторларды киритемиз:

$$S^r u = \frac{1}{\bar{r}h} \int_r^{r+h} \xi u(\xi, t) d\xi, \quad \bar{S}^r u = \frac{1}{rh} \int_{\bar{r}-h}^{\bar{r}} \xi u(\xi, t) d\xi.$$

(23)-системаның биринши теңлемесине $S^r S^t$ операторларын, екиншисине $-\bar{S}^r \hat{S}^t$ хәм ең соңғысына $-S^r \hat{S}^t$ операторларын қолланамыз. Сонда, төмендеги интегралы аңлатпаларға ийе боламыз:

$$\rho(S^r \vartheta)_t = \frac{1}{\bar{r}} (S^t r \sigma)_r - a \left(S^r S^t \frac{\sigma}{r} \right) - b \left(S^r S^t \frac{u}{r^2} \right) + \varphi, \quad (58)$$

$$\frac{1}{\lambda + 2\mu} \left(\bar{S}^r \bar{\sigma} \right)_t = \left(\hat{S}^t \vartheta \right)_{\bar{r}} + a \left(\bar{S}^r \hat{S}^t \frac{\vartheta}{r} \right),$$

$$\left(S^r \bar{u} \right)_t = \left(S^r \hat{S}^t \vartheta \right),$$

бунда $\varphi = S^t S^r f$.

Енди $t = 0$ жағдайы ушын (23)-нің ең соңғы теңлемелеринен төмендегини аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda + 2\mu} \bar{S}^r \frac{\sigma(r, \bar{t}_0) - \sigma(r, 0)}{0.5\tau} &= \left(\bar{S}^t \vartheta \right)_r^0 + \alpha \left(\bar{S}^r \bar{S}^t \frac{\vartheta}{r} \right)^0, \\ S^r \frac{u(r, \bar{t}_0) - u(r, 0)}{0.5\tau} &= \left(S^r \bar{S}^t \vartheta \right)^0. \end{aligned} \quad (59)$$

Енди (58), (59)-лердеги интегралларды орта туўрымүйешликлер формуласы бойынша аппроксимациялай отырып төмендеги шекли айырмалар схемасына ийе боламыз:

$$\begin{aligned} \rho w_t &= \frac{1}{r} (r \bar{w})_r - \frac{a}{\bar{r}} D_r^+ \bar{w} - \frac{b}{\bar{r}^2} \bar{y} + \varphi, \\ \frac{1}{\lambda + 2\mu} \bar{w}_t &= \hat{w}_{\bar{r}} + \frac{a}{r} D_r^- \hat{w}, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\bar{y}_t = \hat{w},$$

$$w^0 = S^r \vartheta^0(r), \quad \bar{w}^0 = \bar{S}^r \sigma^0(r), \quad y^0 = S^r u^0(r), \quad (61)$$

$$\frac{\bar{ж}^0 - ж^0}{0.5\tau(\lambda + 2\mu)} = w_r^0 + \frac{a}{r} D_r^- w^0, \quad \frac{\bar{y}^0 - y^0}{0.5\tau} = w^0,$$

$$\bar{ж}|_{r=r_0} = S^t[\mu_1(t) + e_{13}E], \quad \bar{ж}|_{r=r_N} = S^t[\mu_2(t) + e_{13}E]. \quad (62)$$

Бунда

$$w = w(\bar{r}, t), \quad \bar{ж} = ж(r, \bar{t}), \quad \bar{y} = y(\bar{r}, \bar{t}), \quad D_r^+ y = (y + y^{(\pm 1, r)})/2 = [y(r, t) + y(r \pm h, t)]/2.$$

Айырмалар схемасының жыйнақлылығын изертлеу. Мейли (60)-(62)-схемасының қәтелигин төмендегише анықлайық:

$$z = w - S^r \varrho, \quad r \in \bar{\omega}_h, \quad \bar{ж} = \bar{ж} - \bar{S}^r \bar{\sigma}, \quad r \in \omega_h = \bar{\omega}_h \setminus (r = r_0, r_N),$$

$$\bar{ж}_{r_0} = \bar{ж}_{r_0} - S^t \tilde{M}_1(t), \quad \bar{ж}_{r_N} = \bar{ж}_{r_N} - S^t \tilde{M}_2(t),$$

$$\bar{ж}^0 = ж^0 - \bar{S}^r y^0, \quad \bar{u} = \bar{y} - S^r \bar{u}, \quad r \in \omega_h, \quad u^0 = y^0 - S^r u^0.$$

Онда (58), (59)-лерди есапқа алсақ қәтелик ушын төмендеги мәселеге ийе боламыз:

$$\rho z_t = \frac{1}{r} (r \bar{\zeta})_r - \frac{a}{r} D_r^+ \bar{\zeta} - \frac{b}{-2} \bar{\theta} + \psi_1, \quad (63)$$

$$\frac{1}{\lambda + 2\mu} \bar{\zeta}_t = \hat{z}_r + \frac{a}{r} D_r^- \hat{z} + \psi_2,$$

$$\bar{\theta}_t = \hat{z} + \psi_3,$$

бунда ψ_α - схеманың аппроксимация қәтелиги, оның анық түрін кейинирек жазамыз.

(63)-системаның басланғыш хәм шегаралық шәртлери төмендегише жазылады:

$$z^0 = \zeta^0 = \theta^0 = 0, \quad \bar{\zeta}^0 = 0.5\tau\psi_2, \quad \bar{\theta}^0 = 0.5\tau\psi_3, \quad (64)$$

$$\bar{\zeta}_{r_0} = \bar{\zeta}_{r_N} = 0. \quad (65)$$

Енди

$$H_1 = \{z(\bar{r}) : \bar{r} \in \bar{\omega}_h^*\}, \quad H_2 = \{\bar{\zeta}(r) : r \in \bar{\omega}_h, \bar{\zeta}_{r_0} = \bar{\zeta}_{r_N} = 0\}$$

Көпликлерин хәм

$$(z, w)_1 \equiv (z, w)_{H_1} = \sum_{i=0}^{N-1} h z_i w_i \bar{r}_i,$$

$$(\bar{\zeta}, \bar{\mathcal{K}})_2 \equiv (\bar{\zeta}, \bar{\mathcal{K}})_{H_2} = \sum_{i=0}^{N-1} h \bar{\zeta}_i \bar{\mathcal{K}}_i r_i,$$

скаляр көбеймелерин киритемиз. Сәйкес нормалар $\|\cdot\|_\alpha = \sqrt{(\cdot, \cdot)_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$.

Бунда $\bar{\theta} \in H_1$. (63)-системасын симметриялық системаға келтиреміз. Ол

ушын, соңғы теңлемени b/\bar{r}^2 аңдатпасына көбейтеміз хәм

$$A_1 y = \frac{1}{\bar{r}} (ry)_r - \frac{a}{\bar{r}} D_r^+ y, \quad i = \overline{0, N-1},$$

$$A_2 y = y_{\bar{r}} + \frac{a}{r} D_r^- y, \quad i = \overline{1, N},$$

операторларын анықлай отырып (63)-(65)-схемасын төмендеги каноникалық түрде жазамыз:

$$\bar{B} Z_t + A Z^{(0.5)} = \psi, \quad Z(0) = (0, \bar{\zeta}^0, \bar{\theta}^0), \quad (66)$$

бунда $Z = (z, \bar{\zeta}, \bar{\theta}) \in H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_1$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$,

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \rho E & \frac{\tau}{2} A_1 & -\frac{\tau b}{2\bar{r}^2} E \\ \frac{\tau}{2} A_1^* & \frac{1}{\lambda + 2\mu} E & 0 \\ -\frac{\tau b}{2\bar{r}^2} E & 0 & \frac{b}{\bar{r}^2} E \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -A_1 & \frac{b}{\bar{r}^2} E \\ A_1^* & 0 & 0 \\ -\frac{b}{\bar{r}^2} E & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бул жерде $\hat{z} = z^{(0.5)} + 0.5\tau z_t$, $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}^{(0.5)} - 0.5\tau \bar{\zeta}_t$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}^{(0.5)} - 0.5\tau \bar{\theta}_t$

аңдатпалары хәм оперторлардың $A_1^* = -A_2$ қәсиети пайдаланылды. Солай

етип, схеманың аппроксимация қәтелиги төмендеги түрге ийе болады:

$$\psi_1 = \frac{1}{\bar{r}} (r\bar{\eta}_1)_r + \frac{a}{\bar{r}} \bar{\eta}_2 + \frac{b}{\bar{r}^2} \bar{\eta}_3,$$

$$\psi_2 = \eta_{4,\bar{r}} + \frac{a}{r} \eta_5, \quad \psi_3 = \frac{b}{\bar{r}^2} \eta_6,$$

бунда

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= \frac{1}{h} \int_{\bar{r}-h}^{\bar{r}} \sigma(\xi, \bar{t}) d\xi - \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \sigma(r, \eta) d\eta, \\ \bar{\eta}_2 &= \frac{1}{th} \int_r^{r+h} \int_t^{t+\tau} \sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{1}{2h} \int_{\bar{r}-h}^{\bar{r}+h} \sigma(\xi, \bar{t}) d\xi, \\ \bar{\eta}_3 &= \frac{\bar{r}}{th} \int_t^{t+\tau} \int_r^{r+h} \frac{1}{\xi} u(\xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{1}{\bar{r}h} \int_r^{r+h} \xi u(\xi, \bar{t}) d\xi, \\ \eta_4 &= \frac{1}{\bar{r}h} \int_r^{r+h} \xi \vartheta(\xi, t) d\xi - \frac{1}{\tau} \int_{\bar{t}-\tau}^{\bar{t}} \vartheta(\bar{r}, \eta) d\eta, \\ \eta_5 &= \frac{1}{2h\bar{r}} \int_r^{r+h} \xi \vartheta(\xi, t) d\xi + \frac{1}{2h(\bar{r}-h)} \int_{r-h}^r \xi \vartheta(\xi, t) d\xi - \frac{r}{th} \int_{\bar{r}-h}^{\bar{r}} \int_{\bar{t}-\tau}^{\bar{t}} \frac{1}{\xi} \vartheta(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \eta_6 &= \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{1}{h} \int_r^{r+h} \xi \vartheta(\xi, t) d\xi - \frac{1}{h} \int_r^{r+h} \int_{\bar{t}-\tau}^{\bar{t}} \xi \vartheta(\xi, t) d\xi dt \right), \\ \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3, \eta_4, \eta_6 &\in H_1, \quad \bar{\eta}_1, \eta_5 \in H_2. \end{aligned}$$

Төмендеги шэртлерди киритемиз.

1-Шэрт (Ш1). Мейли $\bar{B}^* = \bar{B} \geq \varepsilon E$, $\varepsilon > 0$, $A^* = -A$.

2-Шэрт (Ш2). Мейли $\bar{B} = D + 0.5\tau G$, бунда G операторы $GD^{-1}A = -AD^{-1}G$ теңлигин канаатландырады., ал D шегараланган оператор болып $D^* = D > 0$.

3-Шэрт (Ш3). Мейли $D - 0.5\tau G \geq \varepsilon E$.

4-Шэрт (Ш4). Мейли $\Phi = \sum_{\alpha=1}^p D\Phi_\alpha$, $\Phi_\alpha = A_\alpha \pi_\alpha$ хэм

$$\text{Sup}_{\|Y\| \neq 0} \frac{\|A_\alpha^* AY\|}{\|AD^{-1}A^*Y\|} \leq M, \quad \forall \alpha = \overline{1, p}.$$

Енди Ш1-Ш3 шәртлериниң орынланыўын тексеремиз. \bar{B} хәм A операторларының түринен белгили, $\bar{B}^* = \bar{B}$, $A^* = -A$. Бул схеманың \bar{B} операторын төмендегише көринисте көрсетемиз: $\bar{B} = D + 0.5\tau G$, бунда

$$D = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{\bar{r}^2} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & -\frac{b}{\bar{r}^2} E \\ A_1^* & 0 & 0 \\ -\frac{b}{\bar{r}^2} E & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тиккелей тексерийү арқалы $GD^{-1}A = -AD^{-1}G$ теңлиги орынланатуғынлығын көремиз. Хәқыйқатында, да $D^* = D > 0$ хәм $\|D\| \leq M$. Ш1-Ш3 шәртлериниң орынланыўы ушын төмендеги теңсизликтиң орынланыўы жеткиликли:

$$D \pm 0.5\tau G \geq \varepsilon E, \quad \varepsilon > 0. \quad (67)$$

Енди $K_\varepsilon^\pm \equiv (1 - \varepsilon)D \pm 0.5\tau G$ операторларын киритемиз хәм төмендеги скаляр көбеймелерди қараймыз:

$$\begin{aligned} (K_\varepsilon^\pm Y, Y) &= (1 - \varepsilon)\rho \|y_1\|^2 \pm \tau(A_2 y_1, y_2) + \frac{1 - \varepsilon}{\lambda + 2\mu} \|y_2\|^2 + \\ &+ (1 - \varepsilon)b \left\| \frac{1}{\bar{r}} y_3 \right\|^2 \mp \tau b \left(\frac{1}{\bar{r}^2} y_3, y_1 \right) = \left\| \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{\lambda + 2\mu}} y_2 \pm \frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{1 - \varepsilon}} A_2 y_1 \right\|^2 - \\ &- \frac{\tau^2}{4} \frac{\lambda + 2\mu}{1 - \varepsilon} \|A_2 y_1\|^2 + (1 - \varepsilon)\rho \|y_1\|^2 + b \left\| \frac{\sqrt{1 - \varepsilon}}{\bar{r}} y_3 \mp \frac{\tau}{2\bar{r}\sqrt{1 - \varepsilon}} y_1 \right\|^2 - \\ &- \frac{b\tau^2}{4(1 - \varepsilon)} \left\| \frac{1}{\bar{r}} y_1 \right\|^2. \end{aligned}$$

Бул теңликтен K_ε^\pm операторларының терис болмаў шәртин аламыз:

$$-\frac{\tau^2}{4(1 - \varepsilon)} [(\lambda + 2\mu) \|A_2 y_1\|^2 + b \left\| \frac{1}{\bar{r}} y_1 \right\|^2] + (1 - \varepsilon)\rho \|y_1\|^2 \geq 0. \quad (68)$$

Ал $\left\| \frac{1}{\bar{r}} y_1 \right\| \leq \frac{1}{R_0} \|y_1\|$ болғанлықтан, (68)-теңсизлик қәлеген $y_1 \in H_1$ ушын

орынлы болады, егерде

$$(1 - \varepsilon)\rho - \frac{\tau^2}{4(1 - \varepsilon)}[(\lambda + 2\mu)\|A_2\|^2 + \frac{b}{R_0^2}] \geq 0 \quad (69)$$

шәрти орынланса. Буған қосымша $\|A_2\| \leq \frac{2}{h} + \frac{a}{R_0}$ бағасы орынлы

болғанлықтан, (69)-төмендегі түрге ийе болады:

$$\frac{\tau^2}{h^2}c^2 \left[1 + \frac{\lambda h}{(\lambda + 2\mu)R_0} + \frac{h^2}{4R_0^2}\right] \leq (1 - \varepsilon)^2, \quad (70)$$

бунда $c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, $0 < \varepsilon < 1$.

Солай етип, $K_\varepsilon^\pm \geq 0$, егерде (70)-шәрти орынланса. Енди $D \geq \varepsilon E$

($\varepsilon = \min(\rho, \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \frac{b}{R_1^2})$), (67)-шәрттің орынланыуын аңлатады. Дара

жағдайда, $\bar{B} \geq \varepsilon E$, егерде (70)-шәрт орынланса. Демек төмендегі теорема орынлы болады.

3-теорема. Мейли (70)-шәрти орынлы болсын. Онда, (60)-(62)-айырмалар схемасы $H(\omega)$ нормасында басланғыш шәртлер бойынша хәм оң тәрәплеме орнықты болады хәм оның шешими ушын төмендегі баға орынлы:

$$\|Z(t_1)\|_H \leq M \left(\sum_{t'=0}^{t_1-\tau} \tau \|\psi(t')\|^2 + \|\tau\psi_2^0\|^2 + \|\tau\psi_3^0\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (71)$$

бунда $\|\psi\|^2 = \|\psi_1\|^2 + \|\hat{\psi}_2\|^2 + \|\hat{\psi}_3\|^2$.

(60)-(62)-шекли айырмалар схемасының жоқарыдағыдан өзгеше базыбир нормадағы шешимін бақалайық. Бул ушын Ш4 шәртинің орынланыуын тексерип көреміз. Аппроксимация қәтелигін $\psi = D(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)$ түрінде жазамыз, бунда

$$\phi_\alpha = A_a \bar{\pi}_\alpha \quad \alpha = \overline{1,3} \quad (p=3), \quad \pi_1 = (\hat{\eta}_4, \hat{\eta}_1, 0), \quad \pi_2 = (\bar{\eta}_3, \hat{\eta}_5^*, \hat{\eta}_6), \quad \pi_3 = (\bar{\eta}_2^*, 0, 0),$$

$$\bar{\eta}_2^* = \frac{a}{r}(\bar{\eta}_2 + D_r^+ \eta_1), \quad \eta_5^* = \frac{a}{r}(\eta_5 - D_r^- \eta_4),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} A_1 & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) A_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{b}{\rho \bar{r}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бул схема үшін $\alpha = 1$ болғанда

$$\begin{aligned} \|A_1^* A Y\|^2 &= \frac{1}{\rho^2} \|A_1 A_1^* y_1\|_1^2 + (\lambda + 2\mu)^2 \|A_1^* A_1 y_2 - A_1^* \frac{b}{\bar{r}^2} y_3\|_2^2, \\ \|C Y\|^2 &= \|(\lambda + 2\mu) A_1 A_1^* y_1\|_1^2 + 2 \frac{b(\lambda + 2\mu)}{\bar{r}^2} \|A_1 y_1\|_1^2 + \frac{b^2}{\bar{r}^4} \|y_1\|_1^2 + \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \|A_1^* A_1 y_2 - A_1^* \frac{b}{\bar{r}^2} y_3\|_2^2 + \left\| \frac{b^2}{\rho \bar{r}^4} y_3 - \frac{b}{\rho \bar{r}^2} A_1 y_2 \right\|_1^2. \end{aligned}$$

Сонлықтан,

$$\begin{aligned} \sup_{\|Y\| \neq 0} \frac{\|A_1^* A Y\|}{\|C_\delta Y\|} &\leq \sup_{\|Y\| \neq 0} \frac{\|A_1^* A Y\|}{\|C Y\|} \leq \sup_{\|y_1\| \neq 0} \frac{\|A_1 A_1^* y_1\|_1}{\rho \|(\lambda + 2\mu) A_1 A_1^* y_1\|_1} + \\ &+ \sup_{\|y_2\|, \|y_3\| \neq 0} \frac{(\lambda + 2\mu) \|A_1^* A_1 y_2 - A_1^* \frac{b}{\bar{r}^2} y_3\|_2}{\frac{1}{\rho} \|A_1^* A_1 y_2 - A_1^* \frac{b}{\bar{r}^2} y_3\|_2} \leq M. \end{aligned}$$

Енди $\alpha = 2, 3$ жағдайлары усыған уқсас бақаланады. Солай етип төмендеги жуўмақ орынлы болады.

4-теорема. Мейли, (70)-шәрти орынлы болсын. Сонда, (66)-айырмалар схемасы $H^{-1}(\omega)$ нормасында басланғыш шәртлер бойынша хәм оң тәрәплеме орнықлы болады хәм оның шешими үшін төмендеги баха орынлы:

$$\begin{aligned} \|Z(t_1)\|_{H^{-1}} &\leq M \left[\sum_{t'=0}^{t_1-\tau} \tau (\|\bar{\eta}_1(t')\|_2^2 + \|\bar{\eta}_2(t')\|_1^2 + \|\bar{\eta}_3(t')\|_1^2 + \|\hat{\eta}_4(t')\|_1^2 + \right. \\ &\left. + \|\hat{\eta}_5(t')\|_2^2 + \|\hat{\eta}_6(t')\|_1^2) + \|\tau \eta_4^0\|_1^2 + \|\tau \eta_5^0\|_2^2 + \|\tau \eta_6^0\|_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (72)$$

Енди дәлилленіўлерин келтирмей төмендеги теоремалардың орынлы экенин көреміз.

5-теорема. Мейли (23)-(25)-мәселесиниң шешими $U \in W_2^k(Q_T)$, $k = 1, 2$ хәм (70)-орнықтық шәрти орынлансын. Онда, (60)-(62)-мәселесиниң шешими $H^{-1}(\omega)$ торлық нормасында дәл шешимге $O(\tau^k + h^k)$ дәрежесинде жыйнақты болады хәм төмендеги дәллик баҳасы орынлы болады:

$$\|Z(t_1)\|_{H^{-1}} \leq M(\tau^k + h^k) \|U\|_{k, Q_T}, \quad (73)$$

бунда $\|U\|_{k, Q_T} = \|\vartheta\|_{k, Q_T} + \|\sigma\|_{k, Q_T} + \|u\|_{k, Q_T}$.

6-теорема. Мейли $U \in W_2^{k+1}(Q_T)$, $k = 1, 2$ хәм (70)-орнықтық шәрти орынлансын. Онда, (60)-(62)-мәселесиниң шешими $H(\omega)$ торлық нормасында дәл шешимге $O(\tau^k + h^k)$ дәрежесинде жыйнақты болады хәм төмендеги дәллик баҳасы орынлы болады:

$$\|Z(t_1)\|_H \leq M(\tau^k + h^k) \|U\|_{k+1, Q_T}, \quad k = 1, 2. \quad (74)$$

Бул еки (60) хәм (74) баҳалары берилген дифференциалы теңлемениң шешиминиң тегислиги менен келисилген деп аталада хәм олар төмендегише жазылыўы мүмкин:

$$\|Z(t_1)\|_s \leq M(\tau^{k-s-1} + h^{k-s-1}) \|U\|_{k, Q_T}, \quad 1 < k - s \leq 3, \quad s = -1, 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Жуўмақлаў

Солай етип, бул бапта стационар емес теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди шекли айырмалар усылы тийкарында шешиў мәселеси қаралды. Биринши параграфта улыўма гиперболалық типтеги теңлемелердиң шегаралық мәселелери шекли айырмалар усылы тийкарында шешилди. Алынған шешимниң жыйнақтылығы дәлилленди. Екинши параграфта цилиндрлик пьезовибратор жәрдемінде сестин нурланыўы мәселеси шекли айырмалар усылы тийкарында шешилди. Алынған схемалардың орнықтылығы хәм жыйнақтылығы дәлилленди. Үшинши параграфта шеңбер бойынша поляризацияланған пьезокерамикалық цилиндрдиң тербелиси хаққында

мәселе шекли айырмалар усылы тийкарында шешилди. Алынған схемалардың орнықтылығы хәм жыйнақтылығы дәлилленди.

IV-бап. Стационар емес мәселелерди шекли элементлер усылы менен шешиў

1-§. Шекли элементлер усылының улыўма схемасы.

Усыл хаққында. Хәзирги ўақытта шекли элементлер улы тәбияттың оғада көплеген мәселелерин шешиуде қолланылмақта. Мысалы, конструкциялар механикасы, қурылыслар динамикасы, гидродинамика, магнитли гидродинамика, акустика, толқынлар теориясы мәселелери х. т. б. Бул улыл математикалық моделлери әпиўайы дифференциалы теңлемелерге, интегралы теңлемелерге хәм дара туўындылы теңлемелерге алып келетуғын стационар ямаса стационар емес мәселелерди шешиўде оғада қол келди. Хақыйкатында, белгили бир теңлемеге алып келетуғын қәлеген мәселе бул усылдың базыбир түрлери жәрдемінде шешилиўи мүмкин.

Бул усылдың пайда болыўына тийкар салған инженер-илимпаз Галеркин жумыслары болып табылады (1915-жыл).

Ең дәслеп бул улыл инженерлик есаплаўларда пайдаланылған. Кейинирек, егерде системаның потенциаллық энергиясын қарасақ онда шекли элементлер усылына вариациялық интерпретация бериў мүмкиншилиги ашылды. Бул өз гезегінде шешимлерин табыў оғада қыйын болған гидрогазодинамиканың, жыллылық бериў теориясының, ишки толқынлар теориясының х.т.б. мәселелерин шешиўге мүмкиншилик берди. Жуўмағында, бул улыл хәзирги ўақытта оғада көп тарқалған санлы усыллардың бирине айланды.

Улыўма схемасы. Усылдың ең тийкарғы айырмашылығын төмендегише тәриплеў мүмкин. Мейли базыбир еки өлшемли мәселе $D(x, y)$ областында төмендеги сызықлы дифференциалы теңлеме түринде берилген болсын:

$$L(u) = 0. \tag{75}$$

Мейли D областының шегарасы ∂D сызығында

$$S(u) = 0 \quad (76)$$

шегаралық шәрти қойылған болсын. Шекли элементлер усылында белгисиз шама u төмендеги жеткиликли дәрежеде дәл болған жуўық шешим түринде көрсетилиўи мүмкин:

$$u_\alpha = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x, y). \quad (77)$$

Бунда φ_j - белгили аналитикалық функция; функция u_0 шегаралық шәртлерди қанаатландырыў ушын киритилген, ал a_j - коэффициентлери анықланыўы керек.

Енди (77)-аңлатпаны (75)-теңлемеге апарып қойсақ, биз төмендегиге ийе боламыз:

$$R(a_0, a_1, \dots, a_N, x, y) = L(u_a) = L(u_0) + \sum_{j=1}^N a_j L(\varphi_j). \quad (78)$$

Бул айырма R әдетте жуўық шешеим менен дәл шешим арасындағы қәтелик болып табылады. Әдетте скаляр көбейме

$$(f, g) = \iint_D fg dx dy. \quad (79)$$

түринде анықланады. Шекли айырмалар усылында (33)-деги a_j коэффициенти

$$(R, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (80)$$

теңлемелер системасын шешиў арқалы анықланады. Биз қараған теңлеме сызықлы теңлеме болғанлықтан (80) теңлемени тиккелей матрицалық теңлеме түринде жазыўға болады:

$$\sum_{j=1}^N a_j (L(\varphi_j), \varphi_k) = -(L(u_0), \varphi_k).$$

Бул теңлемени шешиў арқалы табылған a_j лерди орнына қойыў арқалы изленип атырған u_a шешимине ийе боламыз.

2-§. Жоқары тәртіпті дәлдіктегі схемалар дүзій жоллары.

Аппроксимациялаудың ярым дискрет усылы. Шеклі элементтер усылларының бири ярым дискрет усылы барлық ғәрезсиз өзгеріушілерди өз ишине қамтйтуғын эволюциялық мәселелерди вариациялық берилиуінен тысқары шешиу мүмкиншилигин береді. Олар бундай стационар емес мәселеерди шешиудің ең қолайлы хәм ең көп қолланылатуғын усылларының бири болып табылады.

Мысал ретинде

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) = f(x,t) \quad (x,t) \in R \times (t_0, t_1], \quad (81)$$

дифференциалы теңлемесин қарайық. Бунда A екинши тәртіпті дифференциалы оператор, ол еки өлшемлі кеңіслік жағдайында төмендегіше жазылады:

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

(46)-теңлеме

$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad (x \in R)$$

басланғыш шәрті хәм

$$u(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \partial R \times (t_0, t_1]).$$

шегаралық шәртлери менен толықтырылады.

Бул усылда жоқарыдағы мәселе төмендегі мәселе менен алмастырылады:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a(u, v) = (f, v) \quad (\text{барлық } v(x) \in I \text{ óøúí}) \quad (82)$$

теңлемеси хәм

$$(u, v)_{t=t_0} = (u_0, v) \quad (\text{барлық } v(x) \in \mathcal{F} \text{ бөлігі}) \quad (83)$$

басланғыш шәрті менен.

Бул моделлик мәселе үшін $H = H_2^{(1)}$ хәм оның шешими $u \in H \times C^1[t_0, t_1]$. Егерде шегаралық шәртлер улыўма түрде бериген болса, онда бул (82)-(83)- мәселеге шегаралық шәртлердиң интегралларын қосып модификациялаўға туўра келеди.

U - ярым дискрет аппроксимациясы енди төмендеги формадан анықланады: бул $t \in (t_0, t_1]$ болғанда

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}, V \right) + a(U, V) = (f, V) \quad (\text{барлық } V(x) \in K_N \text{ үшін}) \quad (84)$$

теңлемеси

$$(U, V)_{t=t_0} = (u_0, V) \quad (\text{барлық } V(x) \in K_N \text{ үшін}). \quad (85)$$

басланғыш шәртлери менен орынлы болады дегенди аңлатады.

Бул мәселе үшін $K \in H_2^{(1)}$. Егерде φ_i ($i=1, \dots, N$) функциялары K_N төменги кеңислигинде базис дүзсе, онда жоқарыдағы мәселеге эквивалент төмендеги мәселени қойыўға болады: ярым дискрет аппроксимация $t \in [t_0, t_1]$ болғанда

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}, \varphi_i \right) + a(U, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \quad (i=1, \dots, N) \quad (86)$$

теңлемесин хәм

$$(U, \varphi_i)_{t=t_0} = (u_0, \varphi_i) \quad (i=1, \dots, N) \quad (87)$$

басланғыш шәртлерин қанаатландырады. Бул мәселе үшін V хәм U бирдей қәсиетлерге (x бойынша) ийе болыў шәрт, яғный $U \in K_N \times C^1[t_0, t_1]$, ал шекли элементлер усылы төмендеги түрге ийе болады:

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^N a_i(t)\varphi_i(x). \quad (88)$$

Егерде биртеккли емес Дирихле шегаралық шәрти берилген болса, онда

$$U(x,t) = W(x,t) + \sum_{i=1}^N a_i(t)\varphi_i(x),$$

бунда $\varphi_i \in K_N$, ал $W(x,t)$ шегаралық шәртлерди қанаатландырады. Бул жерде

Шекли элементлер аппроксимациясы енди $\alpha_i(t)$ ($i=1,\dots,N$) функцияларына қарата әпиұайы дифференциалы теңлемелер системасынан анықланады. (86)-(87)-лерден бул теңлемелер системасы төмендегише жазылады:

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d\alpha_j}{dt}(\varphi_j, \varphi_i) + \alpha_j a(\varphi_j, \varphi_i) \right\} = (f, \varphi_i) \quad (i=1,\dots,N), \quad (89)$$

ал (87)-шегаралық шәрти

$$\alpha_j(t_0) = c_j \quad (j=1,\dots,N). \quad (90)$$

түрине ийе болады. Бунда

$$\sum_{j=1}^N c_j(\varphi_j, \varphi_i) = (u_0, \varphi_i) \quad (i=1,\dots,N,) \quad (91)$$

(94)-ден анықланатуғын c_j ($j=1,\dots,N$) коэффициентлери

$$\left\| u_0(x) - \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x) \right\|_{L_2(R)}^2 = \min;$$

шәртин қанаатландырады.

Бул усылға мысал ретинде төмендеги диффузия мәселесин қарайық:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < l; \quad t > 0),$$

шегаралық шәртлери

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

хәм басланғыш шәртлери

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (0 < x < l).$$

Бул мәселениң жуўық шешими жоқарыдағы айталған алгоритм бойынша

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \varphi_i(x),$$

түринде жазылады. Бунда базислик функциялар

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = 0 \quad (i = 1, \dots, N). \quad (92)$$

шегаралық шәртлерин қанаатландырады. Онда (90)-теңлемелер системасы төмендеги түрге ийе болады:

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d\alpha_j}{dt} d_{ij} + \alpha_j c_{ij} \right\} = 0 \quad (i = 1, \dots, N), \quad (93)$$

бунда

$$c_{ij} = \int_0^l \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx$$

хәм

$$d_{ij} = \int_0^l \varphi_i \varphi_j dx.$$

Ўақыт бойынша дискретизациялаў. Дара туўындыларға ийе параболалық теңлеме хәм биринши тәртиптеги теңлемелер системасы (ўақыт бойынша) көбирек дыққатқа ийе хәм оларды шешиўдиң ең көп тарқалған санлы шешиў усылларының бири, бул Кранк-Николсон-Галеркин усылы болып табылады. Бул усылда

$$B\dot{\alpha} + C\alpha = b \quad (94)$$

теңлемелер системасы

$$B \left\{ \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t} \right\} + C \left\{ \frac{\alpha_{n+1} + \alpha_n}{2} \right\} = b(\tau_{n+1/2}) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (95)$$

айырмалы теңлемелер системасы менен алмастырылады. Бунда α_n $\alpha(t_0 + n\Delta t)$ ны аппроксимациялайды хәм

$\tau_{n+1/2} = t_0 + (n + 1/2)\Delta t$ ($n = 0, 1, \dots$). Эпиўайы дифференциалы теңлемелер системасын бундай аппроксимациялаўды трапеция усылы депте атаўға болады. (95)-ден есаплаўдың хәр бир адымында α_{n+1} ди табыў ушын алгебралық теңлемелер системасы шешиледи.

Екинши усыл бул теңлемени дискретизациялаў ушын шекли элементлер аппроксимациясын қолланыўдан ибарат, яғный хәр бир киши $(\tau_n, \tau_n + \Delta t)$, интервалында

$$\alpha^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^S \alpha_j^{(n)} \varphi_j^{(n)}(t) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (96)$$

түриндеги жуўық шешимин алыўдан ибарат. Бунда $\alpha_j^{(n)}$ ($j = 1, \dots, S$) коэффициентлери

$$\left\langle B\dot{\alpha}^{(n)} + C\alpha^{(n)}, \varphi_j^{(n)} \right\rangle_n = \left\langle b, \varphi_j^{(n)} \right\rangle_n, \quad (j = 1, \dots, S; n = 0, 1, \dots); \quad (97)$$

системасынан табылады.

Мысал ретинде $b=0$ болғанда төмендеги жағдайларды қарайық::

(1) Мейли $S=1$ болсын. Онда

$$\left\{ B + \frac{2}{3}\Delta t C \right\} \alpha_{n+1} = \left\{ B - \frac{\Delta t}{3} C \right\} \alpha_n. \quad (98)$$

(2) Мейли $S=2$ болсын. Онда

$$\left\{ I + \frac{3}{5}\Delta t M + \frac{3}{20}(\Delta t)^2 M^2 \right\} \alpha_{n+1} = \left\{ I - \frac{2}{5}\Delta t M + \frac{1}{20}(\Delta t)^2 M^2 \right\} \alpha_n,$$

бунда $M = B^{-1}C$.

Айрым шекли айырмалар усылы шекли элементлер усылының дара жағдайы болып табылады. Егерде биз Эрмит интерполяциясын қоллансақ, онда биз дәллігі жоқары болған схемаларға ийе боламыз. Бул төмендеги пунктте қаралады.

Жоқары дәлліктегі схемалар дүзиў жоллары [16]. Екинши тәртипли әпиўайы дифференциалы теңлемелер системасы ушын төмендеги Коши мәселесин қараймыз:

$$\begin{aligned} D \frac{d^2 u}{dt^2} + Au = f, \quad t_0 < t \leq T, \\ u(t_0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(t_0) = u_1. \end{aligned} \quad (99)$$

Бунда A, D – операторлары: $H \rightarrow H$, $A^* = A > 0$, $D^* = D > 0$ A, D t ға ғәрезсиз; $\forall t \geq 0, u = u(t) \in H, f = f(t) \in H$;

(99) – мәселениң улыўмаластырылған шешими деп кәлеген дифференциалланатуғын $\mathcal{G}(t), t \in [t_n, t_{n+1})$ функциясы ушын

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (-D \dot{u} \dot{\mathcal{G}} + Au \mathcal{G}) dt + \text{Div} \Big|_{t_n}^{t_{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) \mathcal{G}(t) dt, \quad \forall \mathcal{G}(t) \in C^1[0, T] \quad (100)$$

интеграллық бардейлигин қанаатландыратуғын үзликсиз $u(t)$ функциясыны айтамыз. $(0, T)$ интервалында $t = t_n = n\tau$ түйинлерине ийе торларды киритемиз, $\tau > 0$ тор адымы, $n = 0, 1, 2, \dots$ хәр бир (t_n, t_{n+1}) интервалында $y(t)$ жуўық шешимин

$$y(t) = y^n \varphi_{00}^n(t) + \dot{y}^n \varphi_{10}^n(t) + y^{n+1} \varphi_{01}^n(t) + \dot{y}^{n+1} \varphi_{11}^n(t) \quad (101)$$

үшинши тәртипли полиномы түринде излеймиз. Бунда

$$\begin{aligned} y^n = y(t_n), \quad \dot{y}^n = \frac{dy}{dt}(t_n), \quad \varphi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad \varphi_{01}^n(t) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ \varphi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \quad \varphi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2), \quad \xi = (t - t_n)/\tau. \end{aligned}$$

Онда (101)-ни (100)-аңлатпаға қойып $\mathcal{G}(t)$ функцияларын сайлап алыў арқалы төмендеги схемаға ийе боламыз [19,20]:

$$\begin{cases} (D - \gamma\tau^2 A) \frac{\mathcal{E}^- \dot{y}}{\tau} + A \frac{\mathcal{E}^+ y}{2} = \varphi_1, \\ (D - \alpha\tau^2 A) \frac{\mathcal{E}^- y}{\tau} - (D - \beta\tau^2 A) \frac{\mathcal{E}^+ \dot{y}}{2} = \varphi_2. \end{cases} \quad (102)$$

Бунда

$$\varphi_1 = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) \mathfrak{G}_1\left(\frac{t-t_n}{\tau}\right) dt = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi) \mathfrak{G}_1(\xi) d\xi,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) \mathfrak{G}_2\left(\frac{t-t_n}{\tau}\right) dt = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi) \mathfrak{G}_2(\xi) d\xi$$

$$\mathfrak{G}_1(\xi) = p_1 \mathfrak{G}_1^{(1)}(\xi) + p_2 \mathfrak{G}_1^{(2)}(\xi), \quad \mathfrak{G}_2(\xi) = s_1 \mathfrak{G}_2^{(1)}(\xi) + s_2 \mathfrak{G}_2^{(2)}(\xi), \quad \xi = \frac{t-t_n}{\tau},$$

$$\mathfrak{G}_1^{(1)}(\xi) = 1, \quad \mathfrak{G}_1^{(2)}(\xi) = \xi^2 - \xi, \quad \mathfrak{G}_2^{(1)}(\xi) = \tau\left(\xi - \frac{1}{2}\right), \quad \mathfrak{G}_2^{(2)}(\xi) = \tau\left(\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi\right),$$

$$p_1 = 6 - 60\gamma, \quad p_2 = 30 - 360\gamma, \quad s_1 = 180\beta - 40\alpha, \quad s_2 = 1680\beta - 280\alpha.$$

Бул үш параметрлі векторлық схеманың аппроксимация кәтеліктері $\alpha + \beta = \gamma$ шәрті орынланғанда $\psi_1 = O(\tau^4)$, $\psi_2 = O(\tau^4)$ болады.

(102)-схеманы есаплау үшін $y^0 = u_0$ тәбий шәртинен басқа y^0 шәртинде қойыуымыз керек. Бул үшін (99)-теңлемеден $t=0$ болғанда $\dot{y}^0 = D^{-1}(f^0 - Au_0)$ ди аламыз хәм $y^0 = \dot{y}^0$ деп қабыл етеміз.

3-§. Кәтелік мәселеси, априор бахалар хәм схеманың жыйнақлылығы.

Биз бул бөлімде төмендегі әпиұайы модел теңлемени қараймыз.

Мейли бизге

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ((x, y, t) \in (t_0, t_1]),$$

параболалық теңлемеси

$$u(x, y, t_0) = u_0(x, y) \quad ((x, y) \in R)$$

басланғыш шәрті хәм

$$u(x, y, t) = 0 \quad ((x, y, t) \in \partial R \times (t_0, t_1]).$$

шегаралық шәрті берилсин.

Анализ ушын тийкарғы ўазыйпа, бул K_N төменги кеңислигиниң аппроксимациялаўшы қәсийетлерин изертлеўден ибарат. Сонлықтан, мейли $k \geq 1$ болып қәлеген $u \in H_2^{(k+1)}(R)$ ушын u ды $\tilde{u} \in K_N$ элементи арқалы аппроксимациялаўдан пайда болған қәтелик төмендегише болады:

$$\|u - \tilde{u}\|_{r,R} \leq Ch^{k+1-r} \|u\|_{k+1,R} \quad (r \leq k). \quad (103)$$

Егерде вариацион принциплер бузылған болмаса, онда шекли элементлер усылы арқалы әмелге асырылатуғын ярым дискрет аппроксимация төмендеги теңликти қанаатландырады:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}, V \right) + a(U, V) = 0 \quad (\text{барлық } V \in \overset{\circ}{K}_N \text{ ушын}). \quad (104)$$

Егерде $u \in H_2^{\overset{\circ}{k+1}}(R) \times C^1[t_0, t_1]$ болса, онда (67)-ден $t \in [t_0, t_1]$ болғанда

$$a(W, V) = a(u, V) \quad (\text{барлық } V \in \overset{\circ}{K}_N \text{ ушын}) \quad (105)$$

шәртин қанаатландыратуғын $W \in \overset{\circ}{K}_N \times C^1[t_0, t_1]$, проекциясыда төмендеги теңсизликти қанаатландырады:

$$\|u - W\|_{r,R} \leq Ch^{k+1-r} \|u\|_{k+1,R} \quad (t \in [t_0, t_1]). \quad (106)$$

Бул (104)- хәм (105)-лардан қәлеген $t \in [t_0, t_1]$ ушын төмендегиге ийе боламыз:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial t}, V \right) + a(U - W, V) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial t}, V \right).$$

өз гезегинде $V = U_t - W_t$ айвмасы төмендегише көриниске ийе болады:

$$\|U_t - W_t\|_{L_2(R)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(U - W, U - W) = (u_t - W_t, U_t - W_t).$$

Бунық оң жағына Шварц теңсизлигин қоллансақ, онда

$$\|U_t - W_t\|_{L_2(R)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(U - W, U - W) \leq \|u_t - W_t\|_{L_2(R)} \|U_t - W_t\|_{L_2(R)}.$$

Енди (106)-ден

$$\|u_t - W_t\|_{L_2(R)} \leq Ch^k \|u\|_{k+1,R},$$

баҳасына ийе боламыз. Солай етип

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(U - W, U - W) \leq Ch^{2k} \|u\|_{k+1, R}^2,$$

демек

$$a(U - W, U - W) \leq Ch^{2k}, \quad C \equiv C(u). \quad (107)$$

Бул жерде бисызыклы a формасы $H_2^{\circ(1)}$ де эллиптикалық болғанлықтан, (106)- хәм и (107)-лердин қосындысы

$$\|u - U\|_{1, R} \leq Ch^{2k}, \quad C \equiv C(u).$$

баҳасын береді.

Жуўмақлаў

Солай етип, бул бапта стационар емес теңлемелер ушын шегаралық мәселелер шекли элементлер усылы тийкарында шешилди. Биринши параграфта шекли элементлер усылының улыўма схемасы келтирилди. Екинши параграфта шекли элементлер усылы тийкарында жоқары тәртипли дәлликтеги схемаларды дүзиў жоллары баян етилди. Үшинши параграфта шекли элементлер усылының қәтелик мәселесин қойыўға кеңнен тоқтап өтилди. Буннан соң априор баҳаларды алыў усыллары тийкарында шешимге тийисли баҳалар алынды. Кейин схемалардың орнықлығы дәлилленди хәм жыйнақлылығы көрсетилди.

V-бап. Ишки толқынлар теориясы

1-§. Мәселенің қойылыуы.

Ишки толқынлар теориясының тийкарғы теңлемелеринің бири төмендеги түрге ийе болады:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(Lu) + \omega_0^2 L_1 u = -f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega \subset R^2, t \in (0,T]\} \quad (108)$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in (0,T], \quad (109)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (110)$$

Бунда $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, $L_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, ал $\Omega = \{0 \leq x_p \leq l_p, p = 1,2\}$. Бул (108)-

теңleme Соболев теңлемесине ұқсас болып оны хәзирги ўақытлары ишки толқынлар теориясының теңлемелери деп атайды [39, с.25].

Бул мәселенің кеңейтирилген шешими деп хәр бир $t \in [0,T]$ ушын

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in W_2^1(\Omega)$ туўындысына ийе хәм барлық ўақыт $t \in [0,T]$ ушын

$$a\left(\frac{d^2 u}{dt^2}(t), \mathcal{G}\right) + \omega_0^2 a_1(u(t), \mathcal{G}) = (f(t), \mathcal{G}), \quad \forall \mathcal{G} \in H, \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1.$$

теңлемесин қанаатландыратуғын $u(x,t) \in H = W_2^1(\Omega)$ функциясына айтамыз.

Бунда

$$a(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = \sum_{m=1}^2 a_m(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = \|\mathcal{G}\|_1^2 > 0,$$

$$a_m(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_m}\right)^2 dx = \left\| \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_m} \right\|^2 \geq 0, \quad m=1,2, \quad \forall \mathcal{G} \in H,$$

ал $u(t)$ - мәнислери H тағы $t \in [0,T]$ абстракт аргументинің функциясы.

2-§. Схемалар дүзиў хэм оны реализациялаў.

Кеңислик бойынша аппроксимациялаў. H кеңислигин аппроксимациялаўшы $H_h \subset H$ төменги кеңислигин дүземиз, мысалы, тордағы функциялар кеңислиги ямаса полиномиал функциялардың шекли элементлер кеңислиги. Мейли $D, A: H_h \rightarrow H_h$ операторлары сәйкес $-Lu$ хэм $-\omega_0^2 L_1 u$ операторларын аппроксимацияласын. Торлар усылы хэм шекли элементлер усылы жоқарыдағы операторларды $D^* = D > 0, A^* = A > 0$ шертин қанаатландыратуғындай етип дүзиўге мүмакиншилиқ береді..

Онда (108)-(110)-мәелеси абстракт аргументли $u_h(t) \in H_h$ функциясына карата

$$D \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + A u_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}. \quad (111)$$

Коши мәселесине ийе боламыз. Бунда $u_{m,h} = P_h u_m(x), m = 0, 1$ - басланғыш шәртлер интерполянты, P_h - проектлеў операторы, $P_h: H \rightarrow H_h$ хэм $f_h(t) = P_h f(x, t)$.

Енди H_h төменги кеңислигин сайлап алыўға өтемиз.

Биринши усыл. Бунда (108)-теңлемени кеңислик өзгериўшилери бойынша шекли айырмалар менен аппроксимациялаўдан ибарат. $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2}$ торын киритемиз, бунда

$$\bar{\omega}_{h_m} = \{x_m = i_m h_m, i_m = \overline{0, N_m}, h_m = l_m / N_m\}, m = 1, 2. \text{ Бул жағдайда } H_h = W_2^1(\omega_h)$$

[157]. $-Lu$ хэм $-\omega_0^2 L_1 u$ операторларын ω_h торында орайлық туўындылар менен аппроксимациялаймыз:

$$Dv = -v_{x_1 \bar{x}_1} - v_{x_2 \bar{x}_2}, \quad Av = -\omega_0^2 v_{x_1 \bar{x}_1}. \quad (112)$$

Екинши усылда (108)-теңлемесин кеңислик өзгериўшилери бойынша шекли айырмалар усылы менен аппроксимациялаймыз.

Бунда Ω областын $N_1 \times N_2$ туўрымүйешликлерине бөлемиз:

$$\Omega_{ij} = \{(i-1)h_1 \leq x_1 \leq ih_1, (j-1)h_2 \leq x_2 \leq jh_2\}, i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, h_m = \frac{l_m}{N_m}.$$

Енди

$$\varphi_{ij}(x_1, x_2) = \varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2), i = \overline{1, N_1-1}, j = \overline{1, N_2-1},$$

базислик функциялар системасын сайлап аламыз, бунда

$$\varphi_i(x) = B_3\left(\frac{x-x_i}{h}\right), i = \overline{2, N-2}, B_3(\xi) \text{ -куб } B\text{-сплайн [6];}$$

$$B_3(\xi) = \begin{cases} (2-|\xi|)^3, & 0 \leq |\xi| \leq 2; \\ 1+3(1-|\xi|)+3(1-|\xi|)^2-3(1-|\xi|)^3, & |\xi| \leq 1; \\ 0, & |\xi| > 2; \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = B_3^-\left(\frac{x-x_1}{h}\right), B_3^-(\xi) = \begin{cases} 2(2-2x-x^2)(1+x), & -1 \leq x \leq 0; \\ 1+3(1-x)+3(1-x)^2-3(1-x)^3, & 0 \leq x \leq 1; \\ (2-x)^3, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$\varphi_{N-1}(x) = B_3^+\left(\frac{x-x_{N-1}}{h}\right), B_3^+(\xi) = \begin{cases} 2(2+2x-x^2)(1-x), & 0 \leq x \leq 1; \\ 1+3(1+x)+3(1+x)^2-3(1+x)^3, & -1 \leq x \leq 0; \\ (2+x)^3, & -2 \leq x \leq -1. \end{cases}$$

$i=1$ хәм $i=N-1$ лер ушын айрықша функциялардың сайлап алыныуының себеби биринши типтеги шегаралық шәртлерди канаатландырыудан ибарат. Олар және де барлық $\varphi_i(x) \in C^2[0, l]$ етип сайлап алынды.

Солай етип, жууық шешим төмендеги бикуб сплайн түрінде көрсетиледи:

$$u_h(x_1, x_2, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t)\varphi_k(x_1, x_2), \quad (113)$$

бунда $\varphi_k(x_1, x_2) = \varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2), i = \overline{1, N_1-1}, j = \overline{1, N_2-1},$ ал

$$k = i + (j-1)(N_1-1), N = (N_1-1)(N_2-1).$$

D, A операторларына сәйкес келетуғын қаттылық матрицасы

$$\mathbf{D} = \{a(\varphi_k(x_1, x_2), \varphi_m(x_1, x_2))\}_{k,m=1}^N, \mathbf{A} = \{\omega_0^2 a_1(\varphi_k(x_1, x_2), \varphi_m(x_1, x_2))\}_{k,m=1}^N, \quad (114)$$

түрінде есапланады, бунда $k = i + (j - 1)(N_1 - 1), m = p + (q - 1)(N_1 - 1);$
 $i, p = \overline{1, N_1 - 1}; j, q = \overline{1, N_2 - 1}.$

Бул еки жағдайдада

$$D = D^* > 0, A = A^* > 0 \quad \text{хәм} \quad \omega_0^2 D \geq A. \quad (115)$$

Ұақыт бойынша аппроксимациялау. Бул жағдайдада еки усылды қараймыз.

Биринши усылда (111)-мәселе төмендеги үш қатламлы шекли айырмалар схемасы арқалы аппроксимацияланады:

$$D \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + Ay^n = f_h(t_n), \quad y^n \in H_h, \quad t_n \in \omega_\tau, \quad (116)$$

$$y^0 = u_{0,h}, \quad D \frac{y^1 - y^0}{\tau} = u_{1,h} + \frac{\tau}{2}(f_h^0 - Ay^0).$$

Бунда $y^n = y(t_n), \quad \omega_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \tau > 0\}.$

Екинши усыл. Жоқарыда биз (111)-мәселесин ұақыт бойынша өзгеріуши t ға қарата шешиудің шекли элементлер усылын қарап өттік. Атап айтқанда, куб Эрмит элементлерин пайдаланып еки қатламлы үш параметрли векторлы айырмалар схемасын дүздик. Бул схема сәйкес $\frac{du_h}{dt}(t_n + \tau), \frac{du_h}{dt}(t_n), u_h(t_n + \tau), u_h(t_n)$ аңлатпаларын аппроксимациялаушы $\dot{y}^{n+1}, \dot{y}^n, y^{n+1}, y^n$ мәніслерин байланыстырады:

$$\begin{cases} (D - \frac{1}{12}\tau^2 A) \frac{\dot{y}^{n+1} - \dot{y}^n}{\tau} + A \frac{y^{n+1} + y^n}{2} = \Phi_1, \\ (D - \alpha\tau^2 A) \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} - (D - \beta\tau^2 A) A \frac{\dot{y}^{n+1} + \dot{y}^n}{2} = \Phi_2, \end{cases} \quad (117)$$

$$y(0) = u_{h,0}, \quad \dot{y}(0) = u_{h,1}. \quad (118)$$

Бунда

$$\Phi_p = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) \mathcal{G}_p \left(\frac{t-t_n}{\tau} \right) dt = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi) \mathcal{G}_p(\xi) d\xi, \quad p = 1, 2,$$

$$\mathcal{G}_1(\xi) = 1, \quad \mathcal{G}_2(\xi) = s_1 \mathcal{G}_2^{(1)}(\xi) + s_2 \mathcal{G}_2^{(2)}(\xi), \quad \xi = \frac{t-t_n}{\tau},$$

$$\mathcal{G}_2^{(1)}(\xi) = \tau \left(\xi - \frac{1}{2} \right), \quad \mathcal{G}_2^{(2)}(\xi) = \tau \left(\xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi \right),$$

ал s_1, s_2 параметрлери төмендегише анықланады:

$$s_1 = 180\beta - 40\alpha, \quad s_2 = 1680\beta - 280\alpha.$$

Есапланған $\dot{y}^{n+1}, \dot{y}^n, y^{n+1}, y^n$ мәніслери бойынша $u_h(t)$ функциясын кәлеген $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, 1, \dots$ ушын

$$y(t) = y^n \varphi_{00}^n(t) + \dot{y}^n \varphi_{10}^n(t) + y^{n+1} \varphi_{01}^n(t) + \dot{y}^{n+1} \varphi_{11}^n(t).$$

формуласы арқалы дүзиўге болады. Бунда, $\varphi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1$,

$$\varphi_{01}^n(t) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad \varphi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \quad \varphi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2), \quad \xi = \frac{t-t_n}{\tau}.$$

Кеңислик хәм ўақыт бойынша аппроксимацияларды комбинациялай отырып (108)-(110) мәселесин шешиўдин төмендеги үш усылын қараймыз:

- **схема 1⁰** – кеңислик (112) хәм ўақыт (116) бойынша екинши тәртипли шекли айырмалы аппроксимация;
- **схема 2⁰** – кеңислик бойынша екинши тәртипли (112) хәм ўақыт бойынша шекли элементлер схемасы (117), (118);
- **схема 3⁰** - кеңислик бойынша бикуб элементлер арқалы аппроксимация (113) хәм ўақыт бойынша шекли элементлер схемасы (117), (118).

Орнықлық хәм жыйнақлылық. Жоқарыдағы схемалардың орнықлығын хәм дәллігин қарап өтейик. (116)-схема (111)-мәселесин τ адымы бойынша екинши тәртипли дәлликте аппроксимациялайды хәм ол орнықлы болады, егерде

$$D = D^*, \quad A = A^* > 0, \quad D - \frac{1}{4} \tau^2 A \geq \varepsilon D, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (119)$$

шәртлери орынланса.

Бул (119)-шәртлерин $(1 - \varepsilon)D - \frac{1}{4}\tau^2 A \geq 0, 0 < \varepsilon < 1$ көринисинде жазамыз. Кейинги бул шәрт (115) баҳасы бойынша адым

$$\tau \leq \frac{2}{\omega_0(1 - \varepsilon)}. \quad (120)$$

шәртин қанаатландырғанда орынланады.

Төмендеги теорема орынлы.

7-теорема. Егерде (120) шәрти орынланса, онда 1^0 схемасы (108)-(110)-мәселесиниң жеткиликли тегис шешимине жыйнақлы болады хәм төмендеги баҳа орынлы:

$$\|y(t) - u(t)\|_A + \|y_t(t) - u_t(t)\|_D \leq M(\tau^2 + h^2).$$

Бунда $\|v\|_D = \sqrt{(Dv, v)} = \|v\|_{W_2^1(\omega_h)}$, $\|v\|_A = \sqrt{(Av, v)} = \omega_0 \|v_{x_1}\|_{L_2(\omega_h)}$ H_h торлық функциялар кеңислигиниң нормалары; $y_t = (y^{n+1} - y^n) / \tau$.

(117), (118)-схемасының орнықлығын хәм дәллигин төмендеги теорема арқалы беремиз.

8-теорема. Егерде $A^* = A > 0, \mathcal{D}^* D > 0$ хәм

$$\alpha - \beta = \frac{1}{12}, D - \delta\tau^2 A \geq \varepsilon D, 0 < \varepsilon < 1, \delta = \max\{\alpha, \beta, \frac{1}{12}, 0\} \quad (121)$$

шәртлери орынланса, онда (117), (118)-схемасының шешими $y(t)$ (111)-мәселесиниң $u_h(t) \in C^6[0, T]$ шешимине жыйнақлы болады хәм төмендеги баҳа орынлы:

$$\|u_h(t) - y(t)\|_A + \|\dot{u}_h(t) - \dot{y}(t)\|_D \leq M\tau^4.$$

Бул теореманың дәлилленіуі (117) еки қатламлы векторлық схемасын u ушын хәм \dot{u} ушын бөлек үш қатламлы схемаларға алмастырып усы үш қатламлы схемалар шекли айырмалар теориясының усыллары тийкарында

әмелге асырылады. (121)-шәрт параметрлердің $\alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{1}{24}$ мәніслері үшін, демек $\delta = \frac{1}{8}$ үшін ұақыт бойынша адымға төмендегіше шәрт қояды:

$$\tau \leq \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0(1-\varepsilon)}. \quad (122)$$

Солай етип, (117)-шекли элементлер схемасының орнықтылық шәрти ұақыт бойынша адымды (116)-шекли айырмалар схемасына қарағанда 1.4 мәрте үлкен етип сайлап алыўға болады. 2^0 хәм 3^0 схемаларының дәллик бақаларын алыў үшін $z = u_h - u$ қәтелигине бақалар алыўымыз керек. Шекли айырмалар теориясының хәм шекли элементлер теориясының қәтеликти бақалаў усылларынан пайдаланып төмендегі жуўмаққа келемиз [1].

9-теорема. Егерде (122)-орнықтылық шәрти орынланса, онда схемы 2^0 схемасының шешими $y(t)$ (108)-(110)-мәселесиниң шешимине жыйнақлы хәм төмендегі бақа орынлы болады:

$$\|u(t) - y(t)\|_1 \leq M(h^2 + \tau^4).$$

10-теорема. Егерде (122)-орнықтылық шәрти орынланса, онда схемы 3^0 схемасының шешими $y(t)$ (108)-(110)-мәселесиниң шешимине жыйнақлы хәм төмендегі бақа орынлы болады:

$$\|u(t) - y(t)\|_1 \leq M(h^3 + \tau^4).$$

Схеманы реализациялаў алгоритми. (116)-схеманы релизациялаў төмендегіше әмелге асырылады:

$$y^{n+1} = 2y^n - y^{n-1} + \tau^2 D^{-1}(f_h(t_n) - Ay^n), n = 1, 2, \dots,$$

$$y^1 = y^0 + \tau u_{1,h} + \frac{\tau^2}{2} D^{-1}(f_h^0 - Ay^0).$$

D операторына жаўап бериўши кери матрица биринши қатламда бир мәрте квадрат коренлер усылы жәрдемінде есапланды. Кейингі қатламларда шешим D^{-1} операторын оң жақ функциясына көбейтиў арқалы есапланды.

(117)-схемасын реализациялау алгоритми хәр бир қатламда төмендеги еки теңлемени шешиуге алып келеди:

$$Cy^{n+1} = F_1, \quad C\dot{y}^{n+1} = F_2,$$

бунда $C = D^2 - \left(\alpha - \frac{1}{6}\right)\tau^2 AD + \left(\frac{\alpha}{12} - \frac{\beta}{4}\right)\tau^4 A^2$, ал теңлемениң оң тәрәпиндеги функциялар y^n , \dot{y}^n хәм Φ_1 , Φ_2 белгили шамалары тийкарында есапланады.

C матрицасы факторизацияланады: $C = C_1 C_2 = (D - \omega_1 A)(D - \omega_2 A)$, бунда ω_1, ω_2 төмендеги теңлемениң коренлери:

$$\omega^2 + \left(\alpha + \gamma - \frac{1}{4}\right)\omega + \left(\alpha\gamma - \frac{\beta}{4}\right) = 0.$$

Егерде, мысал ушын, $\alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{1}{24}$ болса, онда $\omega_1 = -\frac{1}{24}, \omega_2 = 0$.

Бул жағдайда $y^{n+1} = C^{-1}F_1 = C_2^{-1}C_1^{-1}F_1, \dot{y}^{n+1} = C_2^{-1}C_1^{-1}F_2$. C_1, C_2 матрицаларына кери матрицаларды табыу ушын ўақыттың басланғыш моментинде бир рет квадрат коренлер усылы қолланылды. Басқа қатламларда шешим $C^{-1} = C_2^{-1}C_1^{-1}$ матрицасын F_1, F_2 векторларына көбейтиу арқалы табылды.

(116)-схемасы ушын тийкарығи әмеллер саны биринши қатламда D операторына кери матрицаны есаплаудан хәм қалған қатламларда $f_h^n - Ay^n$ векторын D^{-1} операторына көбейтиуден ибарат. Буған қосымша, F_1, F_2 векторлары $C^{-1} = C_2^{-1}C_1^{-1}$ операторына көбейтиледі, бунда $C_1 = D - \omega_1 A, C_2 = D - \omega_2 A$. Солай етип, (117)-схемасын реализациялау ушын (116)-схемасын реализациялауға кеткен ўақытқа қарағанда еки есе ўақыт көбірек кетеді.

3^0 –схемасын реализациялауға кеткен ўақыттың көбейиуи D, A матрицаларын дүзиугеде байланыслы. $1^0, 2^0$ схемалары ушын сәйкес D хәм A матрицалары аңсат дүзиледи.

3-§. Санлы экспериментлер.

Шекли элементлер хәм шекли айырмалар усылларын салыстырыў. Мейли $\bar{\Omega}$ туўрымүйешлигиниң бир тәрпинде биртеккли емес шегаралық шәрти қойылған жағдайда (108)-теңлемесин қарайық:

$$u(0, x_2, t) = x_2(l_2 - x_2) \equiv \mu(x_2); u = 0 \quad x \in \Gamma \setminus (x_1 = 0)$$

Басланғыш шәртлер:

$$t = 0: u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Бул мәселени бастағы (108)-(110)-мәселеси түрине келтиремиз. Бул ушын

$\varphi_0(x_1, x_2) = \frac{l_1 - x_1}{l_1} \mu(x_2)$ функциясын анықлаймыз. Онда, $v = u - \varphi_0(x_1, x_2)$

функциясы ушын (108)-биртеккли теңлемесине ийе боламыз. Биртеккли шегаралық шәртлеге төмендеги басланғыш шәртлер қосылады:

$$t = 0: v = -\varphi_0(x_1, x_2), \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Бул мәселениң өзгеріўшилерди айырыў усылы менен алынған шешими

$$u(x_1, x_2, t) = \varphi_0(x_1, x_2) - \frac{16l_2^2}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k(2p-1)^3} \cos(\omega_0 \sqrt{\zeta_{kp}} t) \times \\ \times \sin\left(\frac{k\pi x_1}{l_1}\right) \times \sin\left(\frac{(2p-1)\pi x_2}{l_2}\right), \quad (123)$$

түрине ийе болады, бунда $\zeta_{kp} = 1 / \left[1 + \left(\frac{k}{2p-1} \right)^2 (l_1/l_2)^2 \right]$.

$x_1 = 1.0$, $x_2 = 0.5$ точкаларындағы хәм $t = 3$ ўақыттағы дәл шешим (123)-формуласы арқалы есапланды: $u(1.0, 0.5, 5) = 0.158814$. Шексиз қатар шекли қосынды менен алмастырылды: $k = \overline{1,5000}$, ал $p = \overline{1,40}$. Бул жағдайда басланғыш ўақыт моментинде шешимди есаплаўлар қәтелиги 10^{-6} ға тең.

Мәселениң параметрлери $\omega_0 = 2$, $l_1 = 2$, $l_2 = 1$ түрінде сайлап алынды. Кеңислик өзгеріўшилери бойынша бүлеклеў саны өзгерип барды, ал ўақыт

бойынша адым $\tau = 0.1$ түрінде алынды. (117)-схеманың параметрлері:

$$\alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{1}{24}.$$

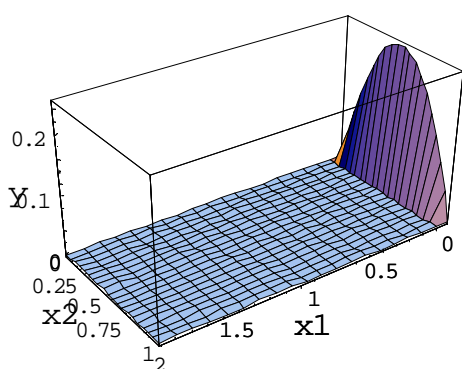
1-таблицада хәр қыйлы схемалардың санлы шешімлеринің қәтелиги $z = y - u$ келтирилген. Кеңислик торлары ушын $x_1 = 1.0, x_2 = 0.5$ хәм ўақыт моменти ушын $t = 5$ точкалары алынды. Таблицаның бағанасында схемалар келтирилген, ал қатарында торлардың бөлиниўи келтирилген.

1-Таблица

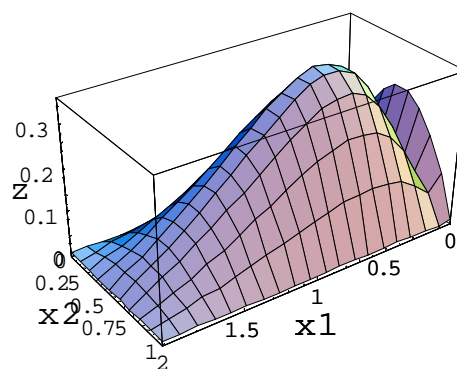
k	N_1/N_2	Схема 1 ⁰	Схема 2 ⁰	Схема 3 ⁰
1	10/5	-0.009365	-0.008792	0.000684
2	20/10	-0.002724	0.002102	-0.000296
3	40/20	-0.001143	-0.000527	-0.000065

Бул таблицадан 3⁰ –схемасының шешиминің қалған 1⁰ и 2⁰ –схемаларының шешимниң дәллигинен жоқары екенлиги көринип тур. 2⁰ –схемасының 1⁰ –схемасынан артықмашылығы кеңислик торларының оғада киши адымларында көринеди: $N_1 = 40, N_2 = 20$.

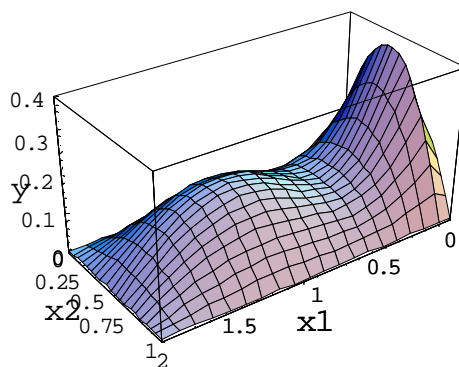
Төмендеги сызылмаларда $y(x_1, x_2, t)$ шешиминің графиги сәйкес ўақыт моментинде келтирилген.



$t = 0$



$t = 3$



$$t = 5$$

Соныда айтып өтиу керек, биринши шегаралық шәртлери менен берилген стационар емес теңлемелерди шешийде усы шегаралық шәртлерди қанаатландыратуғын функцияларды сайлап алыу мүшкил мәселе болып табылады. Бул жағдайда 2^0 –схемасын пайдаланған мақул, себеби бундай шәртлерди торлар усылы менен аппроксимациялау оғада жеңил.

Жуўмақлау

Солай етип, бул бапта ишки толқынлар теориясының тийкарғы теңлемелериниң бири ушын шегаралық мәселе қаралды. Бул суйықлықлардағы ишки толқынлар ҳаққындағы мәселе ушын жоқары тәртипли дәлликке ийе усыллар қарап өтилди. Олар ўақыт бойыншада ҳәм кеңислик бойыншада шекли айырмалар ҳәм шекли элементлер усылын қолланыу арқалы алынды. Шекли элементлер усылында базислик функциялар ретинде Эрмит типиндеги үшінши тәртипли полиномлар пайдаланылды. Усылдың релизациялау алгоритми келтирилди, дәл шешим менен жуўық шешим арасындағы айырмашылықлар салыстырылды, ҳәм қайсы усыл дәлирек екенлиги атап өтилди. B_3 -сплайнлары жәрдемінде дүзилген схемалар эрмит сплайнлары жәрдемінде дүзилген схемалардан экономларақ, бунда арифметикалық әмеллер есабынан. Солай етип, шекли элементлер тийкарында дүзилген схемалар басқа усыллар тийкарында дүзилген схемалардан анағурлым жақсы жуўмақ беретуғынлығы дәлилленди.

Әдебиятлар

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. – 656 С.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. - М.: Наука, 1971. – 552 С.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. – М.: Наука, 2001. – 319 С.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем.- М.: Наука, 1973. – 416 С.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.- М.: Наука, 1989. – 432 С.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 536 С.
7. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. – М.: Наука, 1979. – 320 С.
8. Москальков М.Н., Утебаев Д. Построения схем повышенной аппроксимации для нестационарных уравнений первого порядка // Вычислительная и прикладная математика. – Киев, 1981. – Вып.43. – С. 93-101.
9. Вабищевич П.Н. Разностные схемы для решения нестационарных векторных задач // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40. - № 7. – С. 936 – 943.
10. Москальков М.Н. Об одном свойстве схемы повышенного порядка точности для одномерного волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т.15. – №1. – С. 254-260.
11. Москальков М.Н., Утебаев Д. Об одной схеме метода конечных элементов решения задачи Коши // Тезисы докл. III респ. конф. «Вычисл. матем. в современном научно-техн. прогрессе». – Киев: ИК АН УССР, 1982. – С. 64-66.

12. Москальков М.Н., Утебаев Д. Исследование одной схемы решения задачи Коши для уравнения первого порядка // Вычислительная и прикладная математика. – Киев, 1983. – Вып.49. – С. 59-64.
13. Москальков М. Н., Утебаев Д. Исследование разностных схем метода конечных элементов для системы уравнений второго порядка // Питання оптимізації обчислень: Праці міжн. конф. – Київ, 2005. – С.156-157.
14. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные разностные схемы для задач математической физики. – М.: URSS. ЛКИ, 2007. – 478 С.
15. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численное моделирование. – М.: МГУ, 1993. – 152 С.
16. Утебаев Д. Об одном методе численного решения операторного дифференциального уравнения второго порядка// ДАН РУз., Сер. математика, технические науки, естествознание. – Ташкент, 2007. –№1. – С. 31 – 34.
17. Утебаев Д., Палекеева Г. О скорости сходимости схемы метода конечных элементов для краевых задач деформирования вязкоупругих сред. - Проблемы механики, г. Ташкент, 2011 г., № ,с. (в печати)
18. Палекеева Г. Численные методы решения нестационарных векторных задач. Магистрантлардың илимий жумыслары жыйнағы бойынша материаллар топламы, Нөкис, 2010, 12-13-б.
19. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
20. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
21. Норри Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
22. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М. Мир, 1979.
23. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.