O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA POLITEXNIKA INSTITUTI

«AMALIY MEXANIKA VA MATERIALLAR QARSHILIGI»
kafedrasi

«NAZARIY MEXANIKA»
fanidan

M U A M M O L I

MA'RUZALAR MATNI

II - qism

Farg‘ona – 2014

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA POLITEXNIKA INSTITUTI

«AMALIY MEXANIKA VA MATERIALLAR QARSHILIGI»
KAFEDRASI.

5310600 «Yer usti transport tizimlari» yo‘nalishlari bo‘yicha ta’lim olayotgan talabalarlar uchun.

«NAZARIY MEXANIKA»

fanidan

M U A M M O L I

M A ‘ R U Z A L A R

M A T N I

Institut uslubiy kengashi
Tasdiqlagan « 2» 09___2014 yil
Bayon №1

FARG‘ONA – 2014

«Nazariy mexanika» fanidan ma’ruza matnlari eng so‘nggi yillarda chet ellarda chop etilgan darsliklar va maxsus texnik adabiyotlardan foydalangan holda, namunaviy ishchi dasturga asoslangan holda tayyorlangan. Ushbu ma’ruzalar matni 5310600 «Yer usti transport tizimlari» yo‘nalishlari bo‘yicha ta’lim olayotgan bakalavriat studentlarining mustaqil tayyorlanishlarida foydalanish uchun mo‘ljallangan.

Kafedraningn uslubiy
seminarida ko‘rib chiqilgan
Bayonnoma №8
«13» iyun 2014y.

Mexanika fakulteti
uslubiy komissiyasi
tomonidan tasdiqlangan
Bayonnoma №_____
«____»_____2014y.

Tuzuvchi:

t.f.n., dots. Sobirjonov T.M.

Taqrizchi: t.f.d., prof. Davidboev B N
Muxarrir: t.f.n., dots Ergashev Y

19 – Ma’ruza 2 soat.

Mavzu: **Dinamika**ning asosiy tushunchalari. **Dinamika**ning asosiy qonunlari. Dinamikaning ikkita asosiy masalasi. Moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamalari. Dinamikaning birinchi asosiy masalasin echish. Masalalar.

REJA:

1. Asosiy tushunchalar va ifodalar,
2. **Dinamika** qonunlari. Moddiy nuqta **dinamika**sining asosiy masalalari.
3. O‘lchov birliklari.
4. Kuchlarning asosiy ko‘rinishlari.
5. Moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamalari.
6. Dinamikaning birinchi masalasi.

Muammo: Qadim zamonlardan beri xarakat qilayotgan moddiy nuqta yoki jism o‘z harakatini qanday sabablarga ko‘ra o‘zgartira olishi va uning matematik ifodasi bormi yoki yo‘qmi degan savol ustida necha-necha olimlar bosh qotirganlar. Lekin bu savolga Italiya olimi G. Galiley (1564-1642) va Ingliz olimi I.Nyuton(1642-1727)largacha hech kim **aniq javob** bera olmaganlar.

Haqiqatan ham, birorta jismni yuqoriga uloqtirib yuborsangiz, ma’lum traektoriya orqali harakatlanib, yana erga qaytib tushadi. Sababi nimada? Nima uchun osmonga qarab cheksiz ko‘tarilib keta olmaydi?

Quyida shu haqdagi fikrlarning echimi, ilmiy tilda aytganimizda **dinamika**ning asosiy qonunlari keltiriladi.

19.1§ Asosiy tushunchalar va ifodalar.

Kuchlar ta’sirida bo‘lgan jismlarning harakatini o‘rganuvchi qism ***dinamika*** deb ataladi.

*«**Nazariy mexanika**» fanini o‘rgaanishning maqsadi, mexanika qonunlarini yod olish emas, balki ushbu qonuniyatlar orqali har qanday murakkab mashina va jihozlarning ishlash sirlarini anglab etishga qaratilgan.*

Kinematika qismida jismlarning harakatlariga faqat geometrik nuqtai nazardangina qaralgan edi. **Dinamika** qismining kinematikadan farqi shundaki, jismlarning harakatlarini o‘rganishda, ularga ta’sir etayotgan kuchlar

sistemasidan tashqari jismlarning **inert**ligi, ya’ni ularning massalari va shu massalarning joylashish tartiblari *(geometrik shakli)* ham e’tiborga olinadi.

Kuch va ularning moddiy jismlarga ko‘rsatadigan mexanik ta’sirlarining o‘lchovi ekanligi haqidagi tushunchalar statika qismida ko‘rib o‘tilgan edi. Lekin, statika qismida jismlarga ta’sir etuvchi kuchlarning vaqt mobaynidagi o‘zgarishlarini hisobga olmagan edik va statika masalalarini echganimizda barcha kuchlarni o‘zgarmas deb qaragan edik. Amalda esa harakatlanuvchi jismga o‘zgarmas kuchlardan tashqari, moduli va yo‘nalishi bo‘yicha o‘zgaruvchan bo‘lgan kuchlar ham ta’sir etadi. Shu qatorda berilgan (aktiv) kuchlar[1] ham va bog‘lanish rektsiyalari ham o‘zgaruvchan bo‘lishlari mumkin.

Erning birinchi suniy yo‘ldoshi 4 oktyabr 1957 yilda uchirildi.

Tajribalar orqali aniqlandiki, jismga ta’sir etayotgan kuchlar vaqtga, jismning holatiga (koordinatasiga) va uning tezligiga bog‘liq ravishda o‘zgaruvchan bo‘lar ekan. Masalan, reostatni yoqish va o‘chirish hisobiga elektrovozning tortish kuchi yoki elektromotorning yaxshi markazlashtirilmagan valining aylanishidan hosil bo‘ladigan tebranishlar ta’siridagi kuchlar vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgaruvchi kuchlarga misol bo‘lishi mumkin; butun olam tortilish qonuni yoki prujinaning elastiklik kuchi esa jismlarning holatiga (ya’ni koordinatalardagi o‘rniga) bog‘liq ravishda o‘zgaruvchi kuchlarga misol bo‘la olishi mumkin; muhit qarshiligi kuchi tezlikka bog‘liq ravishda o‘zgaradi.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, statika qismidagi kuchlar haqidagi tushunchalar va qoidalar to‘lasicha **dinamika** qismida ham o‘rinli hisoblanadi, chunki statika qismidagi qoidalar faqat o‘zgarmas kuchlar uchungina o‘rinli deyilgan emas.

Inertlik tushunchasi shundan iboratki, agar jismga biror tezlik berilsa jism shu tezlikni saqlab qoladi, agar unga kuch ta’sir etilsa, jismning tezligi birdaniga emas balki ma’lum vaqt mobaynida o‘zgaradi. Va bu o‘zgarish davri jismning inertligiga to‘g‘ri proportsional ravishda bo‘ladi. **Moddiy jismlarning inertlik xossasining miqdori fizik qiymat bo‘lib, uni jismning *massasi*[2] deb ataladi.** Klassik mexanikada massa skalyar, faqat musbat ishorali va har-bir jism uchun o‘zgarmas qiymat hisoblanadi.

[1] Muvozanatdagi jismga ta’sir qilib, uni harakatga keltira oluvchi kuchni *aktiv kuch* deb ataladi.
[2] Massa, jismning gravitatsion xususiyatining ham o‘lchovi hisoblanadi.

Jismning harakati uning umumiy massasigagina bog‘liq bo‘lib qolmasdan, shu massaning qanday joylashganligiga ham, ya’ni jismning geometrik shakliga ham uzviy bog‘liq bo‘ladi.

Dinamika qismi ancha murakkab bo‘lganligini hisobga olib, uni o‘rganish nuqta **dinamika**sidan boshlanadi. Bunda, ma’lum massaga ega bo‘lgan *moddiy nuqta* degan abstrakt tushuncha kiritiladi, ya’ni har qanday jismni uning geometrik shakliga (massalarning tarqalishiga) e’tibor bermasdan o‘rganiladi (e’tibor bergan bo‘lsangiz, kinematika qismida «**moddiy nuqta**» so‘zi aslo ishlatilmagan edi).

12 aprel 1961 yil kuni Yu.Gagarin kosmosga parvoz qildi

Kinematika qismida ko‘rib o‘tganimizdek, har qanday harakat asosan ilgarilanma va aylanma harakatlarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Agar masalalarning shartlariga ko‘ra aylanma harakatlarni e’tiborga olinmasa bunday jismlarning harakatini o‘rganishda ularni moddiy nuqta deb qabul qilinadi, chunki natijaviy echimda hech qanday xatolik bo‘lmaydi. Masalan, planetalarning Quyosh atrofdagi harakatlarini, artileriya snaryadining qanday masofaga borib tushishini aniqlashda va shunga o‘xshash qator masalalarni echishda, ularni moddiy nuqta deb qaraladi.

Ilgarilanma harakatdagi barcha masalalarni echishda massasi jismning umumiy massasiga teng bo‘lgan moddiy nuqta deb hisoblanadi. Mexanik sistema yoki qattiq jismlarning **dinamika**siga oid harakatlarni o‘rganishdan oldin, bitta moddiy nuqtaning **dinamika**siga oid masalalarni ko‘rib o‘tish lozim bo‘ladi. Shu sababli **dinamika** qismini moddiy nuqta **dinamika**sidan boshlab o‘rganamiz.

Tayanch iboralar: dinamika, inertlik, moddiy nuqta, massa.

19.2§ Dinamika qonunlari. Moddiy nuqta dinamikasining masalalari.

Muammo: Mexanik harakatlarning qonunlari nechta. Ular qaysi tenglamalar orqali ifodalanadilar. Dinamika qonunlari kim tomonidan va qachon kashf etilgan.

Dinamikaning asosida jismlarning harakatlarini o‘rganishga bag‘ishlangan va jamiyatning ijtimoiy-mehnat faoliyatida sinovdan o‘tgan qator tajriba va kuzatishlar natijasida aniqlangan qonuniyatlar

yotadi. **Dinamika**ning qonunlarini birinchi bo‘lib I. Nyuton o‘zining 1687 yilda[3] nashr etgan, «Tabiiy falsafaning matematik asoslari» nomli kitobida klassik ko‘rinishda sistemalashtirilgan holda bayon qilgan.

Ushbu qonunlarni quyidagicha ifodalash mumkin:

Birinchi qonun (inertsiya qonuni): *tashqi muhit ta’siridan ihotalangan moddiy nuqtaga qo‘yilgan kuchlar uning holatini o‘zgartirmaguncha, u o‘zining tinch holatini yoki to‘g‘ri chiziqli tekis harakatini davom etdiradi.* Kuchlar ta’sir qilmayotgan *(aniqrog‘i-kuchlarning bosh vektori nolga teng bo‘lgan)* jismning harakatini, *inertsiya* bo‘yicha harakat deb ataladi.

*Ushbu qonunni kashf qilganligi sababli G.Galiley, Rim papasining (1633 y) hukmiga binoan **o‘lim jazosi**ga mahkum etilgan edi. Lekin G.Galiley cherkovdan kechirim so‘rab, ushbu fikr noto‘g‘ri ekanligini tan olishi sababli, o‘lim jazosi umrbod surgunga almashtirilgan edi.*
***Savol:** Nima sababdan Katolik dini bu qonundan shunchalik havfsiragan edi?*

Inertsiya qonuni materiya (borliq) ning asosiy xossalaridan biri, ya’ni uning har doim harakatda ekanligini ko‘rsatib beradi. Ushbu qonun italyan olimi G. Galiley tomonidan (1638 y.) ochilgunga qadar, Aristotel (*Arastu, yunon faylasufi, Iskandar Zulqarnayning ustozi, eramizdan oldingi 384-322y. yashagan*) tomonidan aytilgan fikr, ya’ni jism faqat kuch ta’siridagina harakat qilishi mumkin degan fikr hukmronlik qilar edi.

Eng muhim narsalardan biri, ushbu inertsiya qonuni qaysi hisob sistemasida o‘rinli ekanligini aniqlashdan iboratdir. Nyutonning fikricha ushbu qonun qandaydir qo‘zg‘almas (absolyut) fazoda joylashgan hisob sistemasidagina o‘rinli hisoblangan. Lekin hozirgi zamondagi tushunchalar bo‘yicha, fazo - bu materiya (borliq)ning yashash formasi bo‘lib, undagi materiyalarning harakatiga bog‘liq bo‘lmagan qandaydir absolyut fazo bo‘lishi mumkin emas ekan.

Ushbu qonun tajribalar orqali aniqlanganligi sababli (Galileyning ko‘rsatmasiga asosan, qiyaligi kamayib borayotgan tekislikning ustidagi sharchaning harakati orqali ham aniqlash mumkin ekan), ma’lum darajadagi xatoliklarga ega bo‘lgan hisob sistemasi, albatta, mavjud bo‘lib, u hisob sistemasida bu qonun o‘rinli bo‘ladi. Shunga asosan ilmiy abstraktsiyaga tayangan holda, mexanikada ushbu **inertsiya qonuni** o‘rinli bo‘lgan

Yulduzlarni kuzatuvchi optik teleskop asbobini G Galiley ixtiro qilgan.

[3] A.N.Krilov tomonidan, nihoyat sifatli tarjima qilingan qo‘lyozmasi mavjud. Akad. A.N.Krilov, tanlangan asarlar, t.VII. M.-L., 1936.

hisob sistemasi mavjud ekanligi postulot (hali isbot qilinmagan fikr) tarzida kiritiladi va uni *inertsial hisob sistemasi* deb ataladi.

Amalda foydalanilayotgan real hisob sistemasini **inertsial hisob sistemasi** deb qabul qilish mumkin ekanligi, o‘sha hisob sistemasining inertsial hisob sistemasi deb hisoblab, o‘tkazilgan tajribalardan olingan natijalarni solishtirish orqali aniqlash mumkin. Tajribalar natijasida aniqlandiki, markazi Quyoshda joylashib, o‘qlari qo‘zg‘almas yulduzlar tomonga yo‘naltirilgan o‘qlardan iborat hisob sistemasi bizning Quyosh sistemamiz uchun yuqori aniqlikdagi **inertsial sistema** hisoblanar ekan. Aksariyat masalalarni echishda, erga mahkamlangan hisob sistemasini inertsial sistema deb qabul qilish mumkin ekan va bundagi xatolik sezilarli emas ekan. Bunday fikrning o‘rinli ekanligi keyinchalik asoslanib beriladi.

Rossiyani buyuk davlatlar qatoriga ko‘tarilishda I.Nyutonning hissasi alohida o‘rin tutadi. 11 yanvar 1698 yili 26 yoshli shaxzoda Petr I Londonga kelib, I.Nyuton bilan uchrashadi. Nyuton o‘sha davrda Angliya davlatining moneta (tanga pul) chiqaruvchi korxonasini rahbari bo‘lgan. Petr I Rossiyani kelajakda buyuk davlatlar qatoriga qo‘shilishining birdan-bir yo‘li mexanika va matematikani rivojlantirish, hamda ular asosida texnikani taraqqiy etdirish lozim ekanligini tushunib, I.Nyutonning tavsiyanomasiga ko‘ra Evropalik bir necha yosh mexanik va matematik olimlarni Rossiyaga olib kelib, ularga Evropa miqyosida eng yaxshi sharoitlar yaratib berdi va 28 yanvar 1724 yil kuni Rossiya Fanlar Akademiyasiga asos solindi.

Ikkinchi qonun (**dinamika**ning asosiy qonuni): moddiy nuqtaga ta’sir etayotgan ixtiyoriy kuchlar, uning tezligini qanday o‘zgartirishi mumkin ekanligini aniqlab beradi, ya’ni: *moddiy nuqtaning massasini unga ta’sir qilayotgan kuchlardan oladigan tezlanishiga ko‘paytmasi, moduli bo‘yicha kuchga teng bo‘lib, moddiy nuqtaning oladigan tezlanishining yo‘nalishi kuchning yo‘nalishi bilan bir xil bo‘lar ekan.*

Ushbu qonunning vektor ko‘rinishdagi matematik ifodasi, quyidagicha yoziladi

$$m\bar{a} = \bar{F} \qquad (19.1)$$

Kuch bilan tezlanishning modullari orasidagi bog‘lanish, quyidagicha bo‘ladi

$$ma=F \qquad (19.1')$$

Dinamikaning ikkinchi qonuni ham, birinchi qonun kabi faqat inertsial hisob sistemalaridagina o‘rinli bo‘ladi. Ushbu qonundan ko‘rinib turibdiki, jismning massasi uning **inert**lik o‘lchovi bo‘lib hisoblanar ekan. CHunki biror kuchni moddiy nuqtaga ta’siridan

oladigan tezlanish nuqtaning massasiga bog‘liq bo‘lib, qanchalik uning massasi oz bo‘lsa, oladigan tezlanishi katta bo‘ladi yoki aksincha.

Agar moddiy nuqtaga bir vaqtning o‘zida bir nechta kuchlar ta’sir etsa, kuchlarning parallelogrammi haqidagi qoidaga asosan, ular shu kuchlarning geometrik yig‘indisiga teng bo‘lgan bitta teng ta’sir etuvchi $\bar{R}$-kuchga ekvivalent bo‘ladilar,

U holda **dinamika**ning asosiy qonuni, quyidagi ko‘rinishga keladi,

$$m\bar{a} = \bar{R} \quad \text{yoki} \quad m\bar{a} = \sum \bar{F}_k \qquad (19.2)$$

Ushbu natijani boshqa usul bilan ham aniqlash mumkin, ya’ni kuchlarning jismga ta’sirlari
bir birlariga bog‘liq emasligiga asoslanib, har bir kuchdan alohida tezlanish oladi, so‘ngra shu olingan tezlanishlarni geometrik usulda qo‘shilsa, yuqoridagi tenglik kelib chiqadi.

Uchinchi qonun (ta’sir va aks ta’sir qonuni): moddiy jismlarning o‘zaro mexanik ta’sirlarini xarakterlab beradi. Ikkita moddiy nuqta uchun quyidagicha ifodalanadi: *ikkita moddiy nuqtaning bir-birlariga ta’sir kuchlari, shu nuqtalarni birlashtiruvchi chiziqda joylashib, modullari teng lekin yo‘nalishlari qarama qarshi bo‘lar ekan.*

Peterburg (1724y) Fanlar akademiyasi London (1660y) va Parij (1666y)dan keyingi Evropada 3 nchi ochilgan akademiya

Bu qonundan statika kursida foydalangan edik. Bu qonun moddiy nuqtalar sistemasining **dinamika**sida alohida ahamiyatga ega bo‘lib, shu nuqtalarga ta’sir etadigan ichki kuchlarning o‘zaro bog‘likligini aniqlab beradi.

Agar ikkita erkin nuqta bir birlariga kuch bilan ta’sir etsalar, bu nuqtalar **dinamika**ning uchinchi va ikkinchi qonuniga asosan, ularning massalariga teskari proportsional bo‘lgan tezlanishlar bilan harakatlanadilar. D i n a m i k a n i n g m a s a l a l a r i. Erkin moddiy nuqta uchun **dinamika**ning quyidagi masalalari echiladi: 1) moddiy nuqtaning harakat qonuni berilgan bo‘lsa, shu nuqtaga ta’sir etuvchi kuchni aniqlash (***dinamika****ning birinchi masalasi*); nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlar ma’lum bo‘lsa, nuqtaning harakat qonunini aniqlash (***dinamika****ning ikkinchi* yoki *asosiy masalasi*).

Agar moddiy nuqta erkin bo‘lmasa, ya’ni unga bog‘lanishlar ta’sir etib u ma’lum tekislik ustida yoki egri chiziq bo‘ylab harakatlansa, **dinamika**ning birinchi masalasida nuqtaning harakat qonuni va unga ta’sir etuvchi aktiv kuchlar berilgan bo‘lsa, bog‘lanishlarning reaktsiyalari aniqlanadi. Erkin bo‘lmagan jismlar uchun **dinamika**ning ikkinchi qonuni yana ikkiga ajraladi, ya’ni nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar ma’lum bo‘lsa a) nuqtaning harakat qonuni, b) unga qo‘yilgan bog‘lanishlarning reatsiyalari aniqlanadi.

N.Armstrong 1969 y.iyul oyida «Appolon-11» kosmik kemasida Oyga qo‘nib, oyning ustida yurib, erga qaytib tushdi.

Tayanch iboralar: inertsial hisob sistemasi, inertsiya qonuni, dinamikaning asosiy qonuni, ta’sir va aks ta’sir qonuni, dinamikaning birinchi asosiy masalasi, dinamikaning teskari-ikkinchi masalasi.

19.3§ O‘lchov birliklari.

Muammo: Mexanik harakatni kuzatib borish uchun, moddiy nuqta bosib o‘tgan masofa, vaqt va unga ta’sir etayotgan kuchni aniqlash uchun, ma’lum o‘lchov birliklari tanlab olish lozim bo‘ladi. Aks holda jismlarning harakatlarini bir-biridan farqlab bo‘lmaydi.

Barcha mexanik qiymatlarni o‘lchash uchun bir birlariga bog‘liq bo‘lmagan uchta o‘lchov birliklari etarli ekan. Ulardan ikkitasi uzunlik va vaqt o‘lchovlari. Uchinchisi o‘lchov birligi sifati yoki massani yoki kuchni tanlab olish mumkin. Ular (19.1) formula orqali bir-birlariga bog‘liq bo‘lganligi uchun, ularni ixtiyoriy ikkita o‘lchov birligi sifatida qabul qilib bo‘lmaydi. Shu sababli mexanikada bir-biridan mutloq farq qiluvchi o‘lchov sistemasi bo‘lishi mumkinligi kelib chiqadi.

Qadimda bizning halqimiz og‘irlik birligi sifatida pud, qadoq va botmondan iborat qiymatlardan foydalanganlar. 1 pud (put) novvosning bitta oyog‘ini og‘irligi, qaadoq pudning 40 dan bir qismi, botmon esa 5 pudga teng bo‘lgan.

B i r i n c h i t i p b i r l i k s i s t e m a s i. Bu sistemada, asosiy birlik sifatida uzunlik vaqt va massa qabul qilingan, kuchning o‘lchov birligi esa ularning hosilasidan kelib chiqadi.

Bunday sistemaga *fizik qiymatlarning xalqaro o‘lchov sistemasi* (SI) kiradi va unda mexanik qiymatlarning asosiy o‘lchov birliklari sifatida metr (m), kilogramm massa (kg) va sekund (s) qabul qilingan.

Kuchning o‘lchov birligi esa hosilaviy qiymat bo‘lib, -1 Nyuton (N) deb belgilangan; 1N - shunday kuchki, uning ta’sirida 1 kg massali jism 1 m/s^2 tezlanish oladi ($1N=1kg\cdot m/s^2$). 1 m, 1 kg va 1 s qanday qiymat ekanligi fizika fanida batafsil ko‘rib chiqilgan.

1961 yilda qabul qilingan halqaro birliklar sistemasi (SI) ancha afzal hisoblanganligi uchun, biz shu o‘lchov sistemasidan foydalanamiz.

I k k i n c h i t i p b i r l i k s i s t e m a s i. Bu sistemada, asosiy birlik sifatida uzunlik vaqt va kuch qabul qilingan, massaning o‘lchov birligi esa ularning tegishli hosilalaridan kelib chiqadi.

Bunday o‘lchov sistemasi texnikada keng tarqalgan MKGSS sistemasi bo‘lib, unda mexanik qiymatlarning asosiy o‘lchov birliklari sifatida metr (m), kilogramm kuch (kG) va sekund (s) qabul qilingan. Massaning o‘lchov birligi esa hosilaviy qiymat bo‘lib, -1 $kG\cdot s^2/m$ deb belgilangan; ya’ni 1 kG kuch ta’sirida 1 m/s^2 tezlanish oladigan massa hisoblangan.

Nemis olimi G.Leybnits (1646-1716) Petr I ning iltmosiga ko‘ra, o‘ta qoloq (hamda qashshoq) Rossiya uchun maorif va mamlakatni boshqarish loyihasini ishlab chiqdi va Petr I o‘sha davrda davlatni jahonga tanilgan Evropa olimlarning maslahatlariga tayangan holda boshqarib, tez yillarda Rossiyani imperiya darajasiga ko‘tardi.

Germaniyaning o‘zida esa Fanlar akademiyasi 24 yanvar 1744 yili ochilgan.

SI o‘lchov sistemasi bilan MKGSS o‘lchov sistemalari orasidagi bog‘lanish quyidagicha: 1kG=9,81N yoki 1N=0,102 kG.

Mexanikada o‘lchov (razmer) va o‘lchovning birligi degan tushunchalar ham bo‘lib, ularni bir-birlari bilan almashtirib yubormaslik lozim. O‘lchov berilgan qiymatning mazmunini bildirib, u faqat tenglamaning ko‘rinishidan aniqlanadi. O‘lchov birligi esa asosiy qiymatlarning tanlab olinishiga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, agar uzunlik vaqt va massani tegishlicha L, T va M harflari bilan belgilasak, tezlikning o‘lchovi L/T bo‘ladi, (ya’ni uzunlikni vaqtga nisbati tezlikning o‘lchovi), o‘lchov birligi esa 1 m/c, 1km/soat va h. k. bo‘ladi.

Tayanch iboralar: o‘lchov, o‘lchov sistemasi, halqaro o‘lchov sistemasi-SI, texnik o‘lchov sistemasi-MKGSS, nyuton, metr, sekund, kilogramm.

19.4§ Kuchlarning asosiy ko‘rinishlari.

Muammo: Shu mavzugacha, biz kuchlarni yo‘nalishi va qiymati jihatidan harakat davomida o‘zgarmas qiymat deb hisoblagan edik. Aslida, kuchlar harakat davomida, ham yo‘nalish, ham son qiymati o‘zgaruvchan bo‘lishi mumkin. O‘zgaruvchan kuchlar, vaqtning, tezlikning yoki moddiy nuqtaning koordinatalariga bog‘liq ravishda o‘zgarish qonuniyatlari qanday bo‘lishi mumkin ekanligi o‘rganiladi.

Dinamika masalalarini echishda biz asosan quyidagi o‘zgarmas va o‘zgaruvchan kuchlardan foydalanamiz (qoidaga ko‘ra kuchlarning o‘zgarish qonuniyatlari, tajriba yo‘li bilan aniqlanadi).

O g‘ i r l i k k u ch i. Bu erning yaqinidagi fazoda, barcha jism (massa)lariga ta’sir etuvchi o‘zgarmas kuch $-\overline{P}$. Og‘irlik kuchining moduli jismning og‘irligiga teng bo‘ladi.

Og‘irligi 1 N bo‘lgan yukni, bozordagi tarozida tortsangiz, necha garammni ko‘rsatadi?

Tajribalar orqali aniqlandiki, og‘irlik kuchi $\overline{P}$ ta’sirida (uncha katta bo‘lmagan balandlikdan, havosiz bo‘shliqda) Erga erkin tushib kelayotgan har qanday jismning tezlanishi har doim bir xil bo‘lib *erkin tushish tezlanishi*, ba’zida esa *og‘irlik kuchining tezlanishi*[4] deb ataladi va $\overline{g}$-vektori orqali belgilanadi. U holda (19.1’) tenglamadan

$$R=mg \quad \text{yoki} \quad m=R/g \qquad (19.3)$$

Bu tengliklar orqali jismning massasi aniq bo‘lsa, uning og‘irligini (unga ta’sir etayotgan og‘irlik kuchining modulini) yoki og‘irligi ma’lum bo‘lsa, uning massasini aniqlash mumkin ekan. Jismning og‘irligi yoki og‘irlik kuchi, g -qiymat kabi Erning geografik kengligi va dengiz sathidan balandligiga bog‘liq ravishda ma’lum miqdorda farqlanadi; jismning massasi esa o‘zgarmas qiymat hisoblanadi.

I sh q a l a n i sh k u ch i. Sirpanib harakatlanuvchi jismlarning (suyuq yog‘lar ishlatilmagan sirtlar orasidagi) yuzalariga ta’sir etuvchi ishqalanish kuchini qisqacha shunday deb ataladi va u statika qismida (Kulon qonuni) batafsil bayon etilgan edi. Uning moduli quyidagi tenglama orqali aniqlanadi,

$$F=f\cdot N \qquad (19.4)$$

[4] Jismlarning erkin tushishdagi harakat qonuni Galiley tomonidan ochilgan. Erkin tushishdagi tezlanish g-ning son qiymati erning turli joylarida turlicha bo‘ladi; uning qiymati geografik kenglik va dengiz sathidan qancha balandlikda ekanligiga bog‘liq bo‘ladi. Moskvaning (dengiz sathidagi) kengligida $g=9{,}8156\ m/s^2$.

bu erda f -ishqalanish koeffitsienti bo‘lib, uni o‘zgarmas deb hisoblash qabul qilingan. N -normal reaktsiya.

T o r t i l i sh k u ch i. Bu kuch, Nyuton tomonidan kashf etilgan kuch bo‘lib, butun olam tortilish qonuniga asosan ikkita moddiy jismlarning bir birlarini tortilish kuchlaridan iboratdir. Tortilish kuchi masofaga bog‘liq bo‘lib, oralaridagi masofa r -ga teng bo‘lgan va massalari m_1, m_2 bo‘lgan ikkita moddiy nuqtalarning o‘zaro tortilish kuchi, quyidagi tenglik orqali aniqlanadi,

$$F=fm_1m_2/r^2 \qquad (19.5)$$

bu erda f -gravitatsion doimiy qiymat (SI sistemasida $f=6{,}673\cdot10^{-11}$ $m^3/kg\cdot s^2$).

E l a s t i k l i k k u ch i. Bu kuch ham masofaga bog‘liq holda o‘zgaradi. Uning miqdori Guk qonuniga binoan aniqlanadi, unga binoan kuchlanish (kuchni yuza birligiga nisbati) deformatsiyaga to‘g‘ri proportsional bo‘ladi. Masalan, prujinaning elastiklik kuchining qiymati, quyidagicha aniqlanadi

$$F=c\cdot\lambda \qquad (19.6)$$

bu erda λ-prujinaning uzayishi (yoki siqilishi); s -prujinaning qattiqlik koeffitsienti (SI sistemasida N/m bilan o‘lchanadi).

Qadimda uzunlik birligi sifatida o‘sha yurtning podshohini (Qadimiy Misrda Firavnning) oyoq izini uzunligi tanlab olingan. Masalan Angliyada hozirda ham foydalanilayotgan 1 fut (oyoq izi)ning uzunliti 0,3048 metrga teng, ya’ni taxminan 30 sm ga teng. «Dyuym» so‘zi ham «bosh barmoq» degan ma’noni anglatib, bosh barmoqning eniga teng bo‘lib 0,0254 metrni yoki 2,54 sm ni tashkil qiladi, ya’ni «dyuym» «fut»ning taxminan 1/12 qismini tashkil qiladi

Y’ p i sh q o q i sh q a l i sh k u ch i. Bu kuch jismning tezligiga bog‘liq bo‘lib, yopishqoq suyuq muhitdagi (yoki suyuq yog‘langan sirtlarda) harakatlarda paydo bo‘ladi va quyidagicha aniqlanishi mumkin

$$R=\mu\cdot v \qquad (19.7)$$

bu erda v- jismning tezligi, μ-yopishqoq qarshilik koeffitsienti. (19.7) formulani Nyutonning yopishqoq ishqalish qonuni asosida aniqlash mumkin.

A e r o d i n a m i k (g i d r o d i n a m i k) q a r sh i l i k k u ch i. Bunday kuch ham tezlikka bog‘liq bo‘lib, havoda yoki suv(suyuqlik)da harakatlanayotgan jismlarga ta’sir etadi. Amalda uning qiymatini quyidagi tenglama orqali aniqlanadi,

$$R=0{,}5\cdot c_x\cdot\rho\cdot S\cdot v^2 \qquad (19.8)$$

bu erda ρ - muhitning zichligi; S - jism shaklining harakat yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikka bo‘lgan proektsiyasining yuzasi

(midel yuzasi); s_x-qarshilik koeffitsienti, o‘lchovsiz birlik bo‘lib uning qiymatini jismning shakliga va harakat yo‘nalishiga qarab qanday holatda ekanligiga bog‘liq holda tajribalar orqali aniqlanadi;

I n e r t v a g r a v i t a ts i o n m a s s a l a r. Berilgan jismning massasini eksperimental usulda aniqlash uchun (19.1) formulaga asoslanish mumkin, bu tenglamada massa inertlik xossasi bo‘yicha ishtirok etmoqda, shuning uchun uni inert massa deb ataladi. Lekin uni (19.5) formula orqali aniqlasak, bu tenglamada jismning gravitatsion xossasi bo‘yicha ishtirok etadi, shu sababli uni gravitatsion (yoki og‘ir) massa deb ataladi.

Inert va gravitatsion massalar bir narsa deb qabul qilinmagan bo‘lsa ham, ularning qiymatlari bir-birlariga juda yuqori aniqlikda teng ekan (jahon fiziklarining 1971 yilda o‘tkazgan tajribalari natijasida ularning farqi atigi 10^{-12} ekanligi aniqlandi). Ana shu eksperimental tasdiqlangan fakt, ekvivalentlik printsipi deb ataladi. Bu printsipni Eynshteyn[5] o‘zining nisbiylikning umumiy nazariyasiga asos qilib olgan edi (t o r t i l i s h n a z a r i y a s i).

Yuqoridagilarga asoslanib, mexanika fanida massani jismning inertlik o‘lchovi va gravitatsion xossasini aniqlovchi «*massa*» degan yagona termin ishlatiladi.

Tayanch iboralar: o‘zgaruvchan kuchlar, elastiklik kuchi, ishqalanish kuchi, massalarni o‘zaro tortilish kuchi, aerodinamik (gidrodinamik) qarshilik kuchi, gravitatsion kuch, midel yuza, Inert va gravitatsion massalar, ekvivalentlik printsipi.

19.5§ Moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamalari.

Muammo: Yuqorida biz ko‘rib o‘tgan mavzular faqat, harakatni qanday qonuniyatlar orqali aniqlanishi haqida gapirilgan edi. Faraz qilaylik biz texnikada uchrab turadigan aniq bir masala berilgan bo‘lsin. Shu masalani echishni nimadan boshlash lozimligi, qanday hisob sistemalaridan foydalanish maqul ekanligini ko‘rib o‘tamiz.

Moddiy nuqta dinamikasi masalalarini echish uchun quyidagi ikkita tenglamalar sistemalarining biridan foydalanamiz.

[5] Albert Eynshteyn (1879-1955y.) -buyuk fizik-olim, nisbiylik (relyativistik mexanika)ning maxsus nazariyasini va umumiy nisbiylik nazariyasining asoschisi.

Dekart koordinatalaridagi tenglamalar. Kinematika qismidan ma’lumki nuqtaning to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalaridagi harakati quyidagi tenglamalar orqali beriladi:

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t) \qquad (19.9)$$

Dinamikaning asosiy masalalari shundan iboratki, nuqtaning harakatini bilgan holda, ya’ni (19.9) formula aniq bo‘lsa, shu nuqtaga ta’sir etuvchi kuch aniqlanadi. Yo’ki teskarisi, ya’ni nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlar ma’lum bo‘lsa uning harakat qonuni, aniqrog‘i (19.9) tenglamalar aniqlanadi. Shu sababli, nuqta dinamikasi masalalarini echish uchun shu nuqtaning *x, y, z* -koordinatalari bilan unga ta’sir etuvchi kuch (kuchlar)ni bog‘lovchi tenglamalar kerak bo‘ladi. Bunday tenglamalarni dinamikaning ikkinchi (asosiy) qonuni orqali olinadi.

O*xyz* inertsial hisob sistemasida joylashgan moddiy nuqtaning $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, ..., \bar{F}_n$ kuchlar ta’siridagi harakatini ko‘rib o‘taylik. (19.2) tenglamaning, ya’ni $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$ - ning ikkala tomonini *x, y, z* -koordinata o‘qlariga proektsiyalaymiz va $a_x=d^2x/dt^2$, $a_y=d^2y/dt^2$, $a_z=d^2z/dt^2$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz} \qquad (19.10)$$

yoki vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosilalarni ikkita nuqta orqali belgilasak,

$$mx'' = \sum F_{kx}, \quad my'' = \sum F_{ky}, \quad mz'' = \sum F_{kz} \qquad (19.10')$$

Mana shular bizga kerak bo‘lgan tenglamalar sistemasidan iborat bo‘lib, *ularni nuqtaning to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalaridagi harakatining differentsial tenglamalari* deb ataladi. Nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar vaqt t-ga, nuqtaning o‘rni, ya’ni uning *x, y, z* koordinatalariga va tezligiga, ya’ni $v_x=x'$, $v_y=y'$, $v_z=z'$ -larga bog‘liq holda o‘zgarishi mumkin ekanligi sababli, (19.10) tenglamalar sistemasidagi har bir tenglamaning o‘ng tomonlari shunday o‘zgaruvchilarning funktsiyalaridan iborat bo‘lishi mumkin, ya’ni t, *x, y, z,* x', y', z'-lar birgalikda ishtirok etishlari mumkin.

Uch yoqli tabiiy o‘qlarga proektsiyalardan iborat tenglamalar. Bunday tenglamalarni hosil qilish uchun $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$ - tenglikni ikkala tomonini Mτ*mb*- o‘qlarga proektsiyalaymiz, ya’ni nuqtaning traektoriyasiga urinma - Mτ o‘qqa, bosh normal - M*n* o‘qqa va binormal - M*b* o‘qqa (O*xyz*-o‘qlar, traektoriyalarga nisbatan harakat

qilmoqda) proektsiyalaymiz. U holda $a_\tau=dv/dt$, $a_n=v^2/\rho$, $a_b=0$ ekanligiga asoslanib, quyidagilarni yozamiz,

$$m\frac{dv}{dt}=\sum F_{k\tau}, \qquad m\frac{v^2}{\rho}=\sum F_{kn}, \qquad 0=\sum F_{kz} \tag{19.11}$$

bu erdagi $v=ds/dt$, (19.11) tenglamalar sistemasi *moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamasining uch yoqli tabiiy o‘qlardagi proektsiyalari* hisoblanadi.

19.6§. Dinamikaning birinchi masalasini echish (harakat qonuniga binoan kuchlarni aniqlash).

Agar moddiy nuqtaning tezlanishi berilgan bo‘lsa, unga ta’sir qilayotgan kuch yoki bog‘lanish reaktsiyasi (19.1) va (19.2) formulalar orqali darhol aniqlanadi. Lekin bog‘lanishlar reaktsiyalarini aniqlash uchun qo‘shimcha ravishda aktiv kuchlar ma’lum bo‘lishi kerak. Agarda tezlanish bevosita berilmagan, lekin nuqtaning harakat qonuni ma’lum bo‘lsa, u holda kuchni aniqlash uchun (19.10) va (19.11) formulalardan foydalanish mumkin.

19.1 masala. Og‘irligi R bo‘lgan havo shari *a* tezlanish bilan pastga tushmoqda. Havo sharini xuddi shunday tezlanish bilan yuqoriga ko‘tarilishi uchun qanday miqdordagi Q yuk (ballast)ni tashlab yuborish kerakligi aniqlansin.

E ch i sh. Pastga tushayotgan havo shariga og‘irlik kuchi $\overline{F}$ va ko‘tarish kuchi $\overline{F}$ ta’sir etadi (19.1,a shakl). (19.2) tenglamani vertikal o‘qqa proektsiyalab, quyidagini yozamiz,

$$(R/g)a=R-F$$

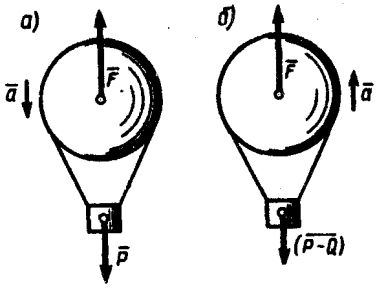
Ballast tashlab yuborilgandan keyin (19.1, b shakl) sharning og‘irligi R-Q ga teng bo‘ladi, lekin ko‘tarish kuchi avvalligicha saqlanib qoladi. U holda shar yuqoriga qarab harakatlanmoqda deb hisoblab, quyidagi tenglamani yozamiz,

$$(R-Q)\cdot a/g= F-(R-Q)$$

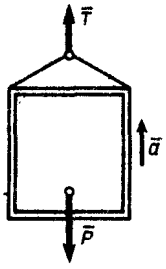
Ushbu tenglamalardan noma’lum ko‘taruvchi kuch F -ni yo‘qotib yuborsak, Q kuchining qiymatini aniqlaymiz, ya’ni

$$Q=2R/(1+g/a).$$

19.2 masala. Og‘irligi R bo‘lgan lift (19.2 shakl) *a* tezlanish bilan yuqoriga ko‘tarilmoqda. Trosning tortilish kuchi aniqlansin.



19.1 shakl



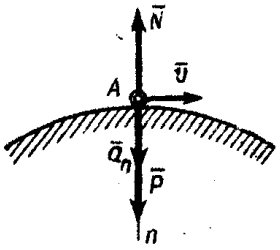
19.2 shakl

E ch i sh. Liftga og‘irlik kuchi $\bar{F}$ va trosning reaktsiya kuchi $\bar{T}$ ta’sir etmoqda. (19.2) tenglamaning vertikal o‘qqa proektsiyasidan iborat tenglama tuzamiz, $(R/g)\cdot a=T-R$, bundan

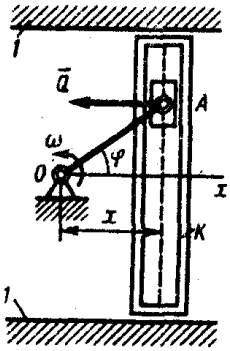
$$T=R(1+a/g)$$

Agar lift shunday tezlanish bilan pastga tushib kelayotgan bo‘lsa, u holda trosning tortilish kuchi $T_1=R(1-a/g)$ ga teng bo‘ladi.

19.3 masala. Do‘ng ko‘prikning A nuqtasidagi radiusi R (19.3 shakl) ga teng. Massasi m -ga teng bo‘lgan va v - tezlik bilan ketayotgan avtomobil ko‘prikning A nuqtasida unga qanday kuch bilan bosadi.



19.3 shakl



19.4 shakl

E ch i sh. Ko‘prikning A nuqtasida avtomobilning normal tezlanishi $a_n=v^2/R$ bo‘ladi. Ko‘prikka undan tashqari avtomobilning og‘irlik kuchi $P=m\bar{g}$ va A nuqtaning reaktsiya kuchi $\bar{N}$ ta’sir etadi. U holda (19.2) tenglamaning normal o‘qdagi proektsiyasi, yoki (19.11) tenglamaning ikkinchi formulasini qo‘llash natijasida,

$$mv^2/R=mg-N \quad \text{bundan} \quad N=m(g-v^2/R)$$

Avtomobilning ko‘prikka bosim kuchi moduli bo‘yicha N ga teng bo‘lib, pastga qarab yo‘naladi.

19.4 masala. Uzunligi l bo‘lgan OA krivoship o‘zgarmas ω_1 burchakli tezlik bilan O nuqta atrofida aylanishi natijasida K kulisani 1,1 yo‘naltiruvchilar bo‘yicha surmoqda. (19.4 shakl). Ishqalanish kuchini e’tiborga olmasdan A polzunning kulisaga ta’sir kuchi Q aniqlansin. Kulisaning og‘irligi R ga teng.

E ch i sh. *Ox* koordinata o‘qlarini o‘tkazamiz. U holda kulisaning holati $x=l\cdot\cos\varphi$ koordinata orqali aniqlanadi, $\varphi=\omega t$ bo‘lgani uchun $x=l\cdot\cos\omega t$ bo‘ladi. Kulisaning ushbu harakat qonunini bilgan holda

(19.10’) tenglamalarning birinchisidan foydalanamiz. Ushbu koordinata *x* -dan vaqt bo‘yicha ikki marta hosila olamiz,

$$x'' = -\omega^2 \cdot l \cdot \cos \omega t = -\omega^2 \cdot x$$

Q_x=-Q bo‘lgani uchun,

$$-(R/g)\cdot\omega^2\cdot x=-Q \qquad Q=(R/g)\cdot\omega^2\cdot x$$

bo‘ladi. Demak, polzunning kulisaga ko‘rsatadigan bosim kuchi, kulisaning O markazigacha bo‘lgan *x* masofasiga proportsional ravishda o‘zgarar ekan.

Tayanch iboralar: Dekart o‘qlari, tabiiy uch yoqli o‘qlar, harakatni differentsial tenglamalari, dinamikaning birinchi asosiy masalasi.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etishga qaratilgan uslubiy ko‘rsatmalar:

Bizni o‘rab turgan koinot inertsial sitemadan iborat ekan.

1. Shu inertsial sistemada joylashgan ixtiyoriy qattiq jismlar, ularga ta’sir etayotgan kuchlarning bosh vektori nolga teng bo‘lsa, ularning tezlik vektorlari o‘zgarmas bo‘lib, cheksiz vaqt mobaynida o‘shanday tezlik bilan harakatlarini davom etaverar ekanlar. Masalan, Quyosh sistemasi, o‘zining 9 ta planetasi va bir qancha osmon jismlari bilan birgalikda, o‘zining o‘zgarmas tezligi bilan qilayotgan harakatini cheksiz davom etdiraverar ekan.
2. Aristotelg‘ (Arastu) tomonidan aytilgan fikr, ya’ni har qanday harakatlanayotgan jism, o‘z harakatini davom etdirishi uchun, uni harakatlantiruvchi kuch albatta zarur ekanligi haqidagi noto‘g‘ri fikr G.Galiley tomonidan inkor etildi.
3. Ushbu fikr, ya’ni agar biror jismga tashqaridan ta’sir qilayotgan kuchlarning vektor yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, u jism o‘zining to‘g‘ri chiziqli o‘zgarmas tezlik bilan qilayotgan harakati cheksiz davom etaverishligi, dinamikaning birinchi qonuni - inertsiya qonuni deb qabul qilindi.
4. Agarda inertsial sistemada (masalan bizning quyosh sistemamizda) joylashgan ixtiyoriy jismga tashqaridan ta’sir etayotgan kuchlarning bosh vektori (yig‘indisi) nolga teng bo‘lmasa, ushbu jism o‘sha bosh vektor-kuch yo‘nalishi bo‘yicha tezlanish olib, o‘z harakatini tegishli ravishda o‘zgartirishi aniqlandi
5. Bizning koinotimizda harakatlanayotgan qattiq jismlarning harakatlari, dinamikaning ikkinchi qonuni, ya’ni Nyutonning

qonuni bilan sodir bo‘lishi tasdiqlandi. Dinamikaning ikkinchi qonuni, dinamikaning asosiy qonuni leb atala boshlandi.

6. Dinamikaning asosiy qonuni, harakatning differentsial tenglamasi ekanligi aniqlandi, ya’ni har qanday jismning harakati faqat differentsial tenglamalar orqaligina ifodalanishi mumkin ekanligi isbotlandi.
7. Agarda birorta jismning harakat qonuni bizga ma’lum bo‘lsa, unga ixtiyoriy vaqtda ta’sir etayotgan kuchning moduli va yo‘nalishini aniq hisoblashimiz mumkin ekanligi isbotlandi.
8. Yuqoridagilarga asosan, shu narsa isbot bo‘ldiki, har qanday jismning (masalan, uchayotgan o‘rdakka otilgan o‘qning, parvoz qilayotgan samolyotga otilgan raketaning, uzilib tushayotgan olmaning, osmondan tushayotgan meteorit, qor va yomg‘irning, yulduzlarning, planetalarning (ularning tabiiy va sun’iy yo‘ldoshlarining) harakat qonunlarini oldindan va juda yuqori aniqdikda hisoblashimiz mumkin ekan.
9. Demak, har qanday jismlarning mexanik harakatlarining qonuniyatlarini, insonlar tomonidan oldindan hisoblash mumkin ekan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Dinamika qismi nimani o‘rganadi?
2. Dinamikaning birinchi qonuni nimadan iborat?
3. Havosiz bo‘shliqda jism harakatlana olishi mumkinmi?
4. Dinamikaning asosiy qonunini ta’riflab bering?
5. Dinamikaning uchinchi qonunini ta’riflab bering?
6. Inertsial hisob sistemasi nimadan iborat?
7. SI halqaro o‘lchov sistemasi nima?
8. MKGSS o‘lchov sistemasi nima?
9. Kuchlarning asosiy ko‘rinishlari qaysilardan iborat?
10. Harakatning differentsal tenglamasini Dekart o‘qlardagi ko‘rinishini yozib bering?
11. Harakatning differentsal tenglamasini tabiiy uch yoqli o‘qlardagi ko‘rinishini yozib bering?
12. Dinamikaning birinchi asosiy masalasini nimadan iborat?

Mavzuni mustahkamlash uchun 19-ilovadagi masalalarni mustaqil echishni tavsiya etamiz.

20 – Ma’ruza

Mavzu: Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi. Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakati. Moddiy nuqtaning egri chiziqli harakati. Masala.

REJA:

1. Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakatida, dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini echish.
2. Masalalar echish tartibi.
3. Muhit (havo) qarshiligi ostidagi jismning pastga tushishi.
4. Nuqtaning egri chiziqli harakatida dinamikaning asosiy masalasini echish.

Muammo: Dinamikaning asosiy qonuni bitta (2) vektor tenglamadan iborat bo‘lganligi uchun, ular orqali faqat bitta nomalumni aniqlash mumkin xolos, yani agar moddiy nuqtaning massasi va uning harakat qonuni berilgan bo‘lsa, shu moddiy nuqtaga tasir etuvchi kuchlarning bosh vektorini aniqlash mumkin. Y’ki shu moddiy nuqtaga tasir etayotgan kuchlar sistemasi va uning massasi malum bo‘lsa, shu moddiy nuqtaning harakat qonuni aniqlanadi. Quyida shunday masalalarni echish haqida ko‘rsatmalar beriladi.

20.1§. Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakatida, dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini echish.

Agarda moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuchning (yoki unga ta’sir kuchlarning teng ta’sir etuvchisini) yo‘nalishi o‘zgarmas bo‘lsa va boshlang‘ich tezlik nol bo‘lsa yoki uning yo‘nalishi kuchga parallel bo‘lsa, uning harakati to‘g‘ri chiziqli bo‘ladi.

Agarda to‘g‘ri chiziqli harakatdagi nuqtaning yo‘nalishi bo‘yicha *Ox* koordinata o‘qini yo‘naltirsak, u holda moddiy nuqtaning harakati (19.10) formula orqali aniqlanadi, ya’ni

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum F_{kx} \quad \text{yoki} \quad mx''=\sum F_{kx} \tag{20.1}$$

(20.1) tenglama, *to‘g‘ri chiziqli harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Ba’zi hollarda buni birinchi tartibli hosilalardan iborat bo‘lgan ikkita tenglamalar sistemasi bilan almashtirish mumkin bo‘ladi,

$$m\frac{dv_x}{dt}=\sum F_{kx} \quad \text{va} \quad \frac{dx}{dt}=\mathrm{v_x} \tag{20.2}$$

Agarda masalaning shartiga ko‘ra, tezlik vaqtga bog‘liq emas, balki uning *x* koordinatasiga (yoki kuchning o‘zi *x*- ga) bog‘liq holda aniqlash zarur bo‘lsa, u holda (20.2) tenglamaning argumenti *x* - ga bog‘liq bo‘ladi,

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{dv_x}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv_x}{dx}\cdot v_x$$

u holda (20.2) formula quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$mv_x\cdot\frac{dv_x}{dx}=\sum F_{kx},\qquad \frac{dx}{dt}=v_x \tag{20.3}$$

Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini echish shundan iborat bo‘ladiki, moddiy nuqtaga qo‘yilgan kuchlar ma’lum bo‘lsa, uning harakat qonunini, ya’ni *x=f(t)* ni aniqlanadi. Buning uchun tegishli differentsial tenglamani integrallash lozim bo‘ladi. (20.1) tenglamaning o‘ng tarafidagi kuchlar vaqt, t -ga, nuqtaning holatiga yoki uning tezligiga, ya’ni *x* - ga va $v_x=x'$ -ga bog‘liq holda o‘zgarishi mumkin. Shu sababli umumiy holda (20.1) tenglama matematik nuqtai nazardan qaralganda $mx''=F(t,x,x')$ ko‘rinishdagi 2 tartibli differentsial tenglamadan iborat bo‘ladi.

Agar muqim (konkret) masala uchun tuzilgan (20.1) differentsial tenglamani integrallash mumkin bo‘lsa, u holda echimda ikkita (o‘zgarmas qiymatlar) S_1 va S_2 lardan iborat interal doimiylari paydo bo‘ladi va (20.1) tenglamaning *umumiy echimi* quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi,

$$x=f(t, C_1, C_2) \tag{20.4}$$

Har-bir muqim masalaning echimini oxiriga etkazish uchun, S_1 va S_2 integral doimiylarini aniqlash lozim bo‘ladi. Buning uchun *boshlang‘ich shartlar*dan foydalaniladi.

Har qanday harakatni o‘rganishni *boshlang‘ich moment* deb ataladigan qandaydir ma’lum vaqtdan boshlanadi. Harakat davomidagi o‘tgan vaqtni shu t=0s momentdan boshlab o‘lchanadi. Amalda berilgan kuchlar ta’sirida boshlangan vaqtni, boshlang‘ich daqiqa, deb qabul qilinadi. Boshlang‘ich daqiqadagi nuqtaning dekart (yoki tabiiy) koordinatalaridagi o‘rnini *boshlang‘ich holat* deb ataladi, nuqtaning shu daqiqadagi tezligini, *boshlang‘ich tezlik* deb ataladi. (t=0s vaqtda boshlang‘ich tezlik nolga teng bo‘lmasligi mumkin, chunki nuqta inertsiyasi bilan harakatlanayotgan bo‘lishi yoki boshqa kuchlar ta’sirida olgan tezligi bilan harakatlanayotgan bo‘lishi mumkin). Demak, dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini echish uchun, berilgan

kuchlardan tashqari, nuqtaning t=0s vaqtdagi boshlang‘ich holati va boshlang‘ich tezligi[6] aniq bo‘lishi shart ekan.

To‘g‘ri chiziqli harakatdagi boshlang‘ich shartlar quyidagi ko‘rinishda beriladi

$$t=0 \text{ vaqtda } x=x_0, \quad v_x=v_0. \text{ bo‘ladi} \qquad (20.5)$$

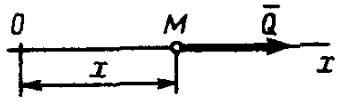
Boshlang‘ich shartlarga asoslanib, S_1 va S_2 integral doimiylarning muqim qiymatlari aniqlanadi va ular yordamida nuqtaning harakat qonuni hisoblangan (20.1) tenglamaning quyidagi ko‘rinishdagi xususiy echimi aniqlanadi,

$$x=f(t, x_0, v_0) \qquad (20.6)$$

Yuqorida aytilgan barcha fikrlarni quyidagi sodda bir masalada ko‘rib chiqamiz:

20.1 masala. Massasi m -ga teng bo‘lgan moddiy nuqta, moduli va yo‘nalishi o‘zgarmas bo‘lgan $\bar{Q}$ - kuch ta’sirida harakat qilmoqda (20.1 shakl). (20.5) boshlang‘ich shartlarga asosan, nuqtaning harakat qonuni aniqlansin.

E ch i sh. (20.2) ko‘rinishdagi differentsial tenglama tuzamiz va $Q_x=Q$ ekanligi uchun



20.1 shakl.

$$m\frac{dv_x}{dt}=Q$$

bo‘ladi. Lekin Q=const bo‘lgani uchun tenglamaning ikkala tarafini dt - ga ko‘paytiramiz va uni integrallab

$$v_x=(Q/m)t+C_1 \text{ ni olamiz.} \qquad (a)$$

$v_x=dx/dt$ bo‘lgani uchun, (a) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi

$$\frac{dx}{dt}=(Q/m)t+C_1$$

ushbu tenglamaning ikkala tarafini dt - ga ko‘paytiramiz va uni yana bir marta integrallaymiz, natijada

$$x=(Q/2m)t^2+C_1t+C_2 \qquad (b)$$

ni hosil qilamiz. Ushbu natija bu masalaning (20.1) tenglamasining (20.4) ko‘rinishdagi umumiy echimi hisoblanadi.

Endi berilgan boshlang‘ich (20.5) shartlarga ko‘ra S_1 va S_2 integral doimiylarining muqim qiymatlarini aniqlaymiz. (a) va (b) echimlar ixtiyoriy vaqt uchun o‘rinli bo‘lishi kerak, shu jumladan t=0s bo‘lganda

[6] Ba’zi masalalarda, integral doimiylarini boshlang‘ich shartlarni o‘rniga *chegaraviy shartlar* deb ataluvchi qiymatlar orqali ham aniqlanish mumkin bo‘ladi. Masalan vaqtning «chegaraviy» $[t_1,t_2]$ intervaldagi $t=t_0$ da $x=x_0$, hamda $t=t_1$ da $x=x_1$ kabi bo‘lishi mumkin. Bunday «chegaraviy masalalar» deb ataluvchi masalalarning tegishli xossalari keyingi mavzularda ko‘rib o‘tiladi.

ham. Shuning uchun (a) va (b) lardagi t -ni o‘rniga nol, v_x va x ni o‘rniga v_0 va x_0 -larni qo‘yamiz, u holda

$$v_0=S_1 \text{ va } x_0=S_2$$

Shu tengliklar orqali boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi S_1 va S_2 larning qiymatlari aniqlandi. S_1 va S_2 larning ushbu qiymatlarini (b) tenglamaga qo‘ysak nuqtaning (20.6) ko‘rinishdagi harakat qonunini aniqlaymiz:

$$x=(Q/2m)t^2+ v_0t+ x_0 \qquad (v)$$

Oldindan ham aniqlash mumkin bo‘lganday, agar Q=const bo‘lsa a=Q/m=const bo‘ladi va (v) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, nuqta o‘zgarmas kuch ta’sirida tekis o‘zgaruvchan harakat qilar ekan. Xususiy holda og‘irlik kuchi ta’sirida nuqta xuddi shunday qonun bo‘yicha harakat qiladi. U holda (v) tenglikdagi Q/m=g bo‘ladi va Ox o‘qi vertikal pastga yo‘nalgan bo‘ladi.

Tayanch so‘zlar: ikkinchi asosiy masala, integral domiylari, differentsial tenglama, to‘zg‘ri chiziqli harakat.

20.2§ Masalalar echish tartibi

Muammo: Nazariy mexanikadagi masalalar asosan og‘zaki holda beriladi. Ularni echishni nimadan boshlash lozim ekanligini o‘rganamiz. Masalalar qanday berilishiga bog‘liq holda, har xil yo‘llar mavjud, lekin hamma masalalarni echishda albatta bajarilishi lozim bo‘lgan amallar nimalardan iborat ekanligi haqida so‘z yuritiladi.

Nuqta dinamikasining masalalarini echish tegishli differentsial tenglamalarni integrallash yo‘li bilan amalga oshiriladi va quyidagi ikkita amaldan iborat bo‘ladi.

1. Harakatning differentsial tenglamalarini tuzish. Agar nuqta to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lsa, differentsial tenglamani tuzishda:

a) hisob boshini tanlab olinadi (qoida bo‘yicha, uning boshini nuqtaning boshlang‘ich holatiga ko‘chirib qo‘yiladi) va traektoriyasi bo‘ylab harakat tomonga yo‘nalgan koordinata o‘qi o‘tkaziladi; agar nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar ta’sirida birorta holatda u muvozanatini saqlay olsa, koordinata boshini o‘sha statik muvozanat nuqtaga ko‘chirish lozim bo‘ladi;

b) harakatlanayotgan nuqtani traektoriyaning ixtiyoriy holatida tasvirlanadi (lekin $x>0$ va $v_x>0$ bo‘lishi shart; oxirgisi juda ahamiyatli,

chunki nuqtaga qo‘yilgan kuchlarning ichida tezlikka bog‘liq kuchlar ham bo‘lishi mumkin) va nuqtaga qo‘yilgan barcha kuchlar vektor shaklida tasvirlanadi.

v) barcha kuchlarning koordinata o‘qiga proektsiyalarini aniqlaymiz va ularning yig‘indisini differentsial tenglamaning o‘ng tomoniga qo‘yamiz; *hamda o‘zgaruvchan kuchlarni (t, x va v) lar orqali ifodalangan qiymatlarini qo‘yishimiz shart*;

2.Harakatning differentsial tenglamalarini integrallash. Tuzilgan differentsial tenglamalarni ularning ko‘rinishlariga va o‘ng tomonidagi hadlarga bog‘liq ravishda oliy matematika kursidagi usullar yordamida echiladi. Agar nuqtaga qo‘yilgan o‘zgarmas kuchlardan tashqari o‘zgaruvchan kuchlar faqat vaqt t -ga, faqat masofa x -ga yoki faqat tezlik v -ga bog‘liq holda bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqli harakatning differentsial tenglamasini o‘zgaruvchilarni ajratish usuli orqali integrallash mumkin (20.2, 20.3 va 20.4 masalalar). Agar masalaning shartiga ko‘ra faqat tezlikni aniqlash kerak bo‘lsa, (20.1) yoki (20.2) tenglamani bir marta integrallash kifoya qiladi.

3.Integral doimiylarini aniqlash. Integral doimiylarini aniqlash uchun, masalaning shartidan (20.5) ko‘rinishdagi boshlang‘ich shartlarni aniqlab olish lozim. Boshlang‘ich shartlarga ko‘ra integral doimiylarining qiymatlarini qanday aniqlashni 20.1 masalada ko‘rsatib o‘tildi. Integral doimiylarini har bir integrallashdan keyinoq aniqlash ham mumkin.

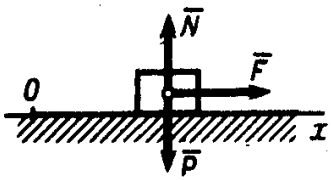
Agar differentsial tenglama o‘zgaruvchilarga ajraladigan ko‘rinishda bo‘lsa, u holda integral doimiylarini kiritmasdan tenglamaning ikkala tomonidan to‘g‘ridan to‘g‘ri aniq integral olish ham mumkin bo‘ladi; bunday usul 20.5 masalada ko‘rsatib o‘tiladi.

4. Izlanayotgan noma’lum qiymatlarni aniqlash va olingan natijalarni tahlil qilish. Olingan natijalarni tahlil qilish, hamda ularning o‘lchovlarini bavosita tekshirish uchun, hamma echimlarni (harflar orqali) umumiy ko‘rinishda yozilishi kerak, so‘ngra ulardagi o‘zgaruvchilarga tegishli son qiymatlarni qo‘yib oxirgi natijalar olinadi.

Yuqorida aytilgan qoidalar egri chiziqli harakatda ham o‘rinli bo‘ladi.

Quyida kuch vaqtga, masofaga va tezlikka bog‘liq bo‘lgan uchta muqim (konkret) masalalarni ko‘rib chiqamiz.

1. **Kuch vaqtga bog‘liq holda o‘zgaradi.**



20.2 shakl.

20.2 masala. Og‘irligi R bo‘lgan yuk muvozanat holatdan boshlab unga qo‘yilgan $\overline{F}$ kuch ta’sirida silliq gorizontal tekislik ustida harakat qilmoqda. $\overline{F}$ kuch vaqtga bog‘liq holda o‘zgaruvchan bo‘lib, uning moduli vaqtga proportsional ravishda o‘zgarib, F=k·t funktsiya orqali aniqlanadi. Yukning harakat qonuni aniqlansin.

E ch i sh. Hisob boshi qilib O nuqtani tanlab olamiz va Ox o‘qini harakat yo‘nalishi bo‘yicha yo‘naltiramiz (20.2 shakl). U holda yukning harakatini boshlang‘ich shartlari t=0 bo‘lganda x=0, v_x=0 bo‘ladi. Yukni o‘qning ixtiyoriy joyida tasvirlaymiz va unga ta’sir etuvchi kuchlar $\overline{F}$, $\overline{P}$ (og‘irlik kuchi) va $\overline{N}$(tekislikning reaktsiyasi)ni vektor shaklida qo‘yamiz. Bu kuchlarning Ox o‘qiga proektsiyalari F_x=F=kt, R_x=0, N_x=0 lardan iborat bo‘ladi. U holda (20.2) differentsial tenglama, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi,

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{dv_x}{dt}=k\cdot t$$

Bu tenglamaning ikkala tarafini dt -ga ko‘paytirib yuborsak, o‘zgaruvchilar darhol ajrab qoladi, so‘ngra uni integrallab,

$$(R/g)v_x=kt^2/2+C_1$$

ni hosil qilamiz. Boshlang‘ich shartlarni qo‘yib S_1=0 ekanligini aniqlaymiz. So‘ngra v_x-ni dx/dt bilan almashtiramiz, ya’ni

$$\frac{dx}{dt}=(kg/2R)t^2$$

Tenglamaning ikkala tomonini dt -ga ko‘paytiramiz va o‘zgaruvchilarni ajratib, yana bir marta integral olamiz, natijada

$$x=(kg/2R)t^3/3+C_2$$

Boshlang‘ich shartlar orqali C_2=0 ekanligini aniqlaymiz va nihoyat yukning harakat qonunini yozamiz,

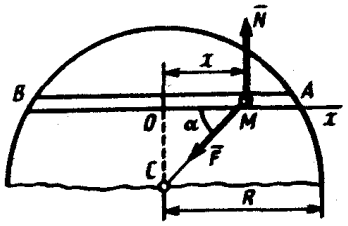
$$x=(kg/2R)t^3/3$$

Shunday qilib, yukning bosib o‘tgan masofasi vaqtning kubiga to‘g‘ri proportsional ekanligini aniqladik.

2. **Kuch masofaga bog‘liq o‘zgaradi.**

20.3 masala Ishqalanish kuchini va havoning qarshiligini hisobga olmagan holda, Erning AV vatari bo‘ylab kavlangan kanalning A

boshidan to oxirgi V nuqtasigacha borishi uchun qancha vaqt sarflanishi aniqlansin (20.3 shakl). Hisoblash ishlarida Erning radiusi R=6370 km deb hisoblansin.



20.3 shakl

E s l a t m a. Tortilish nazariyasida isbot qilinishicha, Erning ichida joylashgan har bir jism Erning markazigacha bo‘lgan r -masofasiga to‘g‘ri proportsional bo‘lgan kuch ta’sirida Erning markaziga tortilib turadi. Erning ustida, ya’ni Erning markazigacha r=R bo‘lgan masofada turgan jismga ta’sir etayotgan kuch og‘irlik kuchi (F=mg)dan iborat bo‘lib, Erning ichidagi jismga ta’sir etuvchi kuch

$$F=(mg/R)r$$

dan iborat bo‘lib, bu erdagi r=MC - M nuqtadan Erning markazigacha bo‘lgan masofa.

E ch i sh. Hisob boshini AV vatarning o‘rtasiga qo‘yamiz (chunki kanalning ichidagi nuqta shu joyda muvozanatda bo‘lishi mumkin bo‘lar edi) va Ox o‘qini OA chizig‘i bo‘ylab yo‘naltiramiz. Agar AV vatarning uzunligini 2a deb hisoblasak, boshlang‘ich shartlar quyidagicha bo‘ladi, ya’ni t=0 bo‘lganda x=a va $v_x=0$ bo‘ladi.

Nuqtaning ixtiyoriy holatida unga $\bar{F}$ va $\bar{N}$ kuchlar ta’sir etadi. Shu sababli

$$\sum F_{kx}=-F\cdot\cos\alpha=-(mg/R)r\cdot\cos\alpha=-(mg/R)x,$$

bo‘ladi, chunki shakldan $r\cdot\cos\alpha=x$ va N=0.

M nuqtaga ta’sir etayotgan kuch koordinata x -ga bog‘liq ekan. Tuzilgan differentsial tenglamadagi o‘zgaruvchilarni ajratish uchun, uni (20.3) ko‘rinishda yozamiz. So‘ngra quyidagi belgilashni kiritib $g/R=k^2$, tenglamaning ikkala tomonini m -ga qisqartirsak

$$v_x\cdot\frac{dv_x}{dx}=-k^2\cdot x \quad \text{hoil bo‘ladi.}$$

Tenglamaning ikkala tomonini dx -ga ko‘paytirsak, o‘zgaruvchilar o‘z o‘zidan ajrab qoladi, so‘ngra tenglamani integrallab, quyidagi natijani olamiz,

$$v_x^2/2=-k^2x^2/2+C_1$$

Boshlang‘ich shartga ko‘ra x=a bo‘lganda $v_x=0$ bo‘ladi. Shunga asosan, $S_1=k^2x^2/2$ bo‘ladi. S_1 -ning qiymatni yuqoridagi tenglamaga qo‘yib, uni tezlikka nisbatan echsak,

$$v_x=\pm k\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{hosil bo‘ladi.}$$

Biz tekshirayotgan nuqtaning holatida uning tezligi M dan O -ga yo‘nalgan deb hisoblasak, ya’ni $v_x<0$ bo‘lsa, ildizning oldidagi ishorani manfiy deb hisoblaymiz (lekin, bu ishorani musbat deb hisoblanganda ham oxirgi natija bir xil bo‘laveradi). So‘ngra v_x-ni dx/dt bilan almashtirib

$$\frac{dx}{dt} = -k\sqrt{a^2 - x^2}$$ ni yozamiz.

O‘zgaruvchilarni ajratib yuborsak,

$$kdt = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

va bu tenglamani integrallab,

$$kt=\arccos(x/a)+C_2$$

hosil qilamiz. Ushbu tenglamaga boshlang‘ich (t=0 da x=a) shartlarni qo‘yib, S_2-ning qiymatini aniqlaymiz, ya’ni $S_2=0$ bo‘lar ekan, demak kt=arccos(x/a) bo‘ladi, bundan M nuqtaning harakat tenglamasini aniqlaymiz, ya’ni

$$x=a\cdot\cos kt$$ bo‘ladi.

Demak, M nuqtaning AV kanal ichidagi harakati amplitudasi a -ga teng bo‘lgan garmonik tebranma harakatdan iborat bo‘lar ekan.

Endi M nuqta kanalning oxirgi V nuqtasiga etgandagi o‘tgan vaqt t_1 - aniqlaymiz. V nuqtada x -ning koordinatasi x=-a bo‘ladi. Ushbu qiymatni M nuqtaning harakat tenglamasiga qo‘ysak cos kt=-1 bo‘ladi, bundan $kt_1=\pi$ va $t_1=\pi/k$-ning qiymatini aniqlaymiz. Yuqorida kiritilgan belgilashga asosan $k = \sqrt{g/R}$. Ushbu ifodalarning son qiymatlarini qo‘yib hisoblab chiqsak, shuni aniqlaymizki AV kanalning uzunligi qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, nuqta bir xil vaqtda kelar ekan, ya’ni

$$t_1=\pi\cdot\sqrt{R/g}\approx 42 \text{ min } 11\text{s}$$ bo‘lar ekan.

Ushbu natija ancha qiziqarli bo‘lib (hozircha fantastikaga o‘xshash bo‘lgan) shunday kanal qazish loyihalarining paydo bo‘lishiga sabab bo‘lmoqda.

Qo‘shimcha ravishda nuqtaning shunday harakatidagi maksimal tezlikning qiymatini aniqlaylik. Tezlik v_x - ning formulasidan x=0 bo‘lganda $v=v_{max}$, ya’ni O nuqtada uning tezligi maksimal bo‘lar ekan. Demak

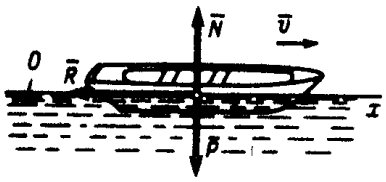
$$v_{max} = ka = a\cdot\sqrt{g/R}$$ bo‘lar ekan.

Masalan, $2a=0{,}1\cdot R=637$ km (taxminan Moskvadan Sankt Peterburggacha bo‘lgan masofa) bo‘lsa, maksimal tezlikning qiymati $v_{max}\approx 395$ m/c=1422 km /soat.

Moddiy nuqtaning masofaga proportsional bo‘lgan kuch ta’siridagi tebranma harakati keyingi 25 va 26 mavzularda batafsil o‘rganiladi. O‘sha mavzuda qanday qilib tebranma harakatning differentsial tenglamalarini tuzish va ularni integrallash usullari ham ko‘rib o‘tiladi.

3. **Kuch tezlikka bog‘liq holda o‘zgaradi.**

20.4 masala. Massasi m=40 kg bo‘lgan qayiqni boshlang‘ich v_0=0,5 m/c tezlik bilan itarib yuboriladi. Qayiqning past (kichkina) tezliklarida suvning qarshilik kuchi (7) formula orqali, ya’ni R=μ·v deb hisoblanib, qancha vaqtdan keyin qayiqning tezligi ikki marta kamayishini va shu vaqt ichida u qancha yo‘l bosishi aniqlansin. μ=9,1 kg/c deb hisoblansin. Hamda qayiq to‘xtaguncha qancha yo‘lni bosib o‘tishi aniqlansin.



20.4 shakl.

E ch i sh. Qayiqning hozirgi ondagi turgan o‘rnini O nuqta deb belgilab, harakat yo‘nalishida Ox o‘qni o‘tkazamiz (20.4 shakl). U holda boshlang‘ich shartlar quyidagicha bo‘ladi: t=0 bo‘lganda x=0 va $v_x=v_0$ bo‘ladi.

Qayiqni traektoriyaning ixtiyoriy joyida tasvirlaymiz va unga ta’sir etayotgan $\overline{P}$, $\overline{N}$, $\overline{R}$ kuchlarni vektor shaklida qo‘yamiz.

E s l a t m a. Qayiqqa bulardan boshqa hech qanday kuch ta’sir etmaydi. Qayiqni turtib yuborgan kuch *t=0 vaqtgacha* ta’sir etgan. Uning ta’sirini qayiqning boshlang‘ich v_0 -tezligi orqali hisobga olingan (20.3§ ga qarang). Harakat davomida qaysi kuchlar ta’sir etayotganligini aniqlash uchun *kuch bir jismning ikkinchi jismga ta’siri*dan iborat ekanligini unutmaslik kerak. Ushbu masaladagi qayiqning og‘irlik kuch $\overline{P}$, bu Erning qayiqqa ta’sir kuch, $\overline{N}$ va $\overline{R}$ kuchlar esa qayiqning suvga ta’sir kuchlaridan iborat ($\overline{N}$ kuchi suvning qayiqqa ta’siri, $\overline{R}$ kuchi qayiqning harakatiga suvning qarshiligi, ya’ni qayiq harakat qilmasa, bu kuch nolga teng bo‘ladi). Qayiq o‘zining harakatida faqat suv va Erdan boshqa hech qanday jism bilan o‘zaro ta’sir ko‘rsatmaydi, shu sababli hech qanday boshqa kuch bo‘lishi mumkin emas. Bu masalaga e’tiborni qaratishimizdan asosiy maqsad shuki, mana shunga o‘xshash xatoliklar juda ko‘p uchrab turadi.

Kuchlarning Ox o‘qqa proektsiyalarini aniqlaymiz,

$$\sum F_{kx}=-R=-\mu\cdot v_x$$

Qayiqning harakatini (20.2) differentsial tenglamasini tuzamiz, $v_x=v$ ekanligi uchun

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu v \quad \text{ni yozamiz.}$$

Bu tenglamadagi o‘zgaruvchilarni ajratib, uning ikkala tomonidan tegishli chegaralarda aniq integral olamiz. Har-bir o‘zgaruvchilarning ostki chegaralari boshlang‘ich shartlarga muvofiq tanlanadi, yuqori chegaralari esa ixtiyoriy vaqt uchun olinadi.

Ushbu masalaning boshlang‘ich shartlariga ko‘ra t=0 bo‘lganda $v=v_0$ edi, shu sababli

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}\int_0^t dt \qquad \text{yoki} \qquad \ln v - \ln v_0 = -\frac{\mu}{m}t \quad \text{bo‘ladi,}$$

bundan

$$t=(m/\mu)\ln(v_0/v) \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (a)$$

Izlanayotgan t_1-vaqtni aniqlash uchun $v=0{,}5v_0$ ekanligi sababli

$$t_1=(m/\mu)\ln 2\approx 3 \text{ s bo‘ladi.}$$

Qayiqning shu vaqt ichida bosib o‘tgan yo‘lini aniqlash uchun (20.3) ko‘rinishdagi differentsial tenglama tuzamiz, chunki u tenglama orqali x -masofa bilan v[7] -tezlik orasidagi bog‘lanishni bevosita aniqlaydi. U holda

$$mv\frac{dv}{dx} = -\mu v$$

Tenglamaning ikkala tomonini v-ga qisqartirib, o‘zgaruvchilarni ajratamiz va boshlang‘ich shartlarga ko‘ra o‘zgaruvchilarning chegaralarini aniqlaymiz, ya’ni x=0 bo‘lganda $v=v_0$ edi, shu sababli

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\frac{\mu}{m}\int_0^x dx \qquad \text{yoki} \qquad v-v_0 = -\frac{\mu}{m}x$$

$$\text{bundan } x=(m/\mu)(v_0 - v). \qquad (b)$$

$v=0{,}5v_0$ deb hisoblab, bosib o‘tilgan masofani aniqlaymiz: $x_1=mv_0/2\mu\approx 1{,}1$ m. Qayiqning to‘xtaguncha bosib o‘tgan yo‘lini aniqlash uchun, (b) tenglikdagi tezlikni nolga tenglash lozim, ya’ni v=0 bo‘lsa $x_2=mv_0/\mu=2.2$ m. ekan.

Qayiq to‘xtaguncha o‘tgan vaqtni aniqlash uchun (a) tenglamadan v=0 bo‘lgandagi vaqt $t=\infty$ ekanligini aniqlaymmiz. Bu narsa, shuni

[7] Bosib o‘tilgan yo‘lni (a) tenglikdan v -ni t -ning funktsiyasi sifatidagi $v=v_0e^{-(\mu/m)t}$ ko‘rinishdagi ifoda orqali ham aniqlash mumkin. Buning uchun, v -ni dx/dt -bilan almashtirib, undan integral olinadi, lekin bu usul murakkabroq bo‘ladi.

tasdiqlaydiki suvni qayiqning harakatiga ko‘rsatayotgan ($R=\mu v$) qarshiligiga bog‘liq ravishda u uzoq vaqt davom etar ekan va unga assimptotik ravishda yaqinlashar ekan. Albatta qayiqning to‘xtashigacha o‘tgan vaqt ma’lum bir aniq qiymatga teng bo‘ladi, chunki tezlik kamaygan sari qarshilikning o‘zgarish qonuni ham boshqacha bo‘ladi, ya’ni $v=f(t)$ boshqacha bo‘ladi (23.1§ dagi 23.1 masalaga qarang).

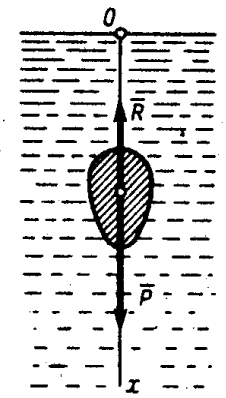
Nuqtaning tezlikka bog‘liq ravishda o‘zgaruvchi kuch ta’siridagi harakatining ahamiyatliroq misolini keyingi paragrafda ko‘rib o‘tamiz.

Tayanch iboralar: Kuch vaqtga bog‘liq holda o‘zgaradi, kuch masofaga bog‘liq holda o‘zgaradi, kuch tezlikka bog‘liq holda o‘zgaradi.

20.3§* Muhit (havo) qarshiligi ostidagi jismning pastga tushishi

Muammo: Yuqorida ko‘rilgan masalalarda kuchlar chiziqli tenglamalar orqali ifodalangan edilar. Endi moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar chiziqli bo‘lmagan tenglamalar orqali ifodalansa, harakat qonunini aniqlashda o‘ziga tegishli bo‘lgan muammolar kelib chiqadi. Quyida ularni qanday bartaraf qilish ustida fikr yuritiladi.

Jismning Er sathidan uncha uzoq bo‘lmagan balandlikdan muhit qarshiligi ta’siri ostida pastga qarab erkin tushish (yiqilish)ga oid masalani ko‘rib o‘tamiz. Jismga ta’sir etayotgan og‘irlik kuchi $\bar{P}$ va havoning zichligi ρ-larni o‘zgarmas qiymatlar deb qabul qilamiz. Jismning pastga tushishidagi harakatini (mutloq aylanmasdan) ilgarilanma deb qabul qilsak, u holda har qanday jismni moddiy nuqta deb hisoblash mumkin bo‘ladi. Jismga ta’sir qilayotgan havoning qarshilik kuchini 194§ dagi (19.8) formula orqali aniqlaymiz,



20.5 shakl

$$R=0{,}5\cdot c_x\cdot\rho\cdot S\cdot v^2 \qquad (20.7)$$

bu erda $c_x=\text{const}$[8], (ρ va S qiymatlar ham o‘zgarmas).

Koordinata o‘qini vertikal pastga qarab yo‘naltiramiz (20.5 shakl) va harakat O nuqtadan boshlang‘ich tezliksiz, ya’ni $v_0=0$ deb hisoblab,

[8] Ushbu masalada, agar tushish tezligi 300 m/c dan ortiq bo‘lmasa shunday qilish mumkin.

jismning bosib o‘tgan masofasiga bog‘liq ravishda uning tezligini qanday qonun bilan o‘zgarishini aniqlab chiqamiz,

Pastga tushayotgan jismga $\overline{P}$ va $\overline{R}$ kuchlar ta’sir etmoqda; u holda

$$\sum F_{kx}=R-R=R-0{,}5\cdot c_x\cdot\rho\cdot S\cdot v^2.$$

Tezlik bilan masofa orasidagi bog‘lanishni bevosita aniqlash uchun (20.3) ko‘rinishdagi differentsial tenglamani tuzamiz., $v_x=v$ ekanligi uchun,

$$\frac{P}{g}v\frac{dv}{dx}=R-0{,}5\cdot c_x\cdot\rho\cdot S\cdot v^2$$

quyidagi belgilash kiritamiz, ya’ni

$$2R/\ c_x\cdot\rho\cdot S=a^2 \qquad (20.8)$$

u holda oldingi tenglama sodda ko‘rinishga keladi,

$$v\frac{dv}{dx}=g\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)$$

o‘zgaruvchilarni ajratamiz,

$$-\frac{vdv}{a^2-v^2}=-\frac{g}{a^2}\cdot dx$$

Tenglamaning ikkala tomonini integrallab,

$$\ln(a^2-v^2)=-2(g/a^2)x+C_1$$

ni aniqlaymiz. Boshlang‘ich shartlarga asosan x=0 bo‘lganda $v_0=v=0$ edi. Shunga asosan $S_1=\ln a^2$ va bu qiymatni yuqoridagi tenglamaga qo‘yamiz, natijada

$$\ln\frac{a^2-v^2}{a^2}=-2\frac{g}{a^2}x \qquad \text{yoki} \quad \frac{a^2-v^2}{a^2}=e^{-2(g/a^2)x}$$

bo‘ladi. Bu tenglikni tezlikka nisbatan echsak

$$v=a\sqrt{1-e^{-2(g/a^2)x}} \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (20.9)$$

(20.9) formula, havoda pastga tushib kelayotgan jismning bosib o‘tgan masofasiga bog‘liq holdagi tezlikni aniqlash formulasidan iborat.

Masofa x -kattalashib borgan sari, $e^{-2(g/a^2)x}$-qiymat borgan sari kamayib boradi va $x\to\infty$ da u nolga teng bo‘ladi. Demak, jismning tezligi uning bosib o‘tgan masofasiga bog‘liq ravishda (20.9) tenglamaga ko‘ra ortib boradi va o‘zgarmas *a* - qiymatga intilib boradi. Ushbu qiymat chegaraviy tezlik v_{cheg} -deb ataladi. (20.8) tenglikka asosan, $v_{cheg}=a$ bo‘lgani uchun,

$$v_{cheg}=\sqrt{2P/c_x\rho S} \qquad (20.10)$$

Shu sababli, $v_0=0$ bo‘lganda jism chegaraviy v_{cheg} dan ortiq tezlikka ega bo‘la olmas ekan. (20.10) formulaga asosan chegaraviy tezlikning son

qiymati jismning og‘irligiga to‘g‘ri proportsional bo‘lib, c_x, ρ va $\cdot S$ - larga teskari proportsional bo‘lar ekan.

Endi qancha masofadan keyin tezlik o‘zining chegaraviy qiymatiga erishishligini aniqlaymiz. Buning uchun 2 jadvaldan foydalanamiz, jadvalda (20.9) formula orqali v'/v_{cheg} qiymat bilan $(g/v^2_{кщч})x$ -qiymat orasidagi bog‘lanishlar keltirilgan. Jadvaldan

2 jadval

$\frac{g}{v^2_{чег}}x$	$\frac{v}{v_{чег}}$	$\frac{g}{v^2_{чег}}x$	$\frac{v}{v_{чег}}$
0	0	1,2	0,95
0,5	0,80	1,6	0,97
1,0	0,9	2,0	0,99

$$\left.\begin{array}{l}(g/v^2_{cheg})x=1{,}2 \text{ да} \\ 0{,}95v_{cheg} \\ (g/v^2_{cheg})x=2{,}0 \text{ да} \\ 0{,}99v_{cheg}\end{array}\right\} \qquad (20.11)$$

Agar c_x va S-qiymatlar kichkina bo‘lsa, chegaraviy tezlikka tezda erishilar ekan (20.5 masalaga qarang).

CHegaraviy tezlik mavjud ekanligini oddiy mulohazalar orqali ham aniqlash mumkin. Jism pastga tushib kelayotganda uning tezligi ortib boradi; shu sababli o‘z o‘zidan havoning qarshiligi ham ortib boradi. Agar havoning qarshiligi jism og‘irligidan katta bo‘la olmas ekanligini e’tiborga olsak (20.5 shakl), u holda $R_{cheg}=R$ bo‘ladi. Bu tenglamaga R -ning qiymatini (20.7) formuladan keltirib qo‘ysak $0{,}5\cdot c_x\cdot\rho\cdot S\cdot v^2=R$ bo‘ladi, bundan (20.10) formula orqali tezlikning aniqlangan chegaraviy qiymatini topamiz. Lekin keltirilgan mulohazalar orqali shu chegaraviy tezlik v_{cheg} -qaysi masofada bo‘lishi mumkinligini aniqlab bo‘lmaydi. Bunday muhim natijani faqat (20.9) formula orqali aniqlash mumkin xolos.

20.5 masala. Parashyut bilan parashyutchining og‘irligi R=800 N bo‘lsa, parashyutchining chegaraviy tezligi aniqlansin: a) parashyutni ochmasdan tushishidagi chegaraviy tezlik, bu holatda S=0,4 m^2, c_x=1,0; b) parashyutni ochib tushishda, S=36 m^2, c_x=1,0;

Ikkala holda ham parashyutchining tezligi $v_1=0{,}95v_{cheg}$ (ya’ni chegaraviydan 5% foiz farq qilgan) bo‘lgandagi N_1 masofa va $v_2=0{,}99v_{cheg}$ bo‘lgandagi N_2 masofa aniqlansin.

E ch i sh. CHegaraviy tezlik (20.10) formula orqali aniqlanadi, havoning zichligini ρ=1,29 kg/m^3 deb hisoblaymiz. N_1 va N_2 masofalarni (20.11) formula orqali aniqlaymiz. $(g/v^2_{ko'ch})x=1{,}2$ bo‘lganda $v_1=0{,}95v_{cheg}$ jismning bosib o‘tgan masofasi $N_1=1{,}2\cdot$ 2 jadval

$v^2_{ko'ch}/g$ bo‘ladi. Xuddi shu kabi $(g/v^2_{ko'ch})x = 1{,}2$ bo‘lganda v_2=0,99v_{cheg} jismning bosib o‘tgan masofasi $N_2 = 2 \cdot v^2_{ko'ch}/g$ bo‘ladi.

Hisoblash ishlar natijasida quyidagilarni aniqlaymiz:

a) parashyutni ochmasdan tushishda v_{cheg}=56m/s; N_1≈380m, N_2≈630m.

b) parashyutni ochib tushishda v_{cheg} ≈5 m/s; N_1≈3m, N_2 ≈5m.

Ko‘rinib turibdiki, qarshilik katta bo‘lganda chegaraviy tezlikka tezda erishilar ekan.

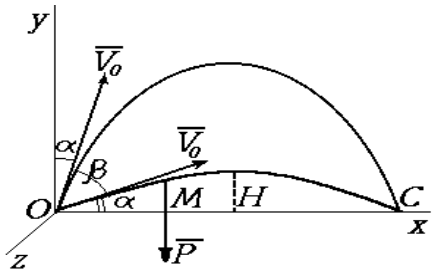
20.4§ Nuqtaning egri chiziqli harakatida dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini echish

Muammo: Biz yuqorida ko‘rib o‘tgan masalalrning barchasi to‘g‘ri chiziqli harakatlarga oid edi. Tabiatda esa egri chiziqli harakatlar ko‘proq uchraydi. Bunday masalalarni echishning o‘ziga xos bo‘lgan xususiyatlari nimalardan iborat ekanligini ko‘rib chiqamiz.

Nuqtaning egri chiziqli harakatida dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi (19.10) va (19.11) differentsial tenglamalar orqali echiladi. Agar masala to‘g‘ri burchakli dekart koordinata o‘qlarida, ya’ni (19.10) formula orqali echiladigan bo‘lsa, nuqtaning t=0 s dagi boshlang‘ich holati va boshlang‘ich tezligi quyidagi ko‘rinishda beriladi: t=0 s bo‘lganda

$$x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0,\ v_x=v_{x0},\ v_y=v_{y0},\ v_z=v_{z0} \qquad (20.12)$$

Egri chiziqli harakatdagi nuqtaning (19.10) ko‘rinishdagi differentsial tenglamalarni integrallab x, y, z koordinatalarni vaqt t - ning funktsiyasi sifatida aniqlaymiz, ya’ni nuqtaning harakat qonunini aniqlaymiz. Integrallash natijasida S_1, S_2,...,S_6 lardan iborat oltita integral doimiylari paydo bo‘ladi, ularning son qiymatlari boshlang‘ich shartlar (20.12) orqali aniqlanadi.



20.6 shakl

Masalalar echishning muqim yo‘llari quyidagi masalalarda ko‘rsatib berilgan.

Gorizontga burchak ostida otib yuborilgan nuqtaning bir jinsli og‘irlik kuchi maydonidagi harakati. Gorizontal tekislikka α -burchak ostida $\bar{v}_o$-boshlang‘ich

tezlik bilan otib yuborilgan m -massali moddiy nuqtaning harakatini o‘rganib chiqamiz. Masalani echishda havoning qarshiligini e’tiborga olmaymiz, og‘irlik maydonini bir jinsli ($\bar{P}$=const) deb hisoblaymiz. Nuqtaning parvozini hamda shu parvozdagi masofani Erning radiusiga nisbatan kichkina qiymat deb hisoblaymiz.

Moddiy nuqta harakatining boshlang‘ich holati sifatida, koordinata boshi O nuqtani qabul qilamiz. Ou o‘qini vertikal yuqoriga, Ox o‘qini gorizontal tekislik bo‘yicha yo‘naltiramiz, Oz o‘qini esa Oxu tekisligiga perpendikulyar holda yo‘naltiramiz (20.6 shakl). Boshlang‘ich tezlik vektori $\bar{v}_O$, O nuqtaga qo‘yilgan bo‘lib, uning yo‘nalishi Ox o‘qi bilan α burchak tashkil etadi.

Harakatlanayotgan M nuqtani ixtiyoriy holatda tasvirlaymiz. Unga faqat bitta kuch, og‘irlik kuchi $\bar{F}^{и}_{кор}$ ta’sir etmoqda (20.5 masalaning eslatmasiga qarang). Ushbu kuchning koordinat o‘qlariga proektsiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$R_x=0, \quad R_u=-R=-mg, \quad R_z=0$$

Bu qiymatlarni (19.10) tenglamaga qo‘ysak va $d^2x/dt^2=dv_x/dt$ va h.k., hosil bo‘lgan tenglamalar sistemasini m -ga qisqartirib yuborsak, natijada:

$$\frac{dv_x}{dt}=0, \qquad \frac{dv_y}{dt}=-g, \qquad \frac{dv_z}{dt}=0$$

Bu tenglamalarning ikkala tomonlarini dt -ga ko‘paytirib, so‘ngra integrallasak

$$v_x=C_1, \quad v_y=-gt+C_2, \quad v_z=C_3 \text{ bo‘ladi.}$$

Boshlang‘ich shartlarni (20.12) tenglamalar orqali aniqlaymiz, ya’ni t=0 s bo‘lganda

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ v_x=v_0\cdot\cos\alpha,\ v_y=v_0\cdot\sin\alpha,\ v_z=0 \text{ bo‘ladi.}$$

Ushbu boshlang‘ich shartlar orqali integral doimiylarining son qiymatlarini aniqlaymiz

$$S_1=v_0\cdot\cos\alpha, \quad S_2=v_0\cdot\sin\alpha, \quad S_3=0.$$

Aniqlangan S_1, S_2, S_3 - qiymatlarni yuqoridagi tenglamalarga qo‘yib, hamda v_x -ni o‘rniga dx/dt va h.k., larni qo‘ysak, quyidagi differentsial tenglamalarni hosil qilamiz, ya’ni

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cdot\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt}=v_0\cdot\sin\alpha-gt, \qquad \frac{dz}{dt}=0$$

Bu tenglamalarni ikkala tomonlarini dt-ga ko‘paytirib, integrallasak,

$$x=v_0\cdot t\cdot\cos\alpha+C_4, \quad y=v_0\cdot t\cdot\sin\alpha-gt^2/2+C_5, \quad z=C_6 \text{ bo‘ladi.}$$

Boshlang‘ich shartlarni qo‘yib, $S_4= S_5= S_6=0$ ekanligini aniqlaymiz va M nuqtaning harakat tenglamasini aniqlaymiz

$$x= v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha, \quad y= v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - gt^2/2, \quad z=0 \text{ bo‘ladi.} \qquad (20.13)$$

Oxirgi tenglamadan ko‘rinib turibdiki, nuqta faqat Oxu tekisligida harakat qilar ekan.

Nuqtaning harakat tenglamalari mavjud bo‘lsa, kinematika usullari yordamida harakatning barcha xarakteristikalarini aniqlash mumkin bo‘ladi.

1. Nuqtaning traektoriyasi. (20.13) tenglamaning ikkita birinchi tenglamasidan vaqt t-ni yo‘qotib yuborib, nuqtaning traektoriya tenglamasini aniqlaymiz:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \qquad (20.14)$$

Ushbu tenglama Ou o‘qiga parallel bo‘lgan parabolaning tenglamasidan iborat. Shunday qilib, *gorizontal tekislikka burchak ostida otib yuborilgan og‘ir nuqta havosiz fazoda parabola bo‘yicha harakat qilar ekan* (Galiley).

2. Gorizont bo‘yicha uzoqqa tushishlik. Endi nuqtaning gorizontal o‘q bo‘yicha qancha uzoqqa tushganligini aniqlaymiz, ya’ni Ox o‘qi bo‘ylab bosib o‘tilgan OS=X masofani aniqlaymiz. (20.14) tenglamada u=0 deb hisoblab, nuqta traektoriyasining Ox o‘qi bilan kesishgan nuqtalarini aniqlash uchun ikkinchi darajali algebraik tenglama hosil qilamiz. Ushbu algebraik tenglamadan $x[\operatorname{tg}\alpha - gx/(2 v_0^2 \cos^2\alpha)]=0$ iborat bo‘ladi, bundan

$$x_1=0, \quad x_2=(2 v_0^2 \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha)/g \text{ larni aniqlaymiz.}$$

Birinchi echim (ildiz) koordinata boshi O nuqtani beradi, ikkinchi echim esa S -nuqtani aniqlaydi. Shu sababli $X=x_2$ bo‘ladi va

$$OS=X=(v_0^2/g)\sin 2\alpha \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (20.15)$$

(20.15) formuladan ko‘rinib turibdiki, xuddi shunday gorizontal uzoqlikdagi masofa β -burchak ostida otilganda ham mavjud bo‘lib, $2\beta=180°-2\alpha$, ya’ni $\beta=90°-\alpha$ ga teng bo‘ladi. Demak, berilgan $\bar{v}_O$ - boshlang‘ich tezlik bilan otilgan nuqta gorizontning S nuqtasiga ikkita traektoriya orqali etib borishi mumkin ekan: pastki ($\alpha<45°$) va yuqorigi ($\alpha>45°$).

3. Traektoriyaning balandligi. Agar (20.14) tenglamada $x=X/2=(v_0^2/g)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ deb hisoblasak, u holda nuqta traektoriyasining balandligi N aniqlanadi:

$$N=(v_0^2/2g)\sin^2\alpha \qquad (20.15')$$

4. Parvoz davri. (20.13) tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasidan, nuqtaning parvozida o‘tgan davr T-ni aniqlashimiz mumkin. Buning uchun $X=v_0T\cos\alpha$. Bu erga X-ning qiymatini keltirib qo‘ysak,

$$T=2(v_0/g)\sin\alpha \qquad (20.15'')$$

Eng uzoq gorizontal masofaga borib tushadigan burchak $\alpha=45°$ bo‘lib, α -ning shu qiymatida barcha kinematik xarakteristikalarning qiymatlari quyidagicha bo‘ladi:

$$X^*=v_0^2/g,\ H^*=v_0^2/4g=X^*/4,\quad T^*=(v_0/g)\sqrt{2}. \qquad (20.16)$$

Yuqoridagi aniqlangan natijalar, tashqi **ballistika**dagi ayrim masalalarni, masalan α va v_0 larning qiymatlarini o‘zgarishi bilan uzoqlik masofani qanchalik o‘zgarishi, parvoz balandligining o‘zgarishi yoki shunga o‘xshash amaliy masalalarni echishda o‘rnak (orientir - mo‘ljal) sifatida bulardan foydalaniladi.

Misol. Ikkinchi jahon urushida nemislarning[9] FAU-2 reaktiv snaryadi vertikal yo‘nalishda yuqoriga uchirilib, u N=20 km balandlikka ko‘tarilgandan keyin, gorizontga nisbatan $\alpha=45°$ burchak ostida (raketaning burilishi maxsus qurilmalar orqali avtomatik ravishda amalga oshirilar edi) $v_0\approx1700$ m/c boshlang‘ich tezlik bilan parvozni davom qilar edi. Snaryadning keyingi harakati havosiz fazoda otib yuborilgan nuqtaning traektoriyasi bo‘yicha sodir bo‘ladi va qo‘polroq qilib hisoblaganda bunday balandlikda og‘irlik kuchi o‘zgarmas bo‘ladi, ya’ni $\overline{P}=\text{const}$. U holda (20.16) formula orqali quyidagi qiymatlarni hisoblash mumkin :

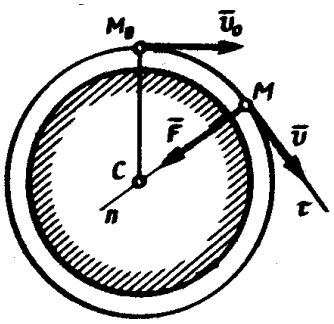
$$X^*\approx300\text{ km},\quad H^*\approx75\text{ km},\quad T^*=245\text{ s}.$$

Ushbu natijalar, haqiqatdan ham uchirilgan reaktiv snaryadlarning tegishli xarakteristikalariga juda yaqin qiymatlarga ega bo‘lgan.

Birinchi kosmik tezlik. Er atrofiga otib yuborilgan yana bir jismning harakatiga oid masalani ko‘rib chiqamiz. Erning atrofida uning markazidan R masofada joylashgan aylanadan iborat orbita bo‘ylab harakatda bo‘lishi uchun, jism Erning markazidan R masofadagi boshlang‘ich tezligi qancha bo‘lishi kerakligi aniqlansin (20.7 shakl). Jismni moddiy nuqta deb hiisoblab, havoning qarshiligi e’tiborga olinmasin.

[9] Qaralsin: Kooy I., Yutenbogart I., Raketalar dinamikasi, Oborongiz, 1950 y.

Jismning traektoriyasi aylanadan iborat bo‘lgani uchun, uning tezlik vektori har doim shu traektoriyaga urinma bo‘ylab yo‘naladi, shu sababli uning tezligi $\bar{v}_O$, SM_0 radiusga perpendikulyar ravishda yo‘naladi, bu erda M_0-jismning orbitadagi boshlang‘ich holati.



20.7 shakl.

Masalani echishni davom etdirish uchun (19.11) formuladan foydalanamiz. Nuqtani traektoriyaning ixtiyoriy M nuqtasida tasvirlaymiz va shu M nuqtadan M_τ va M_n o‘qlarni o‘tkazamiz. Nuqtaga ta’sir etuvchi Erning tortilish kuchi $\bar{F}$-ni vektor shaklida ifodalaymiz; uning son qiymati $F=mg_0$, bu erda m -jismning massasi, g_0 - M punktdagi tortilish kuchining tezlanishi; $F_\tau=0$ va $F_n=F$ bo‘lgani uchun, (19.11) tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$m\frac{dv}{dt}=0, \qquad m\frac{v^2}{R}=F \quad \text{yoki} \quad m\frac{v^2}{R}=mg_0$$

Birinchi tenglamadan v= const, bo‘lgani uchun $v=v_0$ bo‘ladi. Ikkinchi tenglamadan (agar $R=R_0=6378$ km -Er ekvatorining radiusi bo‘lsa, u holda $g_0=9{,}82$ m/s^2)

$$v_0=\sqrt{g_0R_0}=764 \text{ m/c} \approx 7{,}9 \text{ km/s} \qquad (20.17)$$

Tezlikning ushbu qiymati, Erning atrofiga otib yuborilgan jismni Erga qaytib tushmasligi uchun zarur bo‘lgan eng minimal tezlik bo‘lib, uni *aylanaviy* yoki *birinchi kosmik tezlik* deb ataladi.

Tayanch so‘z va iboralar: Gorizont bo‘ylab uzoqqa tushish, maksimal balandlikka ko‘tarilish, ballistika, parvoz davrini aniqlash, muhit qarshiligi, birinchi kosmik tezlik. Aylanaviy orbita.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etishga qaratilgan uslubiy ko‘rsatmalar:

1. Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi shundan iborat ekanki, agar moddiy nuqtaning massasi va unga ta’sir etayotgan kuchlar ma’lum bo‘lsa, ular orqali shu nuqtaning harakat qonunini aniqlanar ekan.
2. Moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar faqat vaqtga, faqat masofaga yoki faqat tezlikka bog‘liq holda o‘zgarsa, tuzilgan differentsial tenglamalarni echish oson hal bo‘lar ekan.
3. Harakat qonuni aniqlash uchun tuzilgan differentsial tenglamalarni ikki marta integrallash lozim bo‘lar ekan. Integrallash jarayonida

paydo bo‘ladigan integral doimiylarni aniqlash uchun, harakatning boshlang‘ich shartalari berilgan bo‘lishi shart ekan. Boshlang‘ich shartlar deb, moddiy nuqtaning harakatni kuzatish boshlangan vaqtdagi yoki uning birorta aniq vaqtdagi koordinatasi va tezligining qiymati ma’lum bo‘lishi shart ekan.

4. Moddiy nuqta to‘g‘ri chiziqli traektoriya bilan harakatlanishi uchun, unga ta’sir etayotgan kuch harakat davomida o‘z yo‘nalishini o‘zgartirmasligi va boshlang‘ich tezlikning vektori, shu kuch vektori bilan bir to‘g‘ri chiziqda yotishi shart ekan.
5. Harakatlanayotgan moddiy nuqtaga aktiv kuchlardan tashqari muhit qarshiligi kuchi ta’sir etsa, ular tezlikka bog‘liq bo‘lib, harakat yo‘nalishiga qarama-qarshi bo‘lar ekan.
6. Gorizontga ma’lum burchak ostida yuqoriga otib yuborilgan harqanday jism parabola traektoriyai orqali harakat qilib erga tushar ekan.
7. «FAU» raketalarining uchish traektoriyalari, avvaliga tik yo‘nalishda 20 km gacha uchirilgan, so‘ngra gorizontga $\alpha=45^{o}$ ostida otib yuborilgan snaryad taxminan 300 km gacha uzoqlikka borib tushgan.
8. Moddiy nuqta Er atrofida sun’y yo‘ldoshga aylanishi uchun, eng kam tezlikning miqdori 7,9 km/s dan kam bo‘lmasligi shart ekan. Bunday, ya’ni birinchi kosmik tezlik bilan uchayotgan moddiy nuqtaning traektoriyasi aylanadan iborat bo‘lar ekan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasining mohiyatini aytib bering?
2. Moddiy nuqtaga ta’sir euvchi kuchning moduli vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarsa, differentsial tengalamani echish qanday kechadi?
3. Moddiy nuqtaga ta’sir euvchi kuchning moduli masofaga bog‘liq ravishda o‘zgarsa, differentsial tengalamani echish qanday kechadi?
4. Moddiy nuqtaga ta’sir euvchi kuchning moduli tezlikka bog‘liq ravishda o‘zgarsa, differentsial tengalamani echish qanday kechadi?
5. Moddiy nuqta to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lishi uchun, qanday shartlar bajarilishi lozim?
6. Muhit qarshiligi ta’siridagi jism harakatining differentsial tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

7. Egri chiziqli traektoriya bilan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning harakatini differentsial tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi.
8. Integral doimiylarini aniqlash uchun nimalar aniq bo‘lishi shart?
9. Ballistik traektoriyalar deb qanday traektoriyalarga aytiladi?
10. Yuqoriga otib yuborilgan moddiy nuqta Erga qaytib tushmasligi uchun qanday shartlar bajarilishi lozim?
11. Birinchi kosmik tezlik deganimizda nimani tushunamiz?

Mavzuni mustahkamlash uchun 20-ilovadagi masalalarni echishni tavsiya qilamiz.

21 – Ma’ruza

Mavzu: Moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremalari. Moddiy nuqtaning harakat miqdori. Kuch impulsi. Moddiy nuqta harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o‘zgarishi haqidagi teorema (Momentlar teoremasi).

REJA:

1. Moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremalari. Moddiy nuqtaning harakat miqdori. Kuch impulsi.
2. Moddiy nuqta harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema.
3. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o‘zgarishi haqidagi teorema (Momentlar teoremasi).
4. Markaziy kuch ta’siridagi harakat. Yuzalar qonuni
5. Kuchning bajargan ishi. Quvvat

Muammo: Yuqorida ko‘rib o‘tganimizdek, dinamika masalalarini echish uchun, albatta, differentsial tenglamalarni echishga to‘g‘ri kelar ekan. Lekin tajribalar shuni ko‘rsatdiki, ko‘p masalalarni echishda dinamikaning umumiy teoremalarini qo‘llash ancha qulayliklar tug‘dirar ekan. Dinamika qismida, o‘ziga tegishli tayanch qiymatlar mavjud bo‘lib, biz quyida o‘sha qiymatlarning mazmuni va ularning mohiyati nimadan iborat ekanligini bayon qilamiz.

Bayoni: Dinamikaning umumiy teoremalarining ahamiyati shundaki, ular orqali moddiy jismlarning harakatidagi tegishli dinamik xarakteristikalar orasidagi o‘zaro bog‘lanishlarni yaqqol ko‘rsatib beradi, natijada amaliy injenerlik hisoblash ishlarida mexanik sistema harakatiga oid masalalarni echishda yangi imkoniyatlar yaratib beradi. Undan tashqari, har bir masalani echishda olib boriladigan ko‘p matematik amallarni takroriy ravishda qaytarilmasligini oldini oladi, chunki ushbu teoremalarni isbot qilinishida ular bir marta va batamom bajarilib qo‘yiladi; shu sababli ko‘p masalalarni echish soddalashadi.

Quyida moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremalarini birma-bir ko‘rib o‘tamiz.

21.1§ Nuqtaning harakat miqdori. Kuch impulsi

Eng asosiy dinamik xarakteristikalardan biri, moddiy nuqtaning **harakat miqdori** hisoblanadi[10].

[10] Bundan boshqa dinamik xarakteristika - kinetik energiya bo‘lib, uni keyinroq ko‘rib o‘tiladi.

Moddiy nuqtaning harakat miqdori deb, nuqtaning massasini uning tezlik vektoriga ko‘paytmasiga teng bo‘lgan $m\bar{v}$ *-vektor qiymatga aytiladi.* Ushbu $m\bar{v}$ -vektorning yo‘nalishi, nuqtaning tezlik vektori bilan ustma-ust yotadi, ya’ni traektoriyaga urinma holda harakat tomonga yo‘naladi.

Harakat miqdorining o‘lchov birligi SI - sistemasida: 1kg·m/s yoki 1N·s, MKGSS-sistemasida: 1 kG·s bo‘ladi.

Siz «**ustasi farang**»-degan so‘zni eshitganmisiz. Bu so‘zning ma’nosi nimadnn iborat?

Kuch impulsi. Ma’lum vaqt ichida kuchning nuqtaga bo‘lgan ta’sirini xarakterlash uchun ***kuch impulsi*** degan tushuncha kiritiladi. Avvaliga elementar impuls degan tushuncha kiritamiz, ya’ni kuchning elementar dt -vaqt ichidagi impulsi. *Kuchning elementar impulsi deb,* $\bar{F}$ *-kuchni elementar dt - vaqtga ko‘paytmasidan iborat bo‘lgan* $\bar{s}$ *-vektor qiymatga aytiladi:*

$$d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt \qquad (21.1)$$

Elementar impuls kuchning yo‘nalishi bo‘yicha yo‘naladi. Ixtiyoriy $\bar{F}$-kuchning tugal t_1-vaqt ichidagi ta’sirining impulsi $\bar{S}$-shu kuchning elementar vaqt oraliqlaridagi impulslarining integral yig‘indisiga aytiladi, ya’ni

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt \qquad (21.2)$$

Demak, ma’lum t_1- *vaqt oralig‘ida kuchning impulsi, elementar impulslarning 0 - dan* t_1- *vaqt oralig‘idagi chegarada olingan aniq integralidan iborat qiymat ekan.*

Xususiy holda, agar $\bar{F}$ -kuchning moduli va yo‘nalishi o‘zgarmas ($\bar{F}$=const) bo‘lsa, u holda $\bar{S} = \bar{F} \cdot t_1$ bo‘ladi. Tegishlicha uning moduli $S=F \cdot t_1$ bo‘ladi. Umumiy holda, kuch impulsining moduli uning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari orqali aniqlanadi:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt \qquad S_y = \int_0^{t_1} F_y dt \qquad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt \qquad (21.3)$$

Tayanch so‘z va iboralar: Harakat miqdori, kuch impulsi.

21.2§ Moddiy nuqta harakat miqdorining o‘zgarish teoremasi

Nuqtaning massasi o‘zgarmas qiymat ekanligi va uning tezlanishi $\bar{a}=d\bar{v}/dt$ bo‘lganligi uchun, dinamikaning asosiy qonunini ifodalovchi (19.2) tenglamani quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt}=\sum \bar{F}_k \qquad (21.4)$$

(21.4) tenglama bir vaqtning o‘zida nuqta harakat miqdorining o‘zgarishi teoremasini differentsial formasining ifodasidan iborat bo‘ladi: *nuqtaning harakat miqdoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosila, shu nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlarning vektor yig‘indisiga teng*[11] *bo‘ladi.*

Agar harakatlanayotgan nuqtaning $t=0$ vaqtdagi tezligi $\bar{v}_O$ va t_1 - vaqtdagi tezligi esa $\bar{v}_1$ bo‘lsa, (21.4) tenglamaning ikkala tomonini dt - ga ko‘paytirib yuborib, undan aniq chegaralar bo‘yicha integrallaylik. Tenglamaning o‘ng tomonidagi integralning chegarasi 0 dan t_1 - gacha o‘zgaradi, chap tomonidagi integralning chegarasi esa $\bar{v}_O$ -dan $\bar{v}_1$ -gacha o‘zgaradi, $d(m\bar{v})$ ning integrali $m\bar{v}$ bo‘lgani uchun, natijada

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0=\int_0^{t_1}\bar{F}_k dt$$

ekanligini aniqlaymiz.

Tenglikning o‘ng tomonidagi integrallar, (21.2) formulaga asosan nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlarning impulslaridan iborat bo‘ladi. Shuning uchun, ushbu tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0=\sum \bar{S}_k \qquad (21.5)$$

(21.5) tenglama nuqta harakat miqdorining o‘zgarish teoremasini tugal formasi deb ataladi: *nuqtaning ma’lum vaqt oralig‘i ichidagi harakat miqdorining o‘zgarishi shu vaqt oralig‘ida nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlar impulslarining yig‘indisiga teng ekan.*

Masalalar echishda vektor ko‘rinishdagi (21.5) tenglamaning o‘rniga uning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalaridan foydalaniladi. (21.5) tenglamani koordinata o‘qlarga proektsiyalab, quyidagilarni yozamiz:

$$\begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x}&=\sum S_{kx}\\ mv_{1y} - mv_{0y}&=\sum S_{ky}\\ mv_{1z} - mv_{0z}&=\sum S_{kz} \end{aligned} \qquad (21.6)$$

[11] Mazmunan olganda, bu Nyutonning o‘zi yaratgan dinamikaning 2-qonuniga yaqin bo‘lgan boshqacha ifodadan iborat.

Agar nuqta faqat Ox o‘qi bo‘ylab to‘g‘ri chiziqli harakat qilsa, u holda ushbu sistemaning faqat birinchi tenglamasidan foydalanish kifoya qiladi.

Masalalar echish. (21.5) va (21.6) formulalar orqali nuqtaning harakatida uning tezliklarini o‘zgarishini bilgan holda, kuchlarning impulslarini aniqlash mumkin yoki impulslar ma’lum bo‘lsa nuqtaning tezligi qanday o‘zgarishi mumkinligini (dinamikaning ikkinchi qonuni) aniqlash mumkin. Dinamikaning ikkinchi masalasini echishda berilgan kuchlarning impulslarini aniqlash kerak bo‘ladi, lekin (21.2) va (21.3) tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, kuch impulslarini faqat kuchlar o‘zgarmas bo‘lganda yoki ular vaqtga bog‘liq holda o‘zgargandagina aniqlash mumkin bo‘lar ekan xolos.

Shunday qilib, agar masalaning shartida izlanayotgan va berilgan qiymatlar: nuqtaga qo‘yilgan kuchlar, nuqtaning harakatida sarflangan vaqti, boshlang‘ich va oxirgi tezliklar (ya’ni F, t, v_0, v) o‘zgarmas yoki vaqtga bog‘liq holda o‘zgaruvchan bo‘lsa, bunday masalalar (21.5) va (21.6) tenglamalar orqali echiladi.

21.1 masala. Massasi m=2 kg bo‘lgan moddiy nuqta, v=4m/c tezlik bilan aylana bo‘ylab harakatlanmoqda. Nuqta aylananing to‘rtdan bir qismini bosib o‘tguncha ketgan vaqt ichidagi kuch impulslari aniqlansin.

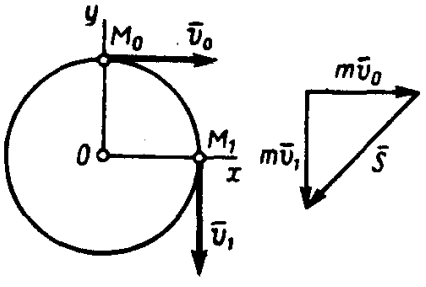
E ch i sh. Harakat miqdorining o‘zgarish teoremasiga asosan $\bar{S}=m\bar{v}_1-m\bar{v}_0$. Harakat miqdorlari vektorlarining geometrik ayirmasi (21.1 shakl) ni qurilgan to‘g‘ri burchakli uchburchak orqali aniqlaymiz,

$$S=m\sqrt{v_1^2+v_0^2}$$

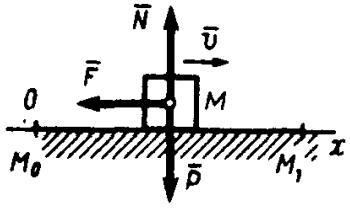
Lekin masalaning shartiga ko‘ra $v_0= v_1= v$ bo‘lgani uchun,

$$S=mv\sqrt{2}=11{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Kuch impulsini analitik hisoblash uchun, (21.6) sistemaning



21.1 shakl



21.2 shakl

birinchi ikkita tenglamasidan foydalanishimiz mumkin, masalan $S_x=mv_0$, $S_y=-mv_1$ bulardan $S=\sqrt{S_x^2+S_y^2}=m\sqrt{v_1^2+v_0^2}$ bo‘ladi.

21.2 masala. Gorizontal tekislikdagi massasi m-ga teng bo‘lgan yukni turtib yuborish natijasida, unga $\bar{v}_0$-boshlang‘ich tezlik berildi. Yukning keyingi harakati tormozlovchi o‘zgarmas $\bar{F}$-kuch ta’sirida sodir bo‘ladi. Yuk to‘xtaguncha qancha vaqt o‘tishi aniqlansin.

E ch i sh. Masalaning shartiga ko‘ra, yuk to‘xtaguncha o‘tgan vaqtni aniqlash uchun yuqoridagi teoremani qo‘llash mumkin ekan. Yukni ixtiyoriy holatda tasvirlaymiz (21.2 shakl). Yukka og‘irlik kuchi $\bar{P}$, tekislikning reaktsiyasi $\bar{N}$ va tormozlovchi $\bar{F}$ kuchlar ta’sir etadi. Ox o‘qini yukning harakati tomonga yo‘naltiramiz va (21.6) tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasini quyidagicha tuzamiz:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx} \qquad (a)$$

Ushbu masalada $v_{0x}=v_0$ edi va yuk to‘xtaganda esa $v_{1x}=0$ bo‘ladi. Nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlardan faqat $\bar{F}$ kuchigina Ox o‘qqa proektsiya beradi. Bu kuch o‘zgarmas bo‘lgani uchun $S_x=F_xt_1=-F\cdot t_1$ bo‘ladi, bu erda t_1- tormozlanish davri. Ushbu qiymatlarni (a) tenglamaga qo‘ysak, $-mv_0=-F\cdot t_1$, bundan t_1-ni aniqlaymiz, ya’ni

$$t_1 = mv_0/F \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (b)$$

Shunday qilib, tormozlanish vaqti tezlikka proportsional ravishda o‘zgarar ekan.

Endi shu masalani, boshqacha shartlarda, ya’ni tormozlovchi kuch Q o‘zgaruvchan bo‘lib tormozlash boshlangan ondan boshlab vaqtga proportsional ravishda, ya’ni Q=kt ko‘rinishda o‘zgarsin, k-o‘zgarmas koeffitsient bo‘lib, yuk to‘xtaganda uning qiymati F-ga teng bo‘ladi. Kuch vaqtga bog‘liq o‘zgarganligi uchun, S_x-ni (21.3) formula orqali aniqlab, tormozlash vaqtini ushbu (a) formuladan foydalanib topishimiz mumkin bo‘ladi. $Q_x=-Q=-kt$ ekanligi uchun

$$S_x = -\int_0^{t_1} ktdt = -k\,t_1^2/2 \quad \text{bo‘ladi.}$$

U holda (a) tenglamadan $mv_0=k\,t_1^2/2$ bo‘ladi. k -ning qiymatini $t=t_1$ bo‘lganda Q=F bo‘ladi, bundan $kt_1=F$ aniqlaymiz, natijada

$$t_1 = 2mv_0/F \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (v)$$

Demak, bunday kuch ta’sirida tormozlanish vaqti ikki marta ortib ketar ekan.

21.3§ Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o‘zgarishi haqidagi teorema (Momentlar teoremasi)

Muammo: Yuqoridagi teorema moddiy nuqtaning faqat ilgarilama harakatini xarakaterlaydi xolos. Agarda moddiy nuqta birorta o‘q yoki nuqta atrofida aylanma harakatda bo‘lsa, bunday masalalarni echish uchun quyidagi harakat miqdori momentining o‘zgarish teoremasidan foydalanish lozim bo‘ladi.

Bayoni: Ba’zi (aylanma harakat qiluvchi moddiy nuqtalarning harakatlariga doir) masalalarni echishda harakatning dinamik xarakteristikasi sifatida, harakat miqdori vektori $m\bar{v}$-ni o‘rniga, uning biror markazga yoki o‘qqa nisbatan olingan momentidan foydalaniladi. Ushbu momentlar, kuchning momenti kabi hisoblanadilar.

Shunday qilib, *moddiy nuqta harakat miqdorining biror O markazga nisbatan momenti deb,* $\bar{m}_O(m\bar{v})$ *– dan iborat bo‘lgan*

$$\bar{m}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v} \qquad (21.7)$$

vektor qiymatga aytiladi. Bu erda $\bar{r}$-O markazdan harakatlanayotgan nuqtaga o‘tkazilgan radius-vektor.

$\bar{m}_O(m\bar{v})$ - vektor, $m\bar{v}$ va O markazdan o‘tgan tekislikka perpendikulyar ravishda yo‘naladi va $|\bar{m}_O(m\bar{v})| = mv \cdot h$ (21.3 shakl); solishtirish maqsadida shaklda $\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{Q}$ vektor ham tasvirlangan.

Nuqtaning harakat miqdori momentining O markazdan o‘tuvchi birorta Oz-o‘qqa nisbatan momenti, $\bar{m}_O(m\bar{v})$- vektorning shu o‘qqa bo‘lgan proektsiyasidan iborat bo‘ladi:

$$m_z(m\bar{v}) = |\bar{m}_O(m\bar{v})|_z = |\bar{m}_O(m\bar{v})| \cdot \cos\gamma \qquad (21.8)$$

bu erda γ - Oz o‘qi bilan $\bar{m}_O(m\bar{v})$ - vektor orasidagi burchak.

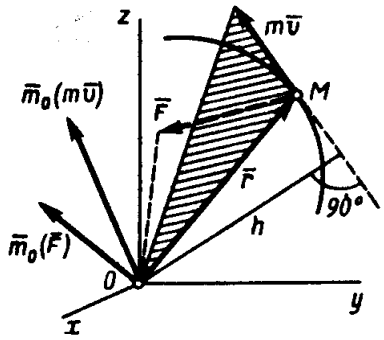
Momentlar teoremasi yordamida $\bar{m}_O(m\bar{v})$-vektorning vaqtga bog‘liq ravishda qanday o‘zgarishini aniqlash mumkin bo‘ladi. Buni isbot qilish uchun (21.7) tenglamadan vaqt bo‘yicha bir marta hosila olamiz,

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = (\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt}) = (\bar{v} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\bar{a}).$$

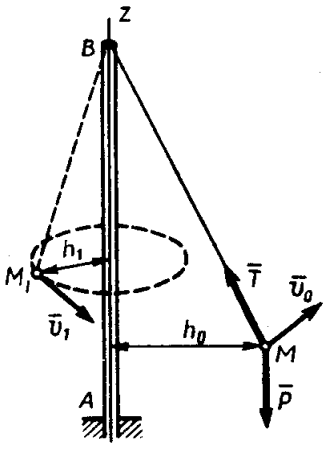
Lekin, $\bar{v} \times m\bar{v} = 0$ bo‘ladi, chunki bu ko‘paytma bir to‘g‘ri chiziqda yotgan ikkita vektorning vektor ko‘paytmasidan iborat. Hamda $m\bar{a} = \bar{F}$ ekanligini e’tiborga olgan holda, bir vaqtni o‘zida bir nechta kuchlar ta’sir etsa $\bar{F} = \sum \bar{F}_k$ bo‘ladi. Shu sababli

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} \quad \text{yoki} \quad \frac{d}{dt}[\bar{m}_O(m\bar{v})] = \bar{m}_O(\bar{F}) \qquad (21.9)$$

Natijada biz ixtiyoriy markazga nisbatan momentlar teoremasini isbot qildik: *nuqtaning birorta qo‘zg‘almas markazga nisbatan harakat miqdori momentidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosila, shu moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlarning ushbu markazga nisbatan olingan momentiga teng ekan.*



21.3 shakl



21.4 shakl

(21.9) va (21.4) tenglamalarni solishtirib, shuni aniqlaymizki, $m\bar{v}$ va $\bar{F}$ vektorlarning momentlari orasidagi bog‘lanish, $m\bar{v}$ va $\bar{F}$ vektorlarning o‘zaro bog‘lanishi kabi ekan.

(21.9) tenglikning ikkala tomonini qo‘zg‘almas O markazdan o‘tuvchi birorta Oz -o‘qqa proektsiyalasak va (21.8) tenglikni e’tiborga olsak,

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\bar{v})]=m_z(\bar{F}) \text{ bo‘ladi.} \qquad (21.10)$$

Ushbu tenglama *o‘qqa nisbatan momentlar teoremasi*ning differentsial formasini ifodalaydi.

(21.9) tenglamadan aniqlandiki, agar $\bar{m}_O(\bar{F})=0$ bo‘lsa, u holda $\bar{m}_O(m\bar{v})=\text{const}$ bo‘lar ekan, ya’ni: *agar nuqtaga ta’sir etuvchi kuchning birorta markazga nisbatan momenti nolga teng bo‘lsa, harakat miqdorining shu markazga nisbatan olingan momenti o‘zgarmas bo‘lar ekan.* Bunday natija nuqtaning markaziy kuch ta’siridagi harakatidan iborat amaliy muhim bo‘lgan hollar uchun o‘rinlidir (21.4§ ga qarang).

21.3 masala. AV vertikal trubkaning ichidan o‘tkazilgan MVA ipga, massasi m bo‘lgan M sharcha bog‘langan (21.4 shakl). Sharchani trubkaning o‘qidan h_0- masofada ushlab turib unga MVA tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan gorizontal $\bar{v}_O$-boshlang‘ich tezlik berildi. Shu vaqtdan boshlab ipni asta-sekin trubkaning ichiga torta boshlandi. Sharchaning z -o‘qidan h_1-masofadagi holatida uning v_1 -tezligining qiymati aniqlansin.

E ch i sh. Sharchaga uning og‘irlik kuchi $\bar{P}$ va ipning taranglik kuchi $\bar{T}$ ta’sir etadi. Ikkala kuchlarning ham Oz -o‘qiga nisbatan momentlari nolga teng bo‘ladi, chunki $\bar{P}$-kuchi z -o‘qiga parallel, $\bar{T}$-kuchi esa shu o‘qni kesib o‘tadi. Shu sababli (21.10) tenglamadan

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\bar{v})]=0,$$

bundan $m_z(m\bar{v})=m\cdot v\cdot h=const$ bo‘ladi. Massa m -o‘zgarmas bo‘lgani uchun harakat davomida $v_0h_0=v_1h_1$ bo‘ladi. Demak,

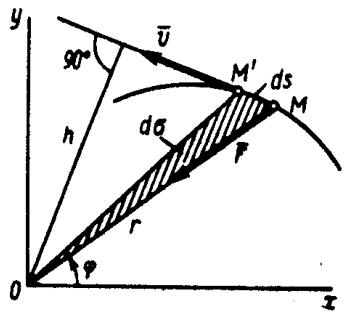
$$v_1= v_0h_0/h_1$$

bo‘ladi. Sharcha aylanish o‘qiga yaqinlashgan sari uning tezligi ortib borar ekan.

21.4§ Markaziy kuch ta’siridagi harakat. Yuzalar qonuni

Agar kuchning ta’sir chizig‘i har doim O markazni kesib o‘tsa, bunday kuch *markaziy* deb ataladi. Bunday kuchlarga planetalarning Quyoshga tortilish kuchlari yoki Er yo‘ldoshlarining Erga tortilish kuchi misol bo‘ladi.

(21.9) tenglamadan foydalanib markaziy $\bar{F}$ kuch ta’siridagi M nuqtaning harakatini o‘rganib chiqamiz (21.5 a shakl). Bunday kuchlarning O markazga nisbatan momenti nolga teng bo‘lgani uchun, ya’ni $\bar{m}_O(\bar{F})=0$ bo‘lgani uchun, $\bar{m}_O(m\bar{v})=\bar{r}\times m\bar{v}=const$ bo‘ladi. Hamda massa m-o‘zgarmas bo‘lgani uchun, $\bar{m}_O(\bar{v})=\bar{r}\times\bar{v}=const$ bo‘ladi, ya’ni $\bar{m}_O(\bar{v})$-vektor ham moduli, ham yo‘nalishi bo‘yicha o‘zgarmas bo‘lar ekan. Shuni eslatib o‘tish lozimki $\bar{m}_O(\bar{v})=\bar{r}\times\bar{v}$ vektori, har doim $\bar{r}$ va $\bar{v}$ vektorlar joylashgan tekislikka perpendikulyar ravishda yo‘nalgan bo‘ladi.

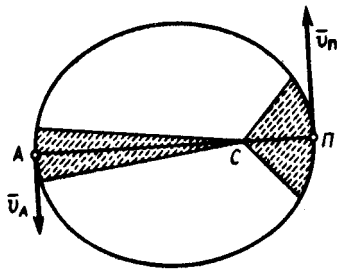


21.5a shakl

Shu sababli, agar $\bar{r}\times\bar{v}$ vektorining yo‘nalishi har doim o‘zgarmas bo‘lsa, M nuqtaning radius vektori $\bar{r}=\overline{OM}$ va uning tezligi $\bar{v}$ har doim faqat bir tekislikda yotishlari shart. Bundan xulosa qilib shuni aniqlaymizki, M nuqtaning traektoriyasi bir tekislikda joylashar ekan, ya’ni: *yassi egri chiziq*dan iborat ekan. Undan tashqari, o‘z navbatida $|\bar{m}_O(\bar{v})|=v\cdot h=$ const bo‘ladi.

Oxirgi natija bunday harakat haqida tasviriy geometrik tafsilot beradi. Yuqoridagilarga asosan $vh=h\cdot ds/dt$, va $h\cdot ds=2d\sigma$, bu erda $d\sigma$-OMM' elementar uchburchakning yuzasi, shu sababli $vh=2d\sigma/dt$. Ushbu $d\sigma/dt$ qiymat, M nuqtaning harakatida OM radius - vektor tomonidan hosil bo‘layotgan OMM' elementar uchburchakning yuzasini o‘sishini ko‘rsatadi va shu sababli uni nuqtaning *sektor tezligi* deb ataladi. Ushbu masalada uning qiymati o‘zgarmas bo‘ladi:

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{2}|\overline{m}_O(m\overline{v})|=\text{const} \qquad (21.11)$$



21.5 b shakl

Shunday qilib, *faqat markaziy kuch ta'sir etgan nuqta bir tekislikda yotuvchi egri chiziqli harakatda bo‘lib, uning sektor tezligi o‘zgarmas bo‘lar ekan, ya'ni nuqtaning radius - vektori bir xil vaqt davomida, son qiymati teng bo‘lgan yuzalar hosil qiladi* (yuzalar qonuni).

Ushbu qonun, planetalarning va «Er yo‘ldoshlari (sputnik)»larning xarakatlari uchun asosiy qonuniyat hisoblanib, u *Kepler qonunlari*dan biri hisoblanadi.

Misol. Quyoshning tortilish kuchi ta'sirida harakat qilayotgan planetaning orbitasi ellipsdan iborat bo‘lib, Quyosh shu ellipsning bitta fokusida joylashgan bo‘ladi (21.5 b shakl). Tortilish kuchi markaziy kuch bo‘lganligi sababli, planetaning harakatida yuzalar qonuni o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun orbitaning Quyoshga eng yaqin bo‘lgan P nuqtasida (perigeliy) planetaning tezligi v_P - eng katta qiymatga ega bo‘ladi. va orbitaning Quyoshdan eng uzoq joylashgan A nuqtasi (*afeliy*)da planetaning tezligi v_A - eng kichkina qiymatga ega bo‘ladi.

Ushbu natija (21.11) tenglamadan kelib chiqib, A va P nuqtalar uchun $v_A\cdot AC=v_P\cdot PS$ tenglik hosil bo‘ladi. Bunday xulosaga 21.5 shaklda ko‘rsatilgan punktir orqali shtrixlangan sektorning yuzasi bir xil vaqt davomida bir xil miqdordagi yuzalarni egallaydi (yuzalarning shakli emas, balki ularning son qymatlari bir xil bo‘ladi, ya'ni shaklan teng emas, balki son qiymati bo‘yicha teng yuzalardan iborat bo‘ladi); Demak, bir xil vaqt oralig‘ida nuqta Quyoshga eng yaqin P joyda, Quyoshga eng uzoq A joydagiga nisbatan ko‘proq yo‘l bosar ekan.

Xuddi shunday natijalarni Er yo‘ldosh («sputnik»)larning harakatlarida ham ko‘rish mumkin ekan.

21.5§ Kuchning bajargan ishi. Quvvat

Jismga qo‘yilgan kuch ta’sirida, uning ma’lum ko‘chishidagi (harakatidagi) dinamik xarakteristikalarni belgilovchi asosiy qiymatlardan biri, bu kuchning bajargan ishi hisoblanadi va u nafaqat mexanikada, hatto, umuman texnikada katta ahamiyatga ega. Avvaliga elementar ish tushunchasini kiritamiz (*shuni eslatib o‘tish lozimki, ishni faqat kuch bajaradi,* ***kuch va siljish (harakat) yo‘q joyda ish yo‘q****, ya’ni ish o‘z-o‘zidan bajarilmaydi*).

Moddiy M nuqtaga qo‘yilgan $\bar{F}$ kuchning, shu kuch ta’sirida bajarilgan *elementar ishi* deb

$$dA=F_\tau \cdot ds \qquad (21.12)$$

iborat skalyar[12] qiymatga aytiladi. Bu erda F_τ - M nuqtaga ta’sir etayotgan $\bar{F}$ kuchning nuqta harakatining traektoriyasiga urinma M_τ - o‘qdagi proektsiyasi (yoki M nuqtaga ta’sir etayotgan $\bar{F}$ kuchning $\bar{v}$ - tezlik yo‘nalishiga proektsiyasi); ds - M nuqtaning elementar ko‘chishining moduli.

Yuqoridagi ish haqida keltirilgan ifodalar, nuqtaning tezligining modulini o‘zgarishiga sababchi bo‘lgan ishni bajargan kuch haqidagi tushunchalarga oid xolos. Agar $\bar{F}$ kuchni ikkita F_τ va F_n tashkil etuvchilarga ajratib yuborsak, tezlikning modulini faqat F_τ - orqaligina o‘zgartirish mumkin ekanligini ko‘ramiz, chunki $F_\tau=ma_\tau=m\cdot dv/dt$. ($F_n$ tashkil etuvchisi esa tezlik $\bar{v}$-ning yo‘nalishni o‘zgartiradi, yoki erkin bo‘lmagan harakatda jismning bog‘lanishiga ko‘rsatgan bosim kuchini ifodalaydi).

$F_\tau=F\cdot\cos\alpha$ bo‘lgani sababli, (bu erda α - $\bar{F}$ kuch bilan M_τ - o‘q orasidagi burchak) elementar ish uchun (21.12) formula orqali boshqacha ifoda olamiz, ya’ni

$$dA=F\cdot ds\cdot\cos\alpha \qquad (21.13)$$

Agar α - burchak o‘tkir bo‘lsa, ish musbat bo‘ladi, $\alpha=0$ bo‘lsa elementar ish $dA=F\cdot ds$ -ga teng bo‘ladi.

Agar α - burchak o‘tmas bo‘lsa, ish manfiy bo‘ladi, $\alpha=180°$ bo‘lsa elementar ish $dA=-F\cdot ds$ -ga teng bo‘ladi.

[12] Bu erdagi dA - elementar qiymatning belgisi, ya’ni differentsialning belgisi emas. Ixtiyoriy dA funktsiyaning differentsiali, mutloq bo‘lmasligi ham mumkin.

Agar $\alpha=90°$ bo‘lsa, ya’ni:*kuch harakat yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘lsa, bajarilgan elementar ish nolga teng bo‘ladi* (dA=0).

Ishning ishorasini ma’nosi quyidagicha: agar kuchning $\bar{F}_\tau$ -tashkil etuvchisi harakat yo‘nalishi bo‘yicha yo‘nalgan bo‘lsa, ish musbat bo‘ladi (chunki, bunday yo‘nalgan kuch harakatni tezlashtiradi); agar kuchning $\bar{R}$ - tashkil etuvchisi harakat (tezlikning) yo‘nalishiga teskari yo‘nalgan bo‘lsa, ish manfiy bo‘ladi (bunday kuch harakatni sekinlashtiradi);

Agar $ds=|d\bar{r}|$-ekanligini e’tiborga olsak ($d\bar{F}$-elementar ko‘chish vektori) va vektor algebrasidagi ikkita vektorning skalyar ko‘paytmasi haqidagi qoidaga asosan (21.13) formula quyidagicha ko‘rinishga keladi[13]

$$dA=\bar{F}\cdot d\bar{r} \qquad (21.14)$$

Demak, *elementar ish deb, kuch vektorini elementar ko‘chish vektoriga bo‘lgan skalyar ko‘paytmasiga aytiladi.*

Agar (21.14) formuladagi $\bar{F}$ va $\bar{r}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini ularning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari, ya’ni: $r_x=x$, $r_y=y$, $r_z=z$ orqali ifodalasak, *elementar ishning analitik ifodasini* aniqlaymiz,

$$dA=F_x dx+ F_y dy+ F_z dz \qquad (21.15)$$

bu erda x, y, z -lar $\bar{F}$-kuchning qoordinata o‘qlaridagi o‘rni.

Kuchning ixtiyoriy M_0M_1 tugal ko‘chishdagi (21.6 shakl) bajargan ishi tegishli elementar ishlarning integral yig‘indilarining chegarasidan iborat bo‘ladi,

$$A_{(M_0M_1)}=\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds \qquad (21.16)$$

yoki

$$A_{(M_0M_1)}=\int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx+F_y dy+F_z dz) \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (21.16’)$$

Demak, *ixtiyoriy* M_0M_1 *ko‘chishdagi kuchning bajargan ishi, shu harakat yo‘nalishidagi elementar ishlarning integral yig‘indisiga teng ekan.* Integralning chegarasi o‘zgaruvchilarning M_0 va M_1 -

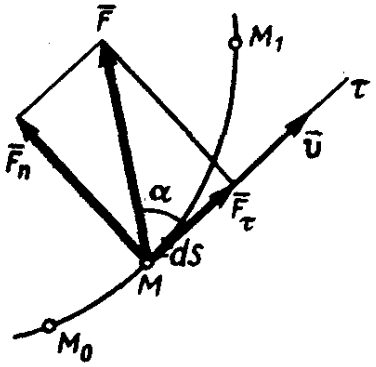
[13] Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorning skalyar ko‘paytmasi deb, $\bar{a}\cdot\bar{b}=a\cdot b\cdot\cos\alpha$ -qiymatga aytiladi, bu erdagi α, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini, vektorlarning proektsiyalari orqali quyidagicha aniqlanadi: $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

nuqtalaridagi qiymatlaridan iborat bo‘ladi (aniqroq qilib aytganda integral M_0M_1 egri chiziq bo‘yicha olinadi, ya’ni u egri chiziqli bo‘ladi).

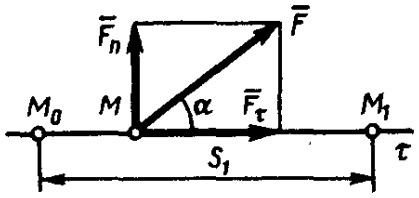
Agar F_τ -o‘zgarmas bo‘lsa (F_τ=const), u holda M_0M_1 egri chiziqni s_1 orqali belgilasak, (21.16) tenglamadagi integral, quyidagicha bo‘ladi,

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau \cdot s_1 \qquad (21.17)$$

Bunday holat jismga ta’sir etayotgan kuch ham yo‘nalishi, ham



21.6 shakl



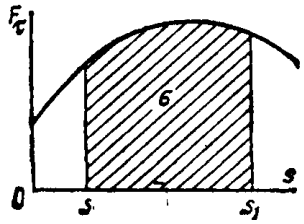
21.7 shakl

moduli o‘zgarmas va nuqtaning harakati to‘g‘ri chiziqli bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi (21.7 shakl). Ushbu holda F_τ=Fcosα=const bo‘ladi va

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau \cdot s_1 \cdot \cos\alpha \qquad (21.17')$$

Ishning o‘lchov birligi SI sistemasida - 1 djoul (1Dj=1N·m=1kg·m^2/c^2), MKGSS sistemasida -1kG·m.

Ishni grafik usulda hisoblash. Agar kuch masofaga bog‘liq bo‘lsa va F-kuchning s -masofaga bog‘lanish grafigi ma’lum bo‘lsa (21.8 shakl), u holda ishni grafik usulda hisoblash mumkin bo‘ladi. Nuqta M_0 holatda bo‘lganda, hisob boshidan s_0 -masofada joylashgan bo‘lsin, M_1 holatda bo‘lganda, hisob boshidan s_1 -masofada joylashgan bo‘lsin. U holda integralning geometrik mazmuniga asosan (21.16) formulaga asosan,



21.8 shakl.

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{S_0}^{S_1} F_\tau ds = \sigma$$

bu erda σ - shtrixlangan figuraning yuzasini (21.8 shakl) masshtab koeffitsentiga ko‘paytmasi.

Q u v v a t. *Quvvat deb vaqt birligi ichidagi bajarilgan ishga aytiladi*. Agar ish bir maromda olib borilsa, u holda quvvat $N=A/t_1$, bu erda t_1 - A ishni bajarishga ketgan vaqt. Umumiy holda, quvvat quyidagi formula orqali aniqlanadi,

$$N=dA/dt=F_\tau \cdot ds/dt= F_\tau \cdot v \qquad (21.18)$$

Demak, *quvvat kuchning urinma o‘qdagi tashkil etuvchisini tezlikka bo‘lgan ko‘paytmasidan iborat ekan.*

Quvvatning o‘lchov birligi SI sistemasida - 1 vatt (1Vt=1Dj/c), MKGSS sistemasida -1kG·m/c. Texnikada quvvatning birligi sifatida 736 Vt yoki (75 kG·m/c) ga teng bo‘lgan 1 *ot kuchi* ishlatiladi.

Mashinaning bajargan ishini, uning quvvatini vaqtga bo‘lgan ko‘paytmasi orqali o‘lchash mumkin. Shu sababli ishning texnikada foydalaniladigan *kilovatt·soat* -dan iborat o‘lchov birligi paydo bo‘ldi (1 kVt·soat=3,6×10^6 Dj≈367100 kG·m).

N= F_τ·v -tenglikdan ko‘rinib turibdiki, quvvati N-ga teng bo‘lgan dvigatelning qanchalik v -tezligi kam bo‘lsa, uning tortish kuchi F_τ-shunga teskari proportsional ravishda katta bo‘ladi, yoki aksincha. Shu sababli, qiya balandlikka ko‘tarilishda yoki yo‘lning yomon (o‘ydim-chuqir) joylarida avtomobilni past tezlikka ulanadi, natijada past tezlik evaziga katta tortuvchi kuchi paydo bo‘ladi.

Tayanch so‘z va iboralar: Harakat miqdori momenti, momentlar teoremasi, ish, quvvat.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etishga qaratilgan uslubiy ko‘rsatmalar:

1. Moddiy nuqta dinamikasining muhim xarakteristikalaridan biri, harakatdagi moddiy nuqtaning harakat miqdori hissoblanar ekan. Harakat miqdori vektor qiymat bo‘lib, moddiy nuqtaning massasini, uning tezlik vektoriga bo‘lgan ko‘paytmasiga aytilar ekan.
2. Moddiy nuqta harakatining yana bir muhim xarakteristikalaridan biri, shu harakatlanayotgan moddiy nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlarning impulsi hisoblanar ekan. Kuch impulsi vektor qiymat bo‘lib, kuchning yo‘nalishida yotadi. Agar shu harakatlanayotgan moddiy nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlar vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgaruvchan bo‘lsa, shu kuchning ma’lum vaqt oraligidagi impulsi (21.3) formula orqali aniqlanar ekan.
3. Harakatlanayotgan moddiy nuqtaga ta’sir etayotgan kuch, nuqtaning harakat miqdorini tegishli ravishda o‘zgartirar ekan. Moddiy nuqtaning harakat miqdorini qanchaga o‘zgarishini (21.6) formula orqali hisoblash mumkin ekan.
4. Agarda moddiy nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlarning vektor yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, nuqtaning harakat miqdori o‘zgarmas ekan. Bunday

holatni, moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni deb atalar ekan.

5. Agar moddiy nuqta aylanma harakatda ishtirok etayotgan bo‘lsa, uning harakatini xarakterlovchi qiymatni, harakat miqdorining momenti orqali ifodalanadi. Harakat miqdorining momenti vektor qiymat bo‘lib, nuqtaning radius vektorini uning harakat miqdori vektoriga bo‘lgan vektor ko‘paytmasiga aytilar ekan.
6. Aylanma harakatdagi moddiy nuqtaning aylanma harakatini o‘zgarishiga asosiy sabab, shu nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlarning aylanish o‘qiga nisbatan olingan momentining o‘zgarishi ekan. Ushbu holatni aniqlab beruvchi (21.10) formulani, momentlar teoremasi deb atalar ekan.
7. Agarda, birorta o‘q yoki nuqta atrofida aylanayotgan moddiy nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlarning shu o‘qqa nisbatan momentlarining vektor yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, uning harakat miqdorining momenti o‘zgarmas ekan. Bunday holatni moddiy nuqtaning harakat miqdori momentini saqlanish qonuni deb atalar ekan.
8. Dinamika qismining muhim qiymatlaridan yana biri ish va quvvat hisobladi. Ish va quvvatni shu nuqtaga qo‘yilgan kuchlar bajaradi. Moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar, uni ma’lum masofaga ko‘chirishda, tegishli miqdorda ish bajaradi. Ish skalyar qiymat bo‘lib, uning miqdorini (21.16) formula orqali hisoblanar ekan.
9. Agar moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar vaqtga yoki nuqtaning tezligiga bog‘liq ravishda o‘zgarsa, (21.16) formula orqali, uning bajargan ishini hisoblash mumkin emas.
10. Quvvat deb, vaqt birligi ichida bajarilgan ishga aytilar ekan. Ikkita kuch bir xil ishni bajarsa-yu, lekin bu ishlarni bajarishga sarflangan vaqtlari turlicha bo‘lsa, qaysi kuch shu ishni tezroq bajargan bo‘lsa, o‘sha kuch quvvatliroq deb hisoblanar ekan.
11. Quvvat ham skalyar qiymat bo‘lib, uning son qiymati (moduli)ni (21.18) formula yordamida hisoblanar ekaan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Moddiy nuqtaning harakat miqdori deb nimaga aytiladi?
2. Kuch impulsi nima va uni qanday hisoblanadi?
3. Moddiy nuqtaning harakat miqdori bilan shu nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlarning impulslari orasidagi matematik bog‘lanishni aytib bering?

4. Moddiy nuqtaning harakat miqdorini saqlash uchun qanday shart bajarilishi lozim?
5. Moddiy nuqtaning harakat miqdori momenti deb nimaga aytiladi?
6. Harakat miqdori momentini o‘zgartirish uchun qanday shartlar bajarilishi lozim?
7. Harakat miqdori momentini o‘zgarmas holda saqlash uchun, nimalar bajarilishi lozim?
8. Ishni bajarish uchun nimalar sodir bo‘lishi shart?
9. Ish, skalyar qiymatmi yoki vektor qiymatmi?
10. Kuch vaqtga va tezlikka bog‘liq ravishda o‘zgarsa, bajarilgan ishni (21.16) formula orqali hissoblash mumkinmi?
11. Quvvat nimani bildiradi?
12. Ikki xil kuch bir xil ishni bajarsa, ularni qanday farqlash mumkin?

Mavzuni mustahkamlash uchun 21 ilovadagi masalalarni eching:

22 – Ma’ruza

Mavzu: Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema. Ishni, quvvatni va kinetik energiyani o‘zgarishini hisoblashga oid mashqlar..

REJA:

1. Ishni hisoblashga oid misollar.
2. Moddiy nuqtaning kinetik energiyasini o‘zgarishi haqidagi teorema.

Muammo: Biz yuqorida ish va quvvatni hisoblashga oid formulalarni keltirib chiqargan edik. Endi o‘sha formulalar orqali konkret (ya’ni muqim) masalalarni qanday echish yo‘llarini bayon qilamiz.

22.1§. Ishni hisoblashga oid misollar.

Yuqoridagi ish va quvvatni hisoblashga oid qonun va qoidalar asosida quyidagi misollarni ko‘rib chiqamiz.

1. Og‘irlik kuchining bajargan ishi. M nuqta faqat og‘irlik kuchi $\overline{P}$ ta’sirida harakatga kelib, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ holatdan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ holatga ko‘chib o‘tsin. Koordinata o‘qlarini tanlab olamiz va Oz - o‘qini vertikal ravishda yuqoriga yo‘naltiramiz (22.1 shakl). U holda $R_x=0$, $R_y=0$, $R_z=-R$ bo‘ladi. Ushbu qiymatlarni (21.16’) formulaga qo‘ysak va integral ostidagi o‘zgaruvchilar z-dan iborat bo‘lgani uchun

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{z_0}^{z_1}(-P)dz = \mathrm{R}(z_0 - z_1)$$ ko‘rinishga keladi.

Agar M_0 - nuqta M_1 nuqtadan yuqori bo‘lsa, u holda $z_0-z_1=h$ bo‘ladi, bu erda h - nuqtaning vertikal o‘q bo‘yicha harakati, agar M_0 - nuqta M_1 nuqtadan past bo‘lsa $z_0-z_{1=}-(z_1-z_0)=-h$ bo‘ladi. Natijada og‘irlik kuchining bajargan ishi

$$A_{(M_0M_1)} = \pm R \cdot h$$ ga teng bo‘ladi. (22.1)

Demak, *og‘irlik kuchining bajargan ishi, og‘irlik kuchining modulini shu kuch qo‘yilgan nuqtaning vertikal o‘q bo‘yicha harakatidagi balandliklar farqiga bo‘lgan ko‘paytmasini, tegishli ravishda musbat va manfiy ishora bilan olinganiga teng ekan.* Agar boshlang‘ich nuqta oxirgi nuqtadan yuqori bo‘lsa, ish musbat bo‘lar ekan va boshlang‘ich nuqta oxirgi nuqtadan past bo‘lsa, ish manfiy bo‘lar ekan.

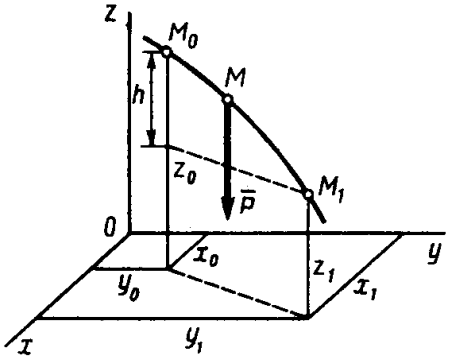
Olingan natija shuni ko‘rsatib turibdiki, og‘irlik kuchining bajargan ishi nuqtaning qaysi traektoriya bo‘ylab harakat qilayotganligiga bog‘liq emas ekan. Shunday xossaga ega bo‘lgan kuchlar *potentsial* kuchlar deb ataladi.

2. Elastiklik kuchining bajargan ishi. Prujinaning bo‘sh uchiga mahkamlanib, silliq gorizontal tekislik ustida joylashgan M nuqtaning harakatini olib ko‘raylik (22.2 shakl). Prujina erkin holatda bo‘lgandagi M nuqtaning o‘rnini O bilan belgilaylik ($AO=l_0$ - prujinaning kuchlanmagan holdagi uzunligi). va u nuqtani koordinata boshi deb tanlab olamiz. Agar prujinani tortib l - uzunlikgacha uzaytirsak, u holda prujina $\lambda=l$, ya’ni - l_0 qiymatga cho‘ziladi va shu yukka O nuqta tomonga yo‘nalgan elastiklik kuchi - $\bar{F}$ ta’sir eta boshlaydi. Ushbu masalada $\lambda=x$ bo‘lgani uchun 19.4§ dagi (19.6) formulaga asosan,

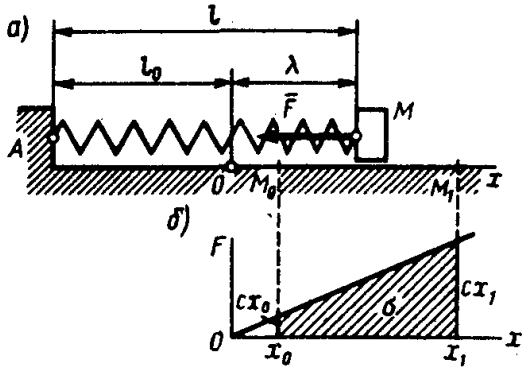
$$F=c\lambda=c|x| \quad \text{yoki} \quad F_x=-cx$$

bo‘ladi. Agar $x<0$ (yuk O nuqtadan chapda joylashadi) bo‘lsa ham ushbu tenglik o‘rinli bo‘ladi; u holda $\bar{F}$-kuchi o‘ng tomonga yo‘naladi va kutilgandek $F_x>0$ bo‘ladi.

Shu yukni $M_0(x_0)$ holatdan $M_1(x_1)$ holatga ko‘chishida elastiklik kuchining bajargan ishini aniqlaylik. Yukning bunday harakatida $F_x=-cx$, $F_y=F_z=0$ bo‘ladi va ushbu qiymatlarni (21.16’) formulaga keltirib qo‘ysak,



22.1 shakl



22.2 shakl

$$A_{(M_0M_1)}=\int_{x_0}^{x_1}(-cx)dx=\frac{c}{2}(x_0^2-x_1^2) \quad \text{bo‘ladi.}$$

[Ushbu natijani F bilan x orasidagi bog‘lanishlik bo‘yicha qurilgan grafik bo‘yicha ham aniqlash mumkin, (22.2 b shakldagi) shtrixlangan trapetsiya’ning yuzasi σ -tegishli ishora bilan yuqoridagi ishning modulini aniqlaydi]. Aniqlangan formuladagi x_0 -prujinaning

boshlang‘ich uzunligi λ_0-ni ko‘rsatadi, x_1-esa prujinaning keyingi uzunligi λ_1-ni ko‘rsatadi. Demak,

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{x_0}^{x_1} (-cx)dx = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2) \qquad (22.2)$$

ya’ni, *elastiklik kuchining bajargan ishi, prujinaning boshlang‘ich va oxirgi uzunliklarining (yoki siqilishlarining) kvadratlarining ayirmasining yarmiga teng ekan.*

Agar $\lambda_0>\lambda_1$ bo‘lsa ish musbat bo‘ladi, ya’ni prujinaning uchi muvozanat holat tomonga harakatlanadi, $\lambda_0<\lambda_1$ bo‘lsa ish manfiy bo‘ladi, ya’ni prujinaning uchi muvozanat holatdan teskari tomonga harakatlanadi.

Agar prujinaga mahkamlangan M yukning traektoriyasi egri chiziqdan iborat bo‘lsa (22.2) formula o‘rinli bo‘ladi, agar kerak bo‘lsa buni isbot qilishimiz mumkin. Shunday qilib, elastiklik kuchi $\bar{F}$ -ning bajargan ishi faqat λ_0 va λ_1 -largagina bog‘liq bo‘ladi, ya’ni M nuqtaning traektoriyasiga bog‘liq emas ekan. Shu sababli, elastiklik kuchi ham *potentsial* kuch hisoblanadi.

3. Ishqalanish kuchining bajargan ishi. Birorta g‘adir-budir tekislik yoki egri chiziq bo‘ylab harakatlanayotgan nuqtani olib ko‘raylik. Nuqtaga ta’sir etayotgan ishqalanish kuchining moduli fN-bo‘ladi, bu erda f-ishqalanish koeffitsienti, N -yuzaning normal bosimi. Ishqalanish kuchi har doim harakat yo‘nalishiga teskari bo‘ladi. Shu sababli, $F_{ishq\tau}$=- F_{ishq}=- fN, va (21.16) formulaga asosan,

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\text{ishq}}\,ds = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} fN ds$$ bo‘ladi.

Agar ishqalanish kuchining son qiymati o‘zgarmas bo‘lsa, u holda $A_{(M_0M_1)}$=-F_{ishq}·s - ga teng bo‘ladi, bu erda s -M_0M_1 egri chiziq bo‘ylab bosib o‘tilgan yo‘l.

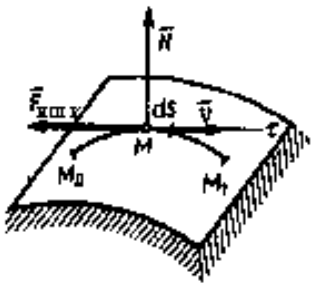
Shunday qilib, sirpanishdagi ishqalanish kuchining bajargan ishi har doim manfiy bo‘lar ekan. Ushbu ish M_0M_1 - yoyga (ya’ni traektoriyaga) bog‘liq bo‘lgani uchun, ishqalanish kuchi *potentsial kuch emas* ekan.

4. Markaziy kuchning bajargan ishi. Agar Erni (planetani) bir jinsli shar (yoki bir jinsli kontsentratsiyalashgan qobiqlardan tashkil topgan sharlardan iborat) deb hisoblasak, u holda Erning O markazidan r -masofada joylashgan (yoki sharning sirtidagi) massasi m-ga teng bo‘lgan M nuqtaga Erning O markaziga yo‘nalgan tortilish kuchi $\bar{F}$

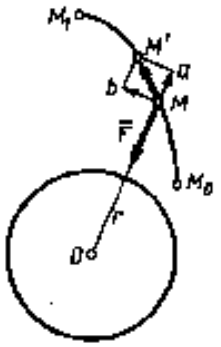
ta’sir etadi (22.4 shakl). Bu kuchning son qiymati 19.4§ dagi (19.5) formula orqali aniqlanadi. O‘sha formulani quyidagicha yozaylik

$$F=km/r^2$$

va nuqta Erning sirtida joylashgan deb faraz qilib, koeffitsient k-ni aniqlaylik (bu erda r=R, va R-Erning radiusi). Erning tortilish kuchining son qiymati mg, bu erdagi g- Er sirtidagi og‘irlik kuchining tezlanishi (aniqrog‘i, tortilish kuchining tezlanishi). U holda $mg=km/R^2$ va $k=gR^2$ bo‘ladi.



22.3 shakl.



22.4 shakl.

Shu tortilish kuchi $\overline{F}$ -ning bajargan elementar ishini aniqlaylik. Shakldan ko‘rinib turganidek, M nuqtaning MM’-elementar ko‘chishini ikkita tashkil etuvchilarga ajratib yuboramiz. Ulardan biri OM=r masofaning orttirmasi dr -dan iborat bo‘lgan va OM bo‘yicha yo‘nalgan $\overline{Ma}$ elementar ko‘chish, ikkinchisi esa OM-ga va $\overline{F}$-kuchga perpendikulyar bo‘lgan $\overline{Mb}$-elementar ko‘chishdan iborat. Lekin $\overline{Ma}$ elementar ko‘chish $\overline{F}$-kuchga teskari tomonga yo‘nalganligi sababli,

$$dA=-Fdr=-km\frac{dr}{r^2}=-mgR^2\frac{dr}{r^2} \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (22.3)$$

Faraz qilaylik, M nuqta M_0 - ($r=r_0$) holatdan, yangi M_1 ($r=r_1$) holatga ko‘chib o‘tsin. U holda

$$A_{(M_0M_1)}=\int_{(M_0)}^{(M_1)}dA=-mgR^2\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r^2}=mgR^2\int_{r_0}^{r_1}d\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{bo‘ladi}$$

va bundan oxirgi natijani olamiz,

$$A_{(M_0M_1)}=mgR^2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0}\right) \qquad (22.4)$$

Agar $r_0>r_1$ bo‘lsa, ya’ni nuqtaning oxirgi holati boshlang‘ich holatiga nisbatan Er markaziga yaqin bo‘lsa ish musbat bo‘ladi, agar $r_0<r_1$ bo‘lsa, ya’ni nuqtaning oxirgi holati boshlang‘ich holatiga nisbatan Er markaziga uzoq bo‘lsa ish manfiy bo‘ladi. (22.4) formuladan ko‘rinib turganidek, markaziy tortilish kuchining ishi nuqtaning traektoriyasiga bog‘liq emas ekan. Shu sababli bu kuch ham *potentsial* kuch hisoblanadi.

22.2§. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema.

Muammo: Biz yuqorida harakatdagi moddiy nuqtaning harakat miqdori va harakat miqdori momentini nima sabablarga ko‘ra o‘zgarishi mumkin ekanligini ko‘rib o‘tgan edik. Endi dinamikaning muhim qiymatlaridan biri bo‘lgan kinetik energiyasining o‘zgarishiga nimalar sabab bo‘lishi mumkinligi va uni matematik ifodasi qanday ko‘rishda bo‘lishi haqida fikr yuritamiz.

Harakatning asosiy dinamik xarakteristikalaridan yana biri - kinetik energiya haqidagi tushunchani kiritamiz. *Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi deb, nuqta massasining uning tezligining kvadratiga bo‘lgan ko‘paytmasini yarmiga teng bo‘lgan* $mv^2/2$ *-dan iborat skalyar qiymatga aytiladi.*

Kinetik energiyaning o‘lchov birligi, ishning o‘lchov birligi bilan bir xil, ya’ni (SI-da 1 Dj). Shu sababli ular orasidagi bog‘lanishni aniqlaymiz.

Massasi m-ga teng bo‘lgan moddiy nuqta M, M_0 holatdan v_0-tezlik bilan harakat boshlab M_1 holatga v_1-tezlik bilan etib kelgan bo‘lsin.

Kinetik energiya bilan ish orasidagi bog‘lanishni aniqlash uchun, dinamikaning asosiy qonuni $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$ -ga murojaat qilamiz. Ushbu tenglamaning ikkala tomonini harakatning traektoriyasiga urinma bo‘lgan o‘qqa proektsiyalab, quyidagini aniqlaymiz,

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}$$

Ushbu tenglikdagi urinma tezlanishni quyidagicha yozib olamiz, ya’ni

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{dv}{ds}$$ bo‘ladi.

Natijada, yuqoridagi tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi,

$$mv \frac{dv}{ds} = \sum F_{k\tau}$$

bu tenglikniing ikkala tomonini ds -ga ko‘paytirib, massa m-o‘zgarmas bo‘lganligi uchun uni differentsial ostiga olib kiramiz. U holda $F_{k\tau} \cdot ds = dA_k$ va bu erdagi dA_k - $\bar{F}_1$ kuchning bajargan elementar ishi ekanligini e’tiborga olsak, nuqtaning kinetik energiyasini o‘zgarishi haqidagi teoremani differentsial ko‘rinishini ifodalovchi formulani olamiz:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\sum dA_k \qquad (22.5)$$

Ushbu tenglikning ikkala tomonini nuqtaning M_0 va M_1 holatlaridagi o‘zgaruvchilarning chegaralari bo‘yicha integrallab, oxirgi natijani olamiz,

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_{(M_0M_1)} \qquad (22.6)$$

(22.6) tenglama, nuqtaning kinetik energiyasini o‘zgarishi haqidagi teoremaning tugal ko‘chishdagi ko‘rinishini ifodalovchi formuladan iborat ekan, ya’ni: *nuqtaning ma’lum ko‘chishidagi kinetik energiyasining o‘zgarishi, shu ko‘chishda nuqtaga ta’sir etgan kuchlarning bajargan ishlarining yig‘indisiga teng ekan.*

Erkinmas jismning harakati. Agar nuqta bog‘lanishli bo‘lsa, ya’ni erkinmas harakatda bo‘lsa, u holda (22.6) tenglamaning o‘ng tomoniga $\bar{F}_k^a$-aktiv (berilgan) kuchlarning bajargan ishlaridan tashqari, qo‘shimcha ravishda bog‘lanishlarning reaktsiyalarini bajargan ishlari ham kiradi. Hozircha nuqta faqat silliq (ishqalanishsiz) tekislik yoki egri chiziq bo‘ylab, harakatlanmoqda deb faraz qilaylik. U holda (22.3 shakl), $\bar{N}$-kuchi tekislikka yoki traektoriyaga normal o‘q bo‘ylab yo‘naladi, natijada $N_\tau=0$ bo‘ladi. Shu sababli (21.16) formulaga asosan nuqtaning qo‘zg‘almas silliq tekislik (yoki egri chiziq) bo‘yicha har qanday harakatida reaktsiya kuchlarining bajargan ishlari nolga teng bo‘ladi va (22.6) formuladan quyidagini yozamiz,

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A^a_{(M_0M_1)} \qquad (22.6')$$

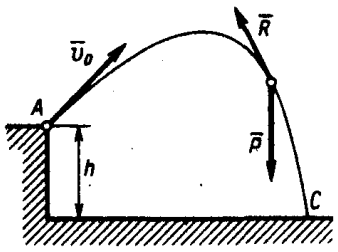
Demak, nuqtaning qo‘zg‘almas silliq tekislik (yoki egri chiziq) bo‘ylab qilgan harakatidagi kinetik energiyaning o‘zgarishi, faqat shu nuqtaga qo‘yilgan *aktiv* kuchlarning bajargan ishlarining yig‘indisiga teng ekan.

Agar tekislik (egri chiziq) g‘adir-budir bo‘lsa, u holda aktiv kuchlarning bajargan ishlari qatoriga ishqalanish kuchining bajargan (22.1§ -ga qarang) ishini ham qo‘shish lozim bo‘ladi. Agar, nuqta harakat qilayotgan tekislik (egri chiziq) ham qo‘zg‘aluvchan bo‘lsa, M nuqtaning absolyut ko‘chishi $\bar{N}$-ga perpendikulyar bo‘lmaydi, natijada $\bar{N}$-reaktsiya kuchining ishi (masalan, lift platformasining reaktsiya kuchining ishi) nolga teng bo‘lmaydi.

M a s a l a l a r e ch i sh. Kinetik energiyaning o‘zgarishi haqidagi teorema [(22.6) formula] yordamida, nuqtaning tezligini qanday o‘zgarishi ma’lum bo‘lsa, unga ta’sir etuvchi kuchlarning bajargan ishlarini aniqlash mumkin (dinamikaning birinchi masalasi) yoki kuchlarning bajargan ishi ma’lum bo‘lsa, nuqtaning tezligini (dinamikaning ikkinchi masalasi) aniqlash mumkin ekan.

Ikkinchi masalani echishda, kuchlar berilgan bo‘ladi va ularning bajargan ishlarini aniqlab olish lozim bo‘ladi. (21.16) va (21.16’) formulalardan ko‘rinib turibdiki, ishni hisoblash uchun nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlar o‘zgarmas bo‘lishligi yoki faqat nuqtaning holati(koordinatalari)ga bog‘liq holda o‘zgaruvchan bo‘lishi shart ekan, masalan elastiklik kuchlari, markaziy tortilish kuchlari (22.1§ ga qarang).

Shunday qilib, (22.6) formula orqali dinamikaning ikkinchi masalasini echish uchun: ta’sir etuvchi kuchlar, nuqtaning boshlang‘ich va oxirgi holati (koordinatasi), boshlang‘ich va oxirgi holatidagi tezliklarning son qiymatlari (ya’ni: $\bar{F}$, s, v_0, v_1) berilgan bo‘lishi shart. Hamda nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar o‘zgarmas yoki holati (koordinatalari)ga bog‘liq holda o‘zgaruvchan bo‘lishi shart ekan.



22.5 shakl.

Lekin kinetik energiyaning o‘zgarishi haqidagi teoremaning differentsial [(22.5) formula] formasi yordamida masalalarni qanday kuchlar bo‘lishidan qatiy nazar echish mumkin.

22.1 masala. Balandligi 5 m bo‘lgan A punktdan massasi m=2 kg -li yuk v_0=20m/s boshlang‘ich tezlik bilan otib yuborilgan (22.5 shakl) va uning Erga qaytib tushgan S nuqtadagi tezligining son qiymati v_1=16 m/s ga teng bo‘lgan. Shu yukning harakatida unga ta’sir etuvchi kuchlarning va qarshilik kuchlarining bajargan ishlari aniqlansin.

E ch i sh. Yukning harakatida unga yukning og‘irlik kuchi $\bar{P}$ va havoning qarshilik kuchi $\bar{R}$ ta’sir etadi. Yukni moddiy nuqta deb faraz qilib, kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasidan quyidagini yozamiz

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A(\bar{P}) + A(\bar{R})$$

Ushbu tenglikdan (22.1) formulaga asosan A($\bar{P}$)=R·h=mg·h ekanligini e’tiborga olsak, havoning qarshilik kuchini bajargan ishi

$$A(\bar{R}) = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} - mgh = -242Dj$$ bo‘ladi.

22.2 masala. 21.1 masalaning (21.2§ ga qarang) sharti saqlangan holda, yukning to‘xtagunicha bosib o‘tgan yo‘l aniqlansin (21.1 shakl, M_0- moddiy nuqtaning boshlang‘ich holati, M_1-nuqtaning oxirgi holati).

E ch i sh. Yukka 21.1 masaladagi kabi, $\bar{P}, \bar{F}, \bar{N}$ kuchlar ta’sir etmoqda. Tormozlashdagi bosib o‘tgan yo‘l $s_1=M_0M_1$ - ni aniqlash uchun, s_1, v_0, v_1 lar va o‘zgarmas kuch $\bar{F}$-berilganiga asosan, kinetik energiyaning o‘zgarishi haqidagi teoremadan foydalanamiz,

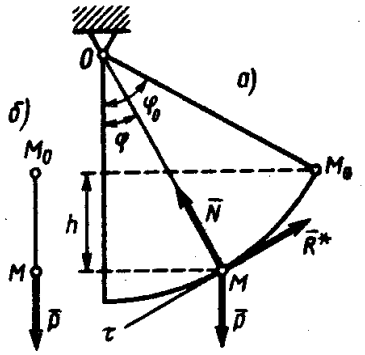
$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_{(M_0M_1)}$$

Ushbu masalada $v_1=0$ (v_1-yukning to‘xtagandagi tezligi). Undan tashqari, $A(\bar{P})=0$ va $A(\bar{N})=0$ chunki ularning $\bar{N}$ yo‘nalishlari harakat yo‘nalishiga perpendikulyar. $A(\bar{F})=-F\cdot s_1$, hamda $\bar{F}$=const bo‘lgani uchun, natijada

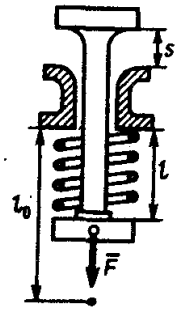
$$-\frac{mv_0^2}{2}=-F\cdot s_1 \quad \text{bundan} \quad s_1=\frac{mv_0^2}{2F} \quad \text{bo‘ladi.}$$

21.1 masalaning natijasi bo‘yicha, tormozlanish vaqti boshlang‘ich tezlikka proportsional ravishda o‘zgarar ekan, endi hozir aniqlaganimizga asosan tormozlashda bosib o‘tilgan yo‘l tezlikning yo‘nalishiga teskari proportsional bo‘lar ekan. Ushbu natijani Er ustidagi transportga qo‘llasak, shu narsa ayon bo‘ladiki, tezlikning ozgina ortishi, tormozlash yo‘li uning kvadratiga proportsional ravishda ortishiga olib kelar ekan.

22.3 masala. Uzunligi l -ga teng bo‘lgan ipga og‘irligi R bo‘lgan yuk osib qo‘yilgan. Yukni ip bilan birga vertikalga nisbatan φ_0- burchakka og‘dirib (22.6, a shakl), boshlang‘ich tezliksiz qo‘yib yuborildi. Yukning harakatida unga qarshilik kuchi $\bar{R}$ ta’sir etadi, bu kuchning o‘rtacha taqribiy qiymati $\bar{R}^*$ (R^*= const) deb hisoblaymiz. Yukning vertikal bilan φ burchak tashkil etgan holatidagi tezligi aniqlansin.



22.6 shakl



22.7 shakl

E ch i sh. Masalaning shartiga ko‘ra, kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasini (22.6) qo‘llaymiz:

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_{(M_0M_1)} \qquad \text{(a)}$$

Yukka og‘irlik kuchi $\overline{P}$, ipning tortilish kuchi $\overline{N}$ va o‘rtacha taqribiy qiymati $\overline{R}^*$ bo‘lgan qarshilik kuchi ta’sir etmoqda. (22.1) formulaga asosan og‘irlik kuchi $\overline{P}$-ning bajargan ishi $A(\overline{P})=R\cdot h$ bo‘ladi. $N_\tau=0$ bo‘lgani uchun $\overline{N}$-kuchining bajargan ishi $A(\overline{N})=0$ bo‘ladi. Va nihoyat $R^*=const$ bo‘lgani uchun $\overline{R}^*$ kuchning bajargan ishi $A(\overline{R}^*)=-R^*\cdot s=-R^*l(\varphi_0-\varphi)$bo‘ladi [chunki $s=l(\varphi_0-\varphi)$]. Bundan tashqari masalaning shartiga ko‘ra $v_0=0$ va $m=R/g$. Shularni e’tiborga olsak (a) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi,

$Rv^2/2g=Rh-R^*l(\varphi_0-\varphi)$ va $v=\sqrt{2gh-2gl(\varphi_0-\varphi)R^*/P}$

Agar qarshilik kuchi nolga teng bo‘lsa, oxirgi natija Galiley formulasi $v=\sqrt{2gh}$ ni beradi, ushbu formula erkin tushib kelayotgan jismlar uchun ham o‘rinli hisoblanadi (26, b shakl).

Ushbu masalada $h=l\cdot\cos\varphi -l\cdot\cos\varphi_0$. U holda, $R^*/R=k^*$ (k^*-og‘irlik kuchi birligiga, to‘g‘ri keladigan o‘rtacha qarshilik kuchi) belgilash kiritib, tezlik uchun oxirgi natijani aniqlaymiz,

$$v=\sqrt{2gl[\cos\varphi-\cos\varphi_0-k^2(\varphi_0-\varphi)]}$$

22.4 masala. Klapan prujinasining deformatsiyalanmagan holatdagi uzunligi $l_0=6$ sm. Klapan butunlay ochilganda uning uzunligi $l=4$ sm, klapanning ko‘tarilishi $s=0,6$ sm (22.7 shakl). Prujinaning qattiqligi $s=150$N/m, klapanning massasi $m=0,4$ kg. Og‘irlik kuchining va qarshilik kuchini hisobga olmagan holda klapanni yopilishdagi tezligi aniqlansin.

E ch i sh. Kinetik enegiyaning o‘zgarishi haqidagi teoremadan foydalanamiz,

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_{(M_0M_1)} \qquad (a)$$

Masalaning shartiga ko‘ra ishni faqat prujinaning elastiklik kuchi bajarar ekan. U holda (22.2) formulaga asosan,

$$A_{(M_0M_1)}=\frac{c}{2}(\lambda_0^2-\lambda_1^2)$$

Ushbu masalada, $\lambda_0=l_0-l=2$ sm, $\lambda_1=l_0-l-s=1,4$ sm. Undan tashqari $v_0=0$. Ushbu qiymatlarni (a) formulaga qo‘yib, masalaning javobini olamiz

$$v_1=\sqrt{\frac{c}{m}(\lambda_0^2-\lambda_1^2)}=0,28 \text{ m/s.} \qquad (b)$$

22.5 masala. Elastik balkaning o‘rtasiga qo‘yilgan yuk (22.8 shakl), uni λ_{st} qiymatga egib yuboradi (balkaning statik egilishi). Agar yuk balkaga M balandlikdan tushsa, balkaning maksimal egilishi λ_m aniqlansin. Balkaning og‘irligi e’tiborga olinmasin.

E ch i sh. Oldingi masaladagi kabi (22.6) formuladan foydalanamiz. Yukning boshlang‘ich tezligi -v_0, oxirgi (balkaning maksimal egilgan holatdagi) tezligi- $v_1=0$ bo‘ladi. Natijada (22.6) formula

$$\sum A_k=0 \qquad (a)$$

Yukning M_0M_1-ko‘chishida ishni faqat og‘irlik kuchi $\overline{P}$ bajaradi. $M’M_1$-ko‘chishda esa balkaning elastiklik kuchi $\overline{F}$ bajaradi. Hamda $A(\overline{P})=R(N+\lambda_m)$, $A(\overline{F})=-0{,}5c\cdot\lambda_m^2$, chunki balka uchun $\lambda_0=0$, $\lambda_1=\lambda_m$. Bu qiymatlarni (a) formulaga qo‘ysak,

$$R(N+\lambda_m)-0{,}5c\cdot\lambda_m^2=0$$

Balkaning muvozanat holatida, yukning og‘irligi bilan balkaning elastiklik kuchi o‘zaro teng va qarama-qarshi bo‘ladi, demak, $R=\lambda_{st}$ va yuqoridagi tenglik quyidagi ko‘rinishga keladi,

$$\lambda_m^2-2\lambda_{st}\lambda_m-2\lambda_{st}H=0$$

Ushbu kvadrat tenglamani λ_m –ga nisbatan echamiz, masalani shartiga ko‘ra $\lambda_m>0$ bo‘lishini e’tiborga olib, masalaning javobini yozamiz

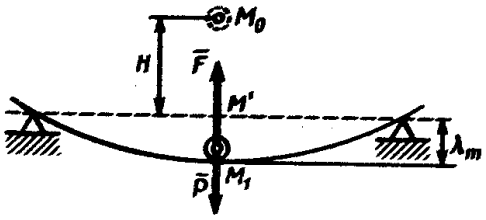
$$\lambda_m=\lambda_{st}+\sqrt{\lambda_{ст}^2+2H\lambda_{ст}}$$

Shunisi qiziqarliki, N=0m bo‘lganda $\lambda_m=2\lambda_{st}$ bo‘ladi. Demak, yukni gorizontal balkaning o‘rtasiga qo‘ysak, yukni qo‘yib yuborganimizdagi maksimal egilishi statik egilishning ikkilanganiga teng bo‘lar ekan. So‘ngra yuk balka bilan birgalikda, muvozanat holat atrofida tebranma harakat qila boshlaydi. Lekin qarshilik kuchlari ta’sirida, tebranma harakat so‘nadi va balka λ_{st} holatga egilganicha to‘xtab qoladi.

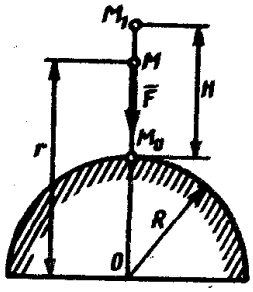
22.6 masala. Jismni ma’lum N balandlikka ko‘tarish uchun, vertikal yuqoriga yo‘nalgan v_0- boshlang‘ich tezlikning eng kichik qiymati aniqlansin (22.9 shakl). Erning tortish kuchini Erning markazigacha bo‘lgan masofaning kvadratiga teskari proportsional deb hisoblansin. Havoning qarshiligi hisobga olinmasin.

E ch i sh. Jismni massasi m-ga teng bo‘lgan moddiy nuqta deb hisoblab, quyidagi tenglamadan foydalanamiz

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_{(M_0M_1)} \qquad (a)$$



22.8 shakl



22.9 shakl

Bu erda ishni faqat Erning tortish kuchi bajaradi xolos. Shu sababli, $r_0=R$, $r_1=R+H$, (R- erning radiusi) ekanligini e'tiborga olib, (22.4) formula orqali

$$\sum A_{(M_0M_1)}=mgR^2[1/(R+H)-1/R]$$

Nuqta eng yuqorigi holatga ko'tarilganda $v_1=0$ bo'ladi, shu sababli aniqlangan ishni (a) ga qo'yib, masalaning javobini yozamiz

$$v_0=\sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}$$

Quyidagi xususiy xollarni ko'rib chiqaylik:

a) R -ga nisbatan N juda kichkina bo'lsin. U holda N/R -nolga yaqin qiymat bo'ladi. Yuqoridagi natijani surat va maxrajini R -ga bo'lib,

$$v_0=\sqrt{\frac{2gH}{1+H/R}}\approx\sqrt{2gH}$$

Shunday qilib, kichkina balandliklarda Galiley formulasiga qaytib kelinar ekan.

b) Endi qaysi qiymatli boshlang'ich tezlikda jism Erga qaytib tushmas ekanligini aniqlaymiz. Buning uchun yuqoridagi javobning surat va mahrajini N-ga bo'lib yuboramiz, natijada

$$v_0=\sqrt{\frac{2gR}{1+R/H}}$$

N=∞ bo'lganda va Erning o'rtacha radiusi R=6370km deb hisoblasak

$$v_0\approx\sqrt{2gR}\approx 11{,}2\ \text{km/c} \qquad (b)$$

Demak, Erning sirtida yuqoriga qarab 11,2 km/c tezlik bilan otib yuborilgan jism Erning tortish kuchini batamom engib, Erga qaytib tushmas ekan. (b) formula orqali aniqlangan tezlik *ikkinchi kosmik tezlik* deb ataladi.

Yana shuni isbotlash mumkinki, taxminan $8\text{km/c}\le v_0\le 11{,}2\text{km/c}$ orasidagi boshlang'ich tezlik bilan Erning sirtiga urinma holda otib

yuborilgan jism ham Erga qaytib tushmasdan, Erning sun'iy yo'ldoshiga aylanib qolar ekan. Agar boshlang'ich tezlik 8 km/c dan kam bo'lsa yoki jismga berilgan boshlang'ich tezlik gorizontal yo'nalishda bo'lmasa, jism Er atrofida elliptik traektoriya bo'yicha harakatlanib, yana Erga qaytib tushadi. Olingan barcha natijalar havosiz fazo uchun hisoblangan.

22.7 masala. Ishqalanishni hisobga olmagan holda, tsilindr-2 ichidagi gazni r_1 bosimgacha siqish uchun porshen-1 ga qanday miqdordagi o'zgarmas Q - kuchni qo'yish lozimligi aniqlansin. Porshenning yuzasi-S, boshlang'ich tezlik -v_0, boshlang'ich bosim -r_0 (22.10 shakl). Gazni siqishda, uning bosimi *r*, hajmi V - ga teskari proportsional ravishda o'zgaradi (izotermik protsess bo'yicha, gazni asta sekin siqiladi).

E ch i sh. Porshenga $\bar{Q}$-kuchi va gazning bosim kuchi $\bar{P}$ ta'sir etadi. Porshenning boshlang'ich va oxirgi tezliklari nolga teng bo'lgani uchun(v_0=0 va v_1=0), kinetik energiyaning o'zgarish teoremasiga asosan,

$$A(\bar{P})+A(\bar{Q})=0 \qquad (a)$$

Ox o'qini porshenning harakati bo'yicha yo'naltiramiz va x=0 bo'lganda $r=r_0$ bo'lgan edi. Tsilindrning tubidan porshenning boshlang'ich holatigacha bo'lgan masofa l_0-bo'lsin va porshen x_1-masofaga siqilgandan keyingi tezligi v_1=0, bosimi esa $r=r_1$ bo'lsin. Son qiymatlari bo'yicha hisoblasak R=rS va R_x=-R=- rS bo'ladi. U holda (21.16') formulaga asosan

$$A(\bar{P})=-\int_0^{x_1} pSdx \qquad (b)$$

Bosim hajmga teskari proportsional ravishda o'zgarishini e'tiborga olib, *r* bilan *x* orasidagi bog'lanishni topamiz, ya'ni $r/r_0=V_0/V$, boshlang'ich hajm $V_0=Sl_0$ va ixtiyoriy holatdagi hajm $V=S(l_0-x)$. U holda *r* uchun va x_1-koordinata uchun, $r=r_1$ deb hisoblab, r-ning qiymatini aniqlaymiz

$$r=\frac{p_0 l_0}{l_0-x} \quad \text{va} \quad x_1=l_0\left(1-\frac{p_0}{p_1}\right) \qquad (v)$$

Ushbu qiymatlarni e'tiborga olib, (b) tenglikdan

$$A(\bar{P})=-r_0 l_0 S\int_0^{x_1}\frac{dx}{l_0-x}=-r_0 l_0 S\ln\frac{l_0}{l_0-x_1}=-r_0 l_0 S\ln\frac{p_1}{p_0}$$

$\bar{Q}$-kuchining bajargan ishini aniqlaymiz. $\bar{Q}$=const bo‘lgani uchun (v) tengliklarga asosan

$$A(\bar{Q})=Q\cdot x_1=Q\cdot l_0\left(1-\frac{p_0}{p_1}\right)=Q\cdot l_0\frac{p_1-p_0}{p_1}$$

Yuqorida aniqlangan ishlarning qiymatlarini (a) formulaga qo‘yib, masalaning javobini topamiz

$$Q=\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}\cdot S\cdot \ln\frac{p_1}{p_0}$$

Agar $r_1>>r_0$ bo‘lsa, taqriban $r_1-r_0\approx r_1$ deb hisoblasak,

$$Q=r_0S\cdot\ln(r_1/r_0)$$

r_1- orta borishi bilan Q - kuchi logarifmik qonun bo‘yicha ortib borar ekan, ya’ni juda sekin ravishda o‘zgarar ekan. Masalan, $r_1=20r_0$ bo‘lganda $Q\approx3r_0S$ va $r_1=50r_0$ bo‘lganda $Q\approx3,9r_0S$ bo‘lar ekan.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etishga qaratilgan uslubiy ko‘rsatmalar:

1. Og‘irlik kuchining bajargan ishini hisoblashda, moddiy nuqtaning qaysi traektoriya bo‘yicha pastga tushayotgani yoki yuqoriga ko‘tarilayotganini e’tiborga olinmaslik lozim ekan. Faqat oldingi va keyingi balandliklarning farqini og‘irlik kuchiga ko‘paytirish kifoya ekan.
2. Elastiklik kuchining bajargan ishini hisoblashda, jismning deformatsiyalanish miqdorining kvadratiga proportsional ravishda, ya’ni (22.2) formula orqali hisoblanar ekan.
3. Ishqalanish kuchining bajargan ishi har doim manfiy bo‘lib, ishqalanish kuchini shu yo‘nalishdagi ko‘chishga bo‘lgan ko‘paytmasiga teng bo‘lar ekan.
4. Tortilish kuchining bajargan ishi (22.4) formula orqali hisoblanar ekan.
5. Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi, shu nuqtaga qo‘yilgan kuchlarning bajargan ishlariga bog‘liq ravishda o‘zgarar ekan. Agar bajarilgan ish musbat bo‘lsa, kinetik energiya ortadi, agar bajarilgan ish manfiy bo‘lsa, kinetik energiya kamayib borar ekan.
6. Agarda moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlarning bajargan ishlarini yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, nuqtaning kinetik energiyasi o‘zgarmas bo‘lar ekan.

7. Erning sirtidan yuqoriga qarab 11,2 km/c tezlik bilan otib yuborilgan har qanday jism Erning tortish kuchini batamom engib, Erga qaytib tushmas ekan.

Mavzuni mustahkamlash uchun 22 ilovadagi masalalarni echishni tavsiya qilamiz:

23 – Ma’ruza

Mavzu: Moddiy nuqtaning erkinmas harakati. Moddiy nuqtaning nisbiy harakati. Erning aylanishini jismlarning harakatiga va muvozanatiga ta’siri. Erning aylanishi ta’siridagi jismning vertikal harakatidan og‘ishi. Vaznsizlik.

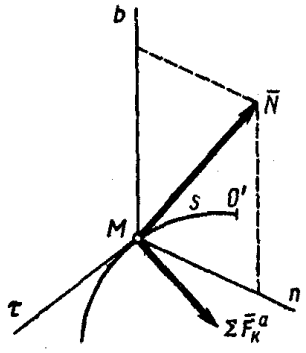
REJA:

1. Moddiy nuqtaning erkinmas harakati.
2. Moddiy nuqtaning nisbiy harakati.
3. Erning aylanishini jismlarning harakatiga va muvozanatiga ta’siri.
4. Erning aylanishi ta’siridagi jismning vertikal harakatidan og‘ishi.
5. Vaznsizlik holati.

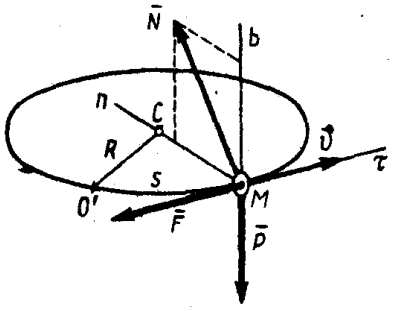
23.1§ Moddiy nuqtaning erkinmas harakati

Muammo: Biz yuqorida faqat erkin jismlarning harakatlariining dinamikasini differentsial tenglamalarini qanday yozilishini o‘rganib chiqdik. Aslida esa, texnikada va hayotda ko‘proq masalalar erkin bo‘lmagan jismlarning harakatlariga doir bo‘ladi. Shu sababli biz bu mavzuda erkin bo‘lmagan jismlarning dinamikasi haqida fikr yuritamiz.

Bayoni: Agar moddiy nuqta, unga qo‘yilgan bog‘lanishlar ta’sirida berilgan yuzalar yoki egri chiziqlar bo‘yicha harakatlanishga majbur bo‘lsa, bunday nuqta erkinmas nuqta deb ataladi. Biz faqat ikkinchi holatnigina ko‘rib chiqamiz.



23.1 shakl



23.2 shakl

Nuqtaning berilgan qo‘zg‘almas egri chiziq bo‘ylab harakati. Moddiy nuqta unga qo‘yilgan $\overline{F}_1^a, \overline{F}_2^a, ..., \overline{F}_n^a$ aktiv kuchlar va bog‘lanish reaktsiya kuchi $\overline{N}$ ta’sirida silliq egri chiziq bo‘ylab harakatlanmoqda (23.1 shakl). Ushbu egri chiziqda O‘ nuqtani hisob sistemasining boshi qilib tanlab olamiz va M nuqtaning holati s= O‘M -ni shu nuqtadan boshlab aniqlaymiz. M nuqtadan Mτnb - o‘qlarini o‘tkazamiz, ya’ni urinma Mτ - (o‘qni harakatning musbat s-tomoniga),

bosh normal Mn (o‘qni traektoriyaning botiq tomoniga) va binormal Mb va 19.5§ dagi (19.11) formuladan foydalanamiz.

Egri chiziq silliq bo‘lganligi sababli, reaktsiya kuchi $\bar{N}$-egri chiziqqa perpendikulyar, ya’ni Mnb -tekisligida yotadi, shu sababli $N_\tau=0$ bo‘ladi. Natijada, berilgan egri chiziq bo‘ylab harakatlanuvchi nuqtaning differentsial tenglamasi quyidagicha bo‘ladi,

$$m\frac{dv}{dt}=\sum F^a_{k\tau} \qquad \text{yoki} \qquad m\frac{d^2s}{dt^2}=\sum F^a_{k\tau} \tag{23.1}$$

$$mv^2/\rho=\sum F^a_{kn}+N_n, \qquad 0=\sum F^a_{kb}+N_b \tag{23.2}$$

(23.1) tenglamada noma’lum reaktsiya kuchi N qatnashmaydi va shu sababli nuqtaning egri chiziq bo‘ylab harakat qonunini bevosita, ya’ni *s=f(t)* -ni aniqlash mumkin. Agar egri chiziq g‘adir-budir bo‘lsa ham ushbu tenglikdan foydalanish mumkin, buning uchun aktiv kuchlar qatoriga ishqalanish kuchi $\bar{F}_{ishq}$ -ni ham qo‘shish lozim bo‘ladi. Lekin $F_{ishq}=fN$ ekanligi sababli, (23.1) tenglamaga ishqalanish kuchi orqali noma’lum reaktsiya kuchi N -ishtirok eta boshlaydi.

(23.2) formula bog‘lanish reaktsiya kuchi N-ni aniqlash uchun xizmat qiladi. Ushbu tenglamadan ko‘rinib turibdiki, nuqtaning egri chiziqli harakatida statik reaktsiya kuchlaridan tashqari dinamik reaktsiya kuchlari ham paydo bo‘lar ekan va ular nuqtaning tezligiga bog‘liq ekan. Ushbu tezlikni (*agar u berilgan bo‘lmasa*) (23.1) tenglamani integrallash orqali yoki soddaroq holda kinetik energiyaning o‘zgarishi haqidagi teorema orqali aniqlashimiz mumkin; bu teorema (22.6’) tenglamada ishqalish kuchi yo‘q bo‘lgan bog‘lanishlar uchun yozilgan, shu sababli u erda N reaktsiya kuchi yo‘q.

23.1 masala. Gorizontal tekislikda joylashgan silliq aylanadan iborat simga og‘ir halqa kiydirilgan bo‘lib, halqaga aylanaga urinma yo‘nalishda bo‘lgan $\bar{v}_0$- boshlang‘ich tezlik berilgan. Halqaning harakatida unga qarshilik kuchi $F=km\sqrt{v}$ ta’sir etadi. Bu erdagi m-halqaning massasi, v - halqaning tezligi, k - o‘zgarmas koeffitsient. Halqaning necha sekunddan keyin to‘xtashi aniqlansin.

E ch i sh. Hisob boshi O‘ nuqtani halqaning boshlang‘ich holatiga joylashtiramiz (23.2 shakl). Halqani ixtiyoriy holatda tasvirlaymiz, M_τ, M_n va M_b -o‘qlarni yo‘naltiramiz. Halqaga og‘irlik kuchi $\bar{P}$, bog‘lanish reaktsiyasi $\bar{N}$ va qarshilik kuchi -$\bar{F}$ ta’sir etmoqda. $R_\tau=N_\tau=0$ va $F_\tau=-F=-km\sqrt{v}$ ekanligini e’tiborga olib, (23.1) formulaga asosan, quyidagi differentsial tenglamani tuzamiz

$$m\frac{dv}{dt}=-km\sqrt{v}$$

O‘zgaruvchilarni ajratib va t=0 da $v=v_0$ ekanligini e’tiborga olib, tegishli chegaralarda integrallasak

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\sqrt{v}}=-k\int_{0}^{t}dt \quad \text{bundan} \quad 2(\sqrt{v_0}-\sqrt{v})=kt \quad \text{bo‘ladi.}$$

$t=t_1$ vaqtda halqa to‘xtaydi, ya’ni v=0 bo‘ladi. Demak oxirgi tenglikdagi tezlikni nolga almashtirib, halqaning to‘xtash vaqtini aniqlasak

$$t_1=2\sqrt{v_0}/k \quad \text{kelib chiqadi.}$$

Ushbu qonuniyat bo‘yicha sodir bo‘ladigan qarshilik kuchi ma’lum bo‘lsa, halqaning to‘xtagunicha o‘tgan vaqtni aniqlash mumkin ekan.

23.2 masala. Oldingi masaladagi shart bo‘yicha, lekin qarshilik kuchini o‘rniga ishqalanish kuchi $F=fN$ ta’sir etsa, halqa to‘xtaguncha qancha s_1- yo‘l bosib o‘tishi aniqlansin. Halqaning radiusi R=0,3 m, boshlang‘ich tezlik $v_0=2$ m/s, halqaning aylanaga ishqalanish koeffitsienti $f=0,3$.

E ch i sh. Hisob sistemasining boshi O‘ nuqtani tanlab olamiz. M nuqtadan M_τ, M_n va M_b -o‘qlarni yo‘naltiramiz (23.2 shakl). Halqaga og‘irlik kuchi $\bar{P}$, bog‘lanish reaktsiyasi $\bar{N}$ va qarshilik kuchi $-\bar{F}$ ta’sir etmoqda, bu erda qarshilik kuchi ishqalish kuchidan iborat bo‘ladi. (23.1) va (23.2) tenglamalar sistemasini tuzamiz,

$$m\frac{dv}{dt}=-F, \qquad mv^2/R=N_n, \qquad N_b-R=0$$

Moduli bo‘yicha $F=fN=f\sqrt{N_b^2+N_n^2}$ (ishqalanish kuchlarini algebraik yig‘indisini, ya’ni fN_n+fN_b deb hisoblash xato bo‘ladi, chunki ular o‘zaro perpendikulyar o‘qlarda joylashganlar). $N_b=R=mg$ bo‘lgani uchun

$$F=fm\sqrt{g^2+v^4/R^2} \quad \text{bo‘ladi.}$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, ishqalanish kuchi F, N orqali halqaning tezligi bilan bog‘lanishda bo‘lar ekan. Yo‘l -s bilan tezlik-v orasidagi bog‘lanishni aniqlash uchun,

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v\cdot\frac{dv}{ds}$$

ekanligidan foydalanib, halqaning harakatini yo‘l orqali ifodalovchi tenglamani hosil qilamiz

$$v\cdot\frac{dv}{ds}=-\frac{f}{R}\sqrt{g^2R^2+v^4} \qquad \text{bo‘ladi.}$$

O‘zgaruvchilarni ajratib, tenglamaning ikkala tomonidan tegishli chegaralarda aniq integral olamiz,

$$\int_{v_0}^{v} \frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2R^2+v^4}} = -\frac{2f}{R}\int_0^s ds$$

bundan

$$-2fs/R=\ln(v^2+\sqrt{g^2R^2+v^4}) - \ln(v_0^2+\sqrt{g^2R^2+v_0^4})$$

olingan natijani soddalashtirsak

$$s=\frac{R}{2f}\ln\frac{v_0^2+\sqrt{g^2R^2+v_0^4}}{v^2+\sqrt{g^2R^2+v^4}}$$ bo‘ladi.

Halqa to‘xtaganda v=0 bo‘ladi. Taqribiy hisoblashlar uchun g≈10 m/s^2, deb hisoblab, halqa to‘xtaguncha bosib o‘tgan yo‘lni aniqlasak

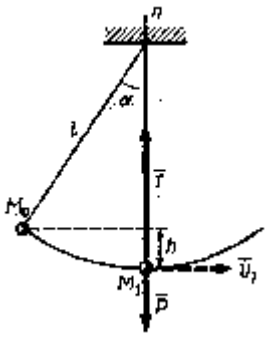
$$s_1=\frac{R}{2f}\ln\frac{v_0^2+\sqrt{g^2R^2+v_0^4}}{gR}\approx 0{,}5\ln 3\approx 0{,}55\text{m}$$ bo‘ladi.

23.3 masala. Og‘irligi R bo‘lgan yuk, uzunligi l -bo‘lgan ipga osib qo‘yilgan. Uni α burchakka og‘dirib, M_0 holatdan *(23.3 shakl)* boshlang‘ich tezliksiz qo‘yib yuborildi. Yuk eng pastdagi holatdan o‘tayotgan vaqtda ipning tortilishi (tarangligi) aniqlansin.

E ch i sh. Yukni eng pastdagi M_1 holatida tasvirlaymiz (23.3 shakl). Yukka og‘irlik kuchi $-\bar{P}$ va ipning tortilish kuchi $-\vec{T}$ ta’sir etadi. M_1 nuqtadan normal M_{1n} o‘qni traektoriyaning botiq tomoniga yo‘naltiramiz va (23.2) tenglamaga asosan quyidagilarni yozamiz

$m v_1^2/l=T-R$ bundan $T=R+ m v_1^2/l$ bo‘ladi,

bu erda, v_1 -yukning M_1 holatdagi tezligi, l=ρ - ipning uzunligi (*egrilik radiusi*). v_1 -ni aniqlash uchun (22.6’) tenglamadan foydalanamiz,



23.3 shakl

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A^a_{(M_0M_1)}$$ (a)

M_0M_1 -uchastkada ishni faqat $\bar{P}$-kuchi bajaradi, shu sababli $A^a=R\cdot h=R\cdot[l-(1\cdot\cos\alpha)]$ bo‘ladi. Boshlang‘ich tezlik $v_0=0$ bo‘lgani uchun, ishning aniqlangan qiymatini (a) - ga qo‘yib, $m v_1^2=2Rl(1-\cos\alpha)$ -ni hosil qilamiz va oxirgi natijani olamiz

$T=R(3-2\cos\alpha)$.

Xususiy holda, masalan α=90° bo‘lsa, yukning eng past nuqtadagi holatida ipning tortilish kuchi 3R - ga teng bo‘ladi, ya’ni yukning og‘irligidan uch marta katta bo‘lar ekan.

Tayanch iboralar: erkinmas moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamasi. Bog‘lanish reaktsiyasi, taranglik kuchi.

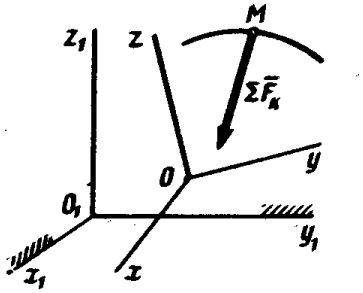
23.2§ Moddiy nuqtaning nisbiy harakati

Muammo: Biz yuqorida ko‘rib o‘tgan moddiy nuqtalarning harakati inertsial hisob sistemasida sodir bo‘lgan edi. Endi moddiy nuqta inertsial bo‘lmagan hisob sistemasida harakatlansa, yuqoridagi usulni qo‘llash noto‘g‘ri natijalar beradi. Shu sababli, quyida noinertsial sistemalardagi moddiy nuqtaning harakatida tuziladigan differentsial tenglamalarni ko‘rib chiqamiz.

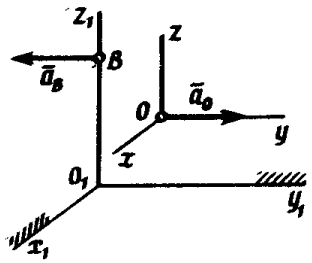
Dinamikaning ikkinchi qonuni asosida yuqorida keltirib chiqarilgan tenglamalar va teoremalar nuqtaning faqat absolyut harakati uchungina, ya’ni inertsial (*«qo‘zg‘almas»*) o‘qlarga nisbatangina o‘rinlidir,

Endi nuqtaning nisbiy harakatini o‘rganamiz, ya’ni uning inertsial sistemalarga nisbatan ixtiyoriy holda harakatlanuvchi noinertsial hisob sistemalarga nisbatan o‘rganamiz.

Moddiy M nuqta unga boshqa moddiy jismlarning ta’sirlaridan iborat bo‘lgan $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, ..., \bar{F}_n$ kuchlar ta’sirida harakat qilayotgan bo‘lsin. Nuqtaning bunday harakatini $Ox_1y_1z_1$ inertsial o‘qlar («qo‘zg‘almas o‘qlar»)ga nisbatan ixtiyoriy harakatda bo‘lgan (23.4 shakl) Oxyz qo‘zg‘aluvchi o‘qlarga nisbatan o‘rganib chiqamiz.



23.4 shakl



23.5 shakl

Nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlar bilan nuqtaning nisbiy tezlanishi- $\bar{a}_{нис}$ orasidagi bog‘lanishni aniqlaymiz. Absolyut harakatdagi nuqta uchun dinamikaning asosiy qonuni,

$$m\,\bar{a}_{абс} = \sum \bar{F}_k \qquad (23.3)$$

Kinematikadan ma’lumki $\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{нис} + \bar{a}_{кщч} + \bar{a}_{кор}$ bo‘ladi, bu erdagi $\bar{a}_{нис}, \bar{a}_{кщч}$ va $\bar{a}_{кор}$ - nuqtaning nisbiy, ko‘chirma va koriolis tezlanishlari. Absolyut tezlanishning ushbu qiymatini (23.3) tenglamaga qo‘yamiz va keyinchalik foydalanish uchun $\bar{a}_{нис} = \bar{a}$ deb belgilaymiz, CHunki ushbu

qiymat, biz o‘rganayotgan nisbiy harakatning tezlanishidan iborat, natijada

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + (-m\bar{a}_{кщч}) + (-m\bar{a}_{кор}).$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\bar{F}^{и}_{кщч} = -m\bar{a}_{кщч} \qquad \bar{F}^{и}_{кор} = -m\bar{a}_{кор}$$

$\bar{F}^{и}_{кщч}$ va $\bar{F}^{и}_{кор}$ qiymatlar kuchning o‘lchov birligi bilan o‘lchanadi. Ularni tegishlicha *ko‘chirma* va *koriolis inertsiya kuchlari* deb ataymiz. U holda yuqoridagi tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}^{и}_{кщч} + \bar{F}^{и}_{кор} \qquad (23.4)$$

(23.4) tenglama nuqtaning nisbiy harakati uchun dinamikaning asosiy qonuni hisoblanadi. (23.3) va (23.4) tenglamalarni solishtirib quyidagi xulosaga kelamiz: *nuqtaning nisbiy harakatida mexanikaning barcha tenglamalari va teoremalari, xuddi nuqtaning absolyut harakatidagi kabi tuziladi, lekin nuqtaga boshqa jismlarning ta’sirlaridan iborat bo‘lgan kuchlar qatoriga ko‘chirma va koriolis inertsiya kuchlarini ham qo‘shish lozim.* $\bar{F}^{и}_{кщч}$ va $\bar{F}^{и}_{кор}$ - kuchlarning qo‘shilishi qo‘zg‘aluvchi o‘qlarning harakatini nuqtaning nisbiy harakatiga bo‘lgan ta’sirini belgilaydi.

Bunday ta’sirning xarakterini tushunish uchun, misol tariqasida V nuqtaning inertsial hisob sistemasidagi qo‘zg‘almas $Ox_1y_1z_1$ o‘qlarga nisbatan (23.5 shakl) va shu $Ox_1y_1z_1$ o‘qlarga nisbatan $\bar{a}_0$-tezlanish bilan ilgarilanma harakatda bo‘lgan Oxyz o‘qlarga nisbatan harakatini o‘rganib chiqamiz. Bu holda V nuqtaning Oxyz o‘qlarga nisbatan tezlanishi $\bar{a}_V = -\bar{a}_0$ bo‘ladi va bunday tezlanishning paydo bo‘lishiga *kinematik* sabab, ya’ni qo‘zg‘aluvchan hisob sistemasining harakati sababchi bo‘ldi.

Shunday qilib, (23.3) formuladan ko‘rinib turganidek, *noinertsial hisob sistemasidagi moddiy nuqta, nafaqat unga ta’sir etuvchi* $\bar{F}_k$*-kuchlar ta’siridangina tezlanish olib qolmasdan, balki tezlanishga ega bo‘lgan qo‘zg‘aluvchi hisob sistemasining harakati oqibatida ham tezlanish olar ekan.*

Umumiy holda, agar (23.3) tenglik orqali $\bar{a}_{абс} = \sum \bar{F}_k$ /m aniqlab va $\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{нис} + \bar{a}_{кщч} + \bar{a}_{кор}$ ekanligini e’tiborga olib, hamda $\bar{a}_{нис} = \bar{a}$ belgilashdan foydalansak, nisbiy harakatning tezlanishi uchun quyidagi formulani keltirib chiqaramiz,

$$\bar{a} = \frac{1}{m}\sum \bar{F}_k + (-\bar{a}_{кщч}) + (-\bar{a}_{кор}). \qquad (23.4')$$

Bu tenglama, nuqtaning nisbiy harakat qonunining boshqacha ifodasi bo‘lib, masalalar echishda, undan bevosita foydalanish mumkin. Bu tenglamaning o‘ng tomonidagi birinchi yig‘indi, nuqtaga bevosita ta’sir etuvchi $\bar{F}_k$-kuchlarning ta’siridan oladigan tezlanish bo‘lsa, qolgan ikkita yig‘indi qo‘zg‘aluvchi hisob sistemasining harakatidan oladigan tezlanishlardan iborat.

(23.4’) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, nuqtaga ta’sir etuvchi $\bar{F}_k$-kuchlar sistemasi ta’sirida oladigan tezlanish $\sum \bar{F}_k$ /m -dan iborat bo‘lib, u *ixtiyoriy hisob sistemasi*da ham bir xil bo‘ladi, lekin inertsial hisob sistemasida bu tezlanish nuqtaning to‘liq tezlanishidan iborat bo‘lsa, noinertsial hisob sistemasida esa bu nuqta tezlanishining bir qismini tashkil etadi xolos.

Matematik nuqtai nazardan qaralganda (23.4’) va (23.4) tenglamalar ekvivalent. Lekin amaliy masalalarda (23.4) formula qulayroq, chunki uning ko‘rinishi (23.3) formulaga o‘xshab ketadi. Natijada nisbiy harakatga oid masalalarni echishda, inertsial hisob sistemasi uchun isbot qilingan barcha natijalardan foydalanish uchun yo‘l ochib beradi (masalan, dinamikaning umumiy teoremalari).

Ba’zi bir xususiy hollarni ko‘rib o‘tamiz.

1) Agar qo‘zg‘aluvchi o‘qlar ilgarilanma harakatda bo‘lsa, u holda $\bar{F}^{и}_{кор}=0$ bo‘ladi, chunki ilgarilanma harakatda $\bar{\omega}=0$ ($\bar{\omega}$-qo‘zg‘aluvchan hisob sistemasining burchakli tezligi) va nisbiy harakat qonuni, quyidagicha bo‘ladi

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}^{и}_{кщч}$$

2) Agar qo‘zg‘aluvchi o‘qlarning harakati ilgarilanma bo‘lib, to‘g‘ri chiziqli tekis harakatdan iborat bo‘lsa, u holda $\bar{F}^{и}_{кщч} = \bar{F}^{и}_{кор} = 0$ bo‘ladi va nisbiy harakatning qonuni, xuddi qo‘zg‘almas o‘qlarga nisbatan harakat qonuniga o‘xshash bo‘lar ekan. Shu sababli, bunday hisob sistemasi ham *inertsial* hisob sistemasi deb ataladi.

Yuqoridagi natijalarga asoslanib, shuni ta’kidlash mumkinki inertsial hisob sistemasini qo‘zg‘almas ekanligini yoki to‘g‘ri chiziqli tekis harakat qilayotgan ekanligini hech qanday mexanik tajribalar orqali aniqlab bo‘lmaydi. G. Galiley tomonidan ochilgan *klassik mexanikaning nisbiylik printsipi* mana shunga asoslanadi.

3) Agar nuqta qo‘zg‘aluvchi o‘qlarga nisbatan muvozanatda bo‘lsa (*nisbiy harakatda bo‘lmasa*), u holda nuqtaning $\bar{a}=0$ va $\bar{v}_{нис} = \bar{v} = 0$

bo‘ladi, demak $\bar{F}^{и}_{кор}=0$, chunki koriolis tezlanishi $\bar{a}_{кор}=2(\bar{\omega}\times\bar{v}_{нис})=0$ bo‘ladi. U holda (23.4) tenglik, quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\sum \bar{F}_{k}+\bar{F}^{и}_{кщч}=0 \qquad (23.5)$$

(23.5) tenglama *nuqtaning nisbiy muvozanat* tenglamasidan iborat. Bundan, *nisbiy muvozanatlik tenglamasi ham, xuddi qo‘zg‘almas o‘qlardagi muvozanat tenglamalari kabi tuzilar ekan, lekin boshqa jismlarning ta’sir kuchlari qatoriga ko‘chirma inertsiya kuchlarini ham qo‘shish lozim ekan*ligi kelib chiqadi.

Agar $\bar{F}^{i}_{kor}\neq 0$ bo‘lsa, nuqtaning nisbiy harakatining tenglamasi tuzilganda, $\bar{F}^{i}_{kor}=-m\bar{a}_{kor}=-2m(\bar{\omega}\cdot\bar{v}_{nis})$ ekanligini hisobga olish kerak. Shu sababli, $\bar{F}^{i}_{kor}$ kuchi $\bar{v}_{nis}=\bar{v}$ -nisbiy tezlik vektoriga perpendikulyar bo‘ladi, demak u nisbiy harakatning traektoriyasiga ham urinma bo‘lar ekan. Shuning uchun:

a) koriolis inertsiya kuchining nisbiy harakat traektoriyasining urinmasi M_τ - ga bo‘lgan proektsiyasi nolga teng bo‘lar ekan [$(\bar{F}^{и}_{кор})_\tau=0$] va (11) tenglamalar sistemasining nisbiy harakatdagi birinchi tenglamasi quyidagicha bo‘ladi,

$$m\frac{dv}{dt}=\sum F_{k\tau}+\bar{F}^{i}_{ko'ch\tau} \qquad (23.6)$$

b) nuqtaning ixtiyoriy nisbiy harakatida koriolis inertsiya kuchining bajargan ishi nolga teng bo‘ladi [21.5§ dagi (21.16) ga q.] va *nisbiy harakatdagi kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasi* quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (v_1 va v_0-lar nisbiy tezliklar, A-*nisbiy ko‘chish*dagi bajarilgan ish):

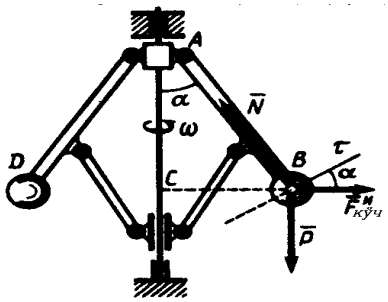
$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_k+A(\bar{F}^{i}_{ko'ch}) \qquad (23.7)$$

(23.6) va (23.7) dagi oxirgi yig‘indilar, qo‘zg‘aluvchi o‘qlarning nisbiy tezlik v-ga bo‘lgan ta’sirini belgilaydi.

Umuman olganda nisbiy harakatning qolgan barcha tenglamalarida ko‘chirma va koriolis inertsiya kuchlari ishtirok etadi.

23.6 masala. V va D sharlarning massasiga nisbatan markazdan qochma regulyatorning barcha massalarini hisobga olmagan holda (23.6 shakl), AV sterjenning nisbiy muvozanat holatini belgilovchi α - burchakning qiymati aniqlansin. Regulyator o‘zgarmas ω-burchak tezligi bilan aylanma harakat qilmoqda, AV=l ga teng.

E ch i sh. Nisbiy (regulyator bilan birgalikda aylanayotgan o‘qlarga nisbatan) muvozanat holatni aniqlash uchun (23.5) tenglikka asosan, V sharga ta’sir etayotgan og‘irlik kuchi $\bar{P}$ va reaktsiya kuchi $\bar{N}$-larga qo‘shimcha ravishda ko‘chirma inertsiya kuchi $\bar{F}^{и}_{кщ}$-ni ham qo‘yish lozim. ω=const bo‘lgani sababli $a_{ko‘ch}=a^{n}_{кщ}=VS\cdot\omega^2=l\omega^2\sin\alpha$ bo‘ladi.



23.6 shakl.

U holda $\bar{F}^{и}_{кщ}=ml\omega^2\sin\alpha$ ga teng bo‘ladi. Ko‘chirma inertsiya kuchining yo‘nalishi, $\bar{a}^{n}_{кщч}$-ning yo‘nalishiga qarama-qarshi bo‘ladi, ya’ni aylanish o‘qidan teskariga (SV chiziq bo‘ylab) yo‘naladi; bu kuchni *markazdan qochma inertsiya kuchi* deb ham ataladi.

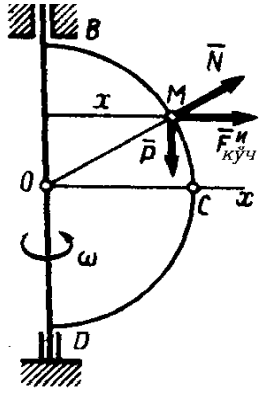
Kuchlarning AV - ga perpendikulyar bo‘lgan V_τ - o‘q bo‘yicha muvozanat tenglamasini yozamiz :

$$-R\sin\alpha+F^{и}_{кщ}\cos\alpha=0$$

$F^{и}_{кщ}$-kuchning o‘rniga uning son qiymatini qo‘yamiz, sinα-ga qisqartiramiz (α=0 bo‘lgan echimni ko‘rib o‘tmaymiz), natijada $-g+l\omega^2\cos\alpha=0$. Bundan,

$$\cos\alpha=g/l\omega^2 \text{ bo‘ladi..}$$

cosα≤1 bo‘lganligi sababli, α≠0 bo‘lgan holda muvozanat bo‘lishligi uchun $\omega^2>g/l$ bo‘lishi shart.



23.7 shakl.

23.7 masala. Radiusi R-ga teng bo‘lgan BCD yarim aylana (23.7 shakl) vertikal o‘q atrofida o‘zgarmas ω-burchakli tezlik bilan aylanma harakat qilmoqda. Uning aylanish o‘qidan sal chetroqdagi V nuqtasidan boshlab, yarim aylanaga kiydirilgan M halqa ishqalanishsiz harakat qilmoqda. Agar halqaning boshlang‘ich tezligi $v_0=0$ bo‘lsa, halqacha S nuqtaga kelgan holatdagi nisbiy tezlik-v_1 aniqlansin.

E ch i sh. Halqaning nisbiy tezligi v_1-ni aniqlash uchun, kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasidan foydalanamiz. Ushbu teoremani ifodalovchi (23.7) tenglamani tuzish uchun, $\bar{P}$ va $\bar{F}^{и}_{кщ}$ kuchlarning bajargan ishlarini aniqlash lozim, bu erdagi $F^{и}_{кщ}=m\omega^2x$ (bog‘lanish reaktsiyasi $\bar{N}$-ning bajargan ishi nolga teng). Taxminan $x_V=0$ deb hisoblab,

$$A_{VS}(\bar{F}^{i}_{ko'ch}) = \int_{(B)}^{(C)} F^{i}_{ko'ch}\,dx = m\omega^2 \int_{0}^{R} x\,dx = m\omega^2 R^2/2$$

Bundan tashqari, $A_{VS}(\bar{P})=RR=mgR$ bo‘ladi.Ushbu qiymatlarni (23.7) ga qo‘ysak, $v_0=0$ -ekanligi sababli,

$$m v_1^2/2=mR(g+\omega^2 R/2).$$

Bu tenglamadan halqaning S nuqtadagi nisbiy tezligini aniqlaymiz

$$v_1=\sqrt{2gR(1+\omega^2 R/2g)}$$

Masalani (23.6) formula orqali ham echish mumkin.

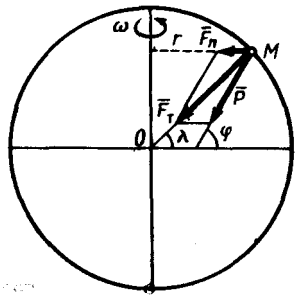
Nisbiy harakatni integrallashga oid misollar 23.4§ da ko‘rsatib o‘tilgan.

23.3§. Erning aylanishini jismlarning muvozanat holatiga va ularning harakatiga ta’siri.

Texnikaga oid aksariyat masalalarni echishda Erga mahkamlangan hisob sistemasini inertsial (qo‘zg‘almas) deb hisoblanadi. Bu bilan Erning yulduzlarga nisbatan (Erni o‘z orbitasi bo‘ylab Quyosh atrofidagi harakati keyingi mavzularda ko‘rib o‘tiladi) sutka ichidagi aylanishini hisobga olinmaydi. Bu aylanish (sutkada bir marta aylanishi) quyidagi burchakli tezlik bilan bo‘ladi,

$$\omega=2\pi/(24\cdot 60\cdot 60)\approx 0{,}000073\ c^{-1}$$

Erning ushbu sekin aylanishi, Er atrofidagi jismlarning harakati va muvozanatiga qanday ta’sir ko‘rsatishini ko‘rib o‘tamiz.



23.8 shakl.

1. O g‘ i r l i k k u ch i. Tortilish kuchi (Erning tortishi)ning bir qismi hisoblangan og‘irlik kuchi Erning sutka ichidagi aylanishiga bog‘liq bo‘ladi. Erning sirtiga yaqin joylashgan moddiy nuqtaga, tortilish kuchi $\bar{F}_\tau$ ta’sir etib, u ikkita $\bar{F}_n$ va $\bar{P}$ -tashkil etuvchilarga ajraladi 23.8 shakl).

$\bar{F}_n$ - kuch Erning aylanish o‘qi tomon yo‘nalgan bo‘lib, moddiy nuqtaga $\bar{a}_n$- normal tezlanish beradi va bu tezlanish moddiy nuqtani Er bilan birga aylanishidan hosil bo‘ladi; agar nuqtaning massasi m, Er o‘qigacha bo‘lgan masofasi r- bo‘lsa, u holda $\bar{F}_n=m\bar{a}_n$ dan iborat bo‘lib, uning son qiymati $F_n=m\omega^2 r$ - ga teng bo‘ladi.

Tortilish kuchining ikkinchi tashkil etuvchisi -$\bar{P}$ bo‘lib, u *og‘irlik kuchi* deb ataladi. Shunday qilib,

$$\bar{P}=\bar{F}_\tau-\bar{F}_n$$

ya’ni, *og‘irlik kuchi, to‘liq tortilish kuchi bilan nuqtaning Er bilan birga sutka ichidagi aylanishidan hosil bo‘ladigan kuchning vektor ayirmasiga teng ekan.*

$\bar{P}$-kuchining yo‘nalishi har bir hudud (punkt)ning vertikalini aniqlab beradi (ipga osilgan yukning yo‘nalishi; ipning tortilish kuch R-ga teng bo‘ladi) va $\bar{P}$-kuchining yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘lgan tekislik, shu hududning gorizontal tekisligi deb ataladi. $F_n=m\omega^2r$ (ω^2-juda kichik qiymat) kichkina qiymat bo‘lgani uchun, og‘irlik kuchi-$\bar{P}$, tortilish kuchi $\bar{F}_\tau$[14]-dan juda oz miqdorda farq qiladi. $\bar{P}$-kuchning modulini *jismning og‘irligi* deb ataladi.

2. Erning sirtiga yaqin joylardagi nisbiy muvozanat va nisbiy harakat. Agar, nuqtaga ta’sir qiluvchi kuchlardan $\bar{F}_\tau$ tortilish kuchini ajratib qo‘ysak, (23.5) formulaga asosan nuqtaning aylanayotgan Er ustidagi nisbiy muvozanati (tinch holati) quyidagicha bo‘ladi,

$$\sum \bar{F}_k+\bar{F}_\tau+\bar{F}^и_{кщч}=0.$$

Lekin $\bar{a}_{ko‘ch}=\bar{a}_n$ va $\bar{F}^и_{кщ}=-m\bar{a}_{ko‘ch}=-m\bar{a}_n=-\bar{F}_n$. U holda, $\bar{F}_\tau+\bar{F}^и_{кщ}=\bar{F}_\tau-\bar{F}_n=\bar{P}$ bo‘ladi va yuqoridagi tenglama $\sum \bar{F}_k+\bar{P}=0$ ko‘rinishga keladi, ya’ni Er bilan bog‘langan hisob sistemasi qo‘zg‘almas bo‘lgandagi kabi bo‘lar ekan.

Demak, *jismlarning Erga nisbatan muvozanat tenglamalarini tuzganda Erning aylanishi hisobiga hech qanday qo‘shimcha tuzatmaning keragi yo‘q ekan* (*bu aylanishdagi tuzatma tenglamada* $\bar{P}$ *orqali ishtirok etar ekan*).

Endi nisbiy harakat tenglamalari (23.4)ni olib ko‘ramiz, bu erda ham tortilish kuchini ajratib olamiz. U holda

$$m\bar{a}=\sum \bar{F}_k+\bar{F}_\tau+\bar{F}^и_{кщ}+\bar{F}^и_{кор}.$$

Lekin yuqoridagi kabi $\bar{F}_\tau+\bar{F}^и_{кщ}=\bar{F}_\tau-\bar{F}_n=\bar{P}$ bo‘ladi va ushbu tenglama quyidagi ko‘riniishga keladi,

$$m\bar{a}=\sum \bar{F}_k+\bar{P}+\bar{F}^и_{кор}.$$

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi, *agar nuqtaning (jismning) harakat tenglamalarini tuzganda Er bilan bog‘langan o‘qlarni qo‘zg‘almas deb hisoblansa, u holda faqat koriolis inertsiya kuchini etiborga olinmas ekan xolos*, uning son qiymati

[14] $\bar{F}_n$ - kuchning maksimal qiymati ekvatorda bo‘ladi, u erda r=R bo‘lib tortilish kuchining 0,34% -ni tashkil qiladi. 23.8 shaklda tasvirlangan λ (geotsentrik kenglik) bilan φ (astronomik kenglik) orasidagi eng katta farq $\lambda=45°$ da bo‘lib, taqriban 0,1°-ni tashkil qiladi.

$$F^{и}_{кор} = 2m \cdot \omega \cdot v \cdot \sin\alpha$$

bu erdagi α -nuqtaning nisbiy tezlik vektori $\bar{v}$ bilan Erning o‘qi orasidagi burchak.

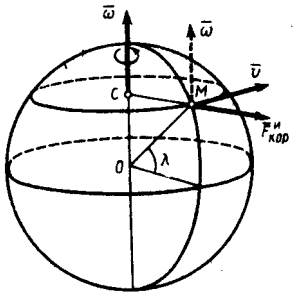
Erning burchakli tezligi ω-juda kichik qiymat bo‘lganligi sababli, agar nisbiy tezlik-v uncha katta bo‘lmasa $F^{и}_{кор}$-kuchini hisobga olmasa ham bo‘ladi, chunki u og‘irlik kuchiga nisbatan kichkina qiymat bo‘ladi. Masalan, nisbiy tezlik 700 m/c (oddiy artileriya snaryadining tezligi) va $\alpha=90°$ bo‘lganda $F^{и}_{кор}$-kuchi, og‘irlik kuchi R-ning faqat 1 protsentini tashkil etadi. Shuning uchun ko‘pchilik injenerlik hisoblash ishlarida Er bilan mahkamlangan hisob sistemasini inertsial (qo‘zg‘almas) deb hisoblanadi.

Erning aylanishi juda katta nisbiy tezliklarda (ballistik raketalarning uchish tezliklarida) ahamiyatga ega bo‘ladi, yoki uzoq davom etadigan (daryolarning oqishida, havo va dengizlarning oqimlarida) harakatlarda ahamiyatga ega bo‘ladi.

3*. M i s o l l a r. Erning aylanishini jismlarning harakatiga bo‘lgan ta’sirini sifat nuqtai nazardan ko‘rib chiqaylik.

Er ustidagi harakat. Nuqtaning shimoliy yarim shardagi meridian bo‘ylab shimoldan janubga qarab qilgan harakatida, $\bar{a}_{кор}$-tezlanishi, sharq tomonga yo‘naladi, $\bar{F}^{и}_{кор}$-kuchi esa g‘arb tomonga yo‘naladi. Janubdan shimol tomonga qilingan harakatda $\bar{F}^{и}_{кор}$-kuchi sharq tomonga yo‘naladi. Ko‘rinib turibdiki, ikkala harakatlarda ham nuqta o‘zining harakat yo‘nalishidan faqat o‘ng tomonga qarab og‘ar ekan.

Agar nuqta parallellar bo‘yicha sharq tomonga harakat qilsa, u holda $\bar{a}_{кор}$-tezlanishi shu parallelning MS radiusi bo‘ylab (23.9 shakl) yo‘naladi, $\bar{a}_{кор}$-kuchi esa unga qarama-qarshi tomonga yo‘naladi. Ushbu inertsiya kuchining OM bo‘ylab yo‘nalgan vertikal tashkil etuvchisi og‘irlik kuchining qiymatini sezilmas darajada kamaytiradi. Janub tomonga yo‘nalgan gorizontal tashkil etuvchisi esa, nuqta harakatini uning yo‘nalishiga nisbatan o‘ng tomonga og‘diradi. Parallel bo‘yicha g‘arb tomonga bo‘lgan harakatda ham xuddi shunday ta’sir bo‘ladi.



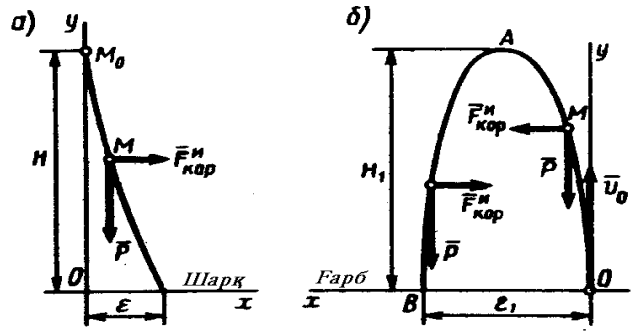
23.9 shakl

Bulardan quyidagicha xulosa chiqaramiz, *shimoliy yarim sharning ustidagi ixtiyoriy yo‘nalishda bo‘lgan harakatda, Erning aylanishi hisobiga nuqtaning harakati o‘z yo‘nalishi bo‘yicha o‘ng tomonga og‘ar*

ekan. Janubiy yarim sharda esa, bunday og‘ish chap tomonga qarab sodir bo‘lar ekan.

Mana shu hodisa sababli, shimoliy yarim shardagi daryolar o‘zlarining harakatlarida o‘ng tomonlarini yuvib ketadilar (Ber qonuni). Shamollarning og‘ishlari (passatlar)ning va dengiz oqimlarining hamda tsiklon va antitsiklondagi havo massalarining og‘ma harakatlarining sababi ham shundan iborat bo‘ladi. Shu sababli havo tsiklonning markaziga (past bosimli joyga) intilish o‘rniga yoki antitsiklonda markazdan (yuqori bosimli joydan) qochish o‘rniga, tsiklon (antitsiklon)ning markazi atrofida tsirkulyatsion harakat sodir bo‘ladi.

Vertikal tushish. Erkin tushib kelayotgan nuqta uchun koriolis inertsiya kuchi $\bar{F}^{и}_{кор}$-ning yo‘nalishini aniqlash uchun, nuqtaning nisbiy tezligi $\bar{v}$-ning yo‘nalishini bilishimiz kerak. Og‘irlik kuchiga nisbatan $\bar{F}^{и}_{кор}$-kuchi juda kichkina bo‘lganligi uchun $\bar{v}$-ning yo‘nalishini vertikal deb hisoblash mumkin, ya’ni MO chiziq bo‘ylab pastga yo‘nalgan (23.9 shakl), U holda $\bar{a}_{кор}$-vektori g‘arbga yo‘nalgan bo‘ladi, $\bar{F}^{и}_{кор}$-vektori esa sharqqa (ya’ni, 23.9 shakldagi $\bar{v}$-ning yo‘nalishi bo‘yicha) yo‘naladi.



23.10 shakl

Shu sababli, taxminan olib qaraganimizda, erkin tushib kelayotgan nuqta (jism) Erning aylanishi hisobiga vertikaldan sharq tomonga qarab og‘ar ekan. Yuqoriga otib yuborilgan jism esa, yuqoriga ko‘tarilayotgan paytda g‘arb tomonga qarab og‘ar ekan. Ushbu og‘ishlar juda oz miqdorda bo‘ladi, shu sababli juda katta balandliklardan tushishda yoki ko‘tarilishdagina sezilarli bo‘ladi, bular 23.4§ dagi hisoblash ishlarida ko‘rib o‘tiladi.

23.4§*. Erning aylanishini pastga erkin tushib kelayotgan nuqtaning og‘ishiga ta’siri.

Unchalik katta bo‘lmagan (Erning radiusiga nisbatan) N balandlikdan Erga tushib kelayotgan nuqtaning harakatini tekshirib ko‘ramiz. Tushishdagi og‘irlik kuchini o‘zgarmas deb hisoblaymiz; havoning qarshiligini e’tiborga olmaymiz. Ou o‘qini vertikal yuqoriga,

Ox o‘qini sharq tomonga gorizontal ravishda yo‘naltiramiz (23.12, a shakl) [15].

Erning aylanishini hisobga olish uchun, nuqtaga og‘irlik kuchi $\overline{P}$-dan tashqari $\overline{F}^{i}_{kor}$-kuchini yuqorida ta’kidlaganimizdek sharq tomonga yo‘naltiramiz. U holda nisbiy harakatning differentsial tenglamasiga asosan, quyidagini yozamiz,

$$m\,x'' = \overline{F}^{i}_{kor}, \qquad m\,y'' = -R = -mg \tag{23.8}$$

boshlang‘ich shartlar esa: t=0 da x=0, y=H, v_x=0, v_y=0 bo‘ladi. differentsial tenglamaning ikkinchisini tegishli chegaralarda aniq integrallab, quyidagini yozamiz,

$$v_y = y' = -gt, \quad y = H - gt^2/2$$

$\overline{F}^{i}_{kor}$-kuchning modulini aniqlashda, yuqorida aytilgandek, $\overline{F}^{i}_{kor}$-yo‘nalishini belgilashda $\overline{v}_y$-ga nisbatan juda kichik bo‘lganligi sababli $\overline{v}_x$-tezlikni hisobga olmaymiz (chunki $\overline{F}^{i}_{kor}$-kuchining moduli og‘irlik kuchi $\overline{P}$-dan juda kichik) va taqribiy echimni aniqlash uchun, $v=|v_y|=gt$ deb hisoblaymiz. Nuqtaning $\overline{v}$-tezligi vertikal pastga (MO chizig‘i bo‘yicha, 23.9 shakl) yo‘nalgan va Erning o‘qi bilan $\alpha=90°-\lambda$, (λ--Erning kengligi) burchak tashkil etadi. Natijada, $\overline{F}^{i}_{kor}=2m\cdot\omega\cdot g\cdot t\cdot\cos\lambda$ bo‘ladi va (23.8) ning birinchi tenglamasi, quyidagi ko‘rinishga keladi

$$x'' = 2(\omega\cdot g\cdot\cos\lambda)\cdot t$$

Qavs ichidagi qiymat o‘zgarmas bo‘lgani uchun, bu tenglamani integrallab, aniqlaymiz

$$x' = (\omega\cdot g\cdot\cos\lambda)\cdot t^2 + S_1, \quad x = (\omega\cdot g\cdot\cos\lambda)\cdot t^3/3 + S_1 t + C_2$$

Boshlang‘ich shartlarga asosan S_1 va S_2 larning qiymatlarini qo‘yamiz. Shunday qilib, havoda erkin tushib kelayotgan nuqtaning nisbiy harakatini taqriban aniqlovchi harakat qonuni quyidagicha bo‘lar ekan,

$$x = (\omega\cdot g\cdot\cos\lambda)\cdot t^3/3, \quad y = H - gt^2/2$$

Nuqtaning ushbu harakat qonunidan ko‘rinib turibdiki, uning traektoriyasi to‘g‘ri chiziqdan iborat emas ekan va haqiqatdan ham u sharq tomonga qarab og‘ar ekan. Yuqoridagi tenglamalardan vaqt t-ni yo‘qotib yuborsak, nuqta traektoriyasining taqribiy tenglamasi kelib chiqadi (kubsimon yarim parabola),

[15] 23.10 shaklda Ox o‘qi bo‘ylab tasvirlash masshtabi, katta miqdorda ifodalangan.

$$x^2=\frac{8\omega^2}{9g}\cos^2\lambda(N-u)^3$$

Bu tenglamada u=0 deb hisoblasak, nuqtaning Erga kelib tushgandagi sharqqa tomon bo‘lgan og‘ishi ε -ni aniqlaymiz[16]:

$$\varepsilon=\frac{2}{3}\omega\sin\lambda\sqrt{\frac{2H^3}{g}} \qquad (23.9)$$

Ko‘rinib turgandek, ε - er sharining burchakli tezligi ω-gaga to‘g‘ri proportsional bo‘lib, juda kichkina qiymatni tashkil etar ekan. Masalan, Moskvaning geografik kengligida ($\lambda=55°47'$, $g=9{,}816$ m/c^2) N=100m balandlikdan Erga tushib kelayotgandagi og‘ishi $\varepsilon=1{,}2$ sm ni tashkil etar ekan.

Erning turli punktlarida tadqiqotchilar tomonidan olib borilgan qator tajribalar natijasida, (23.9) formula bo‘yicha hisoblashlar to‘g‘ri ekanligi tasdiqlandi.

Endi, O punktdan vertikal yuqoriga qarab $\bar{v}_0$ tezlik bilan otib yuborilgan jismning harakatini ko‘rib chiqamiz. Nuqtaning yuqoriga bo‘lgan harakatida $\bar{F}^{i}_{kor}$-kuchining yo‘nalishi birinchi yaqinlashuvda g‘arbga qarab yo‘naladi. U holda Ox o‘qini g‘arb tomonga yo‘naltirsak (23.8) differentsial tenglama o‘z ko‘rinishini saqlab qoladi, lekin boshlang‘ich shartlar quyidagicha bo‘ladi: t=0 da x=0, y=0, $v_x=0$, $v_y=v$.

Ushbu shartlarga ko‘ra (23.8) tenglamalarning ikkinchisidan,

$$v_y=y'=v_0-gt,\quad y=v_0t-gt^2/2 \qquad (23.10)$$

U holda, oldingi masaladagi kabi $v=v_y$ deb hisoblasak, $\bar{F}^{i}_{kor}=2m\cdot\omega\cdot(v_0-g\cdot t)\cdot\cos\lambda$ va (23.8) ning birinchi tenglamasi

$$\ddot{x}=2(\omega\cdot\cos\lambda)(v_0-g\cdot t)$$

Ushbu tenglama nuqtaning pastga qarab qiladigan harakatini ham ifodalaydi, chunki $\bar{F}^{i}_{kor}$-kuchining yo‘nalishini o‘zgarishi $(v_0-gt)=v_y$ - ko‘paytmaning o‘zgarishi orqali hisobga olinadi.

Oxirgi tenglamani integrallab, quyidagi natijani olamiz, ya’ni

$$x=\omega\cos\lambda(v_0t^2-gt^3/3) \qquad (23.11)$$

---

[16] $\bar{F}^{и}_{кор}$ kuchni birinchi yaqinlashuvdagi yo‘nalishi va modulini aniqlashda, $\bar{v}_x$-ning sharq tomonga yo‘nalgan tashkil etuvchisini e’tiborga olmadik. Natijada, $\bar{F}^{и}_{кор}$ kuchning janub tomonga og’diruvchi qo‘shimcha tashkil etuvchilari mavjud bo‘ladi. Lekin, $x=(\omega g\sin\lambda)t^3/3$ bo‘lgani uchun $v_x=\dot{x}$ tezlik ω-ga proportsional va janub tomonga og’ishi ω^2 -ga proportsional, ya’ni ikkinchi tartibli kichkina qiymatdan iborat.

(23.10) tenglamada u=0, (ya’ni, nuqta Erga qaytib tushdi) deb hisoblab, nuqtaning parvoz vaqtini aniqlaymiz: $t_1=2v_0/g$ bo‘ladi. Hamda Galiley formulasiga asosan $v_0=\sqrt{2gH_1}$, bu erdagi N_1-nuqtaning ko‘tarilishdagi balandligi, (23.11) tenglamadan nuqtaning Erga qaytib tushgandan keyingi og‘ishini aniqlaymiz:

$$OV=\varepsilon_1=\omega\cos\lambda\frac{4v_0^2}{3g^2} \quad \text{yoki} \quad \varepsilon_1=\frac{8}{3}\omega\cos\lambda\sqrt{\frac{2H_1^2}{g}} \qquad (23.12)$$

(23.9) va (23.12) formulalardan $N_1=N$ bo‘lganda $\varepsilon_1=4\varepsilon$ ekanligini aniqlaymiz.

Agar nuqtaning harakati yana davom etsa (masalan, O nuqta Erning sathidan yuqorida bo‘lsa), u holda nuqtaning traektoriyasi V punktdan boshlab muntazam ravishda sharq tomonga og‘ib boradi.

Yuqoridagi barcha hisoblar, havosiz fazo uchun isbot qilingan, shu sababli ular orqali Erning aylanishini pastga tushib kelayotgan nuqtaga bo‘lgan ta’sirini, faqat ma’lum (birinchi yaqinlashuvdagi) aniqlikdagina ifodalaydi xolos (lekin, qoniqarli darajada aniqlik beradi).

Tayanch iboralar: nisbiy harakatning differentsial tenglamasi, ko‘chirma inertsiya kuchi, koriolis inertsiya kuchi, Vaznsizlik, nisbiy muvozanatlik sharti, passat, Ber qonuni.

23.5§ Vaznsizlik haqida tushuncha. Hududga (joyga) bog‘liq holdagi hisob sistemasi

Tortilish maydonidagi jismlarning harakatlarida va*znsizlik* deyiladigan muhim holat mavjud bo‘ladi.

Qo‘zg‘almas Oxu o‘qlarga nisbatan $\bar{a}$-tezlanish bilan vertikal pastga tushib kelayotgan liftning ichida nisbiy muvozanatda bo‘lgan m - massali yukning holatini olib ko‘raylik (23.13, a shakl). U holda yukka og‘irlik kuchi $\bar{P}=m\bar{g}$ va reaktsiya kuchi $\bar{N}$ ta’sir etadi. Yuk lift bilan birgalikda harakatlanayotganligi uchun, uning tezlanishi ham $\bar{a}$-ga teng bo‘ladi. Yukning harakat differentsial tenglamasini tuzamiz,

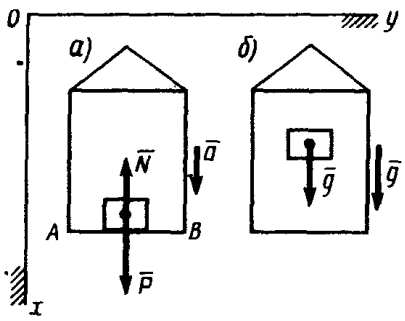
$$ma=mg-N \quad \text{va} \quad N=m(g-a)$$

Bundan, agar a=g bo‘lsa, ya’ni lift erkin holda pastga tushayotgan bo‘lsa, N=0 bo‘ladi va yuk liftning poliga hechqanday bosim kuchini ko‘rsatmaydi (ya’ni liftning poli yuk uchun tayanch emas). shuning uchun yukni liftning ixtiyoriy joyiga qo‘ysangiz ham u o‘sha joyda (osilgan kabi) turaveradi. Liftning kabinasidagi taroziga ham yuk hech

qanday bosim kuchi ko‘rsatmaydi, ya’ni bunday holatda tortilgan yukning «og‘irligi» nolga teng bo‘ladi.

Xuddi shunday holat, ilgarilanma harakatdagi kosmosda uchuvchi apparatlarning kabinalariga joylashtirilgan yuklarda ham mavjud bo‘ladi. Yuklar (jismlar)ning bunday holatini *vaznszlik* deb ataladi.

Buning mohiyati quyidagicha: lift va uning ichidagi yuk, og‘irlik kuchi ta’sirida qo‘zg‘almas Oxu o‘qlarga nisbatan bir xil $\bar{g}$-tezlanish bilan harakat qiladilar (23.13, b shakl); shu sababli liftga nisbatan yuk harakat qilmaydi (liftning ixtiyoriy joyida nisbiy muvozanatda bo‘ladi) va liftning tubiga bosim kuchi ko‘rsatmaydi. Buning mohiyati quyidagicha: lift va uning ichidagi yuk, og‘irlik kuchi ta’sirida qo‘zg‘almas Oxu o‘qlarga nisbatan bir xil $\bar{g}$-tezlanish bilan harakat qiladilar (23.13, b shakl); shu sababli liftga nisbatan yuk harakat qilmaydi (liftning ixtiyoriy joyida nisbiy muvozanatda bo‘ladi) va liftning tubiga bosim kuchi ko‘rsatmaydi.



23.11 shakl

Lekin yukning harakati kabinaning harakatiga bog‘liq emas, ya’ni liftsiz mustaqil qanday harakat qilsa, lift bilan birgalikda ham shunday harakat qiladi. Demak, *og‘irlik (tortilish) kuchi maydonidagi, erkin (markazga qarab, yiqilib) harakat qilayotgan ixtiyoriy jism vaznsizlik holtida bo‘lar ekan.*

Bu qoidadan vaznsizlik holatidagi harakat bilan, oddiy kuch, masalan, tortilish kuchi ta’siridagi yoki Erning sirtida muvozanatda turgan jismning holati orasidagi farqlarning fizik mohiyati tushunarli emas. Masalan, pastga tushayotgan liftning yoki kosmosda uchayotgan apparatning kabinasi ichiga devorlarni namlamaydigan suyuqlik (masalan, simob)ni solib qo‘ysak vaznsizlikda u idishni (liftning kabinasini, kosmik kemaning kabinasini) to‘ldirmaydi, balki sharsimon shakl olib, idishdan holi ravishda turaveradi. Buning mohiyati shundaki vaznsizlikda ichki kuchlanishlarning (hozirgi misolda suyuqlikning) xarakteri o‘zgaradi. Demak vaznsizlikning xossalarini farqlab olish uchun, jismlarning ichlaridagi kuchlanishlarini tekshirib o‘rganib chiqish lozim ekan.

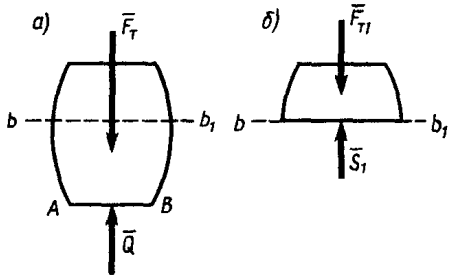
Ichki kuchlanishlarni ikkita kategoriyaga ajratamiz: *tashqi ta’sirlarga bog‘liq bo‘lmagan* (masalan, molekulalarning kuchlari, temperatura ta’siridagi kuchlanishlar yoki ikkita boltlar yordamida siqilgan temir parchasidan iborat jismning ichki) *kuchlanishlar* va

jismga tashqaridan ko‘rsatilgan ta’sir ostidagi kuchlanishlar, ya’ni tashqi kuchlarning ta’sirlari.

Hozircha faqat tashqi kuchlar ta’siridagi kuchlanishlarni ko‘rib chiqamiz. Bu erda massa (yoki hajmiy) va sirt kuchlarini bir birlaridan farqlab olish lozim. *Massaga* bog‘liq kuchlar deb, jismning har bir zarrachasiga ta’sir etuvchi va son qiymati bo‘yicha shu jismning massasiga proportsional bo‘lgan kuchlarga aytiladi, massaga bog‘liq kuchlarga Erning tortilish kuchi misol bo‘ladi; *Sirt* kuchlariga esa, jismning sirtidagi nuqtalarga ta’sir etuvchi kuchlar kiradi; masalan, turli xil tayanchlarning reaktsiya kuchlari, tortilish kuchi, muhitning qarshilik kuchi va h.k.

Harakat qonunini (yoki muvozanat holatini) aniqlashda, jismga qo‘yilgan kuchlarning fizik mohiyatlari hech qanday ahamiyatga ega emas. Faqat bu kuchlarning son qiymatlari va yo‘nalishlarini bilish kifoya qiladi. Ammo, jismning ichki kuchlanishlarini paydo bo‘lishida, ularning fizik mohiyatlari katta ahamiyatga ega bo‘ladi, buni quyida ko‘rib o‘tamiz. Buning sababi shundaki, massaviy kuchlar, jismning har bir zarrachasiga alohida va bevosita ta’sir etadi. Sirt kuchlari esa, jismning har bir zarrachasiga faqat qo‘shni zarrachalar orqali ta’sir qiladi.

Erning tortilish maydonida joylashgan m-massali jismning ixtiyoriy harakatini olib ko‘raylik. Bu jismning geometrik o‘lchamlari, Erning o‘lchamlariga nisbatan juda kichkina bo‘lganligi, hamda jismning ixtiyoriy zarrachalari orasidagi masofalarni Erning markazigacha bo‘lgan masofalariga nisbatan o‘ta kichik qiymat bo‘lganligi uchun, har bir zarrachalarning Erning markazigacha bo‘lgan masofalarini o‘zaro teng deb faraz qilamiz. Ya’ni zarrachalar orasidagi masofani e’tiborga olmaymiz, u holda tortilish kuchi har bir zarrachaga bir xil $\bar{g}$-tezlanish beradi va jismga qo‘yilgan tortilish kuchining teng ta’sir etuvchisi,



23.12 shakl,

$$\bar{F}_\tau = m\bar{g} \qquad (23.13)$$

Jismga og‘irlik kuchidan tashqari, uning AV yuzachasi orqali ta’sir etuvchi kuchlar qo‘yilgan bo‘lib, ularning teng ta’sir etuvchisi $\bar{Q}$ bo‘lsin (23.14, a shakl). $\bar{Q}$-kuchi, liftning tubini (yoki, samolyotning bortini, kosmosda uchuvchi apparat kabinasining) jismga nisbatan reaktsiya kuchi bo‘lishi mumkin yoki tortilish kuchi yoki muhit qarshiligi bo‘lishi mumkin.

19.2§ da qoidaga asosan, har qanday ilgarilanma harakat qiluvchi jismni moddiy nuqta deb qabul qilish mumkin. Shunga asosan, bu jismning harakat differentsial tenglamasini vektor ko‘rinishda yozamiz

$$m\bar{a} = \bar{F}_\tau + \bar{Q} \qquad (23.14)$$

Bundan (23.13) tenglamaga asosan, jismning tezlanishini aniqlaymiz,

$$\bar{a} = \bar{g} + \bar{Q}/m \qquad (23.15)$$

Jismning ixtiyoriy olingan bb_1 kesimida, $\bar{F}_\tau$ va $\bar{Q}$ kuchlar ta’sirida paydo bo‘ladigan va $\bar{Q}$-kuchning yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘lgan ichki kuchlanishlarni, ya’ni kesimning turli qismlaridagi zarrachalarni o‘zaro ta’sir kuchlarini ko‘rib chiqaylik. Buning uchun jismning biror qismini, masalan, massasi m_1-ga teng bo‘lgan yuqorigi qismining harakatini olib ko‘ramiz.

Bu qismga, (23.13) tenglikka asosan, uning massasiga proportsional bo‘lgan $\bar{F}_{1\tau}=m_1\bar{g}$ og‘irlik kuchi va teng ta’sir etuvchisi $\bar{S}_1$-dan iborat bo‘lgan tashlab yuborilgan qismining bosim kuchi ta’sir etadi (23.14, b shakl). Jism ilgarilanma harakatda bo‘lgani uchun, uning harakatini tekshirilayotgan qismi ham ilgarilanma harakatda va o‘shanday tezlanish bilan harakat qiladi. Shu qismining harakatini differentsial tenglamasi $m_1\bar{a} = \bar{F}_{1\tau} + \bar{S}_1$ yoki $m_1\bar{a} = m_1\bar{g} + \bar{S}_1$ bo‘ladi, bundan $\bar{S}_1 = m_1(\bar{a} - \bar{g})$. Bu erdagi $\bar{a}$-ning (23.15) dagi qiymatini keltirib qo‘ysak,

$$\bar{S}_1 = (m_1/m)\ \bar{Q} \qquad (23.16)$$

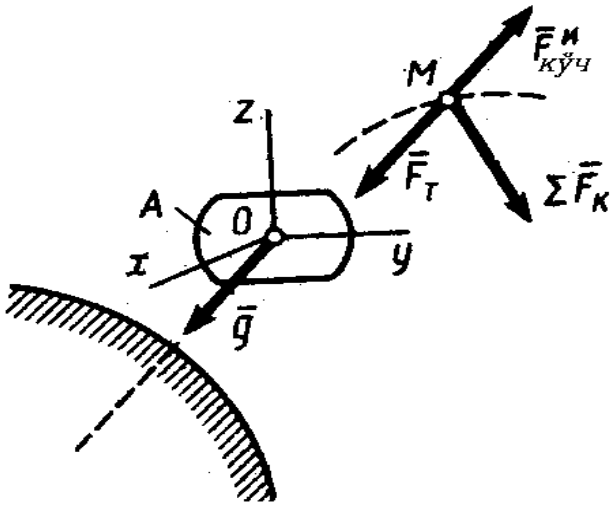
Demak, jismning ichki kuchlanishlarining paydo bo‘lishi, faqat unga ta’sir etuvchi sirt kuchlarga bog‘liq ekan xolos. Undan tashqari (23.16) formulada harakatlanayotgan nuqtaning tezlanishi qatnashmayotganligi sababli, bunday holat muvozanatdagi jism uchun ham o‘rinli ekan.

Erning sirtida muvozanat holatda joylashgan jismni olib ko‘raylik. Bu jismning sirtiga ta’sir etuvchi kuch, faqat qiymat jihatidan og‘irlik kuchi R-ga teng bo‘lgan, ya’ni Erning sirtini reaktsiyasi bo‘ladi xolos. Demak, Q=R bo‘lganda, (23.16) formula Erning sirtida muvozanat holatda bo‘lgan jismning ichki kuchlarini ifodalab berar ekan. Shunday ichki kuchlanishlarga ega bo‘lgan jismlarning holati va*znlik* deb ataladi. Erning ustida turgan odamning «vaznlik» holati, uning tanasida shunday ichki kuchlanishlarning mavjud ekanligining oqibati xolos (tanasining har bir gorizontal kesimlarining o‘zaro ta’sirlarining oqibati xolos).

Agar muvozanatdagi yoki harakatlanuvchi jismga ta’sir etuvchi sirt kuchi Q<R bo‘lsa, u holda jismning ixtiyoriy gorizontal kesimidagi ichki kuchlanishlar, uning tinch holatidagi ichki kuchlanishlardan kichik (*chala yuklangan* holat) bo‘ladi; agar harakatlanuvchi jismga ta’sir etuvchi sirt kuchi Q>R bo‘lsa, u holda jismning ixtiyoriy gorizontal kesimidagi ichki kuchlanishlar, uning tinch holatidagi ichki kuchlanishlardan katta (*ortiq yuklangan* holat) bo‘ladi; agar harakatlanuvchi jismga ta’sir etuvchi sirt kuchi Q=R bo‘lsa, u holda jismning ixtiyoriy gorizontal kesimidagi ichki kuchlanishlar nolga teng bo‘ladi, ya’ni jism vaznsizlik holatida bo‘ladi. Jismga faqat massaviy (tortilish) kuchlari ta’sir etadi xolos;

Natijada, quyidagi xulosalarga kelamiz: 1) *Erning tortilish kuchi* (ya’ni, faqat tortilish kuchi ta’sirida) *maydonida ilgarilanma erkin harakat qilayotgan va hajmiy o‘lchovlari Erning markazigacha bo‘lgan masofaga nisbatan juda kichik bo‘lgan jismlar, vaznsizlik holatida bo‘lar ekanlar*. 2) *Vaznsizlik holatining mohiyati shundan iborat ekanki, bunday holatdagi jismlarga qo‘yilgan tashqi kuchlarning ta’sirlari natijasida ichki kuchlanishlar paydo bo‘lmas ekan.*

Tortilish kuchi maydonidagi, ixtiyoriy jismlarning harakatlarida ham, xuddi shunday holat o‘rinli bo‘ladi.



23.13 shakl

Shunday qilib, agar havoning qarshiligi kam bo‘lsa, Erga tushib kelayotgan har qanday jism, yoki Er sathidan otib yuborilgan ixtiyoriy jismlarning ilgarilanma harakatlarida, ular vaznsizlik holatida bo‘lar ekanlar. Xususiy holda, Erning atmosferasidan tashqarida harakatlanayotgan sun’iy yo‘ldoshlar va kosmosda parvoz qilayotgan apparatlar, hamda ularning kabinalaridagi har bir jism vaznsizlik holatida bo‘lar ekanlar.

Kosmik parvozlarda vaznsizlikni hisobga olishlik, juda muhim ahamiyatga ega bo‘ladi, chunki bunday holatda qator fizik asboblarning va priborlarning ishlash printsiplari o‘zgarib ketadi. Masalan, fizik mayatniklarning ishlashi, suyuqliklarning erkin oqishlariga asoslangan priborlar va shunga o‘xshash asboblar ishlamay qoladilar. Vaznsizlik

holatida tashqi ta’sirga bog‘liq bo‘lmagan kuchlar va vaznsizlik holatida o‘z xossalarini yo‘qotmaydigan molekulyar (Er sharoitida bu kuchlar Erning tortilish kuchiga nisbatan juda kichkina bo‘lgani uchun hisobga olinmaydigan) kuchlari ro‘yobga chiqa boshlaydi, natijada harakatlarning qoidalari o‘zgarib ketadi.

Masalan,vaznlik holatida berk idishga quyilgan namlovchi suyuqlik (suv, moy)lar, molekulyar kuchlar ta’sirida, idishning devorlari bo‘yicha teng tarqaladilar. Devorni namlamaydigan suyuqliklar (simob) esa, shar formasini olib, muallaq suzib yuraveradi, bu haqda yuqorida aytib o‘tgan edik[17].

Hududiy hisob sistemalari. Erning tortilish maydonida $\bar{g}$-tezlanish bilan erkin va ilgarilanma harakatlanayotgan, ya’ni vaznsizlik holatda bo‘lgan A jismni olib kuraylik. A jism bilan birgalikda ilgarilanma harakatda bo‘lgan va unga qattiq mahkamlangan Oxyz hisob sistemasini o‘rnataylik (23.13 shakl) va shu hisob sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan massasi -m teng bo‘lgan, moddiy M nuqtaning harakatini tekshiraylik. Hamda A va M nuqtalarning orasidagi masofa, Erning markazigacha bo‘lgan masofaga nisbatan, juda kichkina ekanligini e’tiborga olsak, shu hudud uchun $\bar{g}$=const bo‘ladi. M nuqta A jism kabi Erning tortilish maydonida bo‘lgani uchun, unga Erning tortilish kuchi $\bar{F}_\tau = m\bar{g}$, hamda boshqa $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$.. .. $\bar{F}_n$ kuchlar ta’sir etayotgan bo‘lsin.

Nuqtaning Oxyz o‘qlarga nisbatan harakatining differentsial tenglamasini tuzamiz, ya’ni 23.2§ dagi (23.4) tenglamani tuzamiz. Oxyz o‘qlar ilgarilanma harakatda bo‘lgani uchun, $\bar{F}^{i}_{kor}$=0 bo‘ladi, natijada

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_\tau + \bar{F}_{кщч} \qquad (23.17)$$

bu erda $\sum \bar{F}_k$ - $\bar{F}_\tau$-dan tashqari barcha kuchlarning bosh vektori.

Oxyz o‘qlar A jism bilan birgalikda $\bar{g}$-tezlanish bilan ilgarilanma harakatda bo‘lgani uchun, harakatdagi nuqta uchun $\bar{a}_{кщ} = \bar{g}$ va $\bar{F}_{кщч}$=-$m\bar{g}$ bo‘ladi. Hamda $\bar{F}_\tau = m\bar{g}$ bo‘lgani uchun, (23.17) tenglamadan quyidagini yozamiz,

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k \qquad (23.18)$$

[17] Vaznsizlik holati insonning qator organlarini (masalan, muvozanat holatni taminlovchi vestibulyar apparatini) ishlashiga ta’sir ko‘rsatadi; shu sababli vaznsizlik holatiga moslanish uchun, maxsus mashq (trenirovka) qilish talab etiladi. Kosmonavtlarni kosmosda uchishlaridagi vaznsizlikni ma’lum miqdorda immitatsiya qilish uchun, inson tanasiga tegishli («vertikal») kuchlanishlar beruvchi maxsus kostyumlar kiydiriladi.

Shunday qilib, Oxyz hisob sistemasi inertsial bo‘lmasa ham (23.2§ ga qarang), chunki u $\bar{g}$-tezlanish bilan ilgarilanma harakat qilmoqda, lekin shunga qaramay, bu o‘qlarga nisbatan harakatdagi differentsial tenglamalar, xuddi inertsial sistemalar uchun tuzilgan differntsial tenglamalardan farq qilmas ekan; ammo, *shu nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar qatoriga tortilish kuchi* $\bar{F}_\tau$ *-ni* [ya’ni, tortilish kuchi maydonida joylashgan A jism va u bilan bog‘langan hisob sistemasining Erga (samoviy jismga) tortilish kuchini] *qo‘shmaslik lozim ekan.* Bunday hisob sistemasini *hududiy hisob sistemasi* deb ataladi. Bunday hisob sistemasini, qanchalik harakat qilish hududi kichkina bo‘lsa, inertsial hisob sistemasi deb qabul qilish shunchalik to‘g‘riroq bo‘lar ekan.

Masalan, Erning atrofida ilgarilanma harakat qilayotgan kosmik apparatga nisbatan uning kabinasida joylashgan moddiy nuqtaning differentsial tenglamasi (23.18) ko‘rinishda yoziladi, ya’ni inertsial sistemadagi harakat kabi tuziladi, lekin bu nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar qatorida Erning tortilish kuchi qatnashmasligi kerak. Boshqacha qilib aytganda, barcha mexanik hodisalar Erning tortilish kuchi yo‘q bo‘lgan holdagi kabi sodir bo‘ladi.

Hududiy hisob sistemasining, ko‘rinishlaridan yana biri, bu Erga mahkamlangan va u bilan birga harakatlanuvchi o‘qlardan iborat bo‘lib, ularning yo‘nalishi uchta yulduzlarga qaratib yo‘naltirilgan o‘qlardan iborat bo‘ladi, ya’ni ular (hududiy hisob sistemasi) Er bilan birgalikda Quyosh atrofidagi ilgarilanma harakatda qatnashadi, lekin uning o‘z o‘qi atrofidagi aylanishida ishtirok etmaydi. Erning hududida harakatlanuvchi, ya’ni Erning Quyoshgacha bo‘lgan masofasiga nisbatan juda kichkina bo‘lgan masofada harakatlanuvchi jismlar uchun, bunday hududiy hisob sistemasini inertsial hisob sistemasi deb qabul qilish mumkin ekan.

Lekin bunday hisob sistemasida harakatlanuvchi jismga ta’sir etuvchi kuchlar qatoriga Quyoshning (yaqin atrofidagi samoviy jismlarning) tortilish kuchini hisobga olmaslik lozim ekan. Shu sababli, Er bilan mahkamlangan hisob sistemasida harakat qiluvchi jismlarning differntsial tenglamalarini tuzilganda, Erning o‘z o‘qi atrofidagi aylanishi e’tiborga olinmaydi, bu xaqda 23.3§ da aytib o‘tilgan. Quyoshning tortilish kuchi juda kichkina qiymatni tashkil etganligi uchun emas, balki yuqorida aytilgan qoidalarga asosan uni hisobga olinmas ekanligini tushunib olish lozim bo‘ladi.

Mavzudagi muammolarni bartaraf etish bo‘yicha uslubiy ko‘ratmalar:

1. Erkin bo‘lmagan moddiy nuqta harakatini differentsial tenglamasini tuzganimizda, tenglamaning o‘ng tomonidagi aktiv kuchlar qatoriga bog‘lanish reaktsiya kuchlarni ham qo‘shish lozim ekan.
2. Bunday masalalarni echganimizda, harakatning differentsial tenglamasini tuzishda (23.2) formuladan foydalanishimiz lozim ekan.
3. Moddiy nuqtaning nisbiy harakatida, uning differentsial tenglamasini tuzganimizda, tenglamaning o‘ng tomoniga aktiv kuchlardan tashqari ko‘chirma va koriolis inertsiya kuchlarini ham qo‘shish shart ekan.
4. Bunday masalalarni echganimizda uning differentsial tenglamasini tuzishda (23.4) formuladan foydalanish lozim ekan.
5. Ber qonuniga asosan, Erning shimoliy yarim sharidagi daryolar o‘zanining o‘ng tomondagi qirg‘og‘ini emirar ekanlar, janubiy yarim shardagi daryolar esa, o‘zanining chap tomondagi qirg‘og‘ini emirar ekanlar.
6. Agar qo‘zg‘aluvchan o‘qlar ilgarilama harakatda bo‘lsa, moddiy nuqtaga koriolis inertsiya kuchi ta’sir etmas ekan.
7. Nisbiy harakatdagi moddiy nuqta nisbiy muvozanatda bo‘lishi uchun (23.5) formula qanoatlanishi shart ekan.
8. Erning turli punktlarida tadqiqotchilar tomonidan olib borilgan qator tajribalar natijasida, (23.9) formula bo‘yicha hisoblashlar to‘g‘ri ekanligi tasdiqlandi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Erkin bo‘lmagan moddiy nuqta harakati deganimizda qanday harakatlarni tushunasiz, misollar keltiring?
2. Erkin bo‘lmagan moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamasini yozib bering?
3. Erkin bo‘lmagan moddiy nuqta harakatida bog‘lanishlarning reaktsiya kuchlarini aniqlash mumkinmi?
4. Noinertsial hisob sistemasida harakat qilayotgan moddiy nuqtaning differentsial tenglamasini yozib bering?
5. Qaysi hollarda ko‘chirma inertsiya kuchi nolga teng bo‘ladi?
6. Qaysi hollarda koriolis inertsiya kuchi nolga teng bo‘ladi?

7. Nisbiy muvozanatlik deganimizda nimani tushunasiz, misollar keltiring?
8. Vertikal pastga tushayotgan jismlar qaysi tomonga og‘adilar?
9. Vertikal yuqoriga ko‘tarilayotgan jismlar qaysi tomonga og‘adilar?
10. Erning shimoliy yarim sharida oqayotgan daryolar nima sababdan o‘zanlarining o‘ng tomonini emirib oqadilar?
11. Erning janubiy yarim sharida oqayotgan daryolar nima sababdan o‘zanlarining chap tomonini emirib oqadilar?

Mavzuni mustahkamlash uchun 23 ilovadagi masalalarni echishni tavsiya qilamiz:

24 – Ma’ruza

Mavzu: Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli tebranma harakaati.Muhit qarshiligisiz erkin tebranma harakat. YOpishqoq muhit qarshiligidagi erkin tebranma harakat (so‘nuvchi tebranishlar).

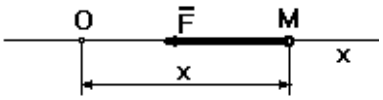
REJA:

1. Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli tebranma harakaati. Muhit qarshilisiz erkin tebranma harakat.
2. Yopishqoq muhit qarshiligidagi erkin tebranma harakat (so‘nuvchi tebranishlar).

24.1§ Muhit qarshiligisiz erkin tebranma harakat

Muammo: Moddiy nuqtaning eng ko‘p uchraydigan harakatlaridan biri, uning to‘g‘ri chiziq bo‘ylab tebranma harakati hisoblanadi. Lekin shu tebranma harakatlarning asosiy parametrlari, ya’ni tebranish chastotasi, tebranish amplitudasi, tebranish davri kabilar nimalarga bog‘liq ravishda o‘zgarishi, kerak bo‘lgan hollarda tegishli chastota va amplitudaga ega bo‘lgan tebranishlarni yaratish mumkinmi degan muhim savollarga quyida aniq javoblar olamiz.

Tebranish nazariyasi fizika va texnikaning qator ilmiy asoslarini tashkil etadi. Fan va texnikaning turli bo‘limlariga tegishli bo‘lgan tebranishlar bir-birlaridan, masalan, mexanikadagi, radiotexnikadagi, akustikadagi va b., o‘zlarining fizik mohiyati bilan tubdan farq qilsalar ham, lekin tebranma harakatning asosiy qonuniyatlari hamma vaqt bir xilligicha qolar ekan.



24.1 shakl

Shu sababli, mexanik tebranishlarning qonuniyatlarini o‘rganish o‘ta muhim bo‘lib, uning natijalari nafaqat texnikada, undan tashqari tebranishga bog‘liq bo‘lgan juda ko‘p boshqa sohalarda ham dolzarb (aktual) hisoblanadi. Avvaliga muhit qarshiligini hisobga olmagan holdagi erkin tebranishlarni ko‘rib o‘tamiz. To‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanuvchi M nuqtaga, faqat bitta -*muvozanatlovchi* $\bar{F}$ kuch qo‘yilgan bo‘lib, yo‘nalishi har doim O markazga qaraydi, moduli esa shu markazgacha bo‘lgan masofaga to‘g‘ri proportsional bo‘lsin (24.1

shakl). Shu to‘g‘ri chiziqli traektoriya bo‘ylab o‘tkazilgan koordinata o‘qiga $\bar{F}$-kuchning proektsiyasi quyidagicha bo‘ladi,

$$F_x=-cx \qquad (24.1)$$

Shakldan ko‘rinib turganidek $\bar{F}$-kuchi nuqtani O markazdagi muvozanat holatga keltirishga harakat qiladi, chunki shu O nuqtada F=0 ga teng bo‘ladi; shu sababli uni «muvozanatlovchi» kuch deb ataladi. Bunday kuchga elastiklik kuchi (22.1§ dagi 22.2 shakl) yoki 20.3 masaladagi (20.2§) tortilish kuchi misol bo‘la oladi.

M nuqtaning harakat qonunini aniqlaymiz. Harakatning differentsial tenglamasini Ox o‘qidagi proektsiyasi (20.1§ dagi 20.1 tenglama) ni yozamiz:

$$m\,x''=F_x \quad \text{yoki} \quad m\,x''=-sx. \qquad (24.2)$$

Tenglikning ikkala tomonini m-ga bo‘lib yuborib va $c/m=k^2$ belgilash kiritib, yuqoridagi tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$x''+k^2x=0 \qquad (24.3)$$

(24.3) tenglama, *muhit qarshiligisiz erkin tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Ushbu chiziqli, ikkinchi darajali bir jinsli differentsial tenglamaning echimini $x=e^{nt}$ ko‘rinishda izlanadi. (24.3) tenglamadagi x-ni $x=e^{nt}$ orqali ifodalab, noma’lum n- ni aniqlash uchun quyidagi kvadrat tenglamadan iborat bo‘lgan xarakteristik tenglamani hosil qilamiz $n^2+k^2=0$. Ushbu tenglamaning ildizlari faqat mavhum ($n_{1,2}=\pm ik$) qiymatlar bo‘lgani sababli, differentsial tenglamalarning nazariyasiga asosan, (24.3) tenglamaning umumiy echimi, quyidagicha bo‘ladi

$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt, \qquad (24.4)$$

bu erdagi S_1 va S_2-lar integral doimiylari. Agar, S_1 va S_2- o‘zgarmas qiymatlarning o‘rniga A va α -dan tashkil topgan boshqacha, ya’ni $S_1=A\cos\alpha$, $S_2=A\sin\alpha$ larni kiritsak, u holda (24.4) tenglamaning ko‘rinishi $x=A(\sin kt\cdot\cos\alpha+\cos kt\cdot\sin\alpha)$ yoki

$$x=A\sin(kt+\alpha), \qquad (24.5)$$

bo‘ladi. Bu (24.3) tenglamaning boshqacha echimi bo‘lib, integral doimiylari sifatida A va α -lar ishtirok etmoqda. Ular orqali harakatni tadqiq qilish ancha qulay hisoblanadi.

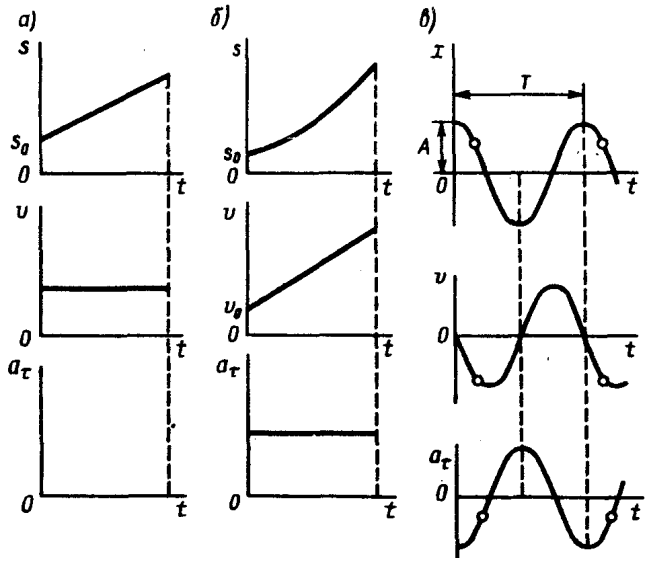
Tebranma harakatdagi nuqtaning tezligi

$$v_x=x'=A\cos(kt+\alpha), \qquad (24.6)$$

(24.5) qonuniyat bilan tebranuvchi nuqtaning harakati *garmonik tebranma harakat* deb ataladi. Bunday harakatning $\alpha=90°$ dagi grafigi 24.2, v shaklda tasvirlangan.

Bunday harakatning barcha xarakteristikalariga tasviriy kinematik tafsilotlar berish mumkin. Radiusi A ga teng bo‘lgan aylana bo‘ylab tekis harakatlanayotgan V nuqtaning harakatini ko‘rib chiqaylik. Nuqtaning harakati V_0 -holatdan boshlanib, $DOB_0=\alpha$ burchak orqali aniqlanadi. OV radiusning burchakli tezligi-k o‘zgarmas qiymat bo‘lsin. U holda, ixtiyoriy t vaqtda burchak $\varphi=\angle DOB=\alpha+kt$ bo‘lsin, V nuqtaning (Ox o‘qiga) DE -ga perpendikulyar bo‘lgan diametrga proektsiyasi M, $x=A\sin(kt+\alpha)$, qonuniyat bilan harakat qiladi, bu erda x=OM, ya’ni garmonik tebranma harakat qilmoqda.

M nuqtaning tebranish markazi O nuqtadan eng katta uzoqlashgan qiymati A, *tebranish amplitudasi* deb ataladi. $\varphi=kt+\alpha$ *tebranish fazasi* deb ataladi. Tebranish fazasi- φ, nuqtaning koordinatasi x-dan farqli ravishda, berilgan vaqtdagi nuqtaning holatini aniqlabgina qolmasdan, keyingi harakatning yo‘nalishini ham belgilab beradi; masalan, fazasi φ bo‘lgan M holatdan, nuqta o‘ng tomonga qarab harakatlanadi, fazasi $(\pi-\varphi)$ bo‘lganda esa chap tomonga qarab harakatlanadi. Bir-biridan 2π fazaga farqlanuvchi tebranma harakatlar bir xil hisoblanadilar (24.2, v shaklda o‘rtasi oq nuqtalar bilan bir xil fazalar belgilab qo‘yilgan).



24.2-a,b,v shakl.

Tebranishning boshlang‘ich fazasini α-qiymat orqali aniqlanadi. Masalan, $\alpha=0$ bo‘lganda tebranma harakat sinusoida bo‘yicha sodir bo‘ladi (harakat O nuqtadan boshlanib, tezlik o‘ng tomonga yo‘naladi). $\varphi=\pi/2$ -bo‘lganda kosinusoida (harakat x=A holatdan va v_0 -tezlik bilan boshlanadi), OV radiusning burchakli tezligi bilan bir xil bo‘lgan k-qiymat *tebranishning davriy chastotasi* deb ataladi (24.3 shakl).

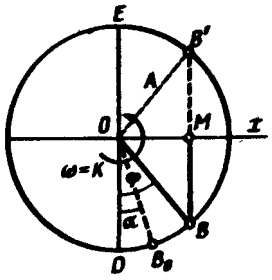
Nuqtaning to‘la bir marta tebranishi uchun sarflangan vaqt oralig‘i T (yoki τ), *tebranish davri* deb ataladi. Davr o‘tishi bilan faza 2π-ga o‘zgaradi. Shu sababli $kT=2\pi$ bo‘lishi shart, bundan tebranish davri aniqlanadi

$$T=2\pi/k \qquad (24.7)$$

Tebranish davriga teskari nisbatda bo‘lgan

$$\nu=1/T=k/2\pi \qquad (24.8)$$

qiymat, tebranish chastotasi deb ataladi va u 1 s vaqt ichidagi tebranishlar sonini ifodalaydi.



24.3 shakl

Bundan ko‘rinib turibdiki, k - qiymat ν-dan faqat 2π ko‘paytmasi bilan farqlanar ekan. Keyinchalik, qisqaroq gapirish uchun k-ni ham chastota degan so‘z bilan atayveramiz.

Endi A va α integral doimiylarining son qiymatlarini aniqlaymiz.

A va α - n i boshlang‘ich shartlarga asosan aniqlash. Odatdagidek, t=0 da $x=x_0$, $v_x=v_0$ ekanligidan foydalanib, (24.5) va (24.6) formulalar orqali $x_0=A\sin\alpha$, $v_0/k=A\cos\alpha$ - ni aniqlaymiz. Bu tengliklarni kvadratga ko‘tarib, ularni hadma-had qo‘shsak, so‘ngra ularning birini ikinchisiga nisbatini olsak, A va α larning qiymatlarini aniqlaymiz

$$A=\sqrt{x_0^2+v_0^2/k^2}\,, \quad \operatorname{tg}\alpha=kx_0/v_0 \qquad (24.9)$$

A va α -larni nuqtaning chegaraviy shartlari orqali aniqlash (20.1§). Boshlang‘ich shartlarning o‘rniga quyidagi chegaraviy shartlar berilgan bo‘lsin: t=0 da $x=x_0$, $t=t_1$ da x=l bo‘lsin. U holda, (24.5) formula orqali $0=\sin\alpha$, $l=A\cdot\sin(kt+\alpha)$ -ni yozamiz, bundan $\alpha=0$, $A=l/\sin kt$ bo‘ladi va (24.3) tenglamaning echimi (agar faqat $t_1\neq\pi/2=T/2$ bo‘lsa) $x=(l/\sin kt_1)\sin kt$ bo‘ladi, agar $t_1=\pi/2$ (yoki $2\pi/k$ va h.) bo‘lsa, u holda A -ni aniqlash uchun $l=A\sin\pi$ tenglama tuzamiz, lekin $l\neq0$ bo‘lganda u tenglamani qoniqtirmaydi, natijada masala echimga ega bo‘lmaydi. Agar l=0 va $t_1=\pi/2$ bo‘lsa, A -ni aniqlash uchun $0=A\sin\pi$ tenglama hosil qilamiz, ya’ni A-ning ixtiyoriy qiymatlarida ham tenglamani qoniqtiradi. Demak (24.3) tenglamaning echimi $x=A\sin kt$ ko‘p bo‘lishi mumkin, A-ixtiyoriy son.

Shunday qilib, boshlang‘ich shartlarsiz, ya’ni chegaraviy shartlar berilgan masalalar bir necha echimga yoki, umuman, echimga ega bo‘lmasliklari mumkin ekan. Ko‘rilgan xususiy holda, agar masalaning sharti bo‘yicha t=0 da $x=x_0$ bo‘lsa, u holda yarim davrdan keyin ham, ya’ni $t_1=\pi/k$ bo‘lganda ham x=0 bo‘lishi kerak. Shuning uchun, $t_1=\pi/k$ bo‘lganda $x=l\neq0$ bo‘lishi mumkin emas va $t_1=\pi/k$ bo‘lganda x=l=0 bo‘lishi doimo bajariladi, ya’ni ixtiyoriy A amplituda bilan.

Erkin tebranishlarning xossalari. Mavzuning so‘nggida erkin tebranishlarning muhim xossalari bilan tanishtirib o‘tamiz: 1) amplituda va boshlang‘ich faza, boshlang‘ich (yoki chegaraviy)

shartlarga *bog‘liq* bo‘ladi; 2) chastota k va o‘z navbatida davr T boshlang‘ich (yoki chegaraviy) shartlarga *bog‘liq bo‘lmaydi* [ular (24.2) va (24.7) tengliklar orqali aniqlanadi] va tebranuvchi sistemaning o‘zgarmas xarakteristikasi hisoblanadi. (*Xuddi mana shu ikkinchi xossasiga asosan soat mexanizmlari ixtiro etilgan*).

Bundan xulosa qilib shuni aniqlash mumkin ekanki; agar masalada faqat davr (yoki chastota)ni aniqlash talab etilsa, u holda harakatning differentsial tenglamasini tuzib, uni (24.3) ko‘rinishga keltirish kerak ekan. So‘ngra undan T (yoki k) ning qiymatini integrallamasdan turib (24.7) formula orqali aniqlash mumkin ekan.

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan tebranma harakat va quyidagi 24.3§ larda ko‘rib o‘tiladigan tebranma harakatlar *chiziqli* deb ataladi, chunki ularning differentsial tenglamalari chiziqli funktsiyalardan tashkil topgan. Ushbu tebranma harakatlarning davri boshlang‘ich (yoki chegaraviy) shartlarga va amplitudaga bog‘liq emasligi chiziqli tebranma harakatlarning eng asosiy xossalaridan biri hisoblanadi. Harakati chiziqsiz differentsial tenglamalar orqali tuzilgan tebranma harakatlar, *chiziqsiz* deb ataladi; ular yuqoridagi xossalarga ega emaslar (24.4 masalaga q.).

Nuqtaning erkin tebranma harakatiga o‘zgarmas kuchning ta’siri. Faraz qilaylik, moddiy M nuqtaga, O markazga intilgan muvozanatlovchi $\bar{F}$ (son qiymati F=c·OM) kuchdan tashqari, moduli va yo‘nalishi o‘zgarmas bo‘lgan $\bar{P}$-kuch ham ta’sir qilsin (24.4 shakl). Bunday holatda, M nuqtaning muvozanat holati O markazda bo‘lmay qoladi va u yangi O_1 nuqtada bo‘ladi. CHunki shu O_1 nuqtada $\bar{P}$ kuchi bilan $\bar{F}$ kuchi o‘zaro muvozanatlashadi va bu $OO_1=\lambda_{st}$ masofa $s\lambda_{st}=R$ formula orqali aniqlanadi, ya’ni

$$\lambda_{st}=R/c \qquad (24.10)$$

λ_{cn}-qiymat, *statik og‘ish* deb ataladi.

O_1-nuqtani koordinata boshi deb tanlab olaylik va O_1x o‘qni $\bar{P}$ kuchning yo‘nalishi bo‘yicha yo‘naltiraylik. U holda $F_x=-c(x+\lambda_{ct})$ va $R_x=R$ bo‘ladi. Natijada (20.1) tenglama (24.10) formulaga asosan $s\lambda_{st}=R$ ekanligini hisobga olib, nuqta harakatining differentsial tenglamasini tuzamiz, ya’ni $m\ddot{x}=-cx$ yoki $x''+k^2x=0$ bo‘ladi..

Ushbu tenglama, [bu erdagi k- (24.2) formula orqali aniqlanadi] (24.3) tenglama bilan bir xil bo‘ladi. Bunga asosan xulosa qilib, shuni aytish mumkinki: *o‘zgarmas kuch, tebranma harakatning xarakteristikasini hech qanday o‘zgartirmas ekan, faqat tebranish*

markazini kuchning yo‘nalishi tomonga qarab statik og‘ish λ_{st} -ga teng bo‘lgan (OO_1) masofaga surar ekan xolos.

Tebranish davrini λ_{st}-orqali ifodalaymiz. (24.10) va (24.2) formulalar orqali $k^2=R/m\lambda_{st}$-ni aniqlaymiz. U holda (24.7) tenglikdan,

$$T=2\pi\sqrt{m\lambda_{ст}/P} \qquad (24.11)$$

Shunday qilib, tebranish davri statik og‘ish λ_{st}-ning kvadrat ildiziga to‘g‘ri proportsional ekan.

Xususiy holda, agar $\overline{P}$ kuchning o‘rnida og‘irlik kuchi qatnashsa (masalan, 24.1 masaladagi kabi), u holda R=mg bo‘ladi va (24.11) formula quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$T=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g} \qquad (24.11')$$

24.1 masala. AV vertikal prujinaning V uchiga yuk osib qo‘yiladi va boshlang‘ich tezliksiz qo‘yib yuboriladi. Agar yuk muvozanat holatda prujinani λ_{st} (prujinaning statik uzayishi) qiymatga uzaytiriladigan bo‘lsa, shu yukning harakat qonuni aniqlansin.

E ch i sh. Koordinata boshi O nuqtani prujinaning statik muvozanat holatga joylashtiramiz va Ox o‘qini vertikal pastga yo‘naltiramiz (24.4 shakl). Elastiklik kuchi $F=c\lambda$. Ushbu masalada $\lambda=\lambda_{st}+x$ bo‘ladi. Shu sababli, $F_x=-c(\lambda_{st}+x)$.

Harakatning differentsial tenglamasini tuzamiz,

$$m\ddot{x}=-c(\lambda_{st}+x)+R$$

Lekin, masalaning shartiga ko‘ra $R=mg=c\lambda_{st}$ (muvozanat holatda og‘irlik kuchi R bilan elastiklik kuchi $c\lambda_{st}$ o‘zaro muvozanatlashadilar); Natijada $c/m=g/\lambda_{st}=k^2$,belgilash kiritib, quyidagini yozamiz,

$$x''+k^2x=0$$

Bu tenglamani echmasdanoq, (24.11’) formula orqali tebranish davrini aniqlaymiz, $T=2\pi/k=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}$

Yuqorida ko‘rib o‘tganimizdek, ushbu differentsial tenglamaning echimi [(24.4) formula], quyidagicha bo‘ladi,

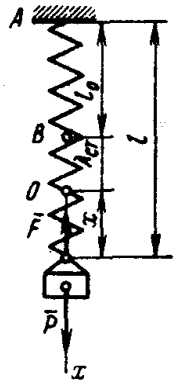
$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt,$$

Boshlang‘ich shartlarga asosan, t=0 da $x=-\lambda_{st}$, $v_x=0$. Hamda

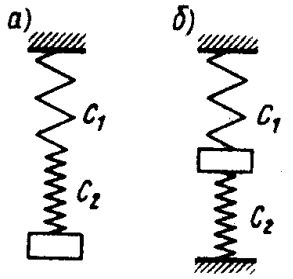
$$v_x=\dot{x}=kS_1\cos kt-kS_2\sin kt,$$

bu tenglamalardan integral doimiylarini aniqlaymiz, ya’ni $S_2=-\lambda_{st}$, $S_1=0$. Demak, nuqta $x=-\lambda_{st}\cos kt$ qonuniyat bilan tebranma harakat qilar ekan (bu erdagi λ_{st}-tebranish amplitudasi).

24.2 masala. Qattiqlik koeffitsientlari s_1 va s_2 -bo‘lgan ikkita ketma ket ulangan prujinalarga osib qo‘yilgan R yuk (24.5, a shakl)ning tebranish davri aniqlansin.



24.4 shakl



24.5 shakl

E ch i sh. Har bir prujina statik holatda R kuch bilan tortilmoqda. Demak, prujinalarning statik uzayishlari $\lambda_{st1}=R/s_1$, va $\lambda_{st2}=R/s_2$. U holda prujinalarning umumiy uzayishi

$$\lambda_{st}=\lambda_{st1}+\lambda_{st2}=R\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)=R\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}$$ ga teng bo‘laadi.

$R=s_{ekv}\lambda_{st}$ bo‘lganligi sababli, yuqoridagi formuladan,

$$s_{ekv}=\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}$$

bu erdagi s_{ekv}-ekvivalent prujinaning qattiqlik koeffitsienti, ya’ni shu ikkita prujinaning o‘rnini bosuvchi yagona prujinaning qattiqligi. Xususiy xolda, agar $s_1=s_2=s$ bo‘lsa, $s_{ekv}=s/2$ bo‘ladi.

Tebranish davri (24.11’) formula orqali aniqlanadi,

$$T=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}=2\pi\sqrt{\frac{P}{g}\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}}$$

24.3 masala. Oldingi masalani, yuk prujinalarga 24.5, b shakldagidek osilgandagi holati uchun echilsin.

E ch i sh. Ushbu holatda, ikkala prujinaning statik uzayishi (siqilishi) o‘zaro teng bo‘ladi. Hamda og‘irlik kuchi R, $\lambda_{st1}=R/s_1$, va $\lambda_{st2}=R/s_2$ lardan iborat elastik kuchlari bilan muvozanatlashadi, ya’ni $R=(s_1+s_2)\lambda_{st2}$. Bundan $s_{ekv}=(s_1+s_2)$ bo‘ladi. Natijada tebranish davri

$$T=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}=2\pi\sqrt{\frac{P}{g(c_1+c_2)}}$$

24.4 masala. Agar muvozanatlovchi kuch $\bar{F}$ ning moduli O markazgacha bo‘lgan masofaning kubiga proportsional ravishda o‘zgarsa, massasi m -ga teng bo‘lgan nuqtaning tebranish davri aniqlansin (24.1 shakl). $F=-c_1x^3$, bu erdagi s_1 -berilgan koeffitsient. Harakatni kuzatish boshlanganda, ya’ni t=0 da $x=x_0$, $v_0=0$.

E ch i sh. Nuqtaning differentsial tenglamasini (14) ko‘rinishda (20.1§ ga qarang) tuzamiz; Natijada quyidagi chiziqli bo‘lmagan differentsial tenglama hosil bo‘ladi,

$$mv_x \frac{dv_x}{dt} = -cx^3 \quad \text{yoki} \quad \frac{d(v_x^2)}{dx} = -n^2x^3; \quad \text{bu erda} \quad n^2 = \frac{c_1}{m}$$

Oxirgi tenglamani ikkala tomonini dx -ga ko‘paytirib yuboramiz va (boshlang‘ich shartlarga muvofiq bo‘lgan) tegishlicha (o‘ng tomonini x_0 dan x-gacha, chap tomonini 0 dan v_x gacha) chegaralarda aniq integral olamiz,

$$v_x^2/2 = n^2(x_0^4 - x^4)/4 \qquad (a)$$

Lekin t=0 da v_x=0 bo‘lgani sababli, nuqta $\bar{F}$ kuch ta’sirida chap tomonga qarab siljiy boshlaydi, natijada v_x<0 bo‘ladi. (a) tenglamadan ko‘rinib turganidek, x=-x_0 bo‘lganida v_x=0 bo‘ladi va nuqta $\bar{F}$-kuchi ta’sirida (x<0 va c_1x^2<0 hamda F_x>0 bo‘lganda) o‘ng tomonga qarab harakatlanib, x=x_0 holatga keladi va yana v_x=0 bo‘ladi va h.k. Shunday qilib, nuqta x_0-ga teng amplituda bilan tebranma harakat qiladi.

Masalani echishni davom etdirish uchun (a) formulaga dx/dt=v_x ni qo‘yamiz; v_x<0 ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{x_0^4 + x^4} \quad \text{va} \quad dt = -\frac{\sqrt{2}}{n}\frac{dx}{\sqrt{x_0^4 - x^4}}$$

Yuqoridagi mulohazalarga asosan nuqta x=x_0 holatdan x=0 (O nuqtagacha) holatga davrning to‘rtdan bir qismida ko‘chadi. Shu sababli,

$$\frac{T}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{n}\int_{x_0}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x_0^4 - x^4}}$$

x=x_0z-belgilash kiritamiz, (z- o‘zgaruvchan bo‘lgan yangi qiymat) va x=0 da z=0, hamda x=x_0 da z=1 bo‘lishini e’tiborga olib,

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{nx_0}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}$$ ni yozamiz.

Tenglamaning o‘ng tomonidagi aniq integralning (bu, elliptik integralning xususiy ko‘rinishi) echimi tegishli jadvaldan aniqlanadi; u taqriban olganda 1,31 ga teng bo‘ladi, natijada

$$T \approx 7{,}4/nx_0$$

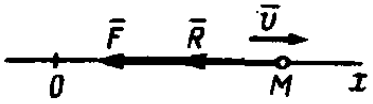
Ko‘rinib turganidek, chiziqli bo‘lmagan bunday tebranma (chiziqli tebranma harakatga nisbatan) harakatda tebranish davri x_0-ga bog‘liq bo‘lar ekan va x_0 ortgan sari tebranish davri kamayib borar ekan.

Tayanch so‘z va iboralar: Erkin tebranish, xususiy chastota, tebranish amplitudasi, tebranish davri. CHiziqli tebranma harakat, chiziqli bo‘lmagan tebranma harakat.

24.2§ Yopishqoq muhit qarshiligi ta’siridagi erkin tebranishlar (So‘nuvchi tebranishlar).

Muammo: Yuqorida ko‘rib o‘tilgan tebranishlarda muhitning qarshiligi e’tiborga olinmagan edi, shu sababli bunday tebranishlar tabiatda deyarli uchramaydi. Lekin shunga qaramasdan ularni o‘rganishning ahamiyati katta. Biz quyida, tabiatda juda ko‘p uchraydigan tebranishlar, ya’n muhit qarshiligi ta’siridagi real holatdagi erkin tebranishlarning dinamikasi bilan tanishib o‘tamiz.

Ushbu mavzuda, yopishqoq muhitlarning qarshiligi ta’siridagi erkin tebranma harakatni tekshirib ko‘ramiz [19.4§ dagi (19.7) formulaga qarang]. Yopishqoq muhitlar (turli yog‘lar, suv va boshqa suyuqliklar) ning qarshiliklari nuqtaning tezligiga to‘g‘ri proportsional ravishda o‘zgaruvchan funktsiyadan iborat bo‘ladi, masalan $\overline{R}=-\mu\overline{v}$ (manfiy ishora, kuchni tezlikka teskari yo‘nalishda ekanligini ko‘rsatib turibdi). Nuqtaning harakatida muvozanatlovchi $\overline{F}$ kuch va muhit qarshiligi kuchi $\overline{R}$, ta’sir etsin (24.6 shakl). U holda $F_x=-cx$, $R_x=-\mu v_x=-\mu x'$ bo‘lganligi uchun, shu nuqtaning harakat differentsial tenglamasi quyidagicha yoziladi



24.6 shakl.

$$m x''=-cx-\mu x'$$

Tenglamaning ikkala tomonini m-ga bo‘lib yuborib, tegishli belgilashlar kiritsak,

$$x''+2b x'+k^2x=0 \qquad (24.12)$$

bu erdagi

$$k^2=c/m;\quad 2b=\mu/m \qquad (24.13)$$

k va b -qiymatlarning o‘lchov birliklari bir xil (1/vaqt); shu sababli ularni o‘zaro solishtirish mumkin.

(24.12) tenglama *tezlikka proportsional bo‘lgan qarshilik ta’siridagi erkin tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Uning echimini (24.3) tenglamadagi kabi $x=e^{nt}$ ko‘rinishda axtariladi. Ushbu x-ning qiymatini (24.12) ga qo‘ysak, xarakteristik tenglama kelib chiqadi, uning ildizlari

$$n_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-k^2} \qquad (24.14)$$

1. Agar, k>b bo‘lsa, ya’ni muvozanatlovchi kuchga nisbatan qarshilik kuchi kichkina bo‘lsa, quyidagi belgilash kiritilgandan so‘ng

$$k_1=\sqrt{k^2-b^2} \qquad (24.15)$$

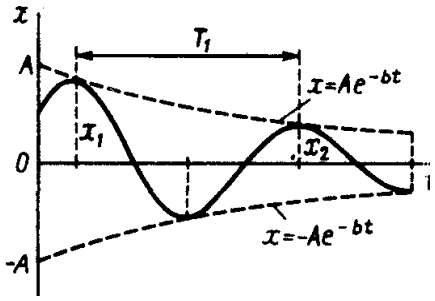
(24.14) ifoda $n_{1,2}=-b\pm ik_1$ ko‘rinishga keladi, ya’ni **xarakteristik tenglama**ning ildizlari kompleks sonlardan iborat bo‘lar ekan. U holda (24.12) tenglamaning umumiy echimi, (24.3) tenglamaning echimidan faqat e^{-bt}-ko‘paytmaga farq qilar ekan xolos, ya’ni

$$x=e^{-bt}(C_1\sin k_1t+C_2\cos k_1t) \qquad (24.16)$$

yoki (24.5) formula kabi o‘zgartirilsa,

$$x=A\,e^{-bt}\sin(k_1t+\alpha)\text{ bo‘ladi,} \qquad (24.17)$$

(24.17) formuladagi A va α -lar integral doimiylari hisoblanadi va ularning son qiymatlari boshlang‘ich shartlar yordamida aniqlanadi.



24.7 shakl.

(24.17) tenglama bo‘yicha sodir bo‘ladigan harakat, so‘nuvchi harakat bo‘ladi, chunki tenglamada e^{-bt} dan iborat ko‘paytma bo‘lganligi sababli, x=OM (24.6 shakl) qiymat vaqt o‘tishi bilan kamayib borib nolga intiladi.

Ushbu tebranma harakatning grafigi 24.7 shaklda tasvirlangan (grafik ikki tarafdan $x=A\,e^{-bt}$ va $x=-A\,e^{-bt}$ punktir egri chiziqlar ichiga olingan, chunki $\sin(kt+\alpha)$ ning son qiymati 1-dan oshmaydi).

T_1 vaqt oralig‘ini so‘nuvchi tebranishlar davri deb ataladi va u $\sin(kt+\alpha)$ ning davriga teng bo‘lib, uning qiymati

$$T_1=\frac{2\pi}{k_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-b^2}} \qquad (24.18)$$

Bir davr ichida, nuqta to‘la bir marta tebranadi, ya’ni x=0 holatdan (24.6 shakl) o‘ng tomonga qarab harakat boshlasa, bir davr o‘tgandan so‘ng yana shu nuqtadan yana o‘ng tomonga harakat boshlaydi. Agar (24.7) tenglikni e’tiborga olsak (24.18) formula quyidagi ko‘rinishga keladi,

$$T_1=\frac{2\pi}{k\sqrt{1-b^2/k^2}}=\frac{T}{\sqrt{1-b^2/k^2}}\approx T\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{b^2}{k^2}\right) \qquad (82')$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, $T_1>T$, ya’ni muhit qarshiligi ta’sirida tebranish davri ortar ekan, lekin qarshilik kuchi juda oz miqdorda bo‘lsa (ya’ni b<<k), u holda b^2/k^2 nolga yaqin son bo‘lib, natijada $T_1\approx T$

bo‘ladi. Demak, kichkina qarshilik kuchi tebranish davriga ta’sir etmas ekan.

Tebranayotgan nuqtaning ketma ket o‘ng (yoki chap) tomonga ikkita maksimum og‘ishiga ketgan vaqt ham T_1[18] -ga teng bo‘lar ekan. Demak, agar birinchi maksimal og‘ishi x_1, t_1 -vaqtga to‘g‘ri kelsa, undan keyingi maksimal og‘ish vaqti $t_2=t_1+T_1$ ga to‘g‘ri keladi va h.k. U holda (24.17) formula orqali, $k_1T_1=2\pi$ ekanligini hisobga olsak,

$$x_1=A\,e^{-bt_1}\sin(k_1t_1+\alpha)$$

$$x_2=A\,e^{-b(t_1+T_1)}\sin(k_1t_1+k_1T_1+\alpha)=x_1\,e^{-bT_1}$$

Xuddi shunday ifodani har qanday ketma ket x_{n+1} ikkita og‘ish uchun $x_{n+1}=x_n\,e^{-bT_1}$ yozishimiz mumkin, Shunday qilib, tebranishning qulochi (razmaxi) geometrik progressiya bo‘yicha sekin asta kamayib borar ekan. Ushbu progressiya’ning mahraji e^{-bT_1}-ni *tebranish dekrementi* deb ataladi va uning logarifm modulini, ya’ni bT_1-ni *logarifmik dekrement* deb ataladi.

Yuqorida olingan natijalardan shuni aniqlash mumkin ekanki, kichkina qarshilik kuchi tebranishning davriga katta ta’sir ko‘rsatmas ekan, lekin har-bir tebranishda asta sekin tebranish qulochi (razmax) geometrik progressiya bo‘yicha kamayib borar ekan.

2. $b>k$ bo‘lsin, ya’ni qarshilik kuchi muvozanatlovchi kuchdan katta bo‘lsin. Quyidagi $b^2-k^2=r^2$ belgilash kiritamiz va (24.14) xarakteristik tenglamaning ildizlari $n_{1,2}=-b\pm r$ dan iborat bo‘lib, ikkala ildizi ham haqiqiy va manfiy (chunki $r<b$) sonlardan iborat bo‘lar ekan. Demak, $b>k$ bo‘lgandagi nuqta harakatining (24.12) differentsial tenglamasining echimi,

$$x=C_1\,e^{-(b+r)t}+C_2\,e^{-(b-r)t}$$

e^{-at}-funktsiya ($a>0$) vaqt mobaynida monoton (muntazam) kamayib borib, nolga intilganligi uchun, bunday harakat tebranma harakat bo‘lmaydi va muvozanatlovchi kuch ta’sirida asta sekin (asimptotik ravishda) muvozanat $x=0$ holatga keladi. Agar $t=0$ da $x=x_0>0$ va $v_x=v_{x0}$ bo‘lsa, bunday harakatning grafigi v_{x0} bog‘liq ravishda 24.8 shakldagi egri chiziqlardan biri ko‘rinishida bo‘ladi; (1- $v_{x0}>0$ bo‘lganda; 2- $v_{x0}<0$ bo‘lganda va $|v_{x0}|$ kichkina bo‘lganda; 3- $v_{x0}<0$ bo‘lganda va $|v_{x0}|$ katta bo‘lganda; ushbu natijalarning sifat ko‘rsatkichlari fizik mulohazalar orqali aniqlanadi). Agar $x_0<0$ bo‘lsa,

[18] x -ning maksimum va minimum qiymatlaridagi vaqtlar, $dx/dt=Ae^{-bt}[k_1\,sos(k_1t+\alpha)-bsin(k_1t+\alpha)]=0$ tenglama orqali aniqlanadi. Agar qandaydir $t=t_1$ vaqtda kvadrat qavs nolga teng bo‘lsa, u t_1+T_1, t_1+2T_1 - va h.k. vaqtlarda ham nolga teng bo‘ladi, chunki $k_1T_1=2\pi$.

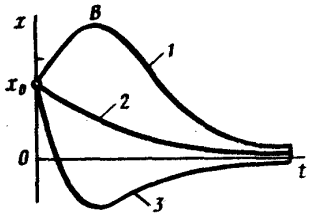
grafiklarning ko‘rinishi aslo o‘zgarmaydi,(faqat Ot o‘q atrofida 180° ga aylanib qoladi, ya’ni ko‘zgudagi teskari tasvirga aylanib qoladi); va nihoyat $x_0>0$ va $v_{x0}=0$ bo‘lsa (1-egri chiziq) t=0 vaqtda o‘zining maksimal V holatida bo‘ladi.

3. Mavzuning so‘ngida b=k bo‘lgan holatni ko‘rib o‘tamiz. Bu holda (24.14) xarakteristik tenglamaning ildizlari $n_{1,2}=\pm b$ bo‘ladi. ya’ni son qiymatlari bir xil, lekin ishoralari qarama-qarshi bo‘ladi va (24.12) tenglamaning umumiy echimi, quyidagi ko‘rinishga keladi,

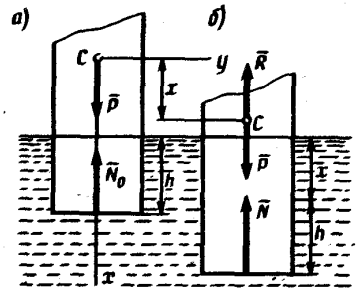
$$x=e^{-bt}(C_1+C_2t)$$

Bu holda ham nuqta tebranma harakatda bo‘lmaydi va vaqt o‘tishi bilan tebranmagan holda egri chiziqli harakat qilib asta-sekin (asimptotik ravishda) muvozanat, ya’ni x=0 holatga yaqinlasha boradi{Lopital qoidasiga ko‘ra, agar $t\to\infty$ intilsa $\lim(t/e^{bt})=\lim(1/be^{bt})=0$] va 24.8 shaklning 3-grafigi bo‘yicha harakat qiladi.

24.5 masala. Solishtirma og‘irligi -γ bo‘lgan suyuqlikka qisman cho‘ktirilgan (massasi -m, ko‘ndalang kesim yuzasi-S bo‘lgan) tsilindrni (24.9 shakl)muvozanat holatdan chiqarib yuboriladi, natijada tsilindr tebranma harakat qila boshlaydi. Agar tsilindrning tebranma harakatiga suyuqlik (muhit) tomonidan ko‘rsatiladigan qarshilik kuchi $\bar{R}=-\mu\bar{v}$-dan iborat bo‘lsa, shu tsilindrning so‘nuvchi tebranma harakati aniqlansin



24.8 shakl



24.9 shakl

E ch i sh. Muvozanat holatda (24.9, a shakl) tsilindrga og‘irlik kuchi $\bar{P}$ va tsilindr tomonidan siqib chiqarilgan suyuqlikning og‘irligiiga teng bo‘lgan arximed kuchi $\bar{N}_0$, ya’ni $N_0=\gamma Sh$ (h-tsilindrning suvga cho‘kib turgan qismining muvozanat holatdagi balandligi) ta’sir etadi.

Tsilindrning og‘irlik markazi joylashgan S nuqtadan vertikal pastga qaratib Ox o‘qini o‘tkazamiz va tsilindrning S markazini boshlang‘ich holatidan ixtiyoriy *x* masofada pastroqda tasvirlaymiz (24.9, b shakl). Tsilindrning ushbu holatida, unga: og‘irlik kuchi $\bar{P}$, arximed qarshilik kuchi $\bar{N}_0$ va suyuqlikning qarshilik kuchi $\bar{R}$-(bu kuchning yo‘nalishi, har doim tsilindrning tezligiga teskari yo‘nalishda bo‘ladi)lar ta’sir etadi; $\bar{P}$ va $\bar{R}$ kuchlarni S nuqtaga vektor shaklida

qo‘yamiz. Tsilindrning cho‘kishi qo‘shimcha ravishda *x* masofaga ortganligini e’tiborga olsak, arximed kuchining moduli $N=\gamma S(h+x)$ bo‘ladi (bundan ko‘rinib turibdiki, arximed kuchi *x* masofaga proportsional ravishda muvozanatlovchi kuch bo‘lib xizmat qilmoqda).

Tsilindrning ilgarilanma harakatining differentsial tenglamasini Sx o‘qidagi proektsiyasini yozamiz:

$$m\,x'' = R_x + N_x + R_x \quad \text{yoki} \quad m\,x'' = R-(N_0+\gamma Sx)-\mu v_x.$$

Tsilindrning muvozanat holatida $R=N_0$ bo‘lishini va quyidagi belgilashlarni kiritsak,

$$\gamma S/m=k^2,\ \mu/m=2b \qquad (a)$$

yuqoridagi differentsial tenglama (24.12) formuladagi ko‘rinishga keladi, ya’ni

$$x'' + 2b\,x' + k^2x = 0$$

U holda (a) belgilashlarni e’tiborga olib (24.18) formuladan so‘nuvchi tebranma harakatning davrini aniqlasak, u quyidagicha bo‘ladi:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma S/m - \mu^2/4m^2}}.$$

Tayanch so‘z va iboralar: So‘nuvchi tebranishlar, yopishqoq muhitning qarshilik koeffitsienti, xarakteristik tenglama, so‘nuvchi tebranishlar davri, chastotasi, so‘nish dekrementi, logarifmik so‘nish dekrementi.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.

1. Muvozanatlovchi kuch ta’siridagi harakat qilayotgan moddy nuqtaning harakati erkin tebranishlardan iborat bo‘lar ekan. Erkin tebranishlarning differentsial tenglamasi (24.3) formuladan iborat bo‘lar ekan.
2. Erkin tebranishlarnng parametrik tenglamasi (24.4) yoki (24.5) tenglamalar orqali yozilar ekan.
3. Integral doimiylarini aniqlash uchun, tebranma harakatning boshlang‘ich shartlaridan foydalaniladi.
4. Xususiy tebranish chastotasi, muvozanatlovchi kuchning o‘zgarmas koeffitsientiga to‘g‘ri proportsional, moddiy nuqtaning massasiga teskari proportsional ravishda o‘zgarar ekan.
5. Tebranish davri deb, moddiy nuqtaning muvozanat holatidan boshlab to‘liq bir tebranishga sarflangan vaqtga aytilar ekan.

6. Tebranish chastotasi deb, 2p sekund vaqt ichidagi tebranishlar soniga aytilar ekan.
7. Tebranishlar amplitudasi deb, moddiynuqtaning biror tomonga bo‘lgan maksimal og‘ishiga aytilar ekan.
8. Agar tebranishlar muhit qarshiligi ta’sirida sodir bo‘lsa , bunday tebranishlar so‘nuvchi erkin tebranishlar deb atalar ekan.
9. Amplitudaning sekin asta so‘nib borishini xarakterlovchi qiymat, so‘nish dekrementi deb atalar ekan.
10. So‘nish dekrementining natural logarifmi, so‘nuvchi tebranishlarning logarifmik dekrementi deb atalar ekan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Moddiy nuqtaning erkin tebranishlari deb qanday harakatga aytiladi?
2. Erkin tebranma harakat sodir bo‘lishi uchun qaysi shartlar bajarilishi shart.
3. Tebranish chastotasi deb qanday qiymatga aytiladi?
4. Tebranish davri nima?
5. Tebranish amplitudasi nima?
6. Muhit qarshiligi ta’siridagi so‘nuvchi tebranishlar deb qanday harakatlarga aytiladi?
7. Muhit qarshiligi qanday bo‘lganda so‘nuvchi tebranishlar sodir bo‘ladi?
8. So‘nish dekrementi deyilganda nimani tushunish lozim?
9. Logarifmik so‘nish dekrementi qanday aniqlanadi?
10. Erkin tebranishlar chastotasi bilan so‘nuvchi tebranishlar chastotasi orasidagi matematik bog‘lanishni yozib bering?
11. Tebranish amplitudalari nimalarga bog‘liq bo‘ladi?
11. CHiziqsiz tebranishlar deb qanday tebranishlarga aytiladi?
12. Kichik tebranishlarda tebranish amplitudasi, tebranish chastotasiga bog‘liq bo‘ladimi?

Mavzuni mustahkamlash uchun 24 ilovadagi masalalarni mustaqil echishni tavsiya qlamiz:

25 – Ma’ruza

Mavzu: Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli majburiy tebranma harakati. Rezonans.Vibratsiya. Elektrodinamik analog.

REJA:

1. Majburiy tebranishlar,
2. Rezonans, Vibratsiya,
3. Elektrodinamik analog.

25.1§ Majburiy tebranishlar. Rezonans

Muammo: Biz yuqorida erkin tebranishlarning dinamik xarakteristikalarini, xususiy chastota va amplitudalarni qanday aniqlash haqida fikr yuritgan edik. Endi, texnikada juda ko‘p uchraydigan va o‘ta muhim mexanik harakatlardan hisoblangan majburiy tebranishlarning dinamikasini ko‘rib o‘tamiz.

Ushbu mavzuda, nuqtaga muvozanatlovchi $\bar{F}$ -kuchdan tashqari vaqt mobaynida davriy ravishda o‘zgarib turuvchi $\bar{Q}$-kuchi ham ta’sir etgan, ya’ni tebranma harakatning juda bir muhim masalasini ko‘rib o‘tamiz. $\bar{Q}$-kuchining Ox o‘qidagi proektsiyasi,

$$Q_x=Q_0\sin rt \qquad (25.1)$$

ga teng bo‘lsin. Bunday kuchni *qo‘zg‘atuvchi kuch* deb ataladi va shu kuch ta’siridagi tebranma harakatni *majburiy tebranishlar* deb ataladi. (25.1) formuladagi r -qiymatni *qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi* deb ataladi.

Vaqtga bog‘liq bo‘lgan qo‘zg‘atuvchi kuch, boshqacha qonuniyat bo‘yicha ham o‘zgarishi mumkin. Lekin biz, faqat (25.1) ko‘rinishdagi qonuniyat bilan o‘zgaruvchi qo‘zg‘atuvchi kuchlar ustida mavzu olib boramiz xolos. Ushbu (25.1) ko‘rinishdagi qo‘zg‘atuvchi kuchni *garmonik qo‘zg‘atuvchi kuch* deb ataladi. Bunday kuch haqidagi muqim misol 25.1 masalada ko‘rib o‘tiladi.

1. Muhit qarshiligi bo‘lmagan holdagi majburiy tebranishlar[19]. Harakatlanuvchi nuqtaga muvozanatlovchi $\bar{F}$kuchdan tashqari (24.1 shakl) faqat *qo‘zg‘atuvchi kuch* -$\bar{Q}$ ta’sir etsin. U holda nuqtaning harakat differentsial tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi

[19] Ushbu punktdagi olingan natijalar, 2p. - dagi qiymatlarning xususiy holidan iborat bo’ladi.

$$m\,x'' = -cx + Q_0 \sin rt$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini m-ga bo‘lamiz va quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$c/m = k^2, \quad Q_0/m = R_0 \qquad (25.2)$$

R_0-ning o‘lchov birligi tezlanish kabi bo‘ladi. U holda yuqoridagi differentsial tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi

$$x'' + k^2 x = R_0 \sin rt \qquad (25.3)$$

(25.3) tenglama *muhit qarshiligi bo‘lmagan holdagi nuqtaning majburiy tebranma harakatining differentsial tenglamasi* deb ataladi. Differentsial tenglamalar nazariyasiga asosan, bunday tenglamaning echimi $x=x_1+x_2$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu erdagi x_1- tenglamaning o‘ng tomonisiz, ya’ni (24.3) ko‘rinishdagi umumiy echimi bo‘lib (24.5) formulada berilgan, x_2 -esa (25.3) to‘liq tenglamaning birorta xususiy echimidan iborat bo‘ladi.

Tenglamaning x_2 - echimini $r \neq k$ deb hisoblab, quyidagi ko‘rinishda axtaramiz

$$x_2 = V \sin rt$$

bu erdagi V -o‘zgarmas qiymat bo‘lib, uning qiymati shunday bo‘lishi lozimki, uni (25.3)-ga qo‘yilganda tenglama ayniyatga aylanib qoladi. Shunga asosan, x_2 va uning ikkinchi tartibli hosilasi x''_2- ni (25.3) tenglamaga qo‘ysak,

$$-r^2 B \sin rt + k^2 B \sin rt = R_0 \sin rt$$

Ushbu tenglik vaqt t-ning ixtiyoriy qiymatlarida ham qanoatlanishi uchun $B(k^2-r^2)=R_0$ bo‘lishi kerak, yoki

$$V = R_0/(k^2-r^2)$$

Shunday qilib, izlanayotgan xususiy echim aniqlandi, ya’ni

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin rt \qquad (25.4)$$

To‘liq echim $x=x_1+x_2$ ko‘rinishda bo‘lganligi sababli, hamda x_1-ning echimi (24.4) formuladan ma’lum bo‘lganligi uchun, (25.3) tenglamaning umumiy echimi

$$x = A\sin(kt+\alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin rt \qquad (25.5)$$

bu erdagi A va α - integral doimiylari bo‘lib, ular boshlang‘ich shartlar orqali aniqlanadi. (25.5) echimdan ko‘rinib turibdiki, tebranma harakat ikkita, ya’ni: 1) chastotasi -k va amplitudasi A -(amplituda boshlang‘ich shartlarga bog‘liq holda bo‘ladi) bo‘lgan *xususiy tebranishlar*; 2) chastotasi -r va amplitudasi V -(bu amplituda boshlang‘ich shartlarga

bog‘liq holda bo‘lmaydi) bo‘lgan *majburiy tebranishlar*ning yig‘indisidan iborat bo‘lar ekan.

Lekin amalda, u yoki bu qarshiliklar evaziga, xususiy tebranishlar tez orada so‘nadi. Shu sababli, nuqtaning asosiy tebranma harakati, (25.4) tenglama orqali bo‘ladigan majburiy tebranishlardan iborat bo‘ladi.

Majburiy tebranishlarning chastotasi -r, qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasiga teng bo‘ladi. Agar shu majburiy tebranishlar amplitudasining qiymatini surat va mahrajini k^2-ga bo‘lib yuborsak,

$$v = \frac{P_0}{\left|k^2 - p^2\right|} = \frac{\lambda_0}{\left|1 - p^2/k^2\right|} \qquad (25.6)$$

bu erdagi $\lambda_0=R_0/k^2=Q_0/c$, ya’ni λ_0-nuqtaning Q -kuch ta’siridagi statik og‘ishi bo‘lib (25.2) formula orqali aniqlanadi. Ko‘rinib turgandek, V-ning qiymati qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi r-ni, xususiy chastota k-ga nisbatiga bog‘liq ekan. Quyidagicha

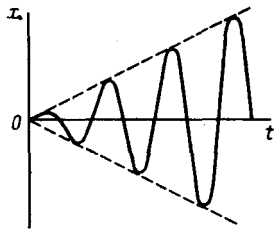
$$z=r/k, \quad \eta=B/\lambda_0 \qquad (25.6')$$

belgilashlar kiritamiz. O‘lchov birligi bo‘lmagan η-koeffitsientni *dinamiklik koeffitsient* deb ataladi. U orqali, majburiy tebranishlarning amplitudasi V-ning (ya’ni, tebranish markazidan maksimal og‘ishni), statik λ_0-og‘ishga nisbatan necha marta katta bo‘lishi mumkin ekanligi aniqlanadi va chastotalarning nisbati z-ga bog‘liq bo‘ladi. (25.6) formulaning grafigi 25.3 shaklda tasvirlangan bo‘lib, yuqoridagi egri chiziq h=0 (qolgan egri chiziqlar η va z -larga bog‘liq ravishda tasvirlangan)uchun ko‘rsatilgan.

Grafikdan [yoki (25.6) formuladan] ko‘rinib turibdiki, r va k-qiymatlarning turli nisbatlarda olish hisobiga turlicha amplitudalarga ega bo‘lgan majburiy tebranishlar hosil qilish mumkin ekan. Agar r=0 (yoki r<<k) bo‘lsa, amplituda λ_0 -ga teng (yoki shu qiymatga yaqin) bo‘ladi, Agar r -ning qiymati k -ga yaqin bo‘lsa, amplituda V juda katta bo‘ladi. Va nihoyat r >> k bo‘lsa amplituda V -ning qymati juda kichik (yoki nolga yaqin) bo‘ladi. Yana shuni ta’kidlash lozimki, agar r<k bo‘lsa, (25.1) va (25.4) tenglamalarni solishtirish orqali majburiy tebranishlar fazasi bilan qo‘zg‘atuvchi kuchning fazasi ustma-ust (ikkalasi ham rt-ga teng) tushar ekan. Agar r>k bo‘lsa, u holda sinusning ostiga manfiy ishorani kiritib, (25.4) formulani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin(rt - \pi)$$

Demak, r>k bo‘lganda majburiy tebranishlar fazasi bilan, qo‘zg‘atuvchi kuchning fazasi, bir-biriga nisbatan π burchakka yo qiymati 25.1 shaklda ko‘rsatilgandek, katta miqdorda (katta quloch bilan tebrana boshlaydi) ortib ketadi. Bu haqdagi batafsil ma’lumotlar shu paragrafning oxirgi 3p. - da bayon etilgan.



25.1 shakl

Agar r=k bo‘lsa (25.3) tenglamaning $x_2=V\sin rt$ dan iborat xususiy echimi bo‘lmaydi, uning echimini

$$x_2=S\cdot t\cdot\sin rt$$

ko‘rinishda axtariladi. U holda, $x''_2=-2Sr\sin rt-r^2St\sin rt$, bularni (25.3) tenglamaga qo‘ysak va r=k ekanligini e’tiborga olib, $-2Sr\sin rt=R_0\sin rt$, bundan $S=-R_0/2r$ bo‘ladi. Natijada, muhit qarshiligi bo‘lmagan majburiy tebranma harakatdagi rezonans holatning tenglamasini yozamiz:

$$x_2=-(R_0/2r)t\cdot\sin rt \quad \text{yoki} \quad x_2=(R_0/2r)t\cdot\sin(rt-\pi/2) \qquad (25.7)$$

Ushbu tenglamadan ko‘rinib turibdiki, haqiqatdan ham rezonans holatida majburiy tebranma harakatning qulochi vaqtga proportsional ravishda ortib borar ekan va bunday harakatning grafigi 25.1 shaklda tasvirlangan. Rezonans holatida faza $\pi/2$ burchakka suriladi.

2*. Muhit qarshiligi ta’siridagi majburiy tebranishlar. Harakatdagi nuqtaga, muvozanatlovchi kuch $\bar{F}$, tezlikka proportsional ravishda o‘zgaruvchi (24.2§) qarshilik kuchi $\bar{R}$ va (25.1) formula orqali ifodalanadigan qo‘zg‘atuvchi kuch Q ta’sir etsin. Bunday kuchlar ta’siridagi nuqtaning harakat differentsial tenglamasi, quyidagicha bo‘ladi

$$m\,x''=-cx-\mu\,x'+Q_0\sin rt \qquad (25.8)$$

Tenglamaning ikkala tarafini m-ga bo‘lib, hamda (24.13) va (25.2) dagi belgilashlarni e’tiborga olsak, yuqoridagi tenglama

$$x''+2b\,x'+k^2x=R_0\sin rt \qquad (25.9)$$

(25.9) tenglama, *yopishqoq muhit qarshiligi ta’siridagi majburiy tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Uning umumiy echimi $x=x_1+x_2$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu erdagi x_1-tenglamaning o‘ng tomonisiz, ya’ni (24.12) ko‘rinishdagi tenglamaning umumiy echimi [k>b bo‘lganda, (24.17) ko‘rinishda] bo‘ladi, x_2 -esa (25.9) to‘liq tenglamaning birorta xususiy echimidan iborat bo‘ladi. Tenglamaning x_2 -echimini, quyidagi ko‘rinishda axtaramiz

$$x_2=V\sin(rt-\beta)$$

bu erdagi V va β -o‘zgarmas qiymatlar bo‘lib, ularning qiymatlari shunday bo‘lishi lozimki, ularning aniqlangan qiymatlarini (25.3)-ga

qo‘yilganda, u tenglama ayniyatga aylanib qoladi. Shunga asosan, x_2 - ning hosilalarini hisoblaymiz

$$x' = Vr\cos(rt-\beta), \qquad x'' = -Vr^2\sin(rt-\beta)$$

Bu hosilalarni va x_2-ning qiymatlarini (25.9) ning chap tomoniga keltirib qo‘ysak, hamda qisqaroq yozish maqsadida $rt-\beta=\psi$ (yoki $rt=\psi+\beta$) belgilash kiritsak

$$V(-r^2+k^2)\sin\psi+2brV\cos\psi=R_0(\cos\beta\sin\psi+\sin\beta\cos\psi)$$

Har qanday ψ-qiymatlarda ham, ya’ni ixtiyoriy vaqt uchun ushbu tenglama qanoatlanishi uchun, uning chap va o‘ng tomonlaridagi $\sin\psi$ va $\cos\psi$ larni oldilaridagi o‘zgarmas koeffitsientlar o‘zaro teng bo‘lishlari shart; Demak

$$V(r^2-k^2)= R_0\cos\beta, \qquad 2brB= R_0\sin\beta$$

Yuqoridagi ikkala tenglamani (bulardan β -ning qiymatini aniqlashda ham foydalaniladi) kvadratlarining yig‘indilari va ularni bir-birlariga nisbatlari orqali V va β larning qiymatlarini aniqlaymiz

$$v = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2-p^2)+4b^2p^2}}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{2bp}{k^2-p^2} \tag{25.10}$$

(25.9) tenglamaning x_1- ($k>b$ bo‘lgandagi) echimi (24.17) da aniqlangan, shunga ko‘ra, (25.9) tenglamaning to‘liq echimi, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$x=Ae^{-bt}\sin(k_1t+\alpha)+B\sin(rt-\beta) \tag{25.11}$$

bu erdagi A va α -lar integral doimiylari bo‘lib, boshlang‘ich shartlar orqali aniqlanadi. V va β lar esa (25.10) formulada aniqlangan bo‘lib, boshlang‘ich shartlarga bog‘liq emas, ularning $b=0$ bo‘lgandagi, ya’ni qarshilik kuchi yo‘q bo‘lgandagi qiymatlari (25.4) va (25.5) formulalarda aniqlangan.

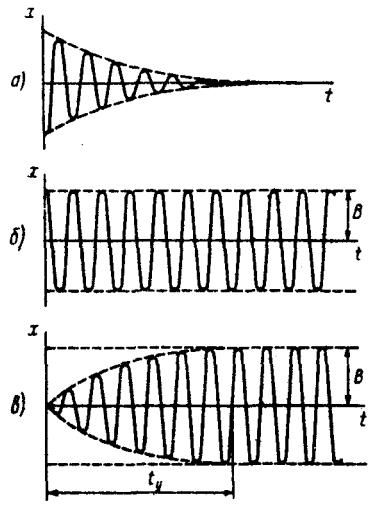
Ushbu tebranma harakat murakkab bo‘lib, xususiy [(25.11) tenglamaning birinchi hadi, 25.2, a shakl] va majburiy [(25.11) tenglamaning ikkinchi hadi, 25.2, b shakl] tebranma harakatlarning yig‘indilaridan iborat bo‘ladi. Bunday harakatning xususiy tebranishlari 24.2§ da ko‘rib o‘tilgan edi. O‘sha erda ta’kidlanganidek, bunday tebranishlar tez orada so‘nadi va bu so‘nish davri t_u -ni *o‘rnashish (o‘tish jarayoni) vaqti* deb ataladi, lekin ko‘p hollarda u e’tiborga olinmaydi.

Masalan, xususiy tebranishlarning qulochi 0,01V bo‘lgan holdagi o‘rnashish vaqti t_u ni $Ae^{-bt}=0{,}01V$ tenglikdan aniqlanadi va

$$t_u = \frac{1}{b} \ln \frac{100A}{B} \qquad (25.12)$$

Ko‘rinib turganidek, qanchalik qarshilik kuchi (ya’ni, qanchalik b) kichkina bo‘lsa, o‘rnashish davri shunchalik uzoq kechadi.

(25.11) qonuniyat bo‘yicha sodir bo‘lishi mumkin bo‘lgan majburiy tebranma harakatning bir ko‘rinishi 25.2, v shaklda tasvirlangan, bu erda nuqtaning boshlang‘ich tezligi nolga teng. Boshlang‘ich shartlari hamda r va k_1 chastotalarning turli xil nisbatlari boshqacha bo‘lgan tebranishlarning $0<t<t_u$ vaqt oralig‘idagi, tebranish xarakterlari mutloq boshqacha bo‘lishi mumkin. Lekin, o‘rnash vaqti o‘tib ketgandan keyin xususiy tebranishlar batamom tugaydi va nuqta faqat



25.2 shakl

$$x = B\sin(rt-\beta) \qquad (25.13)$$

qonuniyat bilan harakatlanadi. Bunday qonuniyat bo‘yicha tebranishlar, *majburiy tebranishlar* deb ataladi. Ular, amplitudasi (25.10) formula orqali aniqlanadigan V-ga teng bo‘lgan va so‘nmaydigan garmonik tebranishlar bo‘lib, ularning chastotasi qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi r-ga teng bo‘ladi. Majburiy tebranishlarning fazasini qo‘zg‘atuvchi kuchning fazasiga nisbatan surilishi β-ga teng bo‘ladi.

Olingan natijalarni tadqiq qilib chiqamiz. Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz,

$$z=r/k, \quad h=b/k, \quad \lambda_0=R_0/k^2=Q_0/c \qquad (25.14)$$

bu erdagi z - chastotalarning nisbati; h- qarshilik kuchini belgilovchi qiymat; λ_0- Q kuchi ta’siridagi statik uzayish (masalan, prujinaga osilgan yukka qo‘shimcha ravishda qo‘yilgan Q kuch ta’sirida prujinaning qo‘shimcha uzayishi-λ_0).

U holda, (25.10) tenglamaning surat va mahrajini k^2 -ga bo‘lib yuborsak:

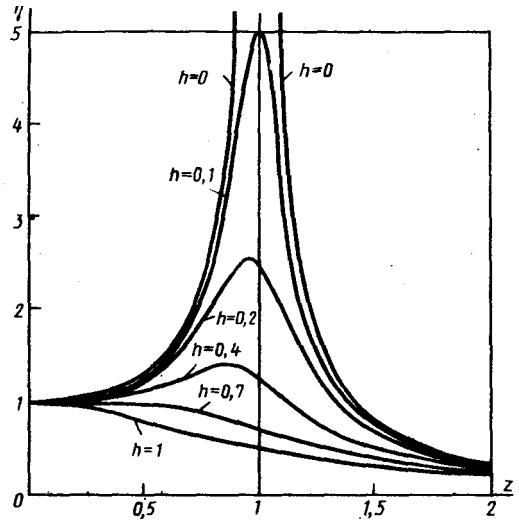
$$v = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(1-z^2)^2+4h^2z^2}}, \qquad \mathrm{tg}\beta = \frac{2hz}{1-z^2} \qquad (25.15)$$

(25.15) formuladan ko‘rinib turibdiki, V va β lar ikkita z va h o‘lchovsiz qiymatlarga bog‘liq ekan. Yanada yaxshiroq tushuntirish maqsadida, h -ning ba’zi bir qiymatlari uchun, ushbu bog‘lanishlarning grafigi tasvirlangan. Birinchi grafikda (25.3 shakl) *dinamiklik koefftsient*ining $\eta=V/\lambda_0$ (amplituda V -ning qiymati, λ_0 -ning qiymatidan

katta ekanligi) chastotalar nisbatiga qanday bog‘liq ekanligi tasvirlangan.

Ikkinchi (25.4 shakl) grafikda tebranish fazasining surilishi, ya’ni β-ning z -ga bog‘liq holdagi grafigi tasvirlangan. Har bir muqim masalada, berilgan shartlarga binoan λ_0, z, h larni aniqlab, ular yordamida V va β lar (25.15) formula orqali hisoblanadi yoki grafik orqali aniqlanadi. Bu grafiklar (yoki formulalar)dan ko‘rinib turibdiki, r va k -larning qiymatlarini turlicha tanlash evaziga turlicha amplitudaga ega bo‘lgan majburiy tebranishlar olish mumkin ekan.

Qarshilik kuchi juda oz va z -ning qiymati 1-ga yaqin bo‘lmagan son bo‘lsa, (25.15) formulada taqriban h≈0 deb hisoblash mumkin bo‘ladi. U holda, yuqoridagi 1p dagi natijalarni olishimiz mumkin, aniqrog‘i:

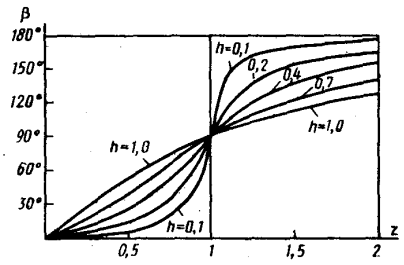


25.3 shakl.

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{\lambda_0}{|1-z^2|} \\ \beta &\approx 0 \quad (z < 1 \text{ да}) \\ \beta &\approx 180^0 \quad (z > 1 \text{ да}) \end{aligned}\right\} \qquad (25.16)$$

Quyidagi xususiy hollarni ko‘rib chiqamiz.

1. Agar chastotalar nisbati z- juda kichkina (r<<k) bo‘lsa, u hoda z≈0 deb hisoblab (25.15) formuladan $V\approx\lambda_0$ ekanligini aniqlaymiz. Bu holdagi tebranma harakatning amplitudasi statik uzayish λ_0-ga teng bo‘lib, faza bo‘yicha surilish β≈0 bo‘ladi.



25.4 shakl.

2.Agar chastotalar nisbati juda katta (r>>k) bo‘lsa, amplituda V kichkina bo‘ladi. Bu holat inshootlarni Vibratsiya (titrash)ratsiyadan himoya qilishda, priborsozlikda va shunga o‘xshash texnikaning turli sohalari uchun katta ahamiyatga ega bo‘ladi. Qarshilik kuchi oz bo‘lsa, (25.15) formuladagi 2hz-ni e’tiborga olmasdan va $(1-z^2)\approx z^2$ deb hisoblasak, V-ning qiymatini aniqlash uchun taqribiy formula yozamiz,

$$V=\lambda_0/z^2=R_0/r^2 \qquad (25.17)$$

3. Barcha amaliy ishlarda h-ning qiymati 1 -dan ancha kichkina bo‘lgan holat, ayniqsa, katta qiziqish uyg‘otadi. U holda, agar z - ning qiymati 1-ga yaqin son bo‘lsa (25.15) formuladan ko‘rinib turganidek,

majburiy tebranishlarning amplitudasi o‘zining maksimal qiymatiga chiqadi. Bunday bo‘lgan holatni *rezonans* deb ataladi.

(25.15) formuladan ko‘rinib turibdiki, agar maxrajdagi $f(\xi)=(1-\xi)^2+4h^2\xi$ (bu erda $\xi=z^2$) qiymat minimum bo‘lsa, $V=V_r=V_{max}$ bo‘lar ekan. Bu tenglamadan bir marta hosila olib, uni nolga tenglasak, ya’ni $f'(\xi)=-2(1-\xi-2h^2)=0$ bo‘ladi, bundan $\xi=1-2h^2$ bo‘ladi va shu qiymatda, ya’ni $z_r=\sqrt{1-2h^2}$ bo‘lganda V maksimum bo‘lar ekan. Demak, z -ning 1-dan ozgina kichik qiymatlarida rezonans hodisasi ro‘y berar ekan. Lekin amalda 1-ga nisbatan h^2 ancha kichkina bo‘lganligi sababli $z_r=1$ deb hisoblanadi. Agar h-ning qiymatlari o‘rtacha bo‘lganda, rezonans hodisasi uncha sezilmaydi (amplituda V uncha katta bo‘lmaydi, 25.3 shakl) va $h>\sqrt{2}/2\approx 0{,}7$ bo‘lganda rezonans umuman sodir bo‘lmaydi.

Majburiy tebranishlarning rezonans holatidagi amplituda va fazaning surilishini amaliyotda z=1deb qabul qilib, (25.15) formuladan kelib chiqadigan taqribiy hisoblashlar orqali aniqlanadi, ya’ni

$$V_r=\lambda_0/2h, \quad \beta_r=\pi/2 \qquad (25.18)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, h-ning kichkina qiymatlarida V_r -juda katta qiymatlarga ega bo‘lishi mumkin ekan.

Shuni ta’kidlash lozimki, amplitudasi V_r -ga teng bo‘lgan tebranishlar va rezonans holatidagi tebranishlar darhol ro‘y bermaydi. Majburiy tebranishlarning o‘rnashish protsesi 25.2, v shaklida ko‘rsatilgani kabi kechadi. Qanchalik qarshilik kuchi kam bo‘lsa, ya’ni qanchalik b yoki h kichkina bo‘lsa, shunchalik V_r katta bo‘ladi; hamda shu o‘rinda majburiy tebranishlarning o‘rnashish vaqti $t_{o'}$ - ham uzoq kechadi [(25.12) formulaga qarang].

Qarshilik kuchi yo‘q bo‘lsa, ya’ni b=h=0 bo‘lsa, u holda rezonans holatidagi majburiy tebranishlar (25.7) formula orqali aniqlanadi, uning grafigi esa 25.1 shaklda tasvirlangandagi kabi bo‘ladi. Shunday qilib, agar qarshilik kuchi yo‘q bo‘lsa, sistemaning «silkinish» protsesi shunchalik uzoq kechadi, tebranishning qulochi esa muntazam o‘sib boradi. Agar qarshilik kuchi mavjud bo‘lsayu, lekin u juda kichkina bo‘lsa, yuqoridagi holatlar o‘shanday kechadi.

3. Majburiy tebranishlarning umumiy xossalari.

Yuqorida olingan natijalarga asosan majburiy tebranishlar erkin tebranishlarga nisbatan quyidagi alohida muhim xususiyatlarga ega ekanligi aniqlandi: 1) majburiy tebranishlarning amplitudasi boshlang‘ich shartlarga bog‘liq emas ekan; 2) majburiy tebranishlar muhit qarshiligi ta’sirida so‘nmaydi; 3) majburiy tebranishlarning

chastotasi, qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasiga teng bo‘lib, tebranayotgan sistemaniing xarakteristikasiga bog‘liq emas ekan (qo‘zg‘atuvchi kuch tebranuvchi sistemaga o‘zinig chastotasini «o‘tkazar» ekan); 4) Agar, qarshilik kuchi kichkina bo‘lsa va chastota *-r* ning son qiymati, chastota *-k* ning son qiymatiga yaqin bo‘lsa, juda kichkina qo‘zg‘atuvchi (kichkina Q_0) kuch ham intensiv ravishda majburiy tebratadi; 5) Agar, qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi *-r* ning son qiymati, xususiy chastota *-k* ning son qiymatidan katta farq qilsa, juda katta qo‘zg‘atuvchi (katta Q_0) kuch ta’sirida ham majburiy tebranishlarning amplitudasini hohlagan miqdorda kichkina qilish mumkin ekan.

Majburiy tebranishlar, ayniqsa ulardagi rezonans hodisasi fizika va mexanikaning turli sohalarida o‘ta muhim ahamiyatga ega. Masalan, mashina va dvigatellarning ishlashlarida, ularga davriy ravishda ta’sir etuvchi kuchlar paydo bo‘ladi, natijada fundamentning va mashinaning qismlari majburiy tebranishlar ostida bo‘lgan harakatlarda ishtirok etadilar.

Dvigatellarni turli xil aylanma tezliklar bilan ishlatish natijasida, majburiy tebranishlarning amplitudasini o‘zgarish qonuniyatini tekshirib borish mumkin, dvigatelning chastotasi r=ω bo‘ladi, bu erdagi ω-dvigatelning burchakli tezligi (25.1 masalaga qarang). ω-ning ortishi bilan, mashinaning (yoki fundamentning) tebranuvchi qismlarining amplitudasi ham ortib boradi va ω=k bo‘lganda, rezonanas hodisasi ro‘y beradi va majburiy tebranishlarning qulochi maksimumga chiqadi.

Dvigatelning burchakli tezligi ω-ning qiymati, yana ortib borishi natijasida, majburiy tebranishlarning amplitudasi V kamaya boshlaydi va ω>>k bo‘lganda, V -ning qiymati nolga yaqinlashadi. Aksariyat injenerlik inshootlarida, rezonanas hodisasi katta ziyon keltiradi, shu sababli r va k -ning qiymatlarini (r>>k) tanlash orqali, majburiy tebranishlarning amplitudasini nolga yaqinlashtiriladi, natijada amplitudani nolga keltiriladi.

Radiotexnikada esa, bunday ishlar teskarisicha qilinadi, ya’ni rezonans hodisasi juda katta ahamiyat kasb etadi va birorta kerak bo‘lgan radiostantsiyaning signalini boshqa signallardan ajratishda (to‘lqinni tanlashda) juda qo‘l keladi.

Majburiy tebranishlar nazariyasi, qator priborlarni yaratilishida, masalan vibrograflar - tebranuvchi jismlarning harakatlarini (fundamentning, mashinaning qismlarini va b.), seysmograflar - Erning

ustki qatlamini tebranishini o‘lchash ishlarida asosiy ilmiy manba bo‘lib xizmat qiladi.

25.1 masala. Balka, uning ustiga o‘rnatilgan motorning og‘irligi ta’sirida λ_{st}=1sm qiymatga egilib qoladi. Motorning minutiga qanday sonli aylanishida (ayl/min) rezonans hodisasining ro‘y berishi aniqlansin.

E ch i sh. (24.11’) formulaga asosan, balkaning erkin tebranishlarining davri

$$T=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}$$

teng bo‘ladi. Agar motor valining og‘irlik markazi S valning geometrik markazi O nuqtadan siljigan bo‘lsa, u holda valning podshipniklari orqali motorga uzatiladigan davriy ravishda ta’sir etuvchi $\overline{Q}$-kuch paydo bo‘ladi va bu kuch OS chiziq bo‘ylab yo‘naladi. $\overline{Q}$-kuchning Ox o‘qdagi proektsiyasi $Q_x=Q\sin\omega t$ (ω-motor valining burchakli tezligi) motorga ta’sir etayotgan qo‘zg‘atuvchi kuch hisoblanadi. Bu kuchning chastotasi $r=\omega$ bo‘lgani uchun, majburiy tebranishlarning davri $T_M=2\pi/\omega$ bo‘ladi.

Agar, $T_M=T$ bo‘lsa rezonans hodisasi ro‘y beradi, ya’ni $2\pi/\omega=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}$ bundan,

$$\omega_{kr}=\sqrt{g/\lambda_{ст}}\approx 31{,}3\ s^{-1}$$

Demak, kritik aylanishlar soni,

$$n_{kr}=30\omega_{kr}/\pi\approx 300\ \text{ayl/min}.$$

Rezonans hodisasi bo‘lmasligi uchun, motorning aylanishlar soni n_{kr} -ga nisbatan bir necha marta katta bo‘lishi shart ekan.

25.2 masala. Qattiqlik koefftsienti s bo‘lgan prujinaga vertikal holda osib qo‘yilgan massasi m-ga teng bo‘lgan 1-yukning majburiy tebranishlari tadqiq qilinsin. Prujina osilgan D nuqta $\xi=a_0\sin rt$ qonuni bilan vertikal chiziq bo‘ylab tebranma harakat qilmoqda.

E ch i sh. Koordinata boshi O nuqtani yukning statik muvozanati holatiga joylashtiramiz va Ox o‘qini vertikal pastga yo‘naltiramiz (25.6 shakl). Agar deformatsiyalanmagan prujinaning uzunligi l_0 bo‘lsa, u holda prujinaning ixtiyoriy holatdagi uzunligi $l=l_0-\xi+\lambda_{st}+x$ bo‘ladi. Prujinaning uzayishi $\lambda=l-l_0=\lambda_{ct}+x-\xi$. Bu holatda yukka ta’sir etuvchi elastiklik kuchi $F=c\cdot\lambda=c(\lambda_{st}+x-\xi)$ -ga teng bo‘ladi. Shu sababli yukning harakat differentsial tenglamasi ($s\lambda_{st}=mg$ ekanligini hisobga olib) quyidagicha bo‘ladi:

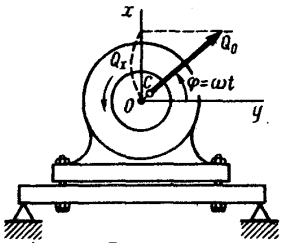
$$m\,x''=-c(\lambda_{st}+x-\xi)+mg \quad \text{yoki} \quad m\,x''=-cx+c\xi$$

s/m=k^2 -belgilash kiritsak,

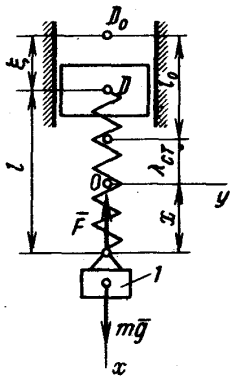
$$x'' + k^2x = k^2a_0 \sin rt$$

Demak, ushbu tenglama (25.3) tenglama bilan bir-xil ko‘rinishda bo‘ladi, agar b=0 va $R_0=k^2a_0$ ekanligini e’tiborga olsak (25.9) tenglama bilan ham bir xil bo‘ladi. (25.14) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, ushbu masalada $\lambda_0=a_0$ va h=0. Majburiy tebranishlarning amplitudasi va fazaning surilishi (25.16) formula orqali aniqlanadi.

Agar r<<k bo‘lsa (agar prujinaning yuqorigi D nuqtasi juda sekin tebransa), u holda z=0 va V≈a_0 bo‘ladi va fazaning surilishi β=0 bo‘ladi. Yukning tebranishini ko‘rinishidan xuddi prujinaning o‘rniga qattiq sterjenga mahkamlanganga o‘xshab ketadi, fizik jihatdan k>>r -ga mos keladi. Agar r=k bo‘lsa, rezonans holati sodir bo‘ladi va tebranishning qulochi kattalashib ketadi.



25.5 shakl.



25.6 shakl.

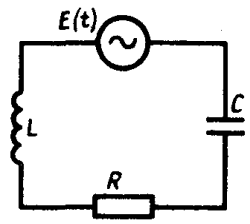
Agar r-chastotaning k-dan katta (z>1) bo‘lsa u holda prujining yuqorigi D nuqtasi yuqoriga ko‘tarilsa, yuk eng pastki holatga tushadi, D nuqta pastki holatiga tushsa, yuk o‘zining yuqorigi holatigacha ko‘tariladi (ya’ni fazaning surilishi β=180° bo‘ladi); qanchalik *r* katta bo‘lsa, amplituda shunchalik kichkina bo‘ladi. Agar *r,* k-ga nisbatan juda katta (z>>1) bo‘lsa, amplituda V≈0 bo‘ladi. Bu holda, prujinaning yuqorigi D uchi a_0 amplituda bilan tebranma harakatda bo‘lishiga qaramasdan yuk o‘zining statik muvozanat holatida (O nuqtada) joylashadi (chunki majburiy tebranishlarning chastotasi shunday kattaki, uning tebranish chastotasiga yukning tebranish chastotasi ulgurmaydi).

4*. Elektrodinamik analog. 24.2§ ning boshida aytib o‘tganimizdek, qator tebranish protseslarining qonuniyatlarini o‘zaro o‘xshashligi sababi, o‘sha harakatlarning differentsial tenglamalarining o‘xshashligidan kelib chiqadi. Bunga, ketma-ket ulangan, induktivligi L bo‘lgan g‘altak, R - omik qarshilik va S -hajmli kondensatorlardan iborat bo‘lgan konturni, hamda o‘zgaruvchan elektr yurituvchi kuch E(t) -ni (e.yu.k.) misol sifatida keltirish mumkin (25.7 shakl).

U holda Kirxgofning ikkinchi qonuniga binoan, kondensatorning zaryadi -q, quyidagi differentsial tenglamani qanoatlantiradi:

$$L\,q'' + R\,q' + (1/C)q = E(t) \qquad (25.19)$$

Ushbu tenglamani (25.8) tenglama bilan solishtirib, shuni aniqlash mumkinki $Q_0 \sin rt$ -ni o‘rnida E(t) turibdi; U holda ikkala tenglamaning tuzilishi mutloq bir xil ekan. Demak, yuqorida ko‘rib o‘tilgan mexanik tebranishlarning qonuniyati va kondensatordagi zaryadlarning o‘zgarish qonuniyati ham bir-xil ekan. Hamda (25.8) va (25.19) ni solishtirib: 1) nuqtaning siljishi (koordinatasi) *x* - zaryad *q*-ga; 2) massa m-ga, induktivlik -L; 3) yopishqoq qarshilik koeffitsienti μ -ga, omik qarshilik R; 4) prujinaning qattiqlik koeffitsienti s-ga, 1/C qiymat; 5) qo‘zg‘atuvchi kuch Q-ga, e.yu.k. E.; lar analog sifatida ishtirok etmoqda.



25.7 shakl

Ushbu analoglar, nafaqat majburiy tebranishlar uchun o‘rinli bo‘lib qolmasdan, erkin (so‘nuvchi va so‘nmaydigan) tebranishlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Masalan, yuqoridagi elektr zanjiri uchun, 24.2§ dagi (24.13) va (24.18) formulalar orqali so‘nuvchi elektr tebranishlarning xususiy tebranish davri

$$k^2 = 1/C, \quad b = R/2L, \quad \text{va} \quad T_1 = 2\pi / \sqrt{1/CL - R^2/4L^2},$$

agar omik qarshilik yo‘q bo‘lsa, tebranish davri $T = 2\pi\sqrt{CL}$ bo‘ladi.

Elektrodinamik analog xossasidan mexanik harakatlarni modellashtirishda qo‘llaniladi, xususan elektron analog mashinalarda qo‘llaniladi.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.

1. Moddiy nuqta majburiy holda tebranishni davom etdirishi uchun, unga davriy bo‘lgan qo‘zg‘atuvchi kuch qo‘yilgan bo‘lishi shart ekan.
2. (25.1) formuladagi -r qiymat, davriy qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi deb atalar ekan.
3. Agarda muhit qarshiligi yo‘q bo‘lsa, r-chastotali davriy qo‘zg‘atuvchi kuch ta’siridagi majburiy tebranma harakatlarning parametrik tenglamasi (25.5) formula orqali ifodalanar ekan.
4. Agarda xususiy chastota k, qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi r ga teng bo‘lsa, ya’ni r=k bo‘lsa, rezonans hodisasi ro‘y berar ekan.
5. Rezonans hodisasi ro‘y berganda, tebranuvchi moddiy nuqtaning amplitudasi cheksiz ravishda ortib ketar ekan.

6. Agarda majburiy tebranma harakat muhit qarshiligi ta’sirda sodir bo‘lsa, bunday tebranma harakatning parametrik tenglamasi (25.11) formula orqali ifodalanar ekan.
7. Agarda muhit qarshiligini xarakterlovchi koeffitsient h>0,5 bo‘lsa, rezonans hodisasi ro‘y bergan holatda ham moddiy nuqtaning amplitudasi ma’lum chegaradan ortib keta olmas ekan.
8. Muhit qarshli ta’siridagi majburiy tebranma harakatdagi amplitudaning nisbiy ortishini ifodalovchi qiymat з=В/л orqali belgilanib, uni dinamiklik koeffitsienti deb atalar ekan.
9. Agarda r<<k bo‘lsa, majburiy tebranma harakatning amplitudasi В≈$л_0$ ga teng bo‘lar ekan
10. Agarda r>>k bo‘lsa, amplitudaning qiymati juda ham kichrayib, asimptotik ravishda nolga intilib boradi. Bunday holatdan foydalanish orqali inshootlarni Vibratsiya(*titrash*)dan saqlash ishlarida qo‘l kelar ekan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Moddiy nuqta majburiy tebranma harakatlarda ishtirok etishi uchun, qanday shartlar bajarilishi lozim?
2. Muhit qarshiligi yo‘q bo‘lgan holatdagi majburiy tebranishlarning parametrik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi.
3. Majburiy tebranishlarda qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasini qanday ahamiyati bor?
4. Rezonans deganimizda qanday holatni tushunamiz?
5. Rezonans hodisasini oldini olish uchun nimalar qilish lozim?
6. Muhit qarshiligi katta bo‘lganda rezonans hodisasi sodir bo‘lishi mumkinmi?
7. Dinamiklik koeffitsienti nimani anglatadi?
8. Muhit qarshiligini xarakterlovchi koeffitsientni dinamiklik koeffitsientning o‘zgarishiga qanday bog‘liqligi bor?
9. Majburiy tebranishlarda amplitudani nolga yaqinlashtirish uchun qanday ishlar bajarilishi shart?
10. Vibratsiya so‘zining mazmuni nima va uning paydo bo‘lish sabablari haqida nimalarni bilasiz?
11. Majburiy tebranishlarda inshootlarni vibratsiyadan himoya qilish usullaridan nimalarni bilasiz?

Mavzuni mustahkam o‘zlashtirish uchun 25 ilovadagi masalalarni mustaqil ravishda echishni tavsiya qilamiz:

26 – Ma’ruza

Mavzu: Mexanik sistema. Ichki va tashqi kuchlar sistemasi. Sistemaning massasi, massalar markazi. Mexanik sistema harakatining differentsial tenglamasi. Massa markazi harakatining o‘zgarishi haqidagi teorema.

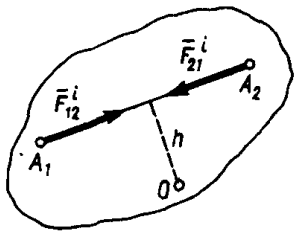
REJA:

1. Mexanik sistema. Ichki va tashqi kuchlar sistemasi.
2. Sistemaning massasi, massalar markazi.
3. Mexanik sistema harakatining differentsial tenglamasi.
4. Massa markazi harakatining o‘zgarishi haqidagi teorema.

26.1§ Mexanik sistema. Tashqi va ichki kuchlar

Muammo: Yuqorida biz ko‘rib o‘tgan mexanik harakatlar bitta moddiy nuqta uchun o‘rinli hisoblanadi. Aslida esa, texnikada uchraydigan turli xil mashina va jihozlar bir nechta moddiy nuqtalarning birikmalaridan iborat bo‘ladi Har qanday mashina, inshoot yoki korxona jihozlari mexanik sistemaga misol bo‘la oladi. Lekin, moddiy nuqtalar uchun o‘rinli bo‘lgan qonun qoidalar har vaqt ham mexanik sistemalar uchun o‘rinli bo‘lavermaydi. Shu sababli, quyida mexanik sistemalarning o‘ziga xos bo‘lgan qonun va qoidalarni ko‘rib o‘tamiz.

Harakati (yoki muvozanat holati) tekshirilayotgan moddiy nuqtalar yoki jismlar sistemasini, ***mexanik sistema*** deb ataladi. Agar mexanik sistemani tashkil etuvchi nuqta (jism)larning o‘zaro ta’sirlari mavjud bo‘lsa, u holda har bir nuqta (jism)ning holati, qolgan barcha nuqta (jism)larning holatiga uzviy bog‘liq bo‘ladi. Bunga klassik misol tarzida quyosh sistemasini olishimiz mumkin bo‘lib, undagi barcha jismlar (Quyosh, planetalar va kometalar) o‘zaro tortilish kuchlari orqali bog‘langanlar.



26.1 shakl.

Mexanik sistemaga ta’sir etuvchi $\bar{F}_k^a$-aktiv kuchlar va $\bar{N}_k$-reaktsiya kuchlarini, $\bar{F}_k^e$-tashqi va $\bar{F}_k^i$-ichki kuchlarga ajratib yuboramiz (bu erdagi e - exterior, ya’ni tashqi va i -interior, ya’ni ichki so‘zlarning birinchi harflaridan iborat). Berilgan mexanik sistemaga kirmagan jismlarning sistema nuqtalariga bo‘lgan ta’sir kuchlari, *tashqi* kuchlar deb ataladi. Sistemani tashkil etuvchi nuqta yoki jismlarning o‘zaro ta’sir kuchlari *ichki* kuchlar deb ataladi. Bunday

ajratishlik shartli bo‘lib, mexanik sistemani tanlab olishimizga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, agar Quyosh sistemasini tanlab olsak, u holda Er bilan Quyoshning o‘zaro tortilish kuchlari ichki kuchlar hisoblanadi; agar Er bilan Oyni bitta sistema deb qabul qilsak, Quyoshning tortilish kuchi endi tashqi kuch hisoblanadi.

Ichki kuchlar quyidagi xossalarga ega bo‘ladilar:

1. *Mexanik sistemaning barcha ichki kuchlarining geometrik yig‘indisi (bosh vektori) nolga teng bo‘ladi*. Dinamikaning uchinchi qonuniga asosan, ixtiyoriy olingan ikkita nuqtaning (26.1 shakl) o‘zaro ta’sir va aks ta’sir kuchlari, bir to‘g‘ri chiziqda yotib, son qiymatlari teng, yo‘nalishlari esa qarama-qarshi bo‘ladi, shu sababli $\overline{F}^i_{12}, \overline{F}^i_{21}$-larning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘ladi. Xuddi shunday natijani ixtiyoriy olingan har bir ikkita nuqta uchun yozishimiz mumkin, demak

$$\sum \overline{F}^i_k = 0$$

2. *Mexanik sistemaning barcha ichki kuchlarining ixtiyoriy markazga yoki o‘qqa nisbatan olingan momentlarining yig‘indisi (bosh momenti) nolga teng bo‘ladi*. Haqiqatdan ham, 26.1 shakldan ko‘rinib turibdiki, agar ixtiyoriy olingan O nuqtaga nisbatan momentlarning yig‘indisi $m_O(\overline{F}^i_{12})+m_O(\overline{F}^i_{21})=0$ bo‘ladi. Xuddi shunday natijani ixtiyoriy o‘qqa nisbatan olingan momentlar uchun ham isbot qilish mumkin, shu sababli mexanik sistema uchun,

$$\sum \overline{m}_O(\overline{F}^i_k)=0 \quad \text{yoki} \quad \sum \overline{m}_x(\overline{F}^i_k)=0$$

Lekin yuqoridagilarga asosan, ichki kuchlar o‘zaro muvozanatlashib, mexanik sistemaning harakatiga ta’sir qilmas ekan deb hisoblamaslik lozim, chunki bu kuchlar sistemaning turli nuqtalariga qo‘yilgan bo‘lib, shu nuqtalarning nisbiy harakatlariga ta’sir qilishi mumkin. Agar sistema absolyut qattiq jismdan iborat bo‘lsa, u holda ichki kuchlarning yig‘indisi o‘zaro muvozanatlashgan bo‘ladi.

26.2§ Sistemaning massasi. Massalar markazi.

Mexanik sistemaning harakati, unga ta’sir etuvchi kuchlardan tashqari, sistemaning umumiy massasi va massalarning qanday tarqalganligiga ham bog‘liq bo‘ladi. *Sistemaning massasi* (M yoki m - harflari orqali ifodalanadi), *sistemani tashkil etuvchi nuqtalar yoki jismlarning massalarini arifmetik yig‘indisiga teng bo‘ladi*:

$$M=\sum m_k$$

Massalarning tarqalganligi, sistemaning har bir nuqtasining massasi m_k va shu massalarning o‘zaro qanday joylashgan ekanlikligiga, ya’ni ularning x_k, y_k, z_k koordinatalariga bog‘liq holda aniqlanadi. Lekin biz quyida ko‘rib o‘tadigan dinamikaga oid, aniqrog‘i qattiq jism dinamikasiga oid masalalarni echishda, har bir nuqtaning massasi m_k va ularning koordinatalari x_k, y_k, z_k orqali emas, balki ularni xarakterlovchi umumiy ifodalar orqali amalga oshiriladi.

Ulardan biri, *massalar markazining koordinatasi* (sistema nuqtalari massalarining, ularning koordinatalariga ko‘paytmalarining yig‘indisi orqali ifodalanadi); ikkinchisi, *o‘qqa nisbatan inertsiya momentlari* (sistema nuqtalari massalarining, ularning ikkitadan iborat koordinatalari kvadratlariga ko‘paytmalarining yig‘indisi orqali ifodalanadi); uchinchisi, *markazdan qochma inertsiya momentlari* (sistema nuqtalari massalarining, ularning ikkita koordinatalariga ko‘paytmalarining yig‘indisi orqali ifodalanadi). Ushbu bobda, shu xarakteristikalarni aniqlash bilan shug‘ullanamiz.

M a s s a l a r m a r k a z i. Bir jinsli og‘irlik kuchi maydonida, ya’ni $g=const$ bo‘lganda, har bir zarrachaning og‘irligi uning massasiga proportsional bo‘ladi. Shu sababli, sistema massalarining qanday tarqalganligini uning massa markazi orqali aniqlanadi. Statika qismidagi og‘irlik markazini aniqlashga oid bo‘lgan formulani, ularning massalari orqali ifodalanadigan ko‘rinishga keltiramiz. Buning uchun, o‘sha formuladagi $r_k=m_kg$ va $R=Mg$ lar orqali ifodalaymiz va tenglikni g -ga qisqartirib yuborsak,

$$x_C=\frac{1}{M}\sum m_k x_k, \qquad y_C=\frac{1}{M}\sum m_k y_k, \qquad z_C=\frac{1}{M}\sum m_k z_k, \qquad (26.1)$$

Olingan formulalarda, moddiy nuqta (zarracha)larni massalari -m_k va shu nuqtalarning x_k, y_k, z_k koordinatalari ishtirok etmoqda. Shu sababli, agar m_k, x_k, y_k, z_k lar sistema nuqtalarining massalari va ularning koordinatalaridan iborat bo‘lsa, haqiqatdan ham S (x_S,y_S,z_S) nuqtaning holati (o‘rni) har qanday jism yoki mexanik sistemaning massalarini tarqalishini xarakterlab beradi.

Koordinatasi (26.1) formula orqali aniqlanadigan S nuqtaning geometrik o‘rni, massalar markazi yoki mexanik sistemaning inertsiya markazi deb ataladi.

Agar, massa markazini uning radius - vektori $\bar{r}_C$ orqali ifodalansa, u holda (26.1) formuladan $\bar{r}_C$ -ni aniqlash formulasini yozamiz

$$\bar{r}_C=\frac{1}{M}\sum m_k \bar{r}_k \qquad (26.1')$$

bu erdagi $\bar{r}_k$- sistemani tashkil etuvchi nuqtalarning radius-vektorlari.

Yuqorida aniqlangan natijalarga asosan, shuni ta'kidlab o'tish lozim ekanki, bir jinsli og'irlik kuchi maydonidagi qattiq jismning og'irlik markazi va massalar markazining o'rni bir joyda bo'lar ekan. Lekin, massalar markazi og'irlik markazidan mazmunan farqli bo'lib, u o'zining o'rnini har qanday kuch maydonida (masalan, markaziy tortilish maydonida) ham saqlab qoladi va massalarni tarqalganlik xarakteristikasi faqat qattiq jism uchungina o'rinli bo'lib qolmasdan, ixtiyoriy mexanik sistema uchun ham o'rinlidir.

26.3§ Mexanik sistema harakatining differentsial tenglamalari

N-ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan, mexanik sistemani olib ko'ramiz va unda ixtiyoriy m_k -massali nuqtani ajratib olamiz. Shu moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi barcha tashqi (aktiv va reaktsiya) kuchlarning teng ta'sir etuvchisini $\bar{F}_k^e$ - bilan, ichki kuchlarning teng ta'sir etuvchisini esa $\bar{F}_k^i$ -bilan belgilaymiz. Agar moddiy nuqtaning shu kuchlar ta'siridagi tezlanishi $\bar{a}_k$-bo'lsa, dinamikaning asosiy qonuniga ko'ra $m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$ bo'ladi. Xuddi shunday natijalarni har bir nuqta uchun yozishimiz mumkin. Demak, butun mexanik sistema uchun, shunday tenglamalarni yozib chiqsak,

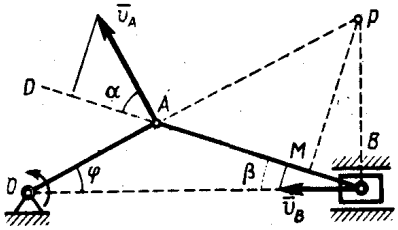
$$\left.\begin{aligned} m_1\bar{a}_1 &= \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i \\ m_2\bar{a}_2 &= \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n\bar{a}_n &= \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i \end{aligned}\right\} \qquad (26.2)$$

(26.2) tenglamalar, *mexanik sistema harakatining vektor formadagi differentsial tenglamalari deb ataladi* (bu erdagi $\bar{a}_k = \bar{v}_k' = \bar{r}_k''$). Ushbu tenglamalarning o'ng tomonidagi kuchlar, umumiy holda vaqtga, sistema nuqtalarining koordinatalariga va ularning tezliklariga bog'liq ravishda o'zgaruvchi qiymatlar bo'lishlari mumkin.

(26.2) tengliklarni birorta koordinata o'qlariga proektsiyalasak, sistema harakatining shu o'qdagi differentsial tenglamasini olamiz.

Mexanik sistema dinamikasining asosiy qonunini to'liq echimini olish uchun, berilgan kuchlar va ularga qo'yilgan bog'lanishlar ma'lum bo'lsa, tegishli differentsial tenglamalarni integrallash orqali sistemaning har bir nuqtasining harakat qonunini aniqlashdan iborat

bo‘ladi. Bunday masalaning analitik echimini aniqlash ayrim hollardagina amalga oshirilishi mumkin, nuqtalar soni ko‘p bo‘lsa yoki tenglamalar murakkab bo‘lgan hollarda ular kompyuterlar yordamida echiladi.



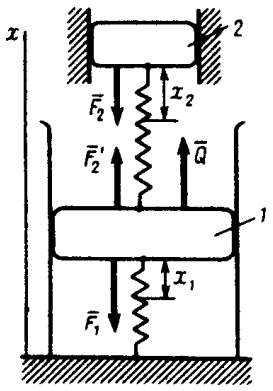
26.2 a shakl

Lekin aksariyat konkret masalalarni echishda, sistemaning ayrim nuqtalarining harakat qonunlarini aniqlash talab etilmaydi, balki butun mexanik sistemaning umumiy xarakteristikalarini aniqlash bilan kifoyalaniladi. Masalan, krivoship-shatunli mexanizmning unga qo‘yilgan kuchlar ta’siridagi (26.2, a shakl) harakatini aniqlash uchun, krivoshipning aylanish qonunini aniqlash kifoya qiladi, ya’ni burilish burchagi φ -ning vaqt t-ga bog‘liq funktsiyasini aniqlash kifoya qiladi.

Amalda, bunday echimlarni aniqlash uchun (26.2) formuladan foydalanilmaydi, balki dinamikada ishlab chiqilgan boshqa usullardan foydalaniladi. Bular qatoriga, injenerlik amaliyotida keng qo‘llaniladigan *sistema dinamikasining umumiy teoremalari* kiradi. Bu usullar asosan (26.2) formula orqali keltirib chiqilgan bo‘lib ushbu va keyingi uchta boblarda ko‘rib chiqiladi.

Lekin, biz hozir sistemaning differentsial tenglamalari orqali, izlanayotgan natijaning bevosita effektiv echimini aniqlashga oid masalani ko‘rib chiqamiz.

34 masala. Tebranishlarni dinamik so‘ndirgichi. Prujinaga mahkamlangan 1-yuk, *x* -o‘qidagi proektsiyasi $Q_x=Q_0\sin rt$ bo‘lgan qo‘zg‘atuvchi $\bar{Q}$-kuch ta’sirida majburiy tebranma harakat qilmoqda (24.1§ ga qarang).



26.2 b shakl

Ushbu tebranishlarni so‘ndirish uchun 1 - yukka qattiqligi s_2 -bo‘lgan prujina orqali massasi m_2-bo‘lgan yuk ulangan bo‘lsa, shu 2-yukning va 2-prujinaning xarakteristikalari aniqlansin (26.2 b shakl).

E ch i sh. Vertikal bo‘yicha yuqoriga qaratib *x* -o‘qini o‘tkazamiz va yuklarning statik muvozanat holatidan boshlab, ularning x_1 va x_2 -koordinatalarini aniqlaymiz. U holda og‘irlik kuchi, elastiklik kuchlari $F_{1st}=s_1\lambda_{1st}$ va $F_{2st}=s_2\lambda_{2st}$ - bilan muvozanatlashadi va ular harakat tenglamasi (24.1§ dagi 24.1 masala)dan chiqarib tashlanadi. Elastiklik kuchlarining hisobga olinadigan qismlari esa, prujinalarning statik muvozanat holatiga nisbatan uzayishlariga

proportsional bo‘ladi. Uzayishlar tegishli ravishda $\lambda_1=x_1$ va $\lambda_2=x_2$ bo‘ladi va 2-yukka $\bar{F}_2(F_{2x}=-c_2\lambda_2)$ -elastiklik kuchi, 1 -yukka esa $\bar{F}_2'=\bar{F}_2$ elastiklik kuchi $\bar{F}_1(F_{1x}=-c_1\lambda_1)$ va qo‘zg‘atuvchi $\bar{Q}$ kuchlari ta’sir etmoqda. Natijada, yukning harakatini quyidagi differentsial tenglamasini tuzamiz,

$$m_1 x''_1= -c_1x_1+c_2(x_2-x_1)+Q_0\sin rt, \quad m_2 x''_2=-c_2(x_2-x_1).$$

1-yuk tebranishining so‘nishi uchun, $x_1=0$ bo‘lishi shart. U holda

$$s_2x_2+ Q_0\sin rt=0 \quad \text{va } m_2 x''_2=-c_2x_2.$$

Birinchi tenglamadan, $x_2=-(Q_0/c_2)\sin rt$ va $x''_2=r^2(Q_0/c_2)\sin rt$ bo‘ladi. Bularni ikkinchi tenglamaga qo‘ysak, natijada

$$m_2r^2=s_2$$

ekanligini aniqlaymiz. Ushbu tenglik, majburiy tebranishlar ta’siridagi 1-yukning tebranishlarini so‘ndiruvchi shartdan iborat bo‘lib, m_2 yoki c_2.-qiymatlardan birini tanlab olinadi, ikkinchisi esa shu tenglama orqali aniqlanadi. Albatta, 2-yukning massasi m_2- ni kichikroq olish ma’qulroq hisoblanadi, lekin berilgan *r* -ga bog‘liq holda s_2-ning qiymati ham kichkina bo‘lib qoladi, bu esa o‘z o‘rnida 2-yukning amplitudasi Q_0/c_2-ning kattalashib ketishiga, ya’ni salbiy (yomon) oqibatlarga olib kelishi mumkin.

26.4§ Massalar markazining harakati haqidagi teorema.

Ayrim hollarda, mexanik sistema (ayniqsa, qattiq jism) harakatining xarakterini aniqlash uchun, uning massalar markazining harakatini aniqlash lozim bo‘ladi. Ushbu qonuniyatni aniqlash uchun, (26.2) differentsial tenglamalar sistemasini o‘ng va chap tomonlarini hadma-had qo‘shamiz. Natijada

$$\sum m_k \bar{a}_k=\sum \bar{F}_k^e +\sum \bar{F}_k^i \qquad (26.3)$$

Tenglamaning chap tarafiga o‘zgartirishlar kiritamiz. Radius-vektor uchun (26.1’) formuladan massa markazini aniqlaymiz

$$\sum m_k \bar{r}_k=M\bar{r}_C$$

Tenglikning ikkala tomonidan vaqt bo‘yicha ikki marta hosila olsak va yig‘indining hosilasi hosilalarning yig‘indisiga teng ekanligi sababli

$$\sum m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}=M\frac{d^2\bar{r}_C}{dt^2}$$

yoki

$$\sum m_k \bar{a}_k=M\bar{a}_S \qquad (26.4)$$

bu erdagi $\bar{a}_S$- massalar markazining tezlanishi. Ichki kuchlarning xossasiga asosan $\sum \bar{F}_k^i = 0$ bo‘ladi, natijada (26.4) e’tiborga olsak (26.3) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$M\bar{a}_S = \sum \bar{F}_k^e \qquad (26.5)$$

(26.5) tenglama sistema massalarining markazini harakati haqidagi teoremani ifodalaydi: *sistemaning massasini uning massa markazini tezlanishiga ko‘paytmasi, sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisiga teng ekan.* (26.5) tenglamani moddiy nuqtaning harakatini differentsial tenglamasi [19.2§ dagi (19.2) formula] bilan solishtirish natijasida, ushbu teoremaning boshqacha ifodasini aniqlaymiz: *sistemaning massalari markazi, massasi sistemaning massasiga teng bo‘lgan va sistemaga qo‘yilgan barcha tashqi kuchlar ta’siridagi moddiy nuqta kabi harakatda bo‘lar ekan.*

(26.5) tenglikning ikkala tomonini koordinata o‘qlariga proektsiyalasak

$$Mx''_s = \sum F_{kx}^e, \qquad My''_s = \sum F_{ky}^e \qquad Mz''_s = \sum F_{kz}^e \qquad (26.5')$$

Ushbu tenglamalar, *massa markazi harakatining differentsial tenglamasini* dekart koordinata o‘qlaridagi proektsiyalaridan iborat.

Yuqorida isbot qilingan teoremaning mohiyati quyidagicha:

1.Teorema nuqta dinamikasining usullariga asos bo‘lib xizmat qiladi. (26.5’) tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, jismni moddiy nuqta deb hisoblab, ushbu tenglamalarni echish natijasida shu jismning massa markazini harakatini aniqlar ekanmiz, ya’ni muqim (konkret) mazmunga ega ekan.

Xususiy holda, agar jism ilgarilanma harakatda bo‘lsa, massa markazining harakati jismning harakatini to‘liq ravishda ifodalaydi. Shunday qilib, *ilgarilanma harakatdagi qattiq jismni, massasi sistemaning massasiga teng bo‘lgan moddiy nuqta deb hisoblash mumkin ekan. J*ismning harakatini uning massa markazini holatini bilish kifoya qilgan hollarda yoki masalaning shartiga ko‘ra aylanma harakatni e’tiborga olinmaydigan hollarda ham, jismni moddiy nuqta deb hisoblash mumkin bo‘ladi.

2. Ushbu teorema orqali, bizga noma’lum bo‘lgan ichki kuchlarni e’tiborga olmagan holda massa markazinng harakatini aniqlash mumkin ekan. Teoremaning amaliy mohiyati shulardan iborat.

26.5§ Massalar markazining harakatini saqlanish qonuni

Massalar markazining harakati haqidagi teoremadan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1. Sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘lsin

$$\sum \bar{F}_k^e = 0$$

U holda (26.5) tenglamaga asosan $\bar{a}_s = 0$ yoki $\bar{v}_s = \text{const}$ bo‘ladi.

Demak, *agar sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistema massa markazining tezligini son qiymati va yo‘nalishi o‘zgarmas bo‘lar ekan, ya’ni tekis va to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lar ekan.* Xususiy holda, agar jismning massalar markazi qo‘zg‘almas bo‘lsa, qo‘zg‘almasligicha qolar ekan. Ko‘rinib turgandek, ichki kuchlarning jismga ta’siri uning massalar markazini harakatini o‘zgartira olmas ekan.

2. Jismga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning yig‘indisi nolga teng bo‘lmasdan ularning birorta koordinata o‘qdagi (masalan, *x* o‘qdagi) proektsiyalarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsin, ya’ni

$$\sum F_{kx}^e = 0 \text{ bo‘lsin.}$$

U holda, (26.5’) tenglamaning birinchisidan,

$$x''_s = 0 \quad \text{yoki} \quad x'_s = v_{cx} = \text{const bo‘ladi.}$$

Demak, *agar sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning biror o‘qdagi proektsiyalarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, massalar markazining tezligini shu o‘qdagi proektsiyasi o‘zgarmas bo‘lar ekan.* Xususiy holda, masalan, boshlang‘ich tezlikning *x* o‘qdagi proektsiyasi $v_{cxo}=0$ bo‘lsa, keyingi hamma vaqtlarda ham u nolga teng bo‘ladi, ya’ni massalar markazi *x* o‘qi bo‘ylab harakat qilmas ekan (ya’ni $x_s=\text{const}$).

Yuqorida olingan barcha natijalar, *massalar markazining harakatini saqlanish qonuni*ni ifodalaydi. Quyida shu qonunni amaldagi ko‘rinishlarini ko‘rsatuvchi ba’zi misollarni ko‘rib o‘tamiz.

Quyosh sistemasi massalari markazining harakati. Quyoshdan uzoqda joylashgan yulduzlarning tortilish kuchlarini e’tiborga olmasak, u holda Quyosh sistemasiga hech qanday tashqi kuchlar ta’sir etmaydi. Demak, quyosh sistemasining massalar markazi yulduzlarga nisbatan to‘g‘ri chiziqli, o‘zgarmas tezlik bilan harakat qilar ekan.

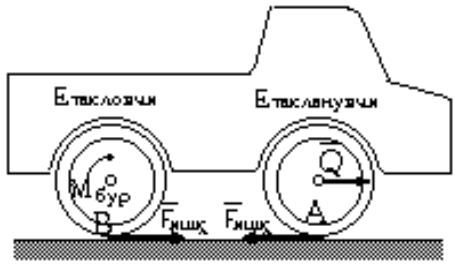
Juft kuchning jismga ta‘siri. Agar, erkin qattiq jismga, $\bar{F}$ va $\bar{F}'$ tashqi kuchlardan iborat juft ta’sir etsa, ularning

geometrik yig‘indisi ($\bar{F}+\bar{F}'=0$) nolga teng bo‘ladi. Demak, agar jismning massalar markazi qo‘zg‘almas bo‘lsa, juft kuchlar ta’siridan keyin ham qo‘zg‘almasligicha qoladi. Shunday qilib, erkin qattiq jismga qaerda bo‘lmasin juft kuch ta’sir etsa, u massalar markazi atrofida aylanma harakat qiladi (lekin, faraz qilingandek, oniy aylanishlar o‘qi juftning tekisligiga perpendikulyar bo‘lishligi shart emas).

Gorizontal tekislik bo‘yicha harakat. Agar ishqalanish kuchi bo‘lmasa, odam faqat o‘zining muskullarining (ichki) kuchlari hisobiga gorizontal tekislik bo‘yicha harakat qila olmaydi. CHunki odamga ta’sir etuvchi barcha tashqi (og‘irlik kuchi va tekislikning reaktsiya) kuchlarining ixtiyoriy gorizontal tekislikdagi proektsiyalarining yig‘indisi har doim nolga teng bo‘ladi, natijada odamning massasini markazi tekislik bo‘ylab harakat qila olmaydi (x_S= const).

Masalan, agar odam o‘ng oyog‘ini oldinga qo‘ysa, uning chap oyog‘i orqaga suriladi va massa markazi o‘z o‘rnida qoladi. Agar ishqalanish kuchi mavjud bo‘lsa, u holda harakat tomonga yo‘nalgan ishqalanish kuchi chap oyoqning orqa tomonga siljishiga yo‘l qo‘ymaydi. Mana shu ishqalanish kuchi, odamni harakat qildiruvchi tashqi kuch hisoblanadi (ushbu misolda ishqalanish kuchi oldinga, ya’ni harakat tomonga yo‘nalgan ekanligiga e’tibor bering).

Teplovoz yoki avtomobilning harakati ham xuddi shu tariqa sodir bo‘ladi. Dvigatel ichidagi gazlarning bosim kuchlari ichki kuchlardan iborat bo‘lgani uchun, ular bevosita massa markazini harakatga keltira olmaydi. Massa markazini harakat qildirish uchun, etaklovchi deb ataluvchi tegishli g‘ildiraklarga dvigatel aylantiruvchi moment uzatadi, shu sababli etaklovchi g‘ildirakning gorizontal tekislik bilan bevosita tegib turgan (kontakt qilayotgan) V nuqtasi (26.3 shakl) chap tomonga qarab sirpanishga intiladi.



26.3 shakl

Lekin, tekislik bilan g‘ildirak orasida paydo bo‘ladigan ishqalanish kuchi, o‘ng tomonga, ya’ni harakat tomonga yo‘naladi. Bu kuch, ya’ni ishqaalanish kuchi tashqi kuch bo‘lganligi sababli, uning yordamida teplovoz yoki avtomobilning massalari markazi o‘ng tomonga qarab harakat qiladi. Agar ushbu ishqalanish kuchi yo‘q bo‘lsa yoki bu

kuchning qiymati etaklanuvchi g‘ildirakning qarshiligidan kichkina[20] bo‘lsa, o‘ng tomonga yo‘nalgan harakat sodir bo‘lmaydi; u holda etaklovchi g‘ildirak o‘z joyida turib aylanma harakat («buksovat») qiladi.

T o r m o z l a sh. Tormozlash uchun avtomobilning kuzoviga qattiq mahkamlangan tormoz kolodkalari bilan dumalab ketayotgan g‘ildirakning barabanini qattiq siqadilar. Buning natijasida kolodkalar bilan baraban orasida paydo bo‘ladigan ishqalanish kuchlari o‘z-o‘zidan massalar markazining harakatini o‘zgartira olmaydi, ya’ni poezd yoki avtomobilni to‘xtata olmaydi, chunki bu kuchlar ichki kuchlar hisoblanadi. Lekin, kolodkalarning barabanga ishqalanishi natijasida g‘ildirakning o‘z o‘qi atrofidagi aylanishi sekinlashadi va g‘ildirak bilan rels (yoki er) orasida harakatga teskari yo‘nalishda bo‘lgan sirpanib ishqalanish kuchi paydo bo‘ladi. Bu kuch, tashqi kuch hisoblanadi va u poezd yoki avtomobilning massalari markazining harakatini sekinlashtiradi, ya’ni harakatni tormozlaydi.

Xulosa qilib, shuni ta’kidlash lozimki, yuqoridagi misollarda har bir obektning harakati, albatta, ichki kuchlarning (avtomobilning dvigateli, odamning muskullari) bajargan ishlari hisobiga amalga oshiriladi. Lekin, ichki kuchlarning bajargan ishlari yordamida, massa markazini harakatga keltirish uchun, ob’ektni (poezdni, mashinani) *tashqi muhit* bilan shunday o‘zaro ta’sirini mavjud qilishi kerakki, natijada tashqi muhit ob’ektga tashqi kuch (ushbu misollarda, ishqalanish kuchlari) bilan ta’sir ettirish lozim.

Massa markazini harakatga keltirishning, boshqa yo‘llaridan biri, bu reaktiv effekt hisoblanadi. Har qanday kuchli qurilma bo‘lmasin, agar tashqi ta’sir kuchni paydo qila olmasa yoki reaktiv effektni vujudga keltira olmasa, faqat ichki kuchlar evaziga massa markazini harakatga keltira olmaydi. «Djin mashinasi» yoki «inertsoid» kabi qurilmalarning harakati ham tashqi muhit ta’sirida sodir bo‘ladi, lekin ular yaqqol ko‘zga tashlanmaydi, shu sababli asossiz ravishda tashqi muhitning ta’siri yo‘q deb hisoblashga bahona bo‘lishi mumkin.

26.6§ Masalalar echish.

Tashqi kuchlar ma’lum bo‘lsa, massalar markazining harakati haqidagi teoremaga asosan, massalar markazining harakat qonunini

[20] Etaklanuvchi g’ildirakka burovchi moment emas, balki o’qqa qo’yilgan (26.3 shakl) -kuchi ta’sir etadi. Hamda, g’ildirakka orqa tomonga yo’nalgan ishqalanish kuchi ta’sir etadi. Bu tashqi kuch bo’lib, harakatni tormozlaydi.

aniqlashimiz mumkin, yoki teskarisi, ya'ni massalar markazining harakati ma'lum bo‘lsa, shu sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh momentini aniqlashimiz mumkin. Birinchi masala bo‘yicha nuqta dinamikasida misollar ko‘rib o‘tgan edik. Quyida ikkinchi masala bo‘yicha misollar ko‘rib chiqamiz.

Yuqoridagi teorema, masalalarni echishda ichki kuchlarning ishtirokini bekor qiladi (ichki kuchlarni bilmagan holda masalalarni echishga yo‘l ochadi). Shu sababli, ko‘rilayotgan mexanik sistemani shunday tanlab olish lozimki, noma'lum bo‘lgan kuchlarni iloji boricha ichki kuchlar qatoriga o‘tkazish lozim.

Massalar markazini harakati haqidagi teoremadan foydalanish o‘rinli bo‘lgan hollarda, ushbu teorema yordamida, sistemaning biror qismining harakatiga bog‘liq ravishda boshqa qismining harakatini aniqlash mumkin bo‘ladi.

Yuqorida isbot qilganimizdek, agar $\sum F_{kz}^{e}=0$ va boshlang‘ich holatda $v_{Cx}=0$ bo‘lsa, u holda sistemaning har qanday harakatida $x_S=\text{const}$ bo‘ladi. Aniqroq bo‘lishi uchun, massalari m_1, m_2, m_3 -ga teng va har bir jismning massa markazini boshlang‘ich koordinatalari x_1, x_2, x_3 -lardan iborat bo‘lgan uchta jismdan tashkil topgan sistema deb faraz qilaylik. Agar sistema ichki (yoki tashqi) kuchlar ta'sirida sistemani tashkil etuvchi nuqtalarning absolyut harakatlarini Ox o‘qidagi proektsiyalari ξ_1, ξ_2, ξ_3 bo‘lsa, ularning koordinatalari tegishlicha $x_1+\xi_1$, $x_2+\xi_2$, $x_3+\xi_3$ bo‘ladi. U holda (26.1) formulaga asosan, sistema massalar markazi x_S - ning boshlang‘ich va ixtiyoriy vaqtdagi qiymatlari o‘zgarmas (bir xil) bo‘ladi, natijada

$$Mx_{S0}=m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3;$$

$$Mx_{S1}=m_1(x_1+\xi_1)+m_2(x_2+\xi_2)+m_3(x_3+\xi_3).$$

Lekin, $x_S=\text{const}$ bo‘lganligi uchun, $x_{S1}=x_{S0}$ bo‘ladi, demak

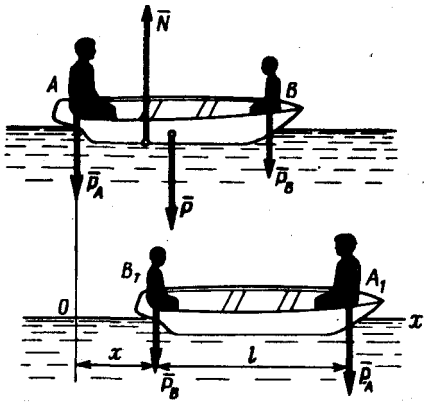
$$m_1\xi_1+m_2\xi_2+m_3\xi_3=0 \qquad (26.6)$$

yoki

$$r_1\xi_1+r_2\xi_2+r_3\xi_3=0 \qquad (26.6')$$

bo‘ladi. Shunday qilib, Ox o‘qi bo‘yicha massalar markazining harakatini saqlanish qonuni o‘rinli bo‘lgan holda, sistemaning jismlari (nuqtalari)ning massalari (og‘irlik kuchlari)ni, ularning massa markazlarini *absolyut* ko‘chishlariga bo‘lgan ko‘paytmalarining algebraik yig‘indisi nolga teng bo‘lar ekan. ξ_1, ξ_2, ξ_3 -larning qiymatlarini hisoblashda, ularning ishoralari, albatta, e'tiborga olinishi shart.

26.1 masala. Og‘irligi r bo‘lgan qayiqning oldingi qismida og‘irligi r_V -bo‘lgan odam va qayiqning orqa qismida og‘irligi r_A - bo‘lgan boshqa odam o‘tiribdi (26.4 shakl). Agar, odamlar o‘zlarining o‘rinlarini almashtirsalar, suvning qarshiligini hisobga olmagan holda, qayiqning qancha masofaga va qaysi tomonga qarab siljishi aniqlansin.



26.4 shakl.

E ch i sh. Bizga noma’lum bo‘lgan, ya’ni oyoq kiyimlarning tagini qayiqqa ishqalish kuchlari va odamlarning muskullarini kuchlarini, tenglamadan chiqarib yuborish uchun ikkala odam va qayiqni bir mexanik sistema deb qabul qilamiz (u holda, aytilgan kuchlar ichki kuchlar qatoriga o‘tadilar).

Vertikal holda yo‘nalgan, r, r_A, r_V, N kuchlar, tashqi kuchlar hisoblanadi. U holda =0 bo‘ladi va boshlang‘ich holatda $v_{Cx}=0$ bo‘lganligi uchun, $x_S=$ const bo‘ladi. Shu sababli barcha jismlarning absolyut ko‘chishlari (26.6) formula orqali bog‘langan bo‘ladi.

Qayiq va odamlarni boshlang‘ich va keyingi holatlarda tasvirlab, qayiqning absolyut ko‘chishini $\xi_q=x$[21] ko‘ramiz. Birinchi odamning absolyut ko‘chishi $\xi_A=x+l$; ikkinchi odamning absolyut ko‘chishi VV_1 bo‘lib, uning Ox o‘qidagi proektsiyasi $\xi_V=-(l-x)$. U holda (26.6’) tenglamadan

$$r\cdot x+r_A(x+l)+r_V[-(l-x)]=0,$$

Bundan qayiqning absolyut ko‘chishini aniqlaymiz,

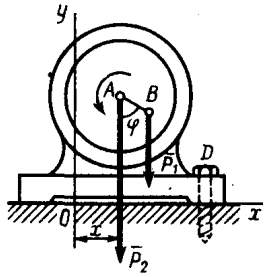
$$x=(r_V - r_A)l/R, \text{ bu erdagi } R=r+r_A+r_V.$$

Agar, $r_V > r_A$ bo‘lsa, u holda $x>0$ bo‘ladi, ya’ni qayiq o‘ng tomonga siljiydi; $r_V < r_A$ bo‘lsa, qayiq chap tomonga siljiydi. Agar, $r_V = r_A$ bo‘lsa, qayiq o‘z o‘rnida qoladi.

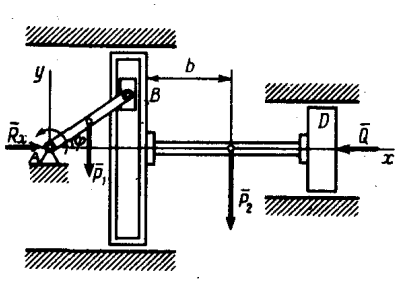
Yana bir bor shuni ta’kidlaymizki: *shunga o‘xshash masalalarni echishda, harakati tekshirilayotgan sistemani, shunday tanlab olish lozimki, noma’lum bo‘lgan kuchlarni iloji boricha ichki kuchlarga aylantiruvchi holatda tanlab olish kerak.*

[21] Ishoralarda xatolikka yo’l qo’ymaslikni oldini olish maqsadida, qayiq (sistema)ni qaysi tomonga qarab siljishidan qathiy nazar, qayiqning siljigan holatini *x* koordinata o’qining musbat tomonida joylashtirish lozim (26.4 shakl). Agarda hisoblashlardan keyin *x* -ning qiymati manfiy bo’lsa, u holda masalaning shartiga ko’ra siljish teskari tomonga sodir bo’lishligini ko’rsatadi.

26.2 masala. Motor valining massalar markazi, aylanish o‘qidan AV=b masofaga siljitilgan. Valning massasi - m_1, motorning qolgan qismlarining massasi - m_2. Agar val, o‘zgarmas ω-burchakli tezlik bilan aylanma harakatda bo‘lsa, silliq gorizontal tekislikda joylashgan motorning harakatini qonuniyati aniqlansin. Qo‘shimcha ravishda, agar motorni fundamentga qo‘zg‘almas qilib mahkamlansa, D nuqtadagi boltning maksimal zo‘riqishi aniqlansin.



26.5 shakl.



26.6 shakl.

E ch i sh. Valni aylantiruvchi kuchlarni, tenglamadan chiqarib tashlash uchun, motor bilan valni bitta mexanik sistema deb qabul qilamiz.1.Fundamentga mahkamlanmagan motorga ta’sir etuvchi ($\bar{P}_1=m_1\bar{g}$, $\bar{P}_2=m_2\bar{g}$ va tekislikning reaktsiyasi) kuchlar vertikal yo‘nalgan bo‘lib, yuqoridagi masalaga o‘xshab massalar markazining harakatini saqlanish qonuni, Sx o‘qi bo‘yicha o‘rinli bo‘ladi.

Motorni ixtiyoriy holatda tasvirlaymiz (26.5 shakl) va boshlang‘ich holat uchun A va V nuqtalarni bir vertikal (Ou o‘qida) chiziqda joylashgan deb hisoblaymiz. U holda, keyingi ixtiyoriy holat uchun $\xi_A=x$, $\xi_V=x+b\sin\varphi$ bo‘ladi. Bundan, $\varphi=\omega t$ ekanligini e’tiborga olsak, (26.6) formuladan

$$m_2x+m_1(x+b\sin\omega t)=0$$

bo‘ladi, natijada

$$x=-\,m_1b\sin\omega t,\quad \text{bu erdagi}\quad M=m_1+m_2.$$

Demak, motor ω-davriy chastota bilan garmonik tebranma harakatda bo‘lar ekan.

2. Agar motor fundamentga mahkamlangan bo‘lsa, (26.5’) tenglamalarning birinchisidan boltning reaktsiyasi R_x,

$$R_x=M\,x''_s,\quad \text{bu erdagi}\quad x_S=(\,m_1x_B+m_2x_A).$$

Bu holda A nuqta qo‘zg‘almas bo‘ladi va $x_A=l$ (l=const) hamda $x_B=l+b\sin\omega t$ bo‘ladi. Natijada, x_S funktsiyadan vaqt bo‘yicha ikki marta hosila olib, uni M-ga ko‘paytirsak (bundan keyin M-harfi bilan mexanik sistemaning umumiy massasini belgilaymiz)

$$R_x=M\,x''_s=m_1\,x''_B=-\,m_1b\omega^2\sin\omega t$$

Boltga ta’sir qiladigan bosim kuchi son qiymati bo‘yicha $|R_x|$ ga teng bo‘lib, qarama qarshi tomonga yo‘nalgan bo‘ladi; uning maksimal

qiymati $m_1b\omega^2$-ga teng. Motorning ishlash jarayonida, boltga nisbatan zarba bo‘lmasligini oldini olib, boltni mahkamlab qotirilgan Q-kuchning qiymati shunday bo‘lishi lozimki, tekislik bilan motor orasidagi ishqalanish kuchi $fQ \geq m_1 b\omega^2$ bo‘lishi shart.

26.3 masala. Uzunligi r, massasi m_1 bo‘lgan va o‘zgarmas ω - burchakli tezlik bilan aylanma harakat qiluvchi AV krivoship, D porshen bilan bog‘langan kulisani harakatga keltirmoqda. Kulisa bilan porshenning umumiy massasi m_2-ga teng (26.6 shakl). Porshenning harakatida unga o‘zgarmas bo‘lgan $\overline{Q}$-kuch ta’sir etadi. Yo‘naltiruvchilarga nisbatan ko‘rsatiladigan ishqalanish kuchini hisobga olmagan holda, krivoshipning A o‘qiga gorizontal yo‘nalishda tushadigan maksimal bosim kuchi aniqlansin.

E ch i sh. Krivoshipni aylantiruvchi kuchlarni, unga nisbatan kulisaning bosimini tenglamadan chiqarib tashlash uchun, hamma jismlarni bitta sistema deb qabul qilamiz. U holda, A o‘qqa ta’sir etuvchi gorizontal bosim kuchini R_x-deb belgilab, (26.5’) tenglamalarning birinchisidan, quyidagini yozamiz

$$M x''_s = R_x - Q$$

(26.1) formulaga asosan $Mx_S = m_1x_1 + m_2x_2$ ni aniqlaymiz.

Ushbu masalada, $x_1 = 0{,}5r\cos\omega t$, $x_2 = b + r\cos\omega t$, chunki $\varphi = \omega t$. Natijada

$$R_x = Q + M x''_s = Q - (0{,}5m_1 + m_2)r\omega^2\cos\omega t \text{ bo‘ladi.}$$

O‘qqa ta’sir qiladigan bosim kuchining moduli $|R_x|$-ga teng bo‘lib, qarama-qarshi tomonga yo‘nalgan bo‘ladi va $\varphi = 180°$ da maksimal qiymatga ega bo‘ladi, ya’ni $Q + (0{,}5m_1 + m_2)r\omega^2$ bo‘ladi.

Xulosalar:

1. Moddiy nuqtalar mexanik sistema bo‘lishlari uchun, ular bir-birlari bilan kinematik yoki dinamik xususiyatlari orqali o‘zaro bog‘langan bo‘lishlari shart ekan.
2. Mexanik sistema harakatining differentsial tenglamasini yozishda ichki va tashqi kuchlarni alohida-alohida qilib ajratib yozish lozim ekan.
3. Ichki kuchlarning o‘ziga xos xususiyatlari mavjud bo‘lib, mexanik sistema harakatining differentsial tenglamasini yozganimizda, ichki kuchlarning bosh vektori hamisha nolga teng bo‘lishini unutmaslik lozim ekan.

4. Mexanik sistemaning massalar markazini aniqlash sistema dinamikasida alohida ahamiyatga ekan. Masalar markazini koordinatasini statika qismidagi og‘irlik markazini aniqlash formulasidagi kabi aniqlanar ekan.
5. Mexanik sistemasi massalarining markazi, xuddi moddiy nuqta kabi harakatlanib, uning differentsial tenglamasini tuzganimizda faqat tashqi kuchlarning vektor yg‘indilari ishtirok etar ekan.
6. Ichki kuchlar qanday katta bo‘lishiga qaramasdan, massa markazining harakatiga to‘g‘ridan-to‘g‘ri ta’sir qila olmas ekan. Masalan avtomobilni o‘rnidan qo‘zg‘atish uchun, ichki kuchlar yordamida harakat tomonga yo‘naluvchi tashqi kuch, ya’ni ishqalanish kuchini paydo qilish lozim ekan.
7. Agarda tashqi kuchlarning vektor yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, massa markazi o‘zining tinch holatini yoki to‘g‘ri chiziqli tekis harakatini davom etar ekan. Bu holatni massa markazi harakatini saqlanish qonuni deb atalar ekan.
8. Ichki kuchlar yordamida tashqi kuchlarni paydo qilib ular orqali jismlarning massa markazlarini harakatini o‘zgartirish yo‘llari juda ko‘p bo‘lib, ularning ayrimlarini misol tariqasida yuqorida ko‘rib chiqilgan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Mexanik sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
2. Ichki kuchlar deb qanday kuchlarga aytiladi va ular qanday xossalarga ega?
3. Tashqi kuchlar deb qanday kuchlarga aytiladi va ularni qanday farqlash lozim?
4. Mexanik sistemaga kiruvchi moddiy nuqtalarning harakatlarini differentsial tenglamasini tuzganimizda, ichki kuchlar qatnashadimi?
5. Mexanik sistema massalar markazini qaysi formulalar orqali aniqlanadi?
6. Mexanik sistema massa markazining harakatini differentsial tenglamasini tuzganimizda ichki kuchlar ishtirok etadimi?
7. Massalar markazining harakati haqdagi teoremani ifodalab bering?
8. Mexanik sistema massalar markazini harakatini saqlash uchun qanday shartlar bajarilishi lozim?

9. Avtomobilni harakatga keltirish uchun zarur bo‘lgan tashqi kuchlarni qanday paydo qilish mumkin?
10. Reaktiv kuch, ichki kuch hisoblanadimi yoki tashqi kuchmi?

Mavzuni mustahkamlash uchun 26 ilovadagi masalalarni mustaqil echishni tavsiya qilamiz:

27 – Ma’ruza

Mavzu: Inertsiya momenti. O‘qqa nisbatan inertsiya momenti. Inertsiya radiusi. Parallel o‘qlarga nisbatan inertsiya momenti. Gyuygens teoremasi. Markazdan qochma nertsiya momentlari. Bosh o‘qlar va bosh markaziy o‘qlar haqida tushuncha. Fazoda ixtiyoriy yo‘nalgan o‘qlarga nisbatan inertsiya momenti.

REJA:

1. Inertsiya momenti. O‘qqa nisbatan inertsiya momenti. Inertsiya radiusi.
2. Parallel o‘qlarga nisbatan inertsiya momenti. Gyuygens teoremasi.
3. Markazdan qochma nertsiya momentlari. Bosh o‘qlar va bosh markaziy o‘qlar haqida tushunchalar.
4. Fazoda ixtiyoriy yo‘nalgan o‘qlarga nisbatan inertsiya momenti.

Muammo: Dinamikaning asosiy qonunidan ko‘rinib turibdiki, moddiy nuqtaning unga qo‘yilgan kuch ta’sirida oladigan tezlanishi kuchning miqdoriga va nuqtaning massasiga bog‘liq bo‘lar ekan. Qattiq jismlar va mexanik sistemalarning aylanma harakatlarida, kuch momentlari ta’sirida jissmlarning oladigan burchakli tezlanishlari jismlarning massalariga bog‘liq bo‘libgina qolmay, shu massalarning qanday joylashganliklariga, ya’ni geometrik shakliga ham bog‘liq bo‘lar ekan. Massalarni qanday joylashganliklarini xarakterlovchi qiymatni **inertsiya momenti** deb ataladi. Quyida har qanday jismning inertsiya momentini aniqlovchi formulalarni ko‘rib o‘tamiz.

27.1§ O‘qqa nisbatan inertsiya momenti. Inertsiya radiusi.

Qattiq jism dinamikasiga oid masalalarni echishda, har bir nuqtaning massasi m_k va ularning koordinatalari x_k, y_k, z_k orqali emas, balki ularni xarakterlovchi umumiy ifodalar orqali amalga oshiriladi.

Ulardan biri, *massalar markazining koordinatasi* (sistema nuqtalari massalarining, ularning koordinatalariga ko‘paytmalarining yig‘indisi orqali ifodalanadi); ikkinchisi, *o‘qqa nisbatan inertsiya momentlari* (sistema nuqtalari massalarining, ularning ikkitadan iborat koordinatalari kvadratlariga ko‘paytmalarining yig‘indisi orqali ifodalanadi); uchinchisi, *markazdan qochma inertsiya momentlari* (sistema nuqtalari massalarining, ularning ikkita koordinatalariga ko‘paytmalarining yig‘indisi orqali ifodalanadi).

Koordinatasi (27.1) formula orqali aniqlanadigan S nuqtaning geometrik o‘rni, massalar markazi yoki mexanik sistemaning inertsiya markazi deb ataladi, ya’ni:

$$x_C=\frac{1}{M}\sum m_k x_k, \qquad y_C=\frac{1}{M}\sum m_k y_k, \qquad z_C=\frac{1}{M}\sum m_k z_k, \qquad (27.1)$$

Ushbu formulalarda, moddiy nuqta (zarracha)larni massalari -m_k va shu nuqtalarning x_k, y_k, z_k koordinatalari ishtirok etmoqda. Shu sababli, agar m_k, x_k, y_k, z_k lar sistema nuqtalarining massalari va ularning koordinatalaridan iborat bo‘lsa, haqiqatdan ham S (x_S,y_S,z_S) nuqtaning holati (o‘rni) har qanday jism yoki mexanik sistemaning massalarini tarqalishini xarakterlab beradi.

Jism (mexanik sistema)ning berilgan Oz o‘qqa nisbatan inertsiya momenti deb, jism (sistema)ning barcha nuqtalarining massalarini shu o‘qqacha bo‘lgan masofalar kvadratlariga ko‘paytmalarining algebraik yig‘indisiga teng bo‘lgan skalyar qiymatga aytiladi:

$$J_z=\sum m_k h_k^2 \qquad (27.2)$$

Yuqoridagi ifodaga asosan, jism (yoki sistema)ning ixtiyoriy o‘qqa nisbatan inertsiya momenti, faqat musbat qiymatdan iborat bo‘lib, hech qachon nolga teng bo‘lmaydi.

Ilgarilanma harakatlarda jismning inertlik xususiyatini uning massasi qanday belgilagan bo‘lsa, aylanma harakatdagi jismning inertlik xususiyatini o‘qqa nisbatan inertsiya momenti belgilaydi, ya’ni *o‘qqa nisbatan inertsiya momenti aylanma harakatdagi jismning inertlik o‘lchovi bo‘lib xizmat qiladi.*

(27.2) formulaga asosan, jismning inertsiya momenti, uning barcha qismlarining o‘sha o‘qqa nisbatan inertsiya momentlarining yig‘indisiga teng ekan. Aylanish o‘qidan h -masofada joylashgan moddiy nuqtaning inertsiya momenti $J_z=mh^2$ -ga teng bo‘ladi. SI sistemasida inertsiya momentining o‘lchov birligi 1 kg·m^2 (MKGSS sistemasida -1 kg·m·s^{-2}).

O‘qqa nisbatan inertsiya momentlarini hisoblash uchun, o‘qlardan sistemaning nuqtalarigacha bo‘lgan masofalarni ularning x_k, y_k, z_k koordinatalari (masalan, nuqtadan Ox o‘qigacha bo‘lgan masofaning kvadrati $y_k^2+z_k^2$) orqali ifodalanadi. U holda, Oxyz o‘qlariga nisbatan inertsiya momentlari quyidagi formulalar orqali ifodalanadi

$$J_x=\sum m_k(y_k^2+z_k^2), \quad J_y=\sum m_k(x_k^2+z_k^2), \quad J_z=\sum m_k(x_k^2+y_k^2). \qquad (27.3)$$

Aksariyat, hisoblash ishlarida *inertsiya radiusi* degan iboradan foydalaniladi. Oz o‘qiga nisbatan *inertsiya radusi* ρ_z deb, quyidagi musbat skalyar ifodaga aytiladi

$$J_z = M\rho_z^2 \qquad (27.4)$$

bu erda M - jismning massasi. Yuqoridagi ifodadan ko‘rinib turibdiki, inertsiya radiusi bu Oz o‘qidan shunday nuqtagacha bo‘lgan masofadan iborat ekanki, jismning butun massasini shu nuqtaga joylashtirib, so‘ngra shu massaning Oz o‘qiga nisbatan olingan inertsiya momentiga teng ekan.

Inertsiya radiusini bilgan holda, (27.4) formula orqali inertsiya momentini aniqlash mumkin yoki inertsiya momentini bilgan holda inertsiya radiusini aniqlash mumkin.

(27.2) va (27.3) formulalar, qattiq jism uchun ham, moddiy nuqtalarning ixtiyoriy sistemalari uchun ham o‘rinlidir. Agar jism yaxlit bo‘lsa, uni elementar bo‘lakchalarga ajratib yuboriladi, har bir elementar qismlarning inertsiya momentlari (27.2)-ning yig‘indisining limiti integralga aylanadi. Hamda $dm=\rho\cdot dV$, bu erda ρ-jismning zichligi, V-jismning umumiy hajmi ekanligini e’tiborga olsak, natijada

$$J_z = \int_{(V)} h^2 dm \quad \text{yoki} \quad J_z = \int_{(V)} \rho h^2 dV \qquad (27.5)$$

Bu erdagi integral jismning butun hajmi bo‘yicha olinadi, lekin ρ - zichlik va h - masofa, har bir nuqtaning koordinatasiga bog‘liq ravishda o‘zgaradi. Yaxlit jismlarning o‘qqa nisbatan inertsiya momentlari (27.3) ham, xuddi shu kabi ifodalanadi,

$$J_{ch} = \int_{(V)} \rho(y^2 + z^2) dV \quad \text{va h.} \qquad (27.5')$$

Bir jinsli to‘g‘ri shakldagi jismlarning inertsiya momentlarini hisoblashda (27.5) va (27.5’) formulalar juda katta qulayliklar tug‘diradi. Hamda jismning zichligi o‘zgarmas qiymat bo‘lganligi sababli integral ostidan chiqarib yuboriladi.

Bir jinsli ba’zi bir jismlarning inertsiya momentlarini aniqlaymiz.

1. Massasi M va uzunligi l -bo‘lgan bir jinsli ingichka sterjen berilgan bo‘lsin. Shu sterjenning o‘qiga perpendikulyar bo‘lib, uning A uchidan o‘tuvchi Az o‘qqa nisbatan inertsiya momenti aniqlansin (27.1 shakl). AV sterjen bo‘ylab, Ax o‘qini o‘tkazamiz. U holda uzunligi *dx* bo‘lgan ixtiyoriy elementar kesmaning Az o‘qigacha bo‘lgan masofasi $h=x$ va massasi $dm=\rho_1 dx$, bu erdagi $\rho_1=M/l$ - sterjenning uzunlik birligining massasi. Bularni e’tiborga olib (27.5) formula orqali[22]

[22] Bu erda va bundan keyin J_A orqali, A nuqtadan o’tuvchi va jismning tekisligidagi kesimiga perpendikulyar bo’lgan o’qqa nisbatan inertsiya momentini belgilaydi.

$$J_A=\int_0^l x^2\,dm=\rho_1\int_0^l x^2\,dx=\rho_1 l^3/3$$ ekanini aniqlaymiz.

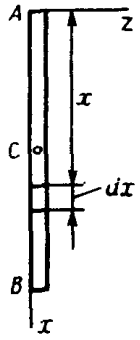
Bu ifodadagi ρ_1 -ning qiymatini o‘rniga qo‘ysak

$$J_a=Ml^2/3 \qquad (27.6)$$

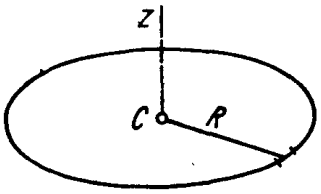
bo‘ladi.

2. Massasi M va radiusi R -ga teng bo‘lgan bir jinsli ingichka halqa.

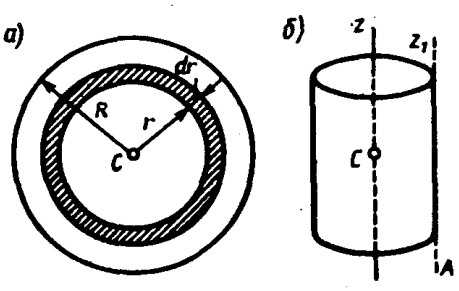
Bu jismning halqa tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan va uning



27.1 shakl



27.2 shakl



27.3 shakl.

geometrik markazi S nuqtadan o‘tuvchi Cz o‘qiga nisbatan inertsiya momentini hisoblaymiz (27.2 shakl). Halqaning barcha nuqtalari Cz o‘qidan bir xil $h_k=R$ masofada joylashgan ekanliklari sababli, (27.2) formula orqali quyidagini yozamiz:

$$J_C=\sum m_k R^2=(\sum m_k)\cdot R^2=MR^2$$

Demak, halqaning Cz o‘qiga nisbatan inertsiya momenti[23]

$$J_C=MR^2 \qquad (27.7)$$

Massasi M, radiusi R-ga teng bo‘lgan tsilindrsimon yupqa yuzaning o‘qidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti uchun ham, shu formuladan foydalaniladi.

3. Massasi M, radiusi R-ga teng bo‘lgan doiradan iborat plastina yoki tsilindr.

Doiraviy plastinaning uning markazidan o‘tuvchi va doira tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan Sz -o‘qqa nisbatan inertsiya momentini aniqlaymiz (27.2 shakl). Doiradan eni dr-ga teng va radiusi r -bo‘lgan halqa ajratib olamiz (27.3, a shakl). Ushbu halqaning yuzasi $2\pi r\cdot dr$, massasi $dm=\rho_z 2\pi r\cdot dr$ bu erdagi $\rho_z=M/\pi r^2$- plastina yuza birligining massasi. U holda ajratilgan elementar halqa uchun (27.7)

[23] (27.4) va (27.7) formulalarni solishtirish natijasida, jismning inertsiya radiusi ingichka halqaning radiusi, ya’ni jism uchun o’qqa nisbatan bo’lgan, shunday inertsiya momentiga teng ekanligini aniqlaymiz.

formula orqali inertsiya momenti $dJ_C = r^2 dm = 2\pi\rho_z r^3 dr$ bo‘ladi va butun halqa uchun aniqlaymiz

$$J_C = 2\pi\rho_z \int_0^R r^3 dr = \pi\rho_z R^4/2$$

ρ_z-ning qiymatini keltirib qo‘ysak

$$J_C = MR^2/2 \qquad (27.8)$$

Massasi M, radiusi R -bo‘lgan bir jinsli doiraviy tsilindrning J_z - o‘qqa nisbatan inertsiya momenti ham shu formula orqali hisoblanadi (27.3, b shakl).

4. To‘g‘ri burchakli plastina, konus va shar. Keltirib chiqarishga oid hisoblash ishlarini bajarmasdan quyidagi jismlarning inertsiya momentlarini bevosita keltiramiz (bularni talalabalarning o‘zlari keltirib chiqarishlari mumkin, yoki maxsus spravochniklardan aniqlab olishlari ham mumkin).

a) massasi M, tomonlari AV=a va BD=b (x-o‘qi AV bo‘yicha yo‘naltirilgan, u -o‘qi BD bo‘yicha yo‘naltirilgan) bo‘lgan to‘g‘ri burchakli yaxlit plastinaning inertsiya momenti:

$$J_x = Mb^2/3, \quad J_y = Ma^2/3;$$

b) massasi M, asosining radiusi R bo‘lgan yaxlit to‘g‘ri konusning inertsiya momenti (z o‘qi konusning o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan):

$$J_z = 0{,}3MR^2$$

v) massasi M, radiusi R bo‘lgan yaxlit shar (z o‘qi sharning diametri bo‘ylab yo‘nalgan)

$$J_z = 0{,}4MR^2$$

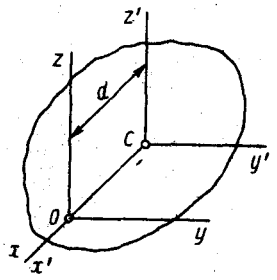
Bir jinsli bo‘lmagan yoki murakkab konfiguratsiyali jismlarning inertsiya momentlarini maxsus priborlar yordamida tajriba usuli bilan aniqlanadi.

Tayanch so‘z va iboralar: Inertsiya momenti, inertsiya radiusi, o‘qqa nisbatan inertsiya momenti.

27.2§ Parallel o‘qlarga nisbatan inertsiya momentlari. Gyuygens teoremasi

Umuman olganda har bir jismning turli o‘qlarga nisbatan inertsiya momentlari turlicha bo‘ladi. Quyida biz, jismning biror o‘qqa nisbatan inertsiya momenti aniq bo‘lsa, unga parallel bo‘lgan ixtiyoriy o‘qqa nisbatan inertsiya momentini qanday aniqlashni ko‘rsatib o‘tamiz. Jismning massa markazi S nuqtadan ixtiyoriy yo‘nalgan Cx’y’z’ o‘qlar

o‘tkazamiz va ixtiyoriy O nuqtadan shu o‘qlarga tegishlicha parallel bo‘lgan, ya’ni Ox||Sx’, Ou||Sy’, Oz||Sz’ -o‘qlarni o‘tkazamiz (27.4 shakl). Sz’ va Oz o‘qlar orasidagi masofani d -harfi bilan belgilaylik. U holda (27.3) formulaga asosan:



27.4 shakl.

$$J_{Oz}=\sum m_z(x_k^2+y_k^2),\qquad J_{Cz'}=\sum m_z(x_k'^2+y_k'^2).$$

Lekin shakldan ko‘rinib turganidek, ixtiyoriy nuqta uchun $x_k=x_k'-d$ va $x_k^2=x_k'^2+d^2-2x_k'd$, hamda $y_k=y_k'$ bo‘ladi. x_k' va y_k -larning qiymatlarini J_{Oz} -ifodaga qo‘ysak va umumiy d^2 va 2d ko‘paytmalarni qavsdan chiqarsak,

$$J_{Oz}=\sum m_z(x_k'^2+y_k'^2)+(\sum m_k)d^2-(\sum m_k x_k')2d$$

Ushbu tenglikning birinchi yig‘indisi $J_{Cz'}$ -ga teng, ikkinchisi jismning massasini o‘qlar orasidagi masofaning kvadratiga ko‘paytmasiga teng. Uchinchi yig‘indini aniqlaymiz. (27.1) formulaga asosan massa markazining koordinatasi $\sum m_k x_k'=Mx_C'$. Ushbu masalada, S nuqta koordinata boshi bo‘lganligi uchun $x_C'=0$ bo‘ladi. Natijada,

$$J_{Oz}=J_{Cz'}+Md^2 \qquad (27.9)$$

(27.9) formula G yu y g e n s[24] ning quyidagi teoremasini ifodalaydi: *jismning berilgan o‘qqa nisbatan inertsiya momenti, shu o‘qqa parallel ravishda massa markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti va jismning umumiy massasini o‘qlar orasidagi masofa kvadratiga ko‘paytmasining yig‘indisiga teng ekan.*

(9) formuladan ko‘rinib turgandek, $J_{Oz}>J_{Cz'}$. Demak, shu yo‘nalishdagi barcha o‘qlarga nisbatan inertsiya momentlarining eng kichkinasi massa markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan bo‘lar ekan.

Agar, biror Az_2 o‘qqa nisbatan inertsiya momenti ma’lum bo‘lsa, Gyuygens teoremasi orqali, shu o‘qqa parallel yo‘nalgan *ixtiyoriy* Oz_1 o‘qqa nisbatan inertsiya momentini aniqlash mumkin ekan. Ammo qo‘shimcha ravishda, har bir o‘qning massa markazigacha bo‘lgan d_1 va d_2 masofalar ma’lum bo‘lishi kerak. U holda J_{Az2} va d_2 -larni bilgan holda (27.9) formula orqali $J_{Cz'}$ -ni aniqlaymiz, so‘ngra o‘sha (27.9) formula orqali J_{Oz1} ni aniqlaymiz.

[24] Xristian Gyuygens (1629-1695 y.) - mashhur golland olimi, mexanik, fizik va astronom. Birinchi mayatnikli soatni kashf qilgan. Shu sababli, fizik mayatnikning tebranishlarini o’rgangan va jismning inertsiya momenti tushunchasini kiritgan (lekin, bunday atamani keyinroq Eyler taklif qilgan).

27.1 masala. Ingichka sterjenning massa markazidan o‘tuvchi va sterjenga perpendikulyar bo‘lgan Cz o‘qqa nisbatan inertsiya momenti aniqlansin.

E ch i sh. Sterjenning A uchidan o‘tuvchi Az o‘qini yo‘naltiramiz (27.1 shakl, Cz o‘qi shaklda ko‘rsatilmagan). U holda (27.9) formulaga asosan:

$$J_C=J_A-Md^2$$

Ushbu masalada d=l/2, bu erda l -sterjenning uzunligi, J_A- A nuqtadan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti, (27.6) formula orqali aniqlanadi. Demak,

$J_C=Ml^2/3- Ml^2/4= Ml^2/12$.

Eslatma: *Texnikada ko‘p uchraydigan geometrik figuralarning inertsiya momentlari maxsus spravochniklarda keltiriladi.*

27.2 masala. Tsilindrning yasovchisi bo‘ylab o‘tkazilgan Az_1 - o‘qqa nisbatan inertsiya momenti aniqlansin (27.3, b shakl).

E ch i sh. Gyuygens teoremasiga asosan $J_{Az1}=J_{Sz}+Md^2$. Ushbu masalada d=R va (27.8) formulaga asosan $J_{Sz}=MR^2/2$ bo‘ladi. Bularni yuqoridagi tenglamaga qo‘ysak,

$J_{Az1}= MR^2/2+MR^2=(3/2)\ MR^2$ ni aniqlaymiz.

27.3§* Markazdan qochma inertsiya momentlari. Jismning bosh inertsiya o‘qlari haqida tushuncha

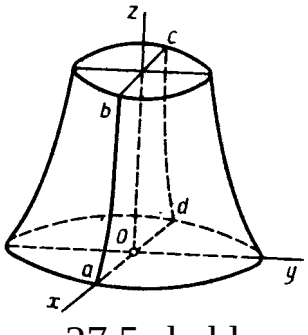
Agar O nuqtadan Oxyz o‘qlarni o‘tkazsak, u holda bu o‘qlarga nisbatan, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} qiymatlardan iborat bo‘lgan va

$$J_{xy}=\sum m_k x_k y_k,\quad J_{yz}=\sum m_k y_k z_k,\quad J_{zx}=\sum m_k z_k x_k \qquad (27.10)$$

formulalar orqali aniqlanadigan markazdan qochma inertsiya momentlari (yoki *inertsiyalar ko‘paytmasi*) deb ataluvchi ifodalar paydo bo‘ladi. Bu erdagi m_k- nuqtaning massasi x_k, y_k, z_k -lar nuqtaning koordinatalari, hamda $J_{xy}= J_{yx}$ bo‘ladi va h.k.

Yaxlit jismlar uchun (27.10) formula (27.5’) formula kabi quyidagi ko‘rinishga keladi

$$J_{xy}=\int_{(V)}\rho xy dV \text{ va h.} \qquad (27.10')$$



27.5 shakl

Markazdan qochma inertsiya momentlari, o‘qlarga nisbatan momentlardan farqli ravishda, musbat yoki

Markazdan qochma inertsiya momentlari manfiy va musbat ishorali yoki nolga teng bo‘lishlari mumkin.

manfiy qiymatlarga ega bo‘lishlari ham mumkin va xususiy holda maxsus yo‘naltirilgan Oxyz o‘qlarga nisbatan nolga teng bo‘lishlari ham mumkin.

B o sh i n e r ts i ya o‘ q l a r i. Simmetriya o‘qiga ega bo‘lgan bir jinsli jismni olib ko‘raylik. Oxyz koordinata o‘qlarini shunday yo‘naltiraylikki, Oz o‘qi jismning simmetriya o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan bo‘lsin (27.5 shakl). U holda, simmetriya qoidasiga asosan, jismning m_k -massali va x_k, y_k, z_k - koordinatali har bir nuqtasiga tegishli ravishda boshqa indeksli shunday massali lekin koordinatalari teskari ishorali bo‘lgan, ya’ni $-x_k$, $-y_k$, z_k nuqta, albatta, mavjud bo‘ladi.

Natijada $\sum m_k x_k z_k=0$ va $\sum m_k y_k z_k=0$ bo‘ladi, chunki bu yig‘indidagi qiymatlar moduli bo‘yicha o‘zaro teng, lekin teskari ishoralar bilan juft-juft bo‘lib ishtirok etadilar; bundan (27.10) tenglikni e’tiborga olsak

$$J_{xz}=0 \quad J_{yz}=0 \qquad (27.11)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, z -o‘qiga nisbatan massalar simmetrik ravishda joylashganliklari sababli J_{zx} va J_{yz} lar nolga aylanish bilan xarakterlanadi. *Markazdan qochma inertsiya momenti nolga teng bo‘lgan J_{xz} va J_{yz} qiymatlarning indekslarida ishtirok etgan Oz o‘q, jismning O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qi deb ataladi.*

Yuqoridagilarga asosan, *agar jismning simmetriya o‘qi mavjud bo‘lsa, bu o‘q shu jismning ixtiyoriy nuqtasidagi bosh inertsiya o‘qi bo‘ladi.*

Bosh inertsiya o‘qi, albatta jismning simmetriya o‘qi bo‘lishi shart emas. Simmetriya tekislikka ega bo‘lgan, bir jinsli jismni olib ko‘raylik (27.5 shaklda *abcd* tekisligi simmetriya tekisligi hisoblanadi). Shu simmetriya tekisligida yotuvchi Oz, Ox va unga perpendikulyar yo‘nalgan Oy o‘qlarni o‘tkazaylik. U holda, simmetriya qoidasiga asosan, jismning m_k -massali va x_k, y_k , z_k - koordinatali har bir nuqtasiga, tegishli ravishda boshqa indeksli, shunday massali, lekin koordinatalari shunday va teskari ishorali, ya’ni x_k, $-y_k$, z_k nuqta, albatta, mavjud bo‘ladi. Natijada yuqoridagi kabi $\sum m_k x_k y_k=0$ va $\sum m_k y_k z_k=0$, yoki $J_{xu}=0$, $J_{yz}=0$ bo‘ladi. Shu sababli, u -o‘qi O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qi bo‘ladi. Shunday qilib, *agar jism simmetriya tekisligiga ega bo‘lsa, shu tekislikka perpendikulyar ravishda yo‘nalgan ixtiyoriy o‘q, shu tekislikni kesib o‘tgan O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qi hisoblanar ekan.*

(27.11) tenglama, Oz-o‘qi jismning O nuqtasi (koordinata boshi)dagi inertsiya o‘qi ekanligining sharti hisoblanadi. Xuddi shu kabi, agar $J_{xu}=0$, $J_{yz}=0$ bo‘lsa, u holda Ou o‘qi jismning O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qi hisoblanadi. Demak, *agar barcha markazdan qochma inertsiya momentlari, ya’ni*

$$J_{xu}=0,\quad J_{yz}=0,\quad J_{zx}=0 \qquad (27.11')$$

bo‘lsa, u holda har bir koordinata o‘qlari, jismning O nuqta (koordinata boshi) dagi bosh inertsiya o‘qi hisoblanadi.

Masalan, 27.5 shakldagi uchala Oxyz -o‘qlari (Oz -o‘qi simmetriya o‘qi bo‘lganligi sababli, Ox va Oy -o‘qlari esa simmetriya tekisligiga perpendikulyar bo‘lganligi sababli) jismning O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qlari hisoblanadi.

Bosh inertsiya o‘qlariga nisbatan aniqlangan inertsiya momentlari *jismning bosh inertsiya momentlari* deb ataladi.

Jismning massalar markazidan o‘tkazilgan bosh inertsiya o‘qlari, *bosh markaziy inertsiya o‘qlari* deb ataladi. Yuqorida isbot qilinganlarga asosan, agar jism simmetriya o‘qiga ega bo‘lsa, u holda bu o‘q jismning bosh markaziy o‘qlaridan biri hisoblanadi, chunki massa markazi shu o‘qda joylashgan bo‘ladi. Agar, jism simmetriya tekisligiga ega bo‘lsa, u holda shu tekislikka perpendikulyar bo‘lib, jismning massa markazidan o‘tsa, bu o‘q ham bosh markaziy inertsiya o‘qlaridan biri hisoblanadi.

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan misollarda, asosan, simmetrik jismlar tahlil qilindi, masalalar echishda uchraydigan jismlarning ko‘pchiligi, aynan, shundaylardan iborat bo‘ladi. Lekin, shuni isbot qilish mumkinki, har qanday jismning ixtiyoriy nuqtasidan hech bo‘lmaganda o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan uchta o‘qni shunday o‘tkazish mumkinki, ular uchun (27.11’) tenglama qanoatlanadi, ya’ni jismning shu nuqtadagi bosh inertsiya o‘qlari hisoblanadi.

Qattiq jism dinamikasida, bosh inertsiya o‘qlari tushunchasi katta ahamiyatga ega bo‘ladi. Agar Oxyz -koordinata o‘qlarini, ana shu bosh inertsiya o‘qlari bo‘yicha yo‘naltirsak, u holda hamma markazdan qochma inertsiya kuchlari nolga teng bo‘ladi, natijada tegishli tenglamalar va formulalar nihoyatda sodda holga keladilar. Aylanayotgan jismning dinamik tenglamalari va zarba markaziga oid va boshqa qator masalalarni echishda, bosh inertsiya o‘qlari tushunchasi alohida ahamiyat kasb etadi.

27.4§* Ixtiyoriy yo‘nalgan o‘qqa nisbatan inertsiya momenti

Oxyz o‘qlar bilan, tegishlicha α, β va γ burchaklar tashkil etuvchi Ol -o‘qini o‘tkazaylik (27.6 shakl). Ta’rif [(27.2) formula]ga ko‘ra $J_l=\sum m_k h_k^2$ bo‘ladi va OB_kD_k uchburchakdan $h_k^2=r_k^2-(OD_k)^2$. Lekin OD_k masofa, $\bar{r}_k=x_k\bar{i}+y_k\bar{j}+z_k\bar{k}$ vektorning Ol o‘qidagi proektsiyasidan iborat bo‘lgani sababli, $(x_k\bar{i})=x_k\cos\alpha$, $(y_k\bar{j})=y_k\cos\beta$ va $(z_k\bar{k})=z_k\cos\gamma$ bo‘ladi hamda $r_k^2=x_k^2+y_k^2+z_k^2$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$J_l=\sum m_k[x_k^2+y_k^2+z_k^2-(x_k\cos\alpha+y_k\cos\beta+z_k\cos\gamma)^2].$$

Agar, $1-\cos^2\alpha=\cos^2\beta+\cos^2\gamma$, $1-\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\cos^2\gamma$, va $1-\cos^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta$ ekanligi sababli, kosinuslar kvadratlari va kosinuslarning ko‘paytmalarini qavsdan tashqariga chiqarib, (27.3) va (27.10) formulalarni e’tiborga olsak, yuqoridagi formula quyidagi ko‘rinishga keladi

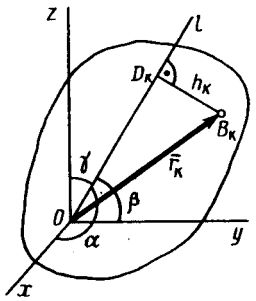
$$J_l=J_x\cos^2\alpha+J_y\cos^2\beta+J_z\cos^2\gamma-2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha \quad (27.12)$$

Agar, Oxyz o‘qlarini jismning O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qlari bo‘ylab yo‘naltirsak (27.12) formula soddalashadi va

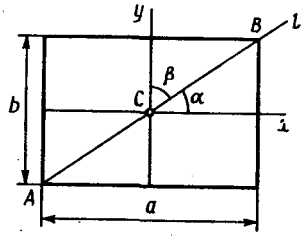
$$J_l=J_x\cos^2\alpha+J_y\cos^2\beta+J_z\cos^2\gamma \quad (27.12’)$$

ko‘rinishga keladi.

(27.12) va (27.12’) formulalar orqali, berilgan Oxyz o‘qlarga nisbatan inertsiya momentlari ma’lum bo‘lsa va O[25] nuqtadan o‘tuvchi ixtiyoriy o‘qqa nisbatan inertsiya momentlarini hisoblash mumkin ekan.



27.6 shakl



27.7 shakl.

Agar jismning massa markazi ma’lum bo‘lsa, (27.9) formula yordamida, ixtiyoriy nuqtadan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momentlarini hisoblash mumkin bo‘ladi.

27.3 masala. Massasi m, tomonlari *a* va *b* larga teng bo‘lgan, to‘g‘ri burchakli plastinaning diagonaliga nisbatan inertsiya momenti aniqlansin (27.7 shakl).

E ch i sh. Massa markazi S nuqtadan Sxy o‘qlarni o‘tkazamiz (shaklda Cz -o‘qi ko‘rsatilmagan) va bu o‘qlar simmetriya o‘qlari

[25] J_x, J_y, J_z, $-J_{xy}$, $-J_{yz}$, $-J_{xz}$,-lar, inertsiya tenzori deb ataluvchi qiymatlarni aniqlaydi va uning komponentlari hisoblanadi.

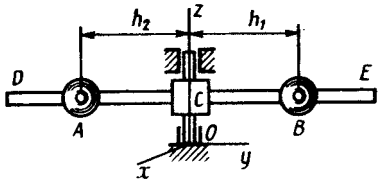
bo‘lgani uchun, ular S nuqtadagi bosh inertsiya o‘qlari hisoblanadilar. U holda $\gamma=90°$ ekanligi sababli (27.12’) formulaga asosan,

$$J_l=J_x sos^2\alpha+ J_y sos^2\beta$$

bo‘ladi. 27.1 masaladagi kabi, ushbu plastina uchun $J_x=mb^2/12$, $J_y=ma^2/12$ ekanligini aniqlaymiz hamda $sos\alpha=a/c$, $sos\beta=b/c$ va $s=AV$ bo‘ladi. Natijada,

$$J_l=ma^2b^2/6s^2=ma^2b^2/6(a^2+b^2)$$

Quyida, biz yuqorida kiritgan xarakteristikalar, ya’ni massalarning tarqalishini (joylashishini) ikkita bir xil sharlarni Oz o‘qi atrofida aylanayotgan sterjenning A va V nuqtalarga kiydirib qo‘yilgandagi misolda ko‘rib chiqamiz (27.8 shakl).



27.8 shakl.

Agar, $h_2\neq h_1$ bo‘lsa, u holda sistemaning massa markazi Oz -o‘qida yotmaydi va aylanish hisobiga podshipniklarda qo‘shimcha bosim kuchi paydo bo‘ladi. Agar $h_2=h_1$ bo‘lsa, qo‘shimcha bosim yo‘q bo‘ladi.

Agar $h_2=h_1$ bo‘lgan holda sharlar orasidagi masofani orttirsak, massa markazining o‘rni o‘zgarmaydi, lekin inertsiya momenti J_z - ortadi va boshqa shartlar bir xil qolgan holda sterjenning aylanishi sekinlashadi.

Agar DE sterjenni Oyz tekisligida $\angle DC_z\neq 90°$ (ya’ni to‘g‘ri burchak bo‘lmagan) burchakka bursak, $h_2=h_1$ shartni saqlagan holda, sharlarni sterjenning chekkalariga surib qo‘ysak, u holda massa markazining o‘rni ham, inertsiya momenti J_z -ning qiymati ham o‘zgarmaydi. Ammo, markazdan qochma inertsiya momenti J_{yz} - nolga teng bo‘lmaydi, natijada Oz -o‘q bosh inertsiya o‘qi bo‘lmay qoladi, natijada sterjenning aylanishida, podshipniklarga qo‘shimcha ravishda yonmacha ravishda yo‘nalgan bosim kuchlari paydo bo‘ladi (o‘qni «ura» boshlaydi).

Tayanch so‘z va iboralar: Gyuygens teoremasi, parallel o‘qlarga nisbatan inertsiya momentlari, markazdan qochma inertsiya momentlari, bosh inertsiya o‘qi, bosh markaziy inertsiya o‘qi, jismning bosh inertsiya momenti, ixtiyoriy ravishda yo‘nalgan o‘qlarga nissbatan inertsiya momentlari.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.

1. Jismning aylanma harakatida, uning aylanish o‘qiga yoki aylanish nuqtasiga nisbatan massalarning joylashuvini ifodalovchi kattalik **inertsiya momenti** deb atalar ekan.
2. O‘qqa yoki nuqtaga nisbatan inertsiya momentlari har doim faqat musbat qiymatdan iborat bo‘lib, hech qachon nolga teng bo‘lmas ekan.
3. Jism nuqtalari massalarining ikkita o‘qlardagi koordinatalarini ko‘paytmasidan kelib chiqadigan inertsiya momentini markazdan qochma inertsiya momenti deb atalar ekan.
4. Markazdan qochma inertsiya momentlari musbat va manfiy, hamda nolga teng bo‘lishlari mumkin ekan.
5. Birorta o‘q qatnashgan markazdan qochma inertsiya momenti nolga teng bo‘lsa, o‘sha o‘qni bosh inertsiya o‘qi deb atalar ekan.
6. Agarda bosh inertsiya o‘qi massa markazidan o‘tsa, bu o‘qni bosh markaziy inertsiya o‘qi deb atalar ekan.
7. Agarda jismning massa markazidan o‘tuvchi birorta o‘qqa nisbatan inertsiya momenti ma’lum bo‘lsa, shu o‘qqa parallel bo‘lgan va undan ixtiyoriy masofada joylashgan o‘qlarga nisbatan inertsiya momenti Gyuygens teoremasi orqali aniqlanar ekan.
8. Jismning birorta o‘qqa nisbatan inertsiya momentini inertsiya radiusi orqali ham ifodalash mumkin ekan. Inertsiya radiusini qiymatini $p = \sqrt{J/M}$ formula orqali aniqlash mumkin ekan. Bu erdagi J-inertsiya momenti, M-jismning umumiy massasi. Inertsiya radiusi uzunlik o‘lchovi bilan o‘lchanadi.
9. Ixtiyoriy yo‘nalib, massa markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan olingan inertsiya momenti (27.12) formula orqali hisoblanar ekan.
10. Agarda ixtiyoriy yo‘nalgan o‘q massa markazini kesib o‘tmasa, u holda Gyuygens teoremasidan foydalanib, uni aniqlash mumkin ekan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Jismning inertsiya momenti deb qanday ifodaga aytiladi?
2. Jismning inertsiya momenti fanday harakatlarda ahamiyatga ega bo‘ladi?
3. Jism ilgarilama harakat qilganda, uning inertsiya momenti qanday ahamiyatga ega bo‘lishi mumkin?

4. Inertsiya radiusini qanday aniqlash mumkin?
5. Inertsiya radiusi nolga teng yoki manfiy ishoraga ega bo‘lishi mumkinmi?
6. Bosh inertsiya o‘qi deb qanday o‘qqa aytiladi?
7. Bosh markaziy o‘qni bosh inertsiya o‘qidan farqi nimada?
8. Parallel o‘qlarga nisbatan inertsiya momenti qanday hisoblanadi?
9. Markazdan qochma inertsiya momenti deganimizda qanday ifodani tushunish mumkin?
10. Markazdan qochma inertsiya momenti paydo bo‘lsa, qanday hodisalar ro‘y berishi mumkin?
11. Ixtiyoriy yo‘nalgan o‘qlarga nisbatan inertsiya momenti qaysi formula orqali hisoblanadi?

Mavzuni mustahkamlash uchun 27 ilovadagi masalalarni mustaqil ravishda echishni tavsiya qilamiz:

28 – Ma’ruza

Mavzu: Mexanik sistema harakat miqdori o‘zgarish teoremasi. Mexanik sistemaning harakat miqdori. Harakat miqdorining o‘zgarish teoremasi. Harakat miqdorini saqlanish qonuni. Mexanik sistema harakat miqdorining bosh momenti. Harakat miqdori bosh momentining o‘zgarishi haqidagi teorema. Harakat miqdori bosh momentining saqlanish qonuni. Masalalar echish.

REJA:

1. Mexanik sistemaning harakat miqdori.
2. Harakat miqdorining o‘zgarish teoremasi.
3. Harakat miqdorini saqlanish qonuni.
4. Mexanik sistema harakat miqdorining bosh momenti.
5. Harakat miqdori bosh momentining o‘zgarishi haqidagi teorema.
6. Harakat miqdori bosh momentining saqlanish qonuni.
7. Masalalar echish.
8. Mexanik sistemaning muvozanatlik sharti.

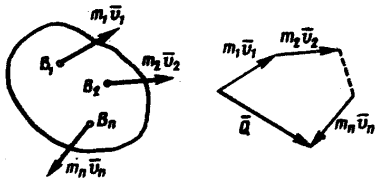
Muammo: Nuqta dinamikasida ham harakat miqdori va harakat miqdori momenti haqida tshliq tushunchalar bergan edik va tegishli masalalar echgan ham edik. Lekin ular harakat miqdori va uning momenti haqida tushunchalarnigina berib, birorta mashina yoki ko
rxona jihozlari uchun qo‘llash jarayonida ojizlik qiladi. CHunki har bir mashina yoki har bir korxonadagi jihozlar mexanik sistema bo‘lmasdan, tegishli konstruktsiyalardan iborat bo‘lgan mexanik sistemani tashkil qiladi. Shu sababli, o‘sha teoremalarni mexanik sistemaga tadbiq qilish orqali, har qanday mashina yoki korxona jixozlarini loyihalash (konstruktsiyalash) ishlarida va ularni ekspluatatsiya qilish jarayonida uchraydigan dinamik kattaliklarni o‘zgarish qonuniyatlarini o‘rganib chiqamiz.

28.1§ Mexanik sistemaning harakat miqdori

Mexanik *sistemaning harakat miqdori deb, sistema nuqtalari harakat miqdorlarining geometrik yig‘indisi (bosh vektori)ga teng bo‘lgan -vektorga aytiladi* (28.1 shakl):

$$\overline{Q} = \sum m_k \overline{v}_k \qquad (28.1)$$

Ushbu ifodadan foydalangan holda, $\overline{Q}$-ning qiymatini bir muncha oson yo‘l bilan aniqlaydigan formulani keltirib chiqaramiz va uning mazmunini yoritib beramiz. (26.1’) tenglikka asoslanib



28.1 shakl.

$$\sum m_k \bar{r}_k = \mathrm{M}\bar{\mathrm{r}}_\mathrm{s} \quad \text{ni yozamiz.}$$

Bu tenglikning ikkala tomonidan vaqt bo‘yicha hosila olsak

$$\sum \mathrm{m_k} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{k}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{M} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{C}}{\mathrm{dt}} \quad \text{yoki} \quad \sum m_k \bar{r}_k = \mathrm{M}\bar{\mathrm{v}}_\mathrm{s} \quad \text{bo‘ladi.}$$

Bundan oxirgi natijani olamiz, ya’ni

$$\overline{Q} = \mathrm{M}\bar{\mathrm{v}}_\mathrm{s} \tag{28.2}$$

demak, *sistemaning harakat miqdori, sistemaning butun massasini uning massasi markazining tezlik vektoriga ko‘paytmasiga teng ekan.* Bu formula qattiq jismlarning harakat miqdorlarini aniqlashda juda qo‘l keladi.

(28.2) formuladan ko‘rinib turibdiki, agar jism (yoki sistema)ning harakatida, uning massasini markazi qo‘zg‘almas bo‘lsa, u holda jism (sistema)ning harakat miqdori nolga teng bo‘lar ekan. Masalan, massa markazidan o‘tuvchi qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakat qilayotgan jismning harakat miqdori nolga teng bo‘lar ekan.

Agar harakat murakkab bo‘lsa, sistemaning harakat miqdori $\overline{\mathrm{Q}}$, uning aylanma harakatiga bog‘liq bo‘lmas ekan. Masalan, dumalab ketayotgan g‘ildirakning harakat miqdori $\overline{Q} = \mathrm{M}\bar{\mathrm{v}}_\mathrm{s}$ -ga teng bo‘lib, g‘ildirakning massa markazi S atrofidagi harakatiga (masalan, g‘ildirakning dumalamasdan sirpanishiga ham, sirpanmay sof dumalayotganligiga ham) bog‘liq bo‘lmas ekan.

Shunday qilib, harakat miqdorini sistema (jism)ning faqat ilgarilanma harakatining xarakteristikasi deb qarash lozim ekan. Agar harakat murakkab bo‘lsa, jismning massa markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakatining xarakteristikasidan iborat ekan xolos.

28.2§ Harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema

N -ta mexanik sistemalardan tashkil topgan mexanik sistemani olib ko‘raylik. Bunday sistemaning harakatini ifodalash maqsadida har bir nuqtaning harakati uchun (20.2) formulaga asosan differentsial tenglamalarini tuzaylik va ularni hadma-had o‘ng tomonlarini o‘ng tomonga, chap tomonlarini chap tomonga qo‘shaylik. Natijada

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i$$ kelib chiqadi.

Ichki kuchlarning birinchi xossasiga binoan oxirgi yig‘indi nolga teng bo‘ladi. Undan tashqari

$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{v}_k = \frac{d\bar{Q}}{dt}$$

bo‘ladi, bundan quydagi natijani olamiz:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e \qquad (28.3)$$

(28.3) formula, mexanik sistema harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teoremaning differentsial formasini ifodalaydi: *sistemaning harakat miqdoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosila, sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisiga teng ekan*. Ushbu formulaning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \qquad (28.3')$$

Teoremaning boshqacha ifodasini aniqlaymiz. Faraz qilaylik t=0s - da sistemaning harakat miqdori Q_0 bo‘lsin, $t=t_1$s - da Q_1 bo‘lsin. U holda (28.3) tenglamaning ikkala tomonini dt-ga ko‘paytirib, so‘ngra integrallasak

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \int_0^t \bar{F}_k^e dt$$

yoki $$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e \qquad (28.4)$$

bo‘ladi. E’tibor bergan bo‘lsangiz yuqoridagi tenglamaning o‘ng tomonidagi integrallar tashqi kuchlarning impulslaridan iborat xolos.

(28.4) vektor tenglama, sistema harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teoremaning integral formasini ifodalaydi: *sistema harakat miqdorining ma’lum vaqt oralig‘idagi o‘zgarishi, shu vaqt oralig‘ida sistemaga ta’sir etgan tashqi kuchlarning impulslarini geometrik yig‘iindisiga teng ekan.* Koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari quyidagicha bo‘ladi:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \; Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \; Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e \qquad (28.4')$$

Ushbu teorema bilan massalar markazining harakati haqidagi teoremaning orasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatib o‘tamiz. $\bar{Q} = M\bar{v}_S$ bo‘lgani uchun, bu qiymatni (28.3) tenglamaga qo‘ysak va $d\bar{v}_S/dt = \bar{a}_C$ - ekanligini e’tiborga olsak $M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e$ bo‘ladi.

Demak, massalar markazining harakati haqidagi teorema va harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema, aslida bitta teoremaning turli ko‘rinishlarini ifoda etar ekan. Qattiq jismning (yoki jismlar sistemasining) harakatini o‘rganish hollarida, ushbu teoremalarning ixtiyoriy ko‘rinishlaridan foydalanish mumkin bo‘ladi, lekin (26.5) formuladan foydalanish qulayroq hisoblanadi.

Uzluksiz muhit (suyuqlik, gaz) uchun, amalda harakat miqdorining o‘zgarish teoremasidan foydalaniladi. Ushbu teorema zarba nazariyasiga va reaktiv harakatlarga oid masalalarni echishda muhim ahamiyatga ega.

Teoremaning amaliy muhim ahamiyati shundaki, uning yordamida oldindan noma’lum bo‘lgan ichki kuchlarni (masalan, suyuqlik zarrachalarining o‘zaro bosim kuchlarini) tenglamalardan chiqarib yuborishga yordam beradi.

28.3§ Harakat miqdorining saqlanish qonuni

Harakat miqdorining saqlanish qonunidan quyidagi muhim xulosalarni chiqarish mumkin.

1.Sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘lsin:

$$\sum \overline{F}_k^e = 0$$

U holda, (28.3) tenglamaga asosan $\overline{Q}$=const ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, agar, *sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistemaning harakat miqdori vektori, ham moduli bo‘yicha, ham yo‘nalishi bo‘yicha o‘zgarmas bo‘lar ekan.*

2. Sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisining biror (masalan, Ox) o‘qdagi proektsiyasi nolga teng bo‘lsin:

$$\sum F_{kx}^e = 0$$

U holda, (28.3) tenglamaga asosan Q_x=const ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, agar, *sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisining biror o‘qdagi proektsiyasi nolga teng bo‘lsa, sistemaning harakat miqdori vektorining shu o‘qdagi proektsiyasi o‘zgarmas bo‘lar ekan.*

Ta’kidlab o‘tish lozimki, sistemaning to‘liq harakat miqdorini aniqlashda, uning har bir qismlarining faqat *absolyut* tezliklarini qo‘yilishi shart hisoblanadi.

28.4§ Mexanik sistema harakat miqdorining bosh momenti

Bitta mexanik sistema uchun harakat miqdorining momenti haqidagi tushuncha 21.1§ da kiritilgan edi. *Sistemaning O markazga nisbatan harakat miqdorining bosh momenti (*yoki *kinetik momenti) deb, sistemaning barcha nuqtalarining harakat miqdorlarini shu markazga* nisbatan olingan momentlarining geometrik yig‘indisidan iborat bo‘lgan* $\overline{K}_O$ *-vektor qiymatiga aytiladi*[26]*:*

$$\overline{K}_O=\sum \overline{m}_O(m_k \overline{v}_k) \qquad (28.5)$$

Koordinata o‘qlariga nisbatan harakat miqdori momentlari ham shunga o‘xshash aniqlanadi:

$$K_x=\sum m_x(m_k \overline{v}_k),\quad K_y=\sum m_y(m_k \overline{v}_k),\quad K_z=\sum m_z(m_k \overline{v}_k) \qquad (28.6)$$

K_x, K_y, K_z -lar o‘z navbatida, $\overline{K}_O$ vektorning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalaridan iborat bo‘ladi.

21.1§ da ta’kidlanganidek, sistemaning harakat miqdori, uning faqat ilgarilanma harakatining xarakteristikasidan iborat bo‘ladi. Quyidagilardan shu ma’lum bo‘ladiki, *sistema harakat miqdorining bosh momenti (kinetik momenti) sistemaning faqat aylanma harakatining xarakteristikasini aniqlar ekan xolos.*

Aylanayotgan jismning kinetik momenti. Konkret (aniq bir) misol tariqasida, qo‘zg‘almas *z* o‘qi atrofida aylanayogan qattiq jismning harakat miqdori momentini koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari, ya’ni K_x, K_y, K_z -larni aniqlashni ko‘rib chiqamiz (28.2 shakl).

1. K_z *-ni aniqlash*. Aylanish o‘qidan h_k -masofada joylashgan ixtiyoriy nuqtaning tezligi $v_k=\omega h_k$ (ω-jismning burchakli tezligi) bo‘ladi. Demak, shu nuqta uchun $m_z(m_k \overline{v}_k)= m_k v_k h_k= m_k h_k^2 \omega$ bo‘ladi. Butun jism uchun umumiy bo‘lgan ω-ni qavsdan tashqariga chiqarib tashlasak

$$K_z=\sum m_z(m_k \overline{v}_k)=(\sum m_k h_k^2)\omega$$

Qavs ichidagi qiymat, qattiq jismning *z* o‘qiga nisbatan inertsiya momentidan iborat. U holda,

[26] Ixchamroq so’zlar bilan aytish maqsadida -ni kinetik moment yoki sistema harakat miqdorining momenti deb ataladi.

$$K_z=J_z\omega, \qquad (28.7)$$

Shunday qilib, *aylanayotgan jismning aylanish o‘qiga nisbatan kinetik momenti, jismning shu o‘qqa nisbatan inertsiya momentini uning burchakli tezligiga bo‘lgan ko‘paytmasiga teng ekan*.

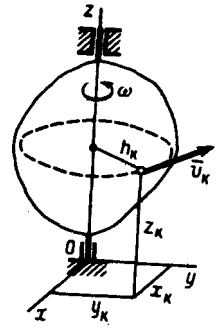
Agar sistema faqat bitta o‘q atrofida turlicha burchakli tezliklar bilan aylanayotgan bir nechta jismlardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda:

$$K_z=J_{1z}\omega_1+ J_{2z}\omega_2+....+ J_{nz}\omega_{n.}. \qquad (28.7')$$

Jismning O_l oniy aylanish o‘qi atrofidagi burilishida ham (28.7) formula o‘rinli hisoblanadi. CHunki, bunday harakatda ham jism nuqtalarining tezliklar maydoni qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatdagi kabi aniqlanadi. Shunday qilib

$$K_l=J_l\omega. \qquad (28.8)$$

2*. K_x va K_u -*ni aniqlash.* K_x - ni aniqlash uchun $m_x(\bar{v}_k)$ -ni xuddi kuchning momenti singari hisoblanadi; buning uchun F - kuchni o‘rniga v tezlik vektorini qo‘yib



28.2 shakl.

$m_x(\bar{v}_k)=y_kv_{kz}-z_kv_{ky}$ ni aniqlaymiz.

Lekin, $v_{ky}=\omega x_k$, $v_{kz}=0$ (oxirgi qiymat 28.2 shakldan ko‘rinib turibdi); shu sababli, $m_x(\bar{v}_k)=-x_kz_k\omega$. Umumiy ko‘paytma bo‘lgan ω-ni qavsdan tashqariga chiqarib yuborsak, natijada

$$K_x=\sum m_x(m_k\bar{v}_k)=-(\sum m_kx_kz_k)\omega=-J_{xz}\omega.$$

Qavs ichidagi qiymat, markazdan qochma inertsiya momentidan iborat. Agar, hamma joydagi *x* -ni o‘rniga *u*-ni qo‘ysak xuddi shu usul bilan K_u-ni aniqlaymiz, ya’ni

$$K_x=-J_{xz}\omega, \quad K_u=-J_{uz}\omega. \qquad (28.9)$$

Shunday qilib, aylanayotgan jismning Oz aylanish o‘qida yotuvchi, O markazga nisbatan kinetik momenti Oxyz o‘qdagi proektsiyalari (28.7) va (28.9) formulalar orqali aniqlanadigan $\bar{K}_O$ vektordan iborat ekan. Ko‘rinib turgandek umumiy holda $\bar{K}_O$ vektor Oz aylanish o‘qida yotmas ekan. Lekin Oz o‘qi O nuqta uchun jismniing bosh inertsiya o‘qi (xususiy holda, simmetriya o‘qi) bo‘lsa, u holda $J_{xz}=J_{yz}=0$. Shu sababli $K_x=K_u=0$ va $K_O=K_z$ bo‘ladi. Demak, agar jism O nuqta uchun jismning bosh inertsiya o‘qidan iborat bo‘lgan o‘q (yoki simmetriya o‘qi) atrofida aylanayotgan bo‘lsa, u holda $\bar{K}_O$ vektor aylanish o‘qi bo‘ylab yo‘naladi va son qiymati bo‘yicha K_z ga teng bo‘ladi, ya’ni $J_z\omega$ -ga teng bo‘ladi.

28.5§ Sistema harakat miqdorining bosh momentini o‘zgarishi haqidagi teorema. (Momentlar teoremasi)

Bitta mexanik sistema uchun (21.1§ ga qarang) isbot qilingan momentlar teoremasi, sistemaning har bir nuqtasi uchun o‘rinli hisoblanadi. Demak, sistemaning m_k massali va tezligi v_k bo‘lgan nuqtasini olib ko‘rsak, ushbu teorema quyidagicha yoziladi

$$\frac{d}{dt}[\overline{m}_O(m_k\overline{v}_k)]=\overline{m}_O(\overline{F}_k^e)+\overline{m}_O(\overline{F}_k^i),$$

bu erdagi $\overline{F}_k^e$ va $\overline{F}_k^i$ -shu nuqtaga ta’sir etuvchi tashqi va ichki kuchlarning teng ta’sir etuvchilari.

Shunday tenglamalarni har bir nuqta uchun yozib chiqib, so‘ngra ularni hadma-had qo‘shsak,

$$\frac{d}{dt}[\sum\overline{m}_O(m_k\overline{v}_k)]=\sum\overline{m}_O(\overline{F}_k^e)+\sum\overline{m}_O(\overline{F}_k^i),$$

Lekin, ichki kuchlarning xossasiga asosan oxirgi yig‘indi nolga teng bo‘ladi. Shu sababli (28.5) tenglamani e’tiborga olsak

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt}=\sum\overline{m}_O(\overline{F}_k^e). \qquad (28.10)$$

Ushbu tenglama, sistema uchun quyidagi momentlar teoremasini ifodalaydi: *ixtiyoriy qo‘zg‘almas nuqtaga nisbatan sistemaning harakat miqdorini bosh momentidan vaqt bo‘yicha olingan hosila, sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning shu nuqtaga nisbatan olingan momentlarining geometrik yig‘indisiga teng ekan.*

(28.10) tenglikning ikkala tomonlarini qo‘zg‘almas Oxyz o‘qlarga proektsiyalasak

$$\frac{dK_x}{dt}=\sum m_x(\overline{F}_k^e),\quad \frac{dK_y}{dt}=\sum m_y(\overline{F}_k^e),\quad \frac{dK_z}{dt}=\sum m_z(\overline{F}_k^e) \qquad (28.11)$$

hosil bo‘ladi.

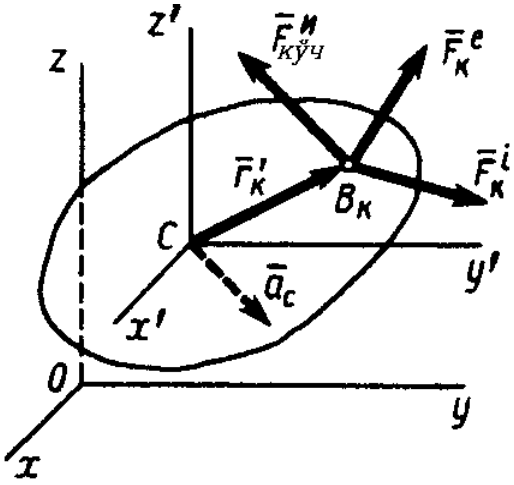
(28.11) tenglama, ixtiyoriy qo‘zg‘almas o‘qqa nisbatan olingan momentlar teoremasini ifodalaydi.

Ushbu teoremadan jismlarning aylanma harakatlarini, giroskoplar nazariyasini va zarba nazariyasini o‘rganishda keng qo‘llaniladi. Lekin, teoremaning mohiyati shu bilan chegaralanib qolmaydi. Kinematika qismida qattiq jismning har qanday murakkab harakati, uning qutb bilan birgalikdagi ilgarilanma harakatidan va shu qutb atrofidagi aylanma harakatdan tashkil topganligini ko‘rib o‘tgan edik.

Agar massa markazini qutb deb tanlab olinsa, u holda jismning ilgarilanma harakatini massa markazining harakati haqidagi teorema

orqali, aylanma harakatini esa momentlar teoremasi orqali aniqlash mumkin. Bundan ko‘rinib turibdiki, erkin jismlarning (uchayotgan samolyot, snaryad, raketa) harakatlarini o‘rganishda, ayniqsa, tekislikka parallel harakatlarni o‘rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Ushbu teoremaning muhim amaliy ahamiyatlaridan yana biri shuki, harakat miqdorining o‘zgarish teoremasidagi kabi, sistemaning aylanma harakatlarida uchraydigan noma’lum ichki kuchlarni tenglamalardan chiqarib tashlashda juda ham qo‘l keladi.



28.3 shakl

Massalar markaziga nisbatan momentlar teoremasi*. Ushbu teoremani, jismning tekislikka parallel harakatlariga yoki erkin qattiq jismning harakatlariga qo‘llash uchun, avvalo, bu teoremani massalar markaziga nisbatan bo‘lgan ifodasini aniqlab olish lozim. Faraz qilaylik, qo‘zg‘almas Oxyz koordinata (28.3 shakl) o‘qlariga nisbatan mexanik sistemaning harakati o‘rganilayotgan bo‘lsin. Sx’y’z’ o‘qlar esa, sistemaning massalar markazi S nuqtaga o‘rnatilgan bo‘lib, u bilan birgalikda ilgarilanma harakatda bo‘lsin va shu sababli Sx’y’z’ o‘qlar sistemaning massalar markazining tezlanishiga teng bo‘lgan -tezlanish bilan harakatlansin.

Dinamikaning barcha tenglamalarini qo‘zg‘almas o‘qlardagi kabi Sx’y’z’ o‘qlarga nisbatan yozish mumkin, lekin sistemaning har bir nuqtasiga ta’sir etuvchi tashqi $\bar{F}^{e}_{k}$ va ichki $\bar{F}^{i}_{k}$ kuchlardan tashqari ko‘chirma inertsiya kuchi $\bar{F}^{и}_{кщч}$ ni qo‘shish shart ekan (ushbu masalada koriolis inertsiya kuchi qo‘shilmaydi, chunki Sx’y’z’ o‘qlar faqat ilgarilanma harakat qiladi). Shu sababli, (28.10) tenglama Sx’y’z’ o‘qlar uchun quyidagicha yoziladi

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \sum \bar{m}_S(\bar{F}^{e}_{k}) + \sum \bar{m}_S(\bar{F}^{и}_{кщч}) \qquad (28.12)$$

bu erda, ichki kuchlarning ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining yig‘indisi nolga teng ekanligi uchun u yozilmadi. $\bar{K}_C$ -ning qiymati, quyidagi formula orqali aniqlanadi

$$\bar{K}_C = \sum \bar{m}_S(m_k \bar{v}'_k) \qquad (28.12')$$

bu erdagi $\bar{v}_k'$ - sistema nuqtalarining qo‘zg‘aluvchi Sx’y’z’ o‘qlarga nisbatan tezligi.

(28.12) formulaning oxirgi yig‘indisining son qiymatini aniqlaymiz. Ta’rifga ko‘ra, $\bar{F}_{кщч}^{и} = -m_k \bar{a}_{k\ ko‘ch}$. Sx’y’z’ o‘qlar ilgarilanma harakat qilganligi uchun, sistemaning ixtiyoriy V_k nuqtasi uchun $\bar{a}_{k\ ko‘ch} = \bar{a}_C$ bo‘ladi. Shu sababli $\bar{F}_{кщч}^{и} = -m_k \bar{a}_C$ va $\bar{m}_S(\bar{F}_{кщч}^{и}) = \bar{r}_k' \times (-m_k \bar{a}_C) = -m_k \bar{r}_k' \times \bar{a}_C$. Umumiy ko‘paytma $\bar{a}_C$ -ni qavsdan chiqarib tashlab va (26.1’) formulaga asosan $\sum m_k \bar{r}_k' = M\bar{r}_C'$ ekanligini e’tiborga olsak

$$\sum \bar{m}_S(\bar{F}_{кщч}^{и}) = -(\sum m_k \bar{r}_k') \times \bar{a}_C = -M\bar{r}_C' \times \bar{a}_C = 0$$

hosil bo‘ladi, chunki S nuqta, Sx’y’z’ o‘qlarning koordinata boshi hisoblanadi va shu sababli =0 bo‘ladi. Natijada (28.12) tenglamaning oxirgi ko‘rinishi

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \sum \bar{m}_S(\bar{F}_k^e) \qquad (28.13)$$

dan iborat bo‘ladi.

Ushbu natijani (28.10) tenglama bilan solishtirish orqali quyidagi xulosaga kelamiz, ya’ni: *sistemaning massalar markazi bilan ilgarilanma harakatda bo‘lgan o‘qlar uchun massalar markaziga nisbatan olingan momentlar teoremasi, qo‘zg‘almas markazga nisbatan olingan ko‘rinishini saqlab qolar ekan.* Sx’y’z’ o‘qlarga nisbatan (28.13) formula orqali aniqlanadigan momentlar (28.11) formula bilan bir xilda bo‘lar ekan.

Yuqorida ko‘rilgan qo‘zg‘aluvchi hisob sistemasidan boshqa har qanday o‘qlarda yoki $\bar{r}_C' \neq 0$ bo‘ladi yoki koriolis inertsiya kuchi nolga teng bo‘lmaydi, natijada momentlar teoremasining ko‘rinishi (28.10) tenglamalardan farq qiladi.

28.6§ Harakat miqdori bosh momentining saqlanish qonuni

Momentlar teoremasidan quyidagi xulosalar kelib chiqadi.

1.Sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning O markazga nisbatan momentlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsin, ya’ni

$$\sum \bar{m}_O(\bar{F}_k^e) = 0.$$

U holda, (28.10) tenglamadan $\bar{K}_O$=const ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, *agar sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning biror markazga nisbatan momentlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistema harakat miqdorining shu nuqtaga nisbatan olingan bosh*

momenti ham son qiymati bo‘yicha, ham yo‘nalishi bo‘yicha o‘zgarmas bo‘lar ekan.

2.Sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning biror o‘qqa bo‘lgan proektsiyalarining yiig‘indisi nolga teng bo‘lsin

$$\sum m_z(\bar{F}_k^e)=0$$

U holda, (28.10) tenglamadan K_z=const ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, *agar sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning biror o‘qqa nisbatan momentlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistema harakat miqdorining shu o‘qqa nisbatan olingan bosh momenti o‘zgarmas bo‘lar ekan.*

Ushbu natijalar, *sistema harakat miqdorining bosh momentini saqlanish qonunini* ifodalab berar ekan. Bundan xulosa qilib shuni ta’kidlash lozimki, sistemaning harakat miqdorining bosh momentini ichki kuchlar o‘zgartira olmas ekan.

A y l a n a yo t g a n s i s t e m a. Qo‘zg‘almas z o‘q (yoki massa markazidan o‘tuvchi o‘q) atrofida aylanayotgan mexanik sistemani olib ko‘raylik. U holda (28.7) formulaga asosan $K_z=J_z\omega$ bo‘ladi. Agar $\sum m_z(\bar{F}_k^e)=0$ bo‘lsa, u holda

$$J_z\omega=\text{const}$$

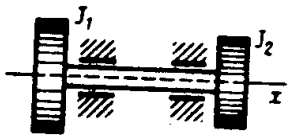
Bundan quyidagi xulosalarga kelamiz:

a) agar sistema o‘zgarmas (absolyut qattiq jism) bo‘lsa J_z=const bo‘ladi va natijada ω= const, ya’ni qo‘zg‘almas o‘qqa o‘rnatilgan qattiq jism, o‘zgarmas burchakli tezlik bilan aylanma harakat qiladi;

b) agar sistema o‘zgaruvchan bo‘lsa, u holda ichki (yoki tashqi) kuchlar ta’sirida, uning ayrim nuqtalari o‘qdan uzoqlashishi natijasida J_z- ning qiymati ortishi mumkin yoki yaqinlashishi natijasida J_z- kamayishi mumkin. Lekin $J_z\omega$=const bo‘lgani sababli, inertsiya momentining ortishi bilan sistemaning burchakli tezligi kamayadi va inertsiya momentining kamayishi bilan sistemaning burchakli tezligi ortadi. Shunday qilib, ichki kuchlarning ta’siri hisobiga sistemaning burchakli tezligini o‘zgartirish mumkin ekan, chunki K_z-ning o‘zgarmas ekanligi ω - ning o‘zgarmas ekanligini bildirmaydi.

28.7§ Masalalar echish.

Momentlar teoremasidan, jismlarning aylanma harakatlarini o‘rganishda foydalaniladi. Harakat miqdori momentining saqlanish qonuni, sistemaning biror qismini ko‘chishini yoki uning tezligini bilgan holda boshqa qismning burchakli tezligini (yoki burilish burchagini) aniqlashga yordam beradi. Hamda qiymatlari oldindan noma’lum bo‘lgan ichki kuchlarni va aylanish o‘qini kesib o‘tuvchi yoki o‘qqa parallel yo‘nalgan tashqi kuchlarni tenglamalardan chiqarib tashlanishiga yordam beradi.



28.4 shakl.

28.1 masala. Ikkita disk umumiy valga kiydirilib mahkamlangan (28.4 shakl). So‘ngra disklar yordamida valni ma’lum burchakka eshib, disklarni o‘z holiga qo‘yib yuborilgan. Valning massasini e’tiborga olmasdan, disklarning burama tebranishlaridagi burilish burchaklari va burchakli tezliklari aniqlansin. Disklarning *x* o‘qiga nisbatan inertsiya momentlari J_1 va J_2 -larga teng.

E ch i sh. Disklarni tebratuvchi noma’lum bo‘lgan elastiklik kuchini tenglamadan chiqarib tashlash uchun ikkala disk va valni bir mexanik sistema deb hisoblaymiz. Bu sistemaga ta’sir etuvchi tashqi (podshipniklarning reaktsiyalari va og‘irlik)kuchlari *x* o‘qini kesib o‘tadi, shu sababli $\sum m_x(\overline{F}_k^e)=0$ va $K_x=$ const bo‘ladi. Lekin, harakat boshlanishida $K_x=0$ bo‘lgan edi, shu sababli harakat davomida ham $K_x=J_1\omega_1+J_2\omega_2=0$ (sistemaning *x* o‘qiga nisbatan olingan kinetik momenti, har bir diskning shu o‘qqa nisbatan olingan kinetik momentlarining yig‘indisiga teng) bo‘lishi shart.

Bundan

$$\omega_1=-J_2\omega_2/J_1 \quad \text{va} \quad \varphi_1=-J_2\varphi_2/J_1 \quad \text{hosil bo‘ladi.}$$

Bu erdagi φ_1 va φ_2-lar disklarning buralish burchaklari, boshlang‘ich holatdan boshlab o‘lchanadilar (oxirgi natijani undan oldingi tenglamani integrallash orqali aniqlanadi).

Shunday qilib, tebranishlar qarama-qarshi tomonga qarab burilish hisobiga amalga oshadi, burchakli amplitudalarning qiymatlari esa disklarning inertsiya momentlariga teskari proportsional ravishda bo‘ladi. Oradagi qo‘zg‘almas bo‘lgan ko‘ndalang kesimning o‘rni inertsiya momenti katta bo‘lgan diskka yaqinroq joylashgan bo‘ladi.

28.2 masala. Ikkita qarama-qarshi tomonga aylanuvchi o‘qdosh vintli (parrakli) vertolyotning bitta vinti (parragi) birdaniga to‘xtab qoldi, ikkinchisi esa vertikal *z* o‘q atrofida ω burchakli tezlik bilan

aylanma harakatini davom ettirmoqda. Aylanayotgan vintning aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya momenti J_1, vertolyotning qolgan qismini to‘xtab qolgan vint bilan birgalikdagi inertsiya momenti J_2 -ga teng. Havoning qarshiligini e’tiborga olmasdan vertolyotning aylanishidagi burchakli tezlik ω_2-ning qiymati aniqlansin.

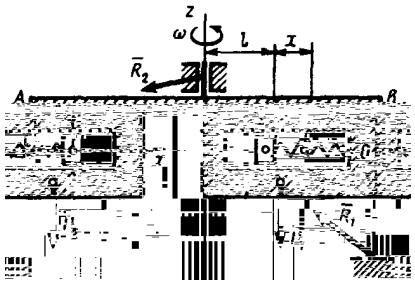
E ch i sh. Agar vertolyot bilan vintlarni birgalikda bitta mexanik sistema deb qabul qilsak, vertolyotning dvigateli bilan vali orasidagi o‘zaro ta’sir kuchlari bizga ma’lum, lekin ular ichki kuchlar hisoblanadi. Bitta vintning to‘xtashi ham ichki kuchlar ta’sirida sodir bo‘ldi, lekin ular sistemaning kinetik momentini o‘zgartira olmaydi. Vint to‘xtaguncha (vintlar qarama-qarshi tomonga aylanganliklari sababli) sistemaning kinetik momenti nolga teng bo‘lgan edi. Demak, vint to‘xtagandan keyin ham uning harakat miqdori momenti $K_z=J_1(\omega_1+\omega_2)+J_2\omega_2=0$ bo‘ladi, bu erda $J_1(\omega_1+\omega_2)$ -aylanayotgan vintning kinetik momenti (vint, vertolyot bilan birgalikda aylanma harakatda bo‘lganligi uchun, uning absolyut burchakli tezligi $\omega_{abs}=\omega_1+\omega_2$), $J_2\omega_2$ - to‘xtab qolgan vint bilan vertolyotning korpusini kinetik momenti; Natijada,

$$\omega_2=-J_1\omega_1/(J_1+J_2) \text{ bo‘ladi.}$$

Manfiy ishora ω_2 va ω_1 burchakli tezliklarning yo‘nalishi qarama-qarshi ekanligini ko‘rsatib turibdi.

Masalalarni echganda K_z - (yoki $\overline{K}_O$)ning ifodasiga sistema nuqtalarining yoki jismlarining *faqat absolyut tezliklarini* qo‘yish lozim.

28.3 masala. Oz o‘qi atrofida aylanishi mumkin (Oz o‘qiga nisbatan inertsiya momenti J_z) bo‘lgan AV regulyatorning simmetrik ravishda gorizontal joylashgan ikkita tirqishiga har birining massalari m -bo‘lgan ikkita yuk prujinalarning uchlariga mahkamlangan (28.5 shakl). Prujinalarning ikkinchi uchlari tirqishning aylanish o‘qiga yaqin bo‘lgan joyiga mahkamlangan.



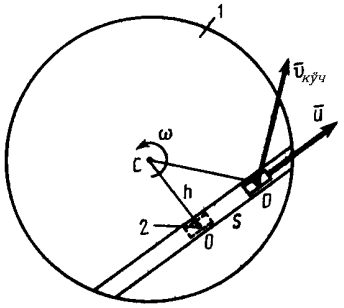
28.5 shakl.

Yuklar Oz -aylanish o‘qidan l masofada joylashgan S nuqtada joylashganda, regulyator berilgan ω_0 burchakli tezlik bilan aylanadi. Qandaydir vaqt o‘tishi bilan burchakli tezlik o‘zgara boshlaydi, natijada yuklar S nuqtalar atrofida so‘nuvchi tebranma harakat qila boshlaydilar. O‘qdagi ishqalanish kuchini e’tiborga olmagan holda, yuklarni mexanik sistema deb hisoblab, yuklarning holatlariga bog‘liq ravishda regulyatorning burchakli tezligi aniqlansin.

E ch i sh. Bizga noma'lum bo'lgan, prujinalarning elastiklik kuchlarini va yuklar bilan yo'naltiruvchi tirqishlar orasidagi ishqalanish kuchlarni tenglamalardan chiqarib tashlash uchun, regulyator bilan yukni bir mexanik sistema deb hisoblaymiz. U holda, og'irlik kuchlari Oz o'qqa parallel yo'nalganliklari uchun va podshipniklarning reaktsiyalari bu o'qni kesib o'tganligi sababli, $\sum m_z(\overline{F}_k^e)=0$ va $K_z= K_z^{per} +2 K_z^{юк}$ =const bo'ladi.

Avvalo, $K_z^{юк}$ aniqlaymiz. Yukning tezligi $\overline{v}=\overline{v}_{nis}+\overline{v}_{ko'ch}$ va $K_z^{юк}=m_z(m\overline{v}_{nis})+ m_z(m\overline{v}_{ko'ch})$. Lekin $\overline{v}_{nis}$ -vektor Ox o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'lib, Oz o'qini kesib o'tadi. Demak $m_z(m\overline{v}_{nis})=0$ bo'ladi. $\overline{v}_{ko'ch}$ -tezlik vektori *xz* tekisligiga perpendikulyar bo'lib, uning moduli $v_{ko'ch}=\omega(l+x)$ -ga teng bo'ladi. U holda, $K_z^{юк}=mv_{ko'ch}(l+x)=m\omega(l+x)^2$. Hamda $K_z^{per}=J_z\omega$ ekanligini e'tiborga olsak

$K_z=[J_z+2m(l+x)^2]\omega$ hosil bo'ladi.



28.6 shakl.

Agar x=0 bo'lsa, $K_{z0}=(J_z+2l^2)\omega_0$ bo'ladi. $K_z=$ const bo'lgani uchun, $K_z=K_{z0}$, natijada

$$\omega=\frac{J_z+2ml^2}{J_z+2m(l+x)^2}\omega_0$$ ga teng bo'ladi.

Agar x>0 bo'lganda $\omega<\omega_0$ bo'ladi, x<0 bo'lsa $\omega>\omega_0$. Tebranish so'nganda *x* nolga va $\omega\rightarrow\omega_0$ -ga intiladi.

28.4 masala. Massasi m_1 va radiusi - R bo'lgan bir jinsli disk -1, uning tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan vertikal o'qqa kiydirib mahkamlangan (28.6 shaklda, yuqoridan ko'rinishi tasvirlangan). Diskka vatar bo'ylab yo'nalgan ariqcha qilingan bo'lib, uning o'rtasidagi O nuqtada massasi m_2, bo'lgan polzun 2 joylashtirilgan (OS=h). Boshlang'ich t=0 vaqtda, diskning ustida joylashgan tolkatel (28.6 shaklda tasvirlanmagan) yordamida polzunga boshlang'ich $\overline{u}$ tezlik beriladi va polzun shu tezlik bilan harakatni davom ettiradi. Polzunning holatiga bog'liq ravishda, diskning oladigan aylanma harakatining qonuniyati aniqlansin.

E ch i sh. Disk bilan polzunni bir mexanik sistema deb qabul qilamiz. Sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning Sz -o'qiga nisbatan olingan momentlari nolga teng (28.5 shaklga q.), demak K_z=const. Hamda t_0=0 vaqtda, sistema qo'zg'almas bo'lganligi uchun va diskning aylanma harakati ichki kuchlar ta'sirida sodir bo'lganligi sababli K_z -

ning qiymati o‘zgarmaydi va $t_0=0$ vaqtda $K_z=0$ edi. Shu sababli ixtiyoriy olingan vaqt uchun $K_z=K_z^{(1)}+K_z^{(2)}=0$ bo‘ladi, chunki K_z=const.

Sistemaning harakatida $=J_z\omega$ va $K_z^{(2)}=m_z(m_2\bar{v}_{nis})+m_z(m_2\bar{v}_{ko‘ch})$ bo‘ladi va bu erdagi $v_{nis}=u$, $v_{ko‘ch}=\omega\cdot CD$ (polzunning D nuqtadagi $\bar{v}_{ko‘ch}\perp CD$). U holda $m_z(m_2\bar{v}_{nis})=m_2uh$, $m_z(m_2\bar{v}_{ko‘ch})=m_2v_{ko‘ch}\cdot SD=m_2\omega\cdot(SD)^2$. Natijada, $(SD)^2=h^2+s^2$, bu erdagi s=OD -polzunning bosib o‘tgan yo‘li. Shularga asosan

$$K_z=J_z\omega+m_2hu+m_2\omega(h^2+s^2). \qquad (a)$$

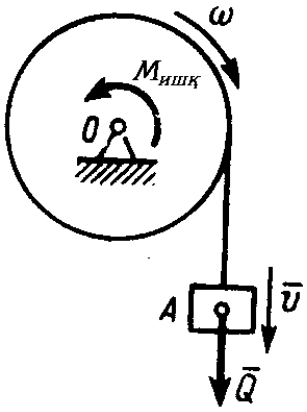
Endi $K_z=0$ deb hisoblab va disk uchun $J_z=0{,}5m_1R^2$, oxirgi natijani olamiz

$$\omega=\frac{m_2hu}{0{,}5m_1R^2+m_2(h^2+s^2)} \qquad (b)$$

Diskning aylanishi 28.6 shaklda ko‘rsatilganga teskari yo‘nalishda bo‘ladi.

E s l a t m a. Ushbu masalada (va shunga o‘xshash masalalarda) t=0 c da polzunning olgan u -tezligi hisobiga, sistemaning $K_{z0}=m_2uh$ deb hisoblash noto‘g‘ri bo‘ladi (aslida $K_{z0}=0$). CHunki polzun ichki kuchlar evaziga tezlik olgan edi. Shu sababli t=0 c da polzunga berilgan u tezlik oqibatida disk ω_0 burchakli tezlik oladi, natijada yana $K_{z0}=0$ saqlanib qolinishi shart. (b) echimdan ko‘rinib turibdiki, t=0 da s=0 bo‘lib, disk ichki kuchlar ta’sirida ω_0 burchakli tezlik oladi, ya’ni $\omega_0=-m_2hu/(0{,}5m_1R^2+m_2h^2)$ ga teng bo‘ladi va yana oxir natija $K_{z0}=0$ bo‘ladi. So‘ngra s - ortgan sari ω -ning moduli kamaya boradi (chunki, sistemaning inertsiya momenti ortib boradi).

Agar $K_{z0}=m_2uh$ deb hisoblansa, u holda $K_z=K_{z0}$, bu erdagi K_z -ni (a) orqali aniqlaymiz, natijada ω=0 bo‘ladi. Bunday natija haqiqatda ham bo‘lishi uchun polzunga berilgan u tezlik faqat tashqi kuchlar hisobiga bajarilgan bo‘lishi va polzunni ariqchaga ishqalanish kuchi nolga teng bo‘lishi kerak.



28.7 shakl

28.5 masala. Og‘irligi R, radiusi r bo‘lgan barabanga (28.7 shakl) ip o‘ralgan bo‘lib, uning uchiga og‘irligi Q bo‘lgan A yuk osilgan. Ipning og‘irligini hisobga olmasdan, yukning vertikal pastga qilgan harakatida barabanning burchakli tezlanishi aniqlansin. Barabanning aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya radiusi ρ va barabanga ta’sir etuvchi ishqalanish kuchining momenti M_{ishq} -ga teng.

E ch i sh. Baraban va yukni bir sistema deb hisoblaymiz, u holda ipning tortilish kuchi ichki kuch hisoblanadi. O nuqtaga nisbatan momentlar teoremasidan foydalanib

$$\frac{dK_O}{dt}=\sum m_O(\overline{F}_k^e)$$ ni aniqlaymiz. (a)

Ushbu sistema uchun, $K_O=K_O^{юк}+K_O^{бар}$. Yuk ilgarilanma harakat qilmoqda va uning tezligi v=ωr. Baraban qo‘zg‘almas O o‘q atrofida aylanmoqda va uning inertsiya momenti $J_O=(R/g)\rho^2$. U holda

$K_O^{юк}=(Q/g)vr$, $K_O^{бар}=(R/g)\rho^2\omega$ va $K_O^{бар}=(Qr^2+R\rho^2)\omega/g$,

Kuchlarning momentlari uchun, $\sum m_O(\overline{F}_k^e)=Qr-M_{ishq}$

Bu qiymatlarni, (a) tenglamaga qo‘ysak

$$\frac{Qr^2+P\rho^2}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}=Qr\cdot M_{ishq}$$

bundan,

$\varepsilon=\frac{(Qr-M_{ишы})g}{Qr^2+P\rho^2}$ ning qiymatini hisoblaymiz.

28.8§ Mexanik sistemaning muvozanat tenglamasi

(26.5) va (28.10) yoki (28.13) tenglamalarni quyidagi ko‘rinishda yozaylik:

$$m\frac{d\overline{v}_C}{dt}=\overline{R}^e \quad va \quad \frac{d\overline{K}_O}{dt}=\overline{M}_O^e \quad yoki \quad \frac{d\overline{K}_C}{dt}=\overline{M}_C^e \qquad (28.14)$$

Statika qismidagi barcha asosiy tenglamalarni 19.2§ da bayon qilingan dinamikaning asosiy qonunlari asosida keltirib chiqarish mumkin ekanligini ko‘rsatib o‘tamiz. Aytaylik (28.14) da:

$\overline{R}^e=0$ va $\overline{M}_O^e=0$ bo‘lsin. (28.14’)

U holda (28.14’) dagi shartlar, *ixtiyoriy mexanik sistema muvozanatining zaruriy shartlari* bo‘lib hisoblanadi. Bu natija xususiy holda statika qismida ifodalangan bo‘lib, qotishlik printsipini o‘z ichiga oladi.

Lekin ko‘rinib turgandek (28.14’) dagi shartlar ixtiyoriy mexanik sistemaning muvozanati uchun etarli emas. Masalan, 1 shaklda tasvirlangan A_1 va A_2 nuqtalar erkin bo‘lsa, ular (28.14’) dagi shartlar saqlangan holda $\overline{F}_{12}$ va $\overline{F}_{21}$ kuchlar ta’sirida bir-birlariga qarab harakatlanishlari mumkin bo‘ladi. Shu sababli, mexanik sistema

muvozanatining zaruriy va etarli shartlari statika qismida batafsil bayon qilinadi.

2. (28.14') dagi shartlar absolyut qattiq jismlarga ta'sir etayotgan kuchlar uchun nafaqat zaruriy va xatto etarli shartlar ekanligini isbot qilamiz. Tinch holatda turgan absolyut qattiq jismga (28.14') dagi shartlarni qanoatlantiruvchi kuchlar sistemasi ta'sir eta boshlasin va u tenglamadagi O nuqta ixtiyoriy, ya'ni xususiy holda S ham shunday nuqta bo'lsin.

U holda, (28.14') dagi tenglamalardan $\bar{v}_S$=const va $\overline{K}_C$=const ekanligini aniqlaymiz, lekin shu kuchlar ta'sir etguncha jism muvozanat holatda bo'lganligi uchun $\bar{v}_S$=0 va $\overline{K}_C$=0 bo'ladi. Agar $\bar{v}_S$=0 bo'lsa, S nuqta qo'zg'almas bo'ladi va jism faqat shu nuqtadan o'tuvchi qandaydir C_l oniy aylanish o'qi atrofida ω-burchakli tezlik bilan aylanma harakat qilaolishi mumkin xolos. Ammo (28.8) formulaga asosan, bu jism uchun K_l=J-ω bo'ladi. O'z navbatida K_l ifoda $\overline{K}_C$-ning Cl o'qdagi proektsiyasidan iborat. Shu sababli $\overline{K}_C$=0 bo'lganligi uchun K_l ham nolga teng bo'ladi. Bunga asosan ω=0 bo'ladi, ya'ni (28.14') dagi shartlar bajarilsa jism muvozanat holatda qolaveradi.

3. Xususiy holda, yuqorida isbot qilingan natijalardan statika aksiomalari o'z-o'zidan kelib chiqadi. 2 shaklda tasvirlangan ikkita kuch (28.14') dagi shartlarni qoniqtiradi va o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasidan iborat bo'lib, ular qatoriga jismga ta'sir etuvchi o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlarni qo'shsak (yoki jismdan shundaylarini olib tashlasak), jismning har qanday harakatini ifodalovchi (28.14') dagi yoki (28.14) dagi tenglamalar o'zgarmay qolaveradi.

Tayanch so'z va iboralar: mexanik sistema harakat miqdori, mexanik sistema harakat miqdorini o'zgarishi, mexanik sistema harakat miqdorini saqlanish qonuni, mexanik sistema harakat miqdori momenti, mexanik sistema harakat miqdori momentini o'zgarishi, mexanik sistema harakat miqdori momentini saqlanish qonuni.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etish uchun uslubiy ko'rsatmalar.

Mexanik sistema dinamikasining muhim xarakteristikalaridan biri, harakatdagi mexanik sistemaning harakat miqdori hissoblanar ekan. Harakat miqdori vektor qiymat bo'lib, mexanik sistemaning massasini,

uning massa markazining tezlik vektoriga bo‘lgan ko‘paytmasiga (28.2 formula) aytilar ekan.

Mexanik sitema harakat miqdori bosh vektoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosila, shu sistemaga ta’sir etayotgan kuchlarning bosh vektoriga teng ekan (28.3 formulaga q)

Mexanik sistema harakat miqdori vektor qiymat bo‘lganligi sababli, masalalrni echganimizda (28.3) formulani koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari (28.3’)dan foydalanish lozim.

Mexanik sistema harakatining yana bir muhim xarakteristikalaridan biri, shu harakatlanayotgan mexanik sistemaga ta’sir etayotgan kuchlarning bosh impulsi hisoblanar ekan. Agar shu harakatlanayotgan mexanik sistemaga ta’sir etayotgan kuchlar vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgaruvchan bo‘lsa, shu kuchlarning ma’lum vaqt oraligidagi impulsi (28.4) formula orqali aniqlanar ekan.

Masalalar echganmizda (28.4) formulani o‘rniga (28.4’) formuladan foydalanish lozim.

Harakatlanayotgan mexanik sistemaga ta’sir etayotgan kuch, sistemaning harakat miqdorini tegishli ravishda o‘zgartirar ekan.

Agarda mexanik sistemaga ta’sir etayotgan kuchlarning vektor yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistemaning harakat miqdori o‘zgarmas ekan. Bunday holatni, mexanik sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni deb atalar ekan.

Agar mexanik sistema birorta o‘q atrofida aylanma harakatda ishtirok etayotgan bo‘lsa, uning bunday harakatini xarakterlovchi qiymatni, harakat miqdorining momenti (28.5) va (28.6) orqali ifodalanadi. Harakat miqdorining momenti vektor qiymat bo‘lib, nuqtaning radius vektorini uning harakat miqdori vektoriga bo‘lgan vektor ko‘paytmasiga aytiladi.

Birorta qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatdag mexanik sistemaning harakat miqdorining momenti (28.7) formula orqali aniqlanar ekan.

Aylanma harakatdagi mexanik sistemaning aylanma harakatini o‘zgarishiga asosiy sabab, shu sistemaga ta’sir etayotgan kuchlarning aylanish o‘qiga nisbatan olingan momentining o‘zgarishi ekan. Ushbu holatni aniqlab beruvchi (28.10) formulani, momentlar teoremasi deb atalar ekan. Ushbu tenglikning koordinata o‘qlardagi proektsiyasi (28.11) formula orqali aniqlanar ekan.

Agarda, birorta o‘q yoki nuqta atrofida aylanayotgan mexanik sistemaga ta’sir etayotgan kuchlarning shu o‘qqa nisbatan

momentlarining vektor yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, uning harakat miqdorining momenti o‘zgarmas ekan. Bunday holatni mexanik sistemaning harakat miqdori momentini saqlanish qonuni deb atalar ekan.

Takrorlash uchun savollar:

Mexanik sistemaning harakat miqdori deb nimaga aytiladi?
Mexanik sistemaning harakat miqdori bilan shu nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlarning impulslari orasidagi matematik bog‘lanishni yozib bering?
Mexanik sistemaning harakat miqdorini saqlash uchun qanday shart bajarilishi lozim?
Mexanik sistemaning harakat miqdori momenti deb nimaga aytiladi?
Aylanma harakatdagi mexanik sistema harakat miqdori momentini o‘zgartirish uchun qanday shartlar bajarilishi lozim?
Aylanma harakatdagi mexanik sistema harakat miqdori momentini o‘zgarmas holda saqlash uchun, nimalar bajarilishi lozim?
Qattiq jismning massa markazidan o‘tuvchi o‘q atrofidagi aylanma harakatini differentsial tenglamasini qaysi formula orqali aniqlanadi?
Agar qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatida, uning aylanish o‘qi massa markazidan o‘tmasa, bunday harakatning differentsial tenglamasini qaysi formula orqali yozamiz?
ylanma harakatdagi mexanik sistemaning aylanish o‘qi bosh inertsiya o‘qi bo‘lmasa, qanday hodisa ro‘y beradi?
Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning inertsiya momenti o‘zgaruvchan bo‘lsa, uning burchakli tezligi ham o‘zgaradimi?
Mexanik sistemaning muvozanatlik sharti tenglamasini yozib bering?.

Mavzuni mustahkam o‘zlashtirib olish uchun, 28 ilovadagi masalalrni mustaqil ravishda echishni taviya qilamiz.

29 – Ma’ruza

Mavzu: Mexanik sistemaning kinetik energiyasi. Ba’zibir kuchlarning bajargan shlarini hisoblash. Mexanik sistema kinetik energiyasining o‘zgarish teoremasi. Masalalar echish.

REJA:

Mexanik sistemaning kinetik energiyasi.
Ba’zi bir kuchlarning bajargan ishlarini hisoblash.
Mexanik sistema kinetik energiyasining o‘zgarish teoremasi.
Masalalar echish.

Muammo: Mexanik sistema dinamikasi masalalrini echishda eng asosiy qiymatlardan biri sistemaning kinetik energiyasi hisoblanadi. Birinchidan mexanik sistemaning nuqtalari turli xil murakkab xarakatlarda ishtirok etganda, shu sistemaining to‘liq kinetik energiyasini qanday usulda aniqlash masalalari ko‘rib o‘tiladi. Ikkinchidan shu mexanik sistemaning nuqtalariga ta’sir etayotgan kuchlarning bajargan ishlarini qandaq aniqlash va sistemaning to‘liq kinetik energiyasini o‘zgarishiga nimalar sabab bo‘lishi mumkinligi haqidagi masalalar batafsil ko‘rib o‘tiladi.

29.1§ Mexanik sistemaning kinetik energiyasi

Mexanik s*istemaning kinetik energiyasi deb, sistema nuqtalarining kinetik energiyalarining algebraik yig‘indilaridan iborat bo‘lgan skalyar qiymatga aytiladi* va uni T harfi bilan belgilanadi, ya’ni

$$T=\sum m_k v_k^2/2 \qquad (29.1)$$

Kinetik energiya sistemaning ham ilgarilanma, ham aylanma harakatlarining xarakteristikasini aniqlab beradi. T ifodaning, bundan oldin ko‘rib o‘tilgan $\overline{Q}$ va $\overline{K}_O$ xarakteristikalaridan asosiy farqi shundan iboratki, kinetik energiya skalyar qiymat bo‘lib, har doim faqat musbat ishorali bo‘ladi. Shu sababli, uning qiymati sistema qismlarining harakatlari yo‘nalishlariga bog‘liq bo‘lmaydi va ularning harakat yo‘nalishlarini xarakterlamaydi.

Yana bir muhim holatni ta’kidlab o‘tamiz. Ichki kuchlar sistemaning qismlariga o‘zaro qarama-qarshi bo‘lgan yo‘nalishlarda ta’sir etadilar. Shu sababli, yuqorida ko‘rib o‘tganimizdek, ular (ichki kuchlar) $\overline{Q}$ va $\overline{K}_O$ -larning vektor xarakteristikalarini o‘zgartirmaydilar. Lekin ichki kuchlar ta’sirida sistema nuqtalari tezliklarining modullari o‘zgartirilsa, T - ning qiymati ham o‘zgaradi. Demak, kinetik energiyaning $\overline{Q}$ va $\overline{K}_O$ - lardan yana bir farqi shunda ekanki, faqat tashqi emas, balki ichki kuchlarning ta’sirlari orqali ham sistemaning kinetik energiyasi o‘zgarishi mumkin ekan.

Agar sistema bir nechta jismlardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda uning kinetik energiyasi har bir jismlarning kinetik energiyalarining algebraik yig‘indilaridan iborat bo‘lar ekan.

Qattiq jismning turli harakatlaridagi kinetik energiyasini hisoblash uchun zarur bo‘lgan formulalarni keltirib chiqaramiz.

1. I l g a r i l a m a h a r a k a t. Bunday harakatda jismning barcha nuqtalari massa markazining tezligiga teng bo‘lgan bir xil tezliklar bilan harakatlanadilar. Demak, ixtiyoriy nuqtaning tezligi $v_k=v_C$ bo‘ladi va (29.1) formuladan quyidagi ifoda kelib chiqadi

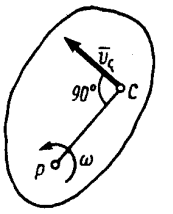
$$T_{ilg}=\sum m_k v_k^2/2=(\sum m_k) v_C^2/2$$

yoki

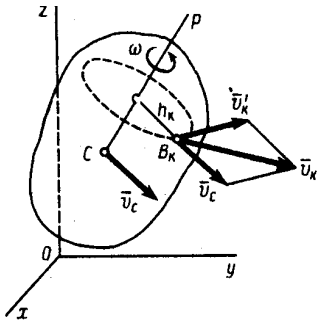
$$T_{ilg}=M v_C^2/2 \qquad (29.2)$$

Shunday qilib *jismning ilgarilanma harakatidagi kinetik energiyasi, uning umumiy massasini massa markazi tezligining kvadaratiga bo‘lgan ko‘paytmasining yarmiga teng ekan.*

2. A y l a n m a h a r a k a t. Agar jism birorta Oz o‘qi atrofida (28.2 shakl) aylanma harakat qilayotgan bo‘lsa, uning ixtiyoriy nuqtasining tezligi $v_k=\omega h_k$ bo‘ladi. Bu erdagi -h_k nuqtadan aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofa, ω - jismning burchakli tezligi. Ushbu qiymatni (29.1) formulaga qo‘yib umumiy ko‘paytmalarni qavsdan tashqariga chiqarib yuborsak,



29.1 shakl



29.2 shakl

$$T_{ayl}=\sum m_k\omega^2 h_k^2/2=(\sum m_k h_k^2)\omega^2/2.$$

Qavs ichidagi qiymat jismning z -o‘qiga nisbatan inertsiya momentini ifodalaydi. Shunday qilib, oxirgi natijani olamiz

$$T_{ayl}=J_z\omega^2/2. \qquad (29.3)$$

ya’ni, *jismning aylanma harakatidagi kinetik energiyasi uning aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya momentini uning burchakli tezlik kvadratiga bo‘lgan ko‘paytmasining yarmiga teng ekan.*

3. Tekislikka parallel harakat[27]. Jismning bunday harakatida, ixtiyoriy olingan vaqtda, uning barcha nuqtalarining tezliklari shunday tarqalganki, go‘yoki jism harakat tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan va oniy tezliklar markazi R nuqtadan o‘tuvchi

[27] Ushbu holat, keyingi punktda ko’rib o’tiladigan qattiq jismning umumiy harakatining xususiy holi sifatida keltirib chiqarilishi mumkin.

o‘q atrofida aylanayotgandek (29.1 shakl) hisoblanadi. Demak (29.3) formuladan

$$T_{tp}=J_R\omega^2/2 \qquad (29.3')$$

bu erdagi J_R - oniy tezliklar markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti; ω-jismning burchakli tezligi.

(29.3’) dagi J_r -ifodaning qiymati o‘zgaruvchan bo‘ladi, chunki oniy tezliklar markazi R-ning o‘rni o‘zgaruvchan bo‘ladi. Shu sababli J_R -ning o‘rniga, jismning massalar markazi S nuqtadan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti J_C - ifodani kiritamiz. Jismning massa markazi o‘zgarmas bo‘lgani uchun J_C - ifodaning qiymati ham o‘zgarmas bo‘ladi. Gyuygens teoremasiga asosan $J_R=J_C+Md^2$ bu erdagi d=RS. J_R -ning ushbu qiymatini (29.3’) ga qo‘yamiz. R nuqta oniy tezliklar markazi bo‘lganligi sababli, ω-d=ω·RS=v_C bo‘ladi, bu erdagi v_C - massa markazi bo‘lgan S nuqtaning tezligi. Shularga asoslanib, jismning tekislikka parallel harakatidagi kinetik energiyasini aniqlash formulasini keltirib chiqaramiz

$$T_{tp}=M/2+J_S\omega^2/2 \qquad (29.4)$$

Demak, *jismning tekislikka parallel harakatidagi kinetik energiyasi, uning massa markazi tezligi bilan ilgarilanma harakatdagi kinetik energiyasi va uning massa markazidan o‘tuvchi o‘q atrofidagi aylanishidan oladigan kinetik energiyasining algebraik yig‘indisiga teng ekan*.

4. U m u m i y h o l d a g i h a r a k a t[28]. Agar jismning massa markazi S nuqtani qutb (29.2 shakl) deb tanlab olinsa, u holda jismning har qanday harakati umuman olganda, qutbning tezligi v_C bilan bo‘lgan ilgarilanma harakatdan va shu qutbdan o‘tuvchi SR oniy o‘q atrofidagi aylanma harakatlarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Hamda kinematikada ko‘rsatib o‘tilgandek, ixtiyoriy V_k nuqtaning tezligi $\bar{v}_k$, qutbning tezligi v_C bilan, shu nuqtaning qutb (SR o‘qi) atrofidagi aylanishidan oladigan $\bar{v}_k'$-tezlikning vektor yig‘indisidan iborat bo‘lar ekan, ya’ni $\bar{v}_k=\bar{v}_S+\bar{v}_k'$ bo‘ladi. Moduli bo‘yicha $v_k'=\omega h_k$, bu erdagi h_k - V_k nuqtadan SR aylanish o‘qi orasidagi masofa, ω -jismning burchakli tezligi bo‘lib, uning qiymati qutbga bog‘liq bo‘lmaydi. U holda*

$$\bar{v}_k^2=v_k^2=(\bar{v}_S+\bar{v}_k')^2=v_C^2+\bar{v}_k'^2+2\,\bar{v}_S\cdot\bar{v}_k'.$$

[28] Ikkita vektorning skalyar ko’paytmasining ta’rifiga binoan =·=vvsos0°=v^2, ya’ni vektorning skalyar kvadrati uning modulining kvadratiga teng bo’ladi. bu erda shu natijadan foydalanilgan; keyingi mavzularda ham bu qoidani eslatib o’tmasdan foydalanamiz.

v_k^2 -ning, ushbu qiymatini (29.1) ga qo‘ysakva $v_k^{'}=\omega h_k$ ekanligini e’tiborga olsak

$$T=(\sum m_k)\, v_C^2/2+(\sum m_k\, h_k^2)\omega^2/2+\bar{v}_S\sum m_k\bar{v}_k^{'}.$$

Umumiy ko‘paytmalar qavsdan tashqariga chiqarib yuborilgan.

Olingan tenglikdagi birinchi qavs ichidagi ifoda, jismning umumiy massasini beradi, ikkinchi qavsdagi esa jismning SR oniy aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya momenti J_{CR} dan iborat. $\sum m_k\bar{v}_k^{'}$-qiymat esa, jismning SR o‘q atrofida aylanma harakatidagi harakat miqdori hisoblanadi va shu sababli u nolga teng bo‘ladi, ya’ni $\sum m_k\bar{v}_k^{'}=0$.

Natijada,

$$T=M\, v_C^2/2+J_{SR}\omega^2/2 \text{ bo‘ladi.} \qquad (29.5)$$

Shunday qilib, *qattiq jismning umumiy harakatidagi* (xususiy holda tekislikka parallel harakatdagi) *kinetik energiyasi, massa markazining tezligiga teng tezlik bilan ilgarilanma harakatidagi kinetik energiya va massa markazidan o‘tuvchi o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘ladigan kinetik energiyaning algebraik yig‘indisidan iborat ekan.*

Agar qutb sifatida massa markazi S -dan boshqa, masalan, birorta A nuqtani tanlab olsak, u holda AR oniy aylanish o‘qi massa markazidan o‘tmasligi mumkin, shu sababli bunday o‘q uchun $\sum m_k\bar{v}_k^{'}\neq 0$ bo‘lib (29.5) formula kelib chiqmaydi.

M i s o l l a r n i k o‘ r i b ch i q a m i z.

29.1 masala. Massasi M ga teng bo‘lgan tsilindrsimon yaxlit g‘ildirakning sirpanmay dumalayotgan harkatidagi kinetik energiyasi aniqlansin. Massa markazi S nuqtaning tezligi v_C -ga teng.

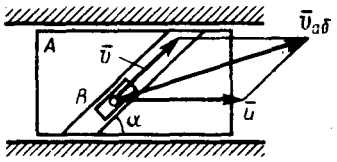
E ch i sh. G‘ildirak tekislikka parallel harakat qilmoqda. Uning kinetik energiyasi (29.4) yoki (29.5) formula orqali aniqlanadi:

$$T=M\, v_C^2/2+J_S\omega^2/2$$

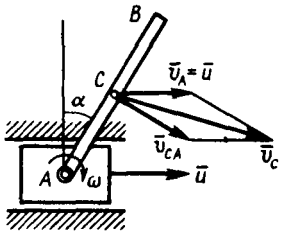
G‘ildirakni bir jinsli yaxlit tsilindr deb hisoblaymiz; u holda $J_C=MR^2/2$, bu erdagi R -tsilindrning radiusi. Ikkinchi tomondan, V nuqta g‘ildirak uchun oniy tezliklar markazi bo‘lgani uchun $v_C=\omega\cdot VS=\omega R$, bundan $\omega= v_C/R$ bo‘ladi. Ushbu qiymatlarni qo‘ysak,

$$T=M/2+MR^2/4R^2=(3/4)M$$

29.2 masala. $\bar{u}$-tezlik bilan ilgarilanma harakat qilayotgan A detalda yo‘naltiruvchi ariqcha ochilgan bo‘lib, shu ariqchaning ichi bo‘ylab massasi m bo‘lgan V jism $\bar{v}$ tezlik bilan harakatlanmoqda. Agar α ma’lum bo‘lsa (29.3 shakl) V jismning kinetik energiyasi aniqlansin.



29.3 shakl



29.4 shakl

E ch i sh. V jismning absolyut harakati ilgarilanma bo‘lib, uning tezligi $\bar{v}_{abs}=\bar{v}+\bar{u}$ bo‘ladi. U holda

$$T=m\,v_{абс}^2/2=m(v^2+u^2+2vu\cos\alpha)/2 \text{ bo‘ladi.}$$

Shunga e’tibor qilish lozimki, *agar jism murakkab harakat qilsa, uning to‘liq kinetik energiyasi nisbiy va ko‘chirma harakatlaridagi kinetik energiyalarining yig‘indisiga teng bo‘lmas ekan.* Masalan, ushbu masalada

$$T_{nis}+T_{ko‘ch}=mv^2/2+mu^2/2\neq T$$

29.3 masala. Mexanizmning bir qismi $\bar{u}$ tezlik bilan ilgarilanma harakat qiluvchi detaldan (29.4 shakl) va undagi A o‘qqa sharnir orqali o‘rnatilgan AV sterjendan iborat bo‘lib, sterjenning uzunligi AV=l, massasi M. Sterjen A o‘q atrofida (shaklda ko‘rsatilgan yo‘nalishda) ω -burchakli tezlik bilan aylanma harakat qilmoqda. Berilgan α burchakka bog‘liq ravishda sterjenning kinetik energiyasi aniqlansin.

E ch i sh. Sterjen murakkab (tekislikka parallel) harakat qilmoqda. (29.4) yoki (29.5) formulaga asosan $T=M/2+J_S\omega^2/2$.

S nuqtaning tezligi $\bar{v}_A=\bar{u}$ tezlik va $\bar{v}_{SA}$ (yoki $\bar{v}_{nis}$) tezliklarning vektor yig‘indisidan iborat bo‘ladiva $v_{CA}=\omega l/2$. Demak (29.4 shakl) $=u^2+v_{CA}^2+2uv_{CA}\cos\alpha$. Sterjenning massasi markazi atrofida aylanishdagi burchakli tezlik ham A nuqta atrofidagi aylanishdagiga teng bo‘ladi, chunki ω -ning qiymati qutbga bog‘liq emas. $J_C=Ml^2/12$ ga teng ekanligini e’tiborga olib, bu qiymatlarni yuqoridagi formulaga qo‘ysak, quyidagi ifoda hosil bo‘ladi:

$$T=M(u^2+\omega^2l^2/4+u\omega l\cos\alpha)/2+Ml^2\omega^2/24=$$
$$=Mu^2/2+Ml^2\omega^2/6+(Ml\omega u\cos\alpha)/2.$$

E’tibor bergan bo‘lsangiz, ushbu masalada

$$T=T_{ilg}+T_{ayl}=Mu^2/2+J_A\omega^2/2=Mu^2/2+Ml^2\omega^2/6$$

bo‘ladi, deb hisoblash mumkin emas ekan. Bu javob noto‘g‘ri, chunki yuqoridagi teoremaga asosan isbot qilingan $T=T_{ilg}+T_{ayl}$ formula faqat

massa markazidan o‘tuvchi o‘q uchungina o‘rinli xolos, ushbu masalada esa A o‘q, massa markazidan o‘tmaydi.

29.2§ Ishni hisoblashning ayrim hollari

Kuchlarning bajargan ishlari 21.5§ va 22.1§ larda keltirib chiqarilgan formulalar orqali hisoblanadi. Quyidagi ayrim qo‘shimcha hollarni ko‘rib o‘tamiz.

1. Sistemaga ta’sir etuvchi og‘irlik kuchlarining bajargan ishlarini hisoblash. Og‘irligi r_k bo‘lgan zarrachaning og‘irlik kuchini bajargan ishi $r_k(z_{k0}-z_{k1})$ bo‘ladi, bu erdagi z_{k0} va z_{k1} -lar zarrachaning boshlang‘ich va oxirgi holatining koordinatalari (22.1§ ga q.). U holda, $\sum r_k z_k = Rz_C$ -ni e’tiborga olib, sistemaga ta’sir etuvchi barcha og‘irlik kuchlarining bajargan ishlarini aniqlaymiz:

$$A=\sum r_k z_{k0}-\sum r_k z_{k1}=R(z_{C0}-z_{C1}).$$

Ushbu natijani boshqacha tarzda ham ifodalash mumkin, ya’ni

$$A=\pm Rh_C$$

bu erdagi R -sistemaning umumiy og‘irligi, h_C -massa markazi (yoki og‘irlik markazi)ni vertikal ko‘chishi. Demak, sistemaga ta’sir etuvchi og‘irlik kuchlarining bajargan ishlari shu kuchlarning bosh vektori (qattiq jism uchun, teng ta’sir etuvchi kuch vektori) $\overline{P}$-ning massa markazi (yoki og‘irlik markazi)ni ko‘chishida bajargan ishiga teng bo‘lar ekan.

2. Aylanayotgan jismga qo‘yilgan kuchlarning bajargan ishlarini hisoblash. Aylanayotgan jismga qo‘yilgan $\overline{F}$-kuchining (29.5 shakl) elementar (21.5§ ga q.) ishi

$$dA=F_\tau ds= F_\tau h d\varphi,$$

chunki $ds=hd\varphi$, bu erdagi $d\varphi$ -jismning elementar burilish burchagi.

Lekin, ko‘rinib turgandek[29], $F_\tau h=m_z(F)$. $M_z=m_z(F)$ qiymatni *burovchi moment* deb ataladi. U holda

$$dA=M_z d\varphi \quad \text{ni aniqlaymiz.} \qquad (29.6)$$

Demak, ushbu masalada *elementar ish, kuchning bosh momentini elementar burilish burchagiga bo‘lgan ko‘paytmasiga teng ekan*. (29.6) formula jismga birvarakayiga bir nechta kuchlar ta’sir etganda ham o‘rinli bo‘ladi, chunki $M_z=\sum m_z(\overline{F}_k)$.bo‘ladi.

[29] Agar $\overline{F}$-kuchni V_τ, VS va Bz’ (307 shaklga q.) yo’nalishlari bo’yicha tashkil etuvchilarga ajratib yuborsak, u holda $m_z(\overline{F})=m_z(\overline{F}_\tau)$ bo’ladi, chunki qolgan ikkita tashkil etuvchilarning momentlari nolga teng bo’ladi.

Agar jism ma’lum φ_1 burchakka burilsa, bajarilgan ish

$$A=\int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi \qquad (29.7)$$

agar burovchi moment o‘zgarmas bo‘lsa,

$$A=M_z\cdot\varphi_1 \text{ bo‘ladi.} \qquad (29.7’)$$

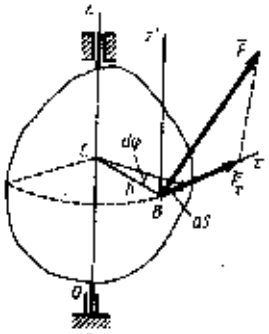
Agar jismga Oz o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikda joylashgan juft kuch ta’sir etsa, u holda (29.6)-(29.7’) formulalardagi M_z, shu juftning momenti ekanligini bildiradi.

Bunday hollarda quvvatni qanday aniqlanishligini ko‘rsatib o‘tamiz (21.5§ ga q.). (29.6) tenglikdan foydalanib, quvvatni aniqlash formulasini yozamiz:

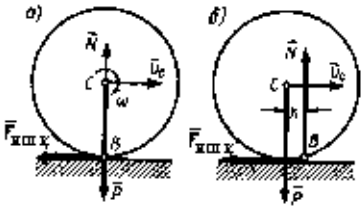
$$N=dA/dt=M_z\cdot d\varphi/dt=M_z\omega.$$

Demak, aylanayotgan jismga ta’sir etuvchi kuchning quvvati burovchi momentning burchakli tezlikka bo‘lgan ko‘paytmasiga teng ekan. Quvvat o‘zgarmagan holda, burchakli tezlik qancha kamaytirilsa burovchi moment tegishlicha ortadi.

3. Dumalab ketayotgan jismga ta’sir etuvchi ishqalanish kuchining bajargan ishini hisoblash. Biror tekislik (sirt) ustida sirpanmasdan dumalab ketayotgan (29.6 shakl) R radiusli g‘ildirakka, uning V nuqtasida g‘ildirakning tekislik ustida sirpanishiga qarshilik ko‘rsatuvchi $\overline{F}^{ишы}$ kuchi ta’sir etmoqda.



29.5 shakl



29.6 shakl

Bu kuchning bajargan elementar ishi $dA=F_\tau^{ишы}\cdot ds_B$ bo‘ladi. Lekin, ushbu holda V nuqta oniy tezliklar markazi bilan bir nuqtada joylashgan, shu sababli $v_B=0$. Va $ds_B=v_B\cdot dt$ bo‘lgani uchun har bir elementar ko‘chishdagi bajarilgan elementar ish nolga teng bo‘ladi, ya’ni $dA=0$.

Demak, *sirpanmay dumalayotgan jismning ixtiyoriy ko‘chishida, sirpanishga qarshilik ko‘rsatayotgan ishqalanish kuchining bajargan ishi nolga teng ekan.* Shu sababli, agar jism uning V nuqtasiga qo‘yilgan normal $\overline{N}$ reaktsiya kuchi ta’sirida deformatsiyalanmasa, u holda bu $\overline{N}$ kuchning bajargan ishi ham nolga teng bo‘ladi.

Dumalashdagi qarshilik kuchining momenti M·k·N ga teng bo‘lgan va g‘ildirak bilan tekislik orasidagi deformatsiyalanish natijasida paydo

bo‘ladigan $\overline{N}$, $\overline{P}$ kuchlardan iborat juftni hosil qiladi, bu erdagi k - dumalashdagi ishqalanish koeffitsienti. U holda, g‘ildirakning dumalashidagi burilish burchagi $d\varphi=ds_c/R$ formula orqali ifodalanishligini e’tiborga olib, (29.6) formulaga asosan

$$dA^{dum}=-kNd\varphi=-\frac{k}{R}Nds_c, \qquad (29.8)$$

bu erdagi ds_c - g‘ildirakning S markazini elementar ko‘chishi.

Agar N=const bo‘lsa, dumalashdagi qarshilik kuchlarining bajargan ishlari

$$A^{dum}=-kN\varphi_1=-\frac{k}{R}Ns_c \text{ bo‘ladi.} \qquad (29.8’)$$

Lekin h/R qiymat kichkina bo‘lganligi sababli, boshqa qarshiliklar mavjud bo‘lgan hollarda dumalashdagi qarshilikni e’tiborga olmasa ham bo‘ladi.

29.3§ Sistema kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema

Ilgari isbot qilingan moddiy nuqta kinetik energiyasining o‘zgarish teorema, sistemaning ixtiyoriy nuqtalari uchun o‘rinli hisoblanadi. Shu sababli, agar sistemaning massasi m_k , tezligi v_k -bo‘lgan ixtiyoriy nuqtasi uchun

$$d(m_k v_k^2/2)= dA_k^e + dA_k^i \quad \text{bo‘ladi.}$$

Bu erdagi dA_k^e va dA_k^i-lar sistema nuqtalariga ta’sir etayotgan, tashqi va ichki kuchlarning elementar bajargan ishlari. Bunday tenglamalarni sistemaning har bir nuqtasi uchun tuzamiz va ularni hadma-had qo‘shib chiqamiz, natijada

$$d(\sum m_k v_k^2/2)=\sum dA_k^e+\sum dA_k^i$$

yoki

$$dT=\sum dA_k^e+\sum dA_k^i \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (29.9)$$

9. tenglama, sistema kinetik energiyasining o‘zgarishi teoremasining differentsial ko‘rinishini ifodalaydi. Ushbu tenglikning ikkala tomonini, sistemaning qandaydir tanlangan tegishli boshlang‘ich holatidagi kinetik energiyasi T_0 -dan, uning ixtiyoriy tugal ko‘chishidan keyingi kinetik energiyasi T_1

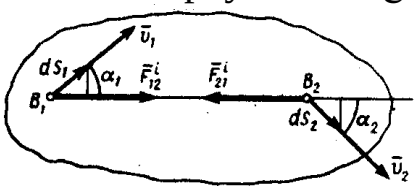
$$T_1-T_0=\sum A_k^e+\sum A_k^i \quad \text{bo‘ladi.} \qquad (29.10)$$

Ushbu tenglama sistema kinetik energiyasi o‘zgarishi teoremasining boshqa (integral) ko‘rinishi bo‘lib: *sistemaning ma’lum*

bir tugal ko‘chishidagi kinetik energiyasining o‘zgarishi, sistemaga qo‘yilgan barcha tashqi va ichki kuchlarning shu ko‘chishda bajargan ishlarining yig‘indisiga teng.

Oldingi teoremalardan farqli ravishda (29.9) va (29.10) tenglamalarda ko‘rsatilgandek, ichki kuchlar tenglamadan chiqarib tashlanmaydi. Haqiqatdan ham, agar $\bar{F}_{12}^{i}$ va $\bar{F}_{21}^{i}$ sistemaning V_1 va V_2 nuqtalarining o‘zaro ta’sir kuchlaridan iborat bo‘lsalar (29.7 shakl), u holda $\bar{F}_{12}^{i}+\bar{F}_{21}^{i}=0$ bo‘ladi. Lekin bu ob’ekt qattiq jism bo‘lmaganligi uchun, unga qo‘yilgan kuchlar ta’sirida V_1 nuqta V_2 tomonga qarab harakatlanadi, ya’ni V_2 nuqta V_1 tomonga qarab harakatlanadi. Sistema nuqtalarining bunday ko‘chishlarida har bir kuchning bajargan ishi musbat bo‘ladi, shu sababli ularning yig‘indilari nolga teng bo‘lmaydi.

Masalan to‘pdan o‘q otilganda, otilgan to‘p (snaryad) bilan zambarak bitta mexanik sistemadan iborat bo‘lganligi uchun, poroxning yonishidan paydo bo‘lgan gazlarning bosim kuchlari ichki kuchlar hisoblansada ma’lum ish bajaradilar va sistemaning qismlariga tegishlicha tezlik beradilar.



29.7 shakl.

Ikkita muhim xususiy holni ko‘rib o‘tamiz.

1. Shakli o‘zgarmaydigan mexanik sistema. Agar sistemaning har qanday harakatida, uning ixtiyoriy olingan ikkita nuqtalari orasidagi masofalar o‘zgarmaydigan bo‘lsa, bunday sistema *o‘zgarmaydigan* mexanik sistema deb ataladi.

O‘zgarmaydigan (V_1V_2=const) sistemaning bir-birlariga va $\bar{F}_{21}^{i}=-\bar{F}_{12}^{i}$ kuchlar bilan o‘zaro ta’sir ko‘rsatayotgan ikkita V_1 va V_2 nuqtalarini (29.7 shaklga q.) olib ko‘raylik. U holda, V_1V_2 kesmaning harakatida $v_1\cos\alpha_1=v_2\cos\alpha_2$ bo‘ladi, shu sababli $ds_1\cos\alpha_1=ds_2\cos\alpha_2$ bo‘ladi. CHunki $ds_1=v_1dt$ va $ds_2=v_2dt$ (v_1, v_2 va ds_1, ds_2 -lar V_1 va V_2 nuqtalarning tegishlicha tezlik va ko‘chishlaridan iborat). Undan tashqari $F_{12}^{i}=F_{21}^{i}$. Natijada, bu kuchlarning elementar ishlarining yig‘indisi uchun quyidagi ifodani yozamiz:

$$dA_1+dA_2=F_{12}^{i}ds_1\cos\alpha_1-F_{21}^{i}ds_2\cos\alpha_2=0$$

Shunday natijalarni o‘zaro ta’sir ko‘rsatayotgan ixtiyoriy olingan ikkita moddiy nuqta uchun ham yozishimiz mumkin. Natijada quyidagi xulosaga kelamiz, ya’ni *o‘zgarmaydigan sistemaning barcha ichki kuchlarining bajargan ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘ladi*. Shunga asosan (29.9) yoki (29.10) tenglamalar quyidagi ko‘rinishga keladilar,

$$dT=\sum dA_k^e \quad \text{va } T_1-T_0=\sum A_k^e \qquad (29.11)$$

2. Ideal bog‘lanishli mexanik sistema. Sistemaga vaqt mobaynida o‘zgarmaydigan bog‘lanishlar qo‘yilgan bo‘lsin. Sistemaning nuqtalariga ta’sir etuvchi barcha tashqi va ichki kuchlarni aktiv va reaktsiya kuchlariga ajratib yuboraylik. U holda, (29.9) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$dT=\sum dA_k^a+\sum d A_k^r,$$

bu erdagi dA_k^a-sistemaning k -nuqtasiga ta’sir etuvchi tashqi va ichki aktiv kuchlarning bajargan elementar ishlariva $d A_k^r$- sistemaning shu nuqtasiga ta’sir etuvchi tashqi va ichki reaktsiya kuchlarning elementar bajargan ishlari.

Ko‘rib turganimizdek, sistemaning kinetik energiyasini o‘zgarishi aktiv kuchlarning va bog‘lanishlar reaktsiya kuchlarining bajargan ishlariga bog‘liq ekan. Lekin «ideal» mexanik sistema deb ataladigan shunday sistemalar bor ekanki, ularga qo‘yilgan bog‘lanishlar sistemaning kinetik energiyasini o‘zgarishiga aslo ta’sir ko‘rsatmas ekan. Bunday bog‘lanishlar uchun, quyidagi shart bajarilishi lozim:

$$\sum d A_k^r=0 \qquad (29.12)$$

Agar vaqt mobaynida o‘zgarmaydigan bog‘lanishlar reaktsiyalarining sistemani elementar ko‘chishida bajargan ishlari nolga teng bo‘lsa, bunday bog‘lanishlar *ideal*[30] deb ataladilar. Bizga ma’lum bo‘lgan qator ideal bog‘lanishlar bilan tanishib chiqamiz.

Agar jismga qo‘yilgan bog‘lanish ideal silliq bo‘lib, ishqalanish kuchi nolga teng bo‘lgan qo‘zg‘almas yuzadan iborat bo‘lsa, jismning shu yuza (egri chiziq) bo‘ylab qilgan harakatida, bog‘lanishning reaktsiya kuchi N -ning bajargan ishi nolga teng bo‘lar ekan. So‘ngra, 29.2§ da ko‘rsatib o‘tildiki, agar jism g‘adir-budur tekislik ustida sirpanmay dumalab harakatlansa va ularning o‘zaro uchrashgan (kontakt) nuqtalarida deformatsiya sodir bo‘lmasa, u holda yuzaning normal reaktsiyasi $\overline{N}$ -ning va ishqalanish kuchi $\overline{F}^{ишы}$(ya’ni, reaktsiyaning urinma tashkil etuvchisi)ning bajargan ishlari nolga teng bo‘lar ekan.

Hamda, agar ishqalanishlar e’tiborga olinmasa, sharnirning reaktsiyasi -ning bajargan ishi ham nolga teng bo‘ladi, chunki sistemaning har qanday harakatida kuchining qo‘yilgan nuqtasi o‘zgarmasdan qoladi. Va nihoyat, agarda 29.7 shakldagi V_1 va V_2

[30] Ideal bog’lanishlar haqidagi umumiy tushuncha keyingi mavzularda ta’riflangan.

moddiy nuqtalarni bir-birlari bilan qattiq (cho‘zilmaydigan, siqilmaydigan) V_1V_2 sterjen orqali mustahkam qilib o‘rnatib qo‘yilgan deb faraz qilsak, u holda $\overline{F}_{12}^{i}$ va $\overline{F}_{21}^{i}$ kuchlari sterjenlarning reaktsiyalaridan iborat bo‘ladi, shu sababli sistemaning harakatida ushbu reaktsiya kuchlarining har birini bajargan ishlari nolga teng emas, lekin yuqorida isbot qilganimizdek ularning yig‘indisi nolga teng bo‘ladi. Shunday qilib, yuqorida sanab o‘tilgan bog‘lanishlarni, ularning ayrim kamchiliklarini hisobga olmagan holda ideal bog‘lanishlar deb hisoblanadi.

Agar, mexanik sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlar, faqat vaqt mobaynida o‘zgarmaydigan ideal bog‘lanishlardan iborat bo‘lsa, yuqoridagi tenglik quyidagicha bo‘ladi:

$$dT=\sum dA_k^a \quad \text{va} \quad T_1-T_0=\sum dA_k^a \qquad (29.13)$$

Shunday qilib vaqt mobaynida o‘zgarmaydigan ideal bog‘lanishlar qo‘yilgan sistemaning har qanday harakatidagi kinetik energiyasini o‘zgarishi, shu sistemaga qo‘yilgan tashqi va ichki *aktiv* kuchlarning bajargan ishlarining yig‘indisiga teng ekan.

Oldingi barcha teoremalarda, barcha ichki kuchlarni tenglamalardan chiqarib tashlash mumkin edi, lekin barcha tashqi kuchlar hamda tashqi bog‘lanishlarning noma’lum bo‘lgan reaktsiya kuchlari tenglamalarda saqlanib qolinar edi. Sistema kinetik energiyasi o‘zgarish teoremasining muhim amaliy ahamiyati shundan iboratki, uning yordamida vaqt mobaynida o‘zgarmaydigan barcha ideal bog‘lanishlarning oldindan noma’lum bo‘lgan reaktsiya kuchlarini harakat tenglamalaridan chiqarib tashlanishiga imkon beradi.

Masalalar echish.

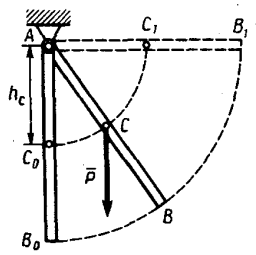
Agar harakatdagi sistema o‘zgarmaydigan bo‘lsa, kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasi noma’lum bo‘lgan barcha ichki kuchlarniva vaqt mobaynida o‘zgarmaydigan barcha tashqi ideal bog‘lanishlarning oldindan noma’lum bo‘lgan reaktsiya kuchlarini harakat tenglamalaridan chiqarib tashlanishiga imkon beradi.

Agar harakatdagi sistema o‘zgaruvchan bo‘lsa, ushbu teorema yordamida faqat ichki kuchlarning ma’lum bo‘lgan hollaridagina echimga ega bo‘ladi. Agar bunday (ichki) kuchlar noma’lum bo‘lsa, u holda masalalarni faqat shu teorema orqaligina echib bo‘lmaydi.

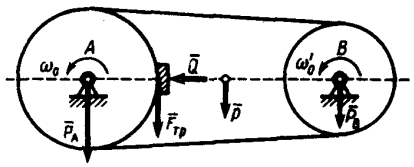
(29.10) tenglama yordamida faqat quyidagi: 1) sistemaga qo‘yilgan kuchlar; 2) *sistemaning harakatidagi tugal ko‘chishi*; 3) jismlarning boshlang‘ich va oxirgi (chiziqli yoki burchakli) tezliklarining qiymatlari berilgan hollardagina echimlar olish mumkin bo‘ladi. Hamda sistemaga qo‘yilgan kuchlar faqat o‘zgarmas yoki o‘tilgan yo‘l(masofa)ga bog‘liq ravishda o‘zgaruvchan funktsiyalardan iborat bo‘lishlari shart.

Yana bir muhim narsa shuki, kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasi yordamida, (agar sistemaning holati faqat bitta parametr orqali aniqlansa), sistemaning differentsial tenglamasini tuzishga imkoniyat hosil bo‘ladi, xususiy holda harakatdagi jismlarning tezlanishlarini aniqlash mumkin bo‘ladi. Bunday masalada sistemaga ta’sir etayotgan kuchlar ixtiyoriy ravishdagi funktsiyalardan iborat bo‘lishlari mumkin

29.4 masala. Uzunligi l -ga teng bo‘lgan AV sterjen sharnir orqali qo‘zg‘almas A nuqtaga osib qo‘yilgan (29.8 shakl). Sharnirdagi ishqalanishni hisobga olmasdan shu sterjenni gorizontal holatga keltirish uchun zarur bo‘lgan eng kichik burchakli tezlikning qiymati aniqlansin.



29.8 shakl



29.9 shakl

E ch i sh. Berilgan qiymatlar sifatida ω_0, $\omega_1=0$ va *sistemaning* V_0AV_1 burchak orqali aniqlanadigan *ko‘chishi* berilgan. Shu sababli, bu masalani kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasi yordamida echish qulayroq hisoblanadi. Sistema o‘zgarmaydigan bo‘lgani uchun, (29.11) tenglamalarni tuzamiz

$$T_1-T_0=\sum A_k^e \qquad (a)$$

Sterjenning massasini M harfi bilan belgilab, ushbu tenglamaga kiruvchi barcha qiymatlarni hisoblab chiqamiz. (29.3) formula va 102§ dagi (6) formula yordamida

$T_0=J_A\omega_0^2/2=Ml^2\omega_0^2/6$ ni aniqlaymiz.

Sterjenning oxirgi holatidagi tezligi nolga teng bo‘lgani uchun $T_1=0$ bo‘ladi. Sistemaga qo‘yilgan bog‘lanish (A sharnir) ideal bo‘lganligi sababli ishni faqat aktiv $\bar{P}=m\bar{g}$ kuch bajaradi, ya’ni $A^e=-Rh_C=-Mgl/2$. Ushbu qiymatlarni (a) tenglamaga qo‘ysak,

$-Ml^2\omega_0^2/6=-Mgl/2$ bundan $\omega_0=\sqrt{3g/l}$ bo‘ladi.

29.5 masala. Tasma (remen) orqali bog‘langan A va V shkivlar (29.9 shakl), shunday aylanma harakatda bo‘ladilarki, dvigatel o‘chirilgandan keyin A shkivning burchakli tezligi ω_0 bo‘ladi.

Shkivlarniing umumiy og‘irligi R, tasma (remen)ning og‘irligi r. Aylanishni tormozlash uchun tormoz kolodkalari radiusi R ga teng bo‘lgan A shkivni Q kuch bilan siqadilar. O‘qlardagi ishqalanishni hisobga olmasdan va shkivlarni yaxlit disklardan iborat deb hisoblab A shkiv to‘xtaguncha necha marta aylanishi aniqlansin.

E ch i sh. A shkivning to‘xtagunicha bo‘ladigan aylanishlar soni N_A - ni aniqlash uchun (29.11) tenglamadan foydalanamiz

$$T_1-T_0=\sum A_k. \qquad (a)$$

Kinetik energiyani hisoblashda shuni unutmaslik lozimki, *sistemaning kinetik energiyasi har doim uning har bir qismlarining kinetik energiyalarining algebraik yig‘indisidan iborat bo‘ladi.* Masalaning shartiga ko‘ra $T_1=0$ va $T_0=T_A+T_V+T_r$ bo‘ladi. Tasma (remen)ning barcha nuqtalarining boshlang‘ich tezliklari $v_{ro}=\omega_0 R=\omega_0 r$ bo‘ladi, bu erdagi ω_0 va r -lar boshlang‘ich burchakli tezlik va V shkivning radiusi. (29.3) va (8) formulalar yordamida:

$$T_A=J_A\omega_0^2/2=(R_AR^2/4g)\ \omega_0^2,$$

$$T_B=J_B\omega_0'^2/2=(R_B/4g)r^2\omega_0'^2=(R_B/4g)R^2\omega_0^2,$$

$$T_r=r\,v_{p0}^2/2g=rR^2\omega_0^2/2g \quad \text{bo‘ladi.}$$

Oxirgi tenglik remenning barcha nuqtalarining tezliklarini modullari o‘zaro teng ekanliklariga asoslanib hisoblandi. $R_A+R_V=R$ bo‘lganligi sababli

$$T_0=(R+2r)\,R^2\omega_0^2/4g \quad \text{hosil bo‘ladi.}$$

Kuchlarning bajargan ishlarini hisoblaymiz. Ushbu masalada og‘irlik kuchlarining bajargan ishlari nolga teng, chunki shkivlarning va remenning og‘irlik markazlari harakat davomida qo‘zg‘almaydi. Ishqalanish kuchi $F_{ishq}=fQ$. Uning bajargan ishini (29.7’) formula orqali aniqlaymiz

$$A_{ishq}=-(fQR)\cdot\varphi_1=-fQR\cdot 2\pi N_{ayl}$$

Aniqlangan barcha qiymatlarni (a) ga qo‘ysak, masalaniing javobini olamiz, ya’ni

$$N_{ayl}=\frac{(P+p)R\omega_0^2}{8\pi gfQ} \quad \text{bo‘ladi.}$$

29.6 masala. Qiyaligi $\alpha=30°$ ni tashkil etuvchi tekislik ustidagi aravachani o‘zgarmas Q=160 N kuch bilan yuqoriga qarab tortilmoqda (29.10 shakl). Aravacha platformasining og‘irligi R=180 N to‘rtta yaxlit g‘ildiraklarining har birining og‘irligi r=20 N. Quyidagilarni aniqlash kerak: 1) aravachaning l=4 m masofani bosib o‘tgan vaqtdagi

ilgarilanma v_1 tezligi aniqlansin; 2) aravachaning tezlanishi aniqlansin. G‘ildiraklar sirpanmasdan aylanadi, dumalashdagi qarshilik kuchi hisobga olinmasin.

E ch i sh. 1. Aravachaning v_1 tezligini aniqlash uchun (29.11) tenglamadan foydalanamiz

$$T_1-T_0=\sum A_k^e \qquad (a)$$

Ushbu masalada $T_0=0$ va $T_1=T_{pl}+4T_{g‘il}$. Aravacha ilgarilanma harakat qiladi, yaxlit g‘ildiraklarning dumalashidagi kinetik energiyasi 29.1 masaladagidek (29.1§ ga q.)bo‘ladi. Demak

$$T_1=R/2g+4(3r/4g)=(R+6r)/2g \quad \text{bo‘ladi.}$$

Ishni $\overline{Q}$ kuchi va $\overline{P}+4\overline{p}$ ga teng bo‘lgan $\overline{P}_1$ og‘irlik kuchlari bajaradi. Sirpanishdagi qarshilik kuchining va tekislikning normal reaktsiyasini bajargan ishlari nolga teng bo‘ladi (29.2§ ga q.). Hisoblashlar orqali

$$A()=Ql, \quad A(_1)=-(R+4r)h_C=-(R+4r)l\sin\alpha \text{ topamiz.}$$

Ushbu topilgan qiymatlarni (a) tenglamaga qo‘ysak

$$(R+6r)/2g=[Q-(R+4r)l\sin\alpha]l, \qquad (b)$$

bundan

$$v_1=\sqrt{\frac{2gl[Q-(P+4p)\sin\alpha]}{P+6p}}\approx 2{,}8 \text{ m/s} \quad \text{bo‘ladi.}$$

2. Yuqoridagi (b) tenglamadan foydalanib, aravachaning tezlanishini aniqlash uchun: (b) tenglikdagi $v_1=v$ va l (butun sistemaning holatini aniqlovchi parametr)-ni o‘zgaruvchan deb hisoblaymiz. U holda tenglamaning ikkala tarafidan vaqt bo‘yicha hosila olib quyidagini yozamiz:

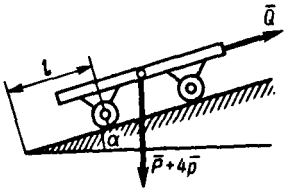
$$[(R+6r)/g]v\frac{dv}{dt}=[Q-(R+4r)\sin\alpha]\frac{dl}{dt},$$

Lekin $dl/dt=v$ va $dv/dt=a$. Tenglikni ikkala tomonini v-ga qisqartirsak

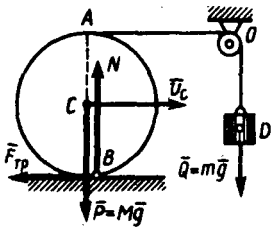
$$a=\frac{Q-(P+4p)\sin\alpha}{P+6p}g\approx 0{,}98 \text{ m/s}^2 \text{ kelib chiqadi.}$$

Ushbu masalada tezlanishni aniqlash uchun kinetik energiyaning o‘zgarishi teoremasidan foydalanilganligiga e’tiboringizni qaratmoqchimiz.

29.7 masala. Radiusi R va massasi M bo‘lgan tsilindrsimon katokka O blokdan oshirib tashlangan ip o‘ralgan (29.11 shakl) bo‘lib ipning pastki uchiga m massali D yuk osib qo‘yilgan. Agar $v_{C0}=0$ bo‘lsa, katokniing markazi S nuqtaning tezligi v_C -ni katok s masofani bosib o‘tgandagi qiymati aniqlansin. Katokning dumalab ishqalanish koeffitsienti k, katokning o‘qiga nisbatan inertsiya radiusi ρ_S. Ipning va O blokning massalari hisobga olinmasin.



29.10 shakl



29.11 shakl

E ch i sh. 1. Katokning massa markazi S nuqtaning tezligini quyidagi tenglama orqali aniqlaymiz

$$T-T_0=\sum A_k^e \qquad (a)$$

Ushbu masalada $T_0=0$ va $T=T_{kat}+T_D$ hamda (29.2), (29.4) va (4) formulalar orqali

$T_D=m v_D^2/2$, $T_{kat}=M v_C^2/2+M\rho_C^2\omega^2/2$ larni aniqlaymiz.

V nuqta oniy tezliklar markazi bo‘lgani uchun $\omega=v_C/R$ va $v_D=v_A=2v_C$. Demak,

$T_D=[4m+M(1+\omega^2/2)]/2$ bo‘ladi.

Ishni $\overline{Q}=m\overline{g}$ va $\overline{N},\overline{P}$ ($\overline{P}=M\overline{g}$) juft kuchlar bajaradi. $v_D=2v_C$ bo‘lganligi uchun D yukning ko‘chishi h=2s bo‘ladi, bu erdagi s-katokning markazi S nuqtaning ko‘chishi. $A(\overline{Q})=mg\cdot 2s$. Dumalanishda ko‘rsatilgan qarshilik kuchining bajargan ishini (29.8’) formula orqali aniqlaymiz N=R=Mg=const. U holda

$$\sum A_k^e=2mgs-(k/R)Mgs.$$

Aniqlangan qiymatlarni (a) ga qo‘ysak

$$[4m+M(1+\rho_C^2/R^2)]\,v_C^2/2=(2m-kM/R)gs$$

bundan

$$v_C=\sqrt{\frac{2g(2mR-kM)Rs}{4mR^2+M(R^2+\rho_C^2)}}$$ kelib chiqadi.

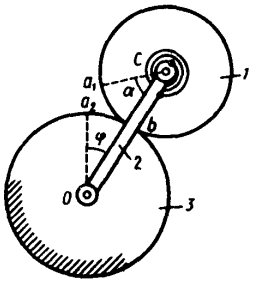
2. Tezlanish a_S -ni aniqlash uchun oldingi masaladagi kabi (b) tenglamaning ikkala tomonidan vaqt t -bo‘yicha bir marta hosila olamiz,

$$a_C=\frac{(2mR-kM)Rg}{4mR^2+M(R^2+\rho_C^2)}.$$

29.8 masala. Massasi m_1 bo‘lgan r radiusli shesternya 1, massasi m_2 uzunligi OS=l bo‘lgan krivoshipning S nuqtasidan o‘tuvchi

qo‘zg‘aluvchan o‘qqa sharnir orqali o‘rnatilgan bo‘lib, u krivoship bilan birgalikda R=l-r radiusli qo‘zg‘almas 3 tishli g‘ildirak atrofida aylanma harakat qila oladi.

Shesternya 1, krivoship bilan spiralsimon prujina orqali bog‘langan (29.12 shakl) bo‘lib, prujinaning shesternyaga kursatuvchi momenti $M_{pr}=s\alpha$ -ga teng, bu erda α - shesternya 1 -ning krivoshipga nisbatan burilish burchagi. O‘qlardagi ishqalanish kuchlarini hisobga olmagan holda muvozanat holatdan chiqarib yuborilgan krivoshipning tebranma harakatining tebranish davri aniqlansin. Mexanizm gorizontal tekislikda joylashgan.



29.12 shakl.

Echish. Krivoshipning holatini muvozanat holatidan boshlab φ-burchak orqali aniqlaymiz. S o‘qning noma’lum reaktsiyasini tenglamadan chiqarib yuborish uchun, shesternya 1 va krivoshipni bitta mexanik sistema deb hisoblab, uning harakat differentsial tenglamasini (29.9) formula orqali tuzamiz.

Avvalo, sistemaning kinetik energiyasini, krivoshipning burchakli tezligi ω_{kr} orqali ifodalaymiz (chunki, biz krivoshipning harakat qonunini izlamoqdamiz). Natijada

$$T=T_{kr}+T_{sh}=J_{Okr}\omega_{кр}^2/2+m_1 v_C^2/2+J_{Ssh}\omega_{ш}^2/2 \text{ bo‘ladi.} \qquad (a)$$

Krivoshipni bir jinsli sterjen, shesternyani disk deb hisoblab, hamda sheternyaning g‘ildirakka tutashgan nuqtasini oniy tezliklar markazi ekanligini e’tiborga olgan holda, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$J_{okr}=m_2l^2/3,\quad J_{Ssh}=m_1r^2/2,\quad v_C=\omega_{kr}l,\quad \omega_{sh}=v_C/r=\omega_{kr}l/r.$$

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki (29.4) formula orqali hisoblanadigan shesternyaning kinetik energiyasi T_{sh} -ning formulasiga shesternyaning krivoshipga nisbatan burilishidagi nisbiy burchakli tezlik emas, balki *absolyut* burchakli tezligi qo‘yilishi kerak. Aniqlangan qiymatlarni (a) tenglamaga qo‘ysak,

$$T=(9m_1+2m_2)l^2\omega_{кр}^2/12 \text{ bo‘ladi.} \qquad (12)$$

Endi bajarilgan elementar ishlarni hisoblaymiz. Ushbu sistemadagi tashqi kuchlar ish bajarmaydi, chunki ular aylanish o‘qlariga parallel ravishda yo‘nalgan, demak, $dA^e=0$. Shesternya 1 krivoshipga nisbatan α -burchakka burilganda, prujinaning elastiklik (ichki) kuchining bajargan elementar ishi $dA^i=-M_{pr}d\alpha=-c\alpha d\alpha$ (manfiy ishora, momentning yo‘nalishi shesternyaning burilishiga teskari ekanligini ko‘rsatadi) bo‘ladi. Biz krivoshipning harakat qonunini

izlayotganligimiz uchun α-burchakni φ -orqali ifodalab olamiz. Shu sababli $a_2\breve{b} = a_1\breve{b}$ bo‘lgani uchun, $R\varphi=r\alpha$ yoki $(l-r)\varphi=r\alpha$ bo‘ladi. Bundan

$$\alpha=[(l-r)/r]\varphi \text{ va } dA^i=-c[(l-r)^2/r^2]\varphi d\varphi.$$

Endi, (49) formulaga asosan tenglama tuzamiz: $dT=dA^i$ va

$$[(9m_1+2m_2)l^2/6]\omega_{kr}d\omega_{kr}=-c[(l-r)^2/r^2]\varphi d\varphi.$$

Lekin

$$d\varphi=\frac{d\varphi}{dt}dt=\omega_{kr}dt, \text{ va } d\omega_{kr}=\frac{d\omega_{кр}}{dt}dt=\frac{d^2\varphi}{dt^2}dt \text{ bo‘ladi.}$$

u holda, tenglamani dt -ga qisqartirib, sistemaning differntsial tenglamasini oxirgi ko‘rinishini yozamiz,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k^2\varphi=0, \text{ bu erdagi } k^2=\frac{6c(1-r)^2}{(9m_1+2m_2)l^2r^2}.$$

Olingan tenglama garmonik tebranma harakatning differntsial tenglamasi hisoblanadi (24.1§ ga q.). Demak, muvozanat holatidan chiqarib yuborilgan krivoship, muvozanat holati atrofida,

$$\tau=\frac{2\pi}{k}=2\pi\frac{lr}{l-r}\sqrt{\frac{9m_1+2m_2}{6c}}$$

ga teng davr bilan garmonik tebranma harakat qilar ekan.

Echilgan ushbu masala sistemaning holati faqat bitta o‘zgaruvchan qiymat (φ burchak)ga bog‘liq bo‘lganda, sistemaning harakat differentsial tenglamasini tuzishda kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasidan qanday foydalanish mumkin ekanligini ko‘rsatib beradi.

29.9 **masala.** Massasi m_2 bo‘lgan barabanga o‘ralgan m_1 massali trosning uzunligi l bo‘lib, uning uchiga m_3 massali yuk osib qo‘yilgan (28.7 shakl). Barabanning massasini uning gardishi bo‘ylab teng tarqalgan deb hisoblab, trosning yo‘g‘onligini va aylanish o‘qidagi ishqalanish ($M_{ishq}=0$) ni hisobga olmasdan, yukning tezligini trosning osilib turgan *x* uzunligiga bog‘liq ravishda aniqlansin. Boshlang‘ich vaqtda $v_0=0$ va $x=0$ deb hisoblansin.

Echish. Yukning tezligini bunday bog‘lanish orqali aniqlash uchun, quyidagi tenglama orqali izlaymiz:

$$dT=\sum dA_k^e \qquad (a)$$

Yuk trosning barcha zarrachalari va barabanning gardishidagi nuqtalarning tezliklari o‘zaro teng bo‘lganligi uchun $T=Mv^2/2$, bu erdagi $M=m_1+m_2+m_3$ bo‘ladi. Undan tashqari trosning osilib turgan qismining og‘irligi $(m_1g/l)x$ -ga teng bo‘lganligi uchun

$$\sum d A_k^e = (m_1 g x/l + m_2 g)dx.$$

Bularni (a) tenglamaga qo‘ysak

$$Md(v^2/2) = (m_1 g x/l + m_2 g)dx .$$

Boshlang‘ich shartlarni (ya’ni, x=0 da v=0 ekanligini) e’tiborga olgan holda, ushbu tenglamani integrallab, oxirgi natijani yozamiz,

$$v = \sqrt{(m_1 g / Ml)x^2 + 2(m_2 g / M)x}$$ bo‘ladi.

Tayanch so‘z va iboralar: mexanik sistema kinetik energiyasi, mexanik sistema kinetik energiyasining o‘zgarishi, shakli o‘zgarmaydigan sistema, shakli o‘zgaradigan mexanik sistema, ideal bog‘lanishlarga ega bo‘lgan mexanik sistema.

Mavzudagi muammolarni quyidagi uslubiy ko‘rsatmalarga tayangan holda echiladi.

Kinetik energiya skalyar qiymat bo‘lib, har qanday mexanik harakatning ham ilgarilama, ham aylanma harakatlarini xarakterlovchi kattaliq hisoblanar ekan.

Oldingi dinamik qiymatlar, ya’ni harakat miqdori faqat ilgarilama harakatni, harakat miqdori momenti esa faqat aylanma harakatni xarakterlasa, kinetik energiya ularning ikkalasini ham bir varakayiga xarakterlovchi qiymat ekan.

Mexanik sistemaning kinetik energiyasini aniqlashda, avvalo uni qanday harakatda ishtirok etayotganligiga bog‘liq ravishda tegishli formulalar orqali hisoblanar ekan.

Mexanik sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarning bajargan ishlarini hisoblashda ham, shu kuchlarning xususiyatiga ko‘ra turlicha usullar qo‘llanilishi lozim ekan.

Kinetik energiyaning o‘zgarishi, shu o‘zgarish jarayonida bajarilgan ishga bog‘liq ekan. Agar, jismga qo‘yilgan kuchlar musbat ish bajarsa, kinetik energiya ortib borar ekan va aksincha, manfiy ish bajarilsa, kinetik energiya kamayib borar ekan.

Ushbu bog‘liqlik kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasi orqali analitik ravishda hisoblanar ekan.

Masalalar echganda, kinetik energiyan aniqlashda faqat absolyut tezliklardan foydalanish lozim ekan.

Takrorlash uchun savollar:

Kinetik energiya deb qanday qiymatga aytiladi?
Kinetik energiya vektor qiymat hisoblanadimi?
Kinetik energiya musbat va manfiy qiymatlarga ega bo‘la olishi mumkinmi?
Kinetik energiya jismning aylanma harakatini ifodalashi mumkinmi?
Kinetik energiya tekislikka parallel harakat qilayotgan jismning to‘liq energiyasini aniqlab beraoladimi?
Jismning traektoriyasini bilmagan holda unga ta’sir qilayotgan kuchlarning bajargan ishini aniqlash mumkinmi?
Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanayotgan qattiq jismga ta’sir etayotgan kuchning bajargan ishi?
Shakli o‘zgarmaydigan mexanik sistemaning kinetik energiyasini o‘zgarish teoremasini ifodalab bering?
Shakli o‘zgaradigan mexanik sistemaning kinetik energiyasini o‘zgarish teoremasini ifodalab bering?
Kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasini differentsial formasini ifodalab bering?
Kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasini tugal ko‘chishdagi, ya’ni integral formasini ifodalab bering?
Kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasini differentsial formasi bilan integral formasini farqi nimadan iborat?

Mavzuni mustahkamlash uchun 29 ilovadagi masalalarni mustaqil echishni tavsiya qilamiz:

30 – Ma’ruza

Mavzu: Potentsial kuch maydoni va kuch funktsiyasi. Potentsial energiya. Mexanik energiyanng saqlanish qonuni.

REJA:

Potentsial kuch maydoni va kuch funktsiyasi

Potentsial energiya. Mexanik energiyanng saqlanish qonuni.

Muammo: Biz yuqorida kinetik energiya va uning xususiyatlari haqida batafsil fikr yuritgan edik. Kinetik energiya bo‘lishi uchun jism albatta qanday bo‘lmasin birorta harakatda ishtirok etishi lozim. Lekin mexanikada shunday energiyalar borki, ular uchun harakat bo‘lishi shaart emas. Masalan, potentsial energiya va potentsial kuch maydoni. Quyida potentsial energiya, potentsial kuch maydoni nima va ularning texnikada qanday o‘rni borligi haqida so‘z yuritiladi.

30.1§ Potentsial kuch maydoni va kuch funktsiyasi

Oldingi paragraflarda (22.2§ da ham) ko‘rilgan masalalarni kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasi orqali echishimizning asosiy sababi shundan iborat ediki, sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarning bajargan ishlarini harakat qonunini bilmagan holda aniqlash mumkin edi. Bunday xususiyatga ega bo‘lgan kuchlarning klassifikatsiyasini aniqlash, muhim amallardan biri hisoblanadi.

M nuqtaga qo‘yilgan kuchning M_1M_2 ko‘chishdagi bajargan ishi, 21.5§ dagi (21.16’) formula orqali hisoblanadi:

$$= \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (30.1)$$

22.2§ da eslatib o‘tilganidek, o‘ng tomondagi integralni nuqtaning harakat qonunini (ya’ni, x,y, z -larni t- ga qanday bog‘liqligini) bilmagan holda hisoblash uchun kuchlar o‘zgarmas yoki faqat nuqtaning koordinatalari x, y, z va t- larga bog‘liq holda o‘zgaruvchan kuchlardan iborat bo‘lgandagina hisoblash mumkin xolos. Bunday kuchlar kuch maydonini tashkil etadi. Kuchlar o‘zlarining koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari orqali aniqlanishlari sababli kuch maydoni quyidagi tenglamalar orqali beriladi:

$$F_x=F_x(x, y, z), \quad F_y=F_y(x, y, z), \quad F_z=F_z(x, y, z). \qquad (30.2)$$

Lekin, umumiy holda ham bunday kuchlarning bajargan ishlarini hisoblash uchun (30.1) formuladagi integral ostidagi funktsiyalar bitta o‘zgaruvchan orqali ifodalanishlari kerak, ya’ni masalan, $y=f_1(x)$ va $z=f_2(x)$ ma’lum bo‘lishi kerak. Oxirgi tengliklar esa, M nuqtaning fazodagi traektoriyasini belgilovchi egri chiziqning tenglamasidan iborat. Demak, umumiy holda kuch maydonini tashkil etuvchi kuchlarning bajargan ishlari kuch qo‘yilgan nuqta traektoriyasining ko‘rinishiga ham bog‘liq ekan.

Ammo, agar $\overline{F}$ kuchning bajargan elementar ishini ifodalovchi (30.1) formuladagi integral ostidagi qiymat birorta U(x, y, z) funktsiyaning to‘liq differentsialidan iborat bo‘lsa, ya’ni

$$dA=dU(x, y, z) \quad \text{yoki} \quad F_x dx+F_y dy+F_z dz= dU(x, y, z) \quad (30.3)$$

u holda bajaralgan ishni M nuqtaning traektoriyasini bilmagan holda ham aniqlash mumkin.

To‘liq differentsiali elementar bajarilgan ishni ifodalovchi va (faqat) *x, y, z* koordinatalarning funktsiyasidan iborat bo‘lgan U(x,y,z) funktsiya, *kuch funktsiyasi* deb ataladi. Kuch funktsiyasi mavjud bo‘lgan kuch maydoni, *potentsial kuch maydoni* deb ataladi. Shu kuch maydonida ta’sir etayotgan kuchlar *potentsial kuchlar* deb ataladi. Bundan keyin kuch funktsiyasini faqat koordinatalarning funktsiyasidan iborat bo‘ladi deb hisoblaymiz.

Agar (30.1) formulaga (30.3) formuladagi dA ifodani keltirib qo‘ysak, u holda

$$= \int_{(M_1)}^{(M_2)} dU(x,y,z)=U_2-U_1 \text{ hosil bo‘ladi.} \quad (30.4)$$

Bu erdagi, $U_1=U(x_1, y_1, z_1)$ va $U_2=U(x_2, y_2, z_2)$ -maydonning tegishlicha M_1 va M_2 nuqtalaridagi kuch funktsiyasining qiymatlari. Demak, *potentsial kuchning bajargan ishi, kuch funktsiyasini yo‘lning boshidagi va oxiridagi qiymatlarining ayirmasiga teng ekan va harakatlanayotgan nuqtaning traektoriyasiga bog‘liq emas ekan.* Nuqtaning berk (boshi bilan oxiri tutashgan) traektoriya bo‘ylab qilgan harakatida $U_1=U_2$ bo‘ladi va potentsial kuchning bajargan ishi nolga teng bo‘ladi.

Potentsial kuch maydonining asosiy xususiyati shundan iboratki, moddiy nuqta harakatlanayotgan maydon kuchining bajargan ishi, faqat shu nuqtaning maydondagi boshlang‘ich va oxirgi holatigagina bog‘liq bo‘lar ekan xolos va uning harakat qonuniga ham, uning traektoriyasini ko‘rinishiga ham bog‘liq bo‘lmas ekan.

Agar, kuchning bajargan ishi kuch qo‘yilgan nuqtaning harakat qonuniga yoki uning traektoriyasini ko‘rinishiga bog‘liq holda o‘zgaruvchan bo‘lsa, bunday kuchlar *potentsial bo‘lmagan* kuchlar deb ataladi. Bunday kuchlar qatoriga ishqalanish kuchlari va muhitning qarshilik kuchlari kiradi.

Agarda, (30.3) ifoda o‘rinli ekanligi aniqlangan bo‘lsa, kuch funktsiyasi quyidagi tenglik orqali hisoblanadi:

$$U=\int dA+C \quad \text{yoki} \quad U=\int (F_x dx+F_y dy+F_z dz)+C. \qquad (30.5)$$

O‘zgarmas S ning qiymati har qanday haqiqiy sondan iborat bo‘lishi mumkin [(30.4) formuladan ko‘rinib turgandek, ishning qiymati S -ga bog‘liq emas]. Lekin, maydonda «nol nuqta» deb ataluvchi shunday bir O nuqta tanlab olinadiki, u nuqtada $U_O=0$ bo‘ladi va S ning qiymatini shu nuqtaga nisbatan tutgan o‘rniga bog‘liq holda aniqlanadi.

Bizga ma’lum bo‘lgan potentsial kuchlarga og‘irlik kuchi, elastiklik kuchi va tortilish kuchlari misol bo‘ladi (22.1§ ga q.). Quyida bu kuchlar uchun haqiqatdan ham kuch funktsiyalari mavjud ekanligini ko‘rsatib o‘tamizva ularning ifodasini aniqlaymiz. 22.1§ dagi integrallar ostida tegishli kuchlarning bajargan elementar ishlari turganligi sababli, integrallash natijasida (22.1), (22.2) va (22.4) formulalar keltirilib chiqarilganligini hisobga olib, hamda (30.5) tenglikdan foydalanib quyidagi natijalarga kelamiz:

1) o g‘ i r l i k k u ch i ning maydoni uchun agar z -o‘qi vertikal yuqoriga yo‘nalgan bo‘lsa dA=-Rdz bo‘ladi, bundan z=0 da U=0 (nol nuqta koordinata boshida) deb hisoblasak,

$$U=-Rz \text{ bo‘ladi.} \qquad (30.6)$$

2) Ox[31] bo‘ylab ta’sir etuvchi elastiklik kuchining maydoni uchun dA=-cxdx, bundan x=0 da U=0 deb hisoblasak

$$U=-cx^2/2 \text{ bo‘ladi.} \qquad (30.6’)$$

3) t o r t i l i sh k u ch i maydoni uchun $dA=mgR^2d(1/r)$, bundan $r=\infty$ da U=0 (nol nuqta cheksizlikda) bo‘ladi deb hisoblasak

$$U=mgR^2/r \qquad (30.6’’)$$

bo‘ladi, bu formuladagi $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Funktsiya U - ning aniqlangan qiymatlaridan foydalanib, (30.4) formula orqali tegishli kuchlarning bajargan ishlarni aniqlash uchun

[31] Bunday maydonni chiziqli maydon deb atash mumkin; chunki bu kuch maydonida berilgan soha to’g’ri chiziqdan iborat.

22.1§ da keltirib chiqarilgan (22.1), (22.2) va (22.4) tengliklardagi ifodalarni olish mumkin.

Agar kuchning funktsiyasi ma’lum bo‘lsa, maydonning ixtiyoriy nuqtasidagi kuchni aniqlash mumkin ekanligini ko‘rsatib o‘tamiz. (30.3) tenglikdagi U(x, y, z) funktsiyaning differentsialidan

$$F_x dx+F_y dy+F_z dz=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

Tenglamaning ikkala tomonidagi dz, dy, dz -larning oldilaridagi koeffitsientlarni o‘zaro tenglashtirib, quyidagi natijani olamiz:

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z=\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (30.7)$$

Demak, *potentsial kuch maydonidagi kuchlarning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari, kuch funktsiyasidan tegishli koordinatalar bo‘yicha olingan xususiy hosilalarga teng ekan.* Koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari (30.7) formula orqali aniqlanadigan $\overline{F}$ vektorni, skalyar U(x, y, z) funktsiyaning *gradienti* deb ataladi. Shunday qilib $\overline{F}$ =gradU. (30.7) tenglikdan

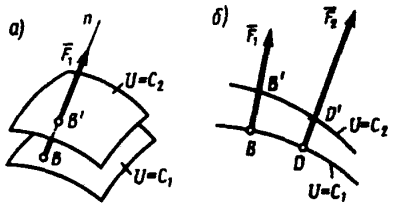
$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\quad \text{va h.}$$

Demak, berilgan maydon uchun kuch funktsiyasi mavjud bo‘lsa, u holda kuchlarning proektsiyalari quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x},\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y},\quad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z}. \qquad (30.8)$$

Bunga teskari xulosani ham isbot qilish mumkin, ya’ni agar (30.8) tenglik o‘rinli bo‘lsa, bu kuch maydonida kuch funktsiyasi U mavjud bo‘ladi. Demak, (30.8) tengliklar *kuch maydoni potentsial maydon ekanligining zaruriy va etarli shartlaridan iborat ekan*.

Shunday qilib, agar kuch maydoni (30.2) tenglamalar orqali berilgan bo‘lsa, u holda (30.8) shartlar orqali uning potentsial maydon ekanligi yoki unday emasligini aniqlash mumkin ekan. Agar maydon potentsial bo‘lsa, u holda (30.5) tenglama uning kuch funktsiyasini ifodalab beradi, (30.4) formula orqali maydonning bajargan ishi aniqlanadi. Aksincha, agar kuch funktsiyasi ma’lum bo‘lsa, u holda bu funktsiya orqali qaysi kuch maydoni ifodalanayotganligini (30.7) formula yordamida aniqlanadi.



30.1 shakl.

U(x, y, z)=S deb hisoblab (bu erdagi S ixtiyoriy o‘zgarmas qiymat), fazoda shunday bir sirt tanlaymizki, uning barcha nuqtalarida U-ning qiymatlari bir xil bo‘ladi. Bunday sirtlar *sath sirtlari (poverxnosti urovnya)* yoki *potentsiali teng sirtlar* deb ataladi.

Agar kuch funktsiyasi koordinatalarning bir echimli funktsiyalaridan iborat bo‘lsa, u holda sath sirtlari kesishmaydilar va maydonning har bir nuqtasidan faqat bitta sirt sathi o‘tadi. Sathi $U_1=U_2=C$ bo‘lgan sirt bo‘yicha har qanday M_1M_2 ko‘chishda (30.4) tenglamadan ko‘rinib turganidek bu maydonning bajargan ishi nolga teng bo‘ladi. Hamda bunday maydondagi kuch nolga teng bo‘lmaganligi sababli, quyidagi xulosaga kelamiz, ya’ni: *potentsial kuch maydonining ixtiyoriy nuqtasidagi kuch, sath sirtining shu nuqtadagi normali bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi.*

30.1, a shaklda ikkita sath $U(x, y, z)=S_1$, $U(x, y, z)=S_2$ sirtlari tasvirlangan, 30.1, b shaklda esa, ularning Bn normalidan o‘tuvchi tekislik orqali kesimi tasvirlangan. Agar kuch shaklda ko‘rsatilgan yo‘nalishda bo‘lsa, u holda BB’ ko‘chishdagi bajarilgan ishlari musbat bo‘ladi. Lekin, (30.4) formula bo‘yicha bu ish S_2-S_1 ga teng bo‘ladi. Demak $S_2>S_1$ ekan, ya’ni *potentsial maydonidagi kuchning yo‘nalishi, kuch funktsiyasining ortish tomoniga yo‘nalgan bo‘lar ekan*. Hamda VV’ ko‘chishda $\overline{F}_1$ kuchining va DD’ ko‘chishdagi $\overline{F}_2$ kuchining bajargan ishlari o‘zaro teng, chunki sathlarning ayirmasi S_2-S_1 o‘zaro teng. Lekin DD’<BB’, shuning uchun albatta $F_2>F_1$.

Demak, *potentsial maydondagi kuchning son qiymati qaerda sathlar yaqin bo‘lsa, shu erda katta bo‘lar ekan*. Yuqoridagi xossalar, sath sirtlari yordamida potentsial kuch maydonidagi kuchlarning qanday tarqalishini oynalashtirib berishda xizmat qiladi. Undan tashqari (30.4) tenglikdan ko‘rinib turgandek, agar qisqa qilib aytsak, potentsial kuchning ishi nuqtaning faqat qaysi sathdan harakat boshlab, qaysi sathga ko‘chganligiga bog‘liq ekan xolos.

Aytilgan ifodalarni misollarda bayon qilib beramiz.

1. Bir jinsli og‘irlik kuchi maydonida (22.1 shakl) (30.6) formuladan ko‘rinib turganidek, (agar z=const bo‘lsa) U=const bo‘ladi. Demak, sath sirtlari gorizontal tekislikdan iborat bo‘ladi. Og‘irlik kuchi $\overline{P}$-ning yo‘nalishi, shu gorizontal tekisliklarga perpendikulyar bo‘lib, U - ning ortish tomoniga yo‘naladi va shu sirtning hamma nuqtalarida bir xil qiymatga ega bo‘ladi.

2. Tortilish kuchi maydonida, (59’’) formulaga asosan r=const bo‘lsa, U=const bo‘ladi. Demak, sath sirtlari kontsentrik sferalardan

iborat bo‘lar ekan va ularning markazi tortilish markazida joylashar ekan. Bunday maydondagi kuchning yo‘nalishi tegishli sferaning normali bo‘yicha U funktsiyaning ortish (r -ning kamayish tomoniga, masalan, Erning markaziga) tomoniga yo‘nalar ekan, ya’ni sferaning markazi tomoniga.

Agar, potentsial kuch maydonida moddiy nuqtalar sitemasi joylashgan bo‘lsa, uning kuch funktsiyasi sistema nuqtalari koordinatalarining shunday funktsiyasi $U(x_1,y_1,z_1,-x_n,y_n,z_n)$ dan iborat bo‘ladiki, uning uchun

$$dU=\sum dA_k \qquad (30.9)$$

qanoatlanishi shart, ya’ni uning differentsiali sistemaga ta’sir etuvchi maydon kuchlarining bajargan elementar ishlarining yig‘indisiga teng bo‘lar ekan.

30.2§ Potentsial energiya. Mexanik energiyaning saqlanish qonuni

Potentsial kuch maydoni uchun, potentsial energiya degan tushuncha kiritilib, u kuch maydonining mazkur punktidagi moddiy nuqtaning harakatida (*uning shu sathdan, nol sathga ko‘chishida*) bajarilishi mumkin bo‘lgan (zapas) ishning miqdorini xarakterlab beradi. Turli sathlarda joylashgan moddiy nuqtalarning «zapas ish»larini solishtirish uchun, shu maydonda joylashgan va «zapas ishi» nolga teng bo‘lgan O nuqta tanlanadi (nol nuqtaning o‘rnini, hisob sistemasining boshini tanlab olish kabi ixtiyoriy ravishda tanlab olinadi). *Moddiy nuqtaning mazkur M punktidagi potentsial energiyasi deb, nuqtaning shu punktdan nol* ($U_0=0$)

$$P=A_{(MO)}$$

nuqtaga ko‘chishida maydon kuchlarining bajarishi mumkin bo‘lgan ishga teng miqdordagi skalyar P *qiymatga aytiladi.*

Yuqoridagi ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, potentsial energiya M nuqtaning x,y,z koordinatalariga bog‘liq ekan, ya’ni P=P(x,y,z). Bundan keyin P(x,y,z) va U(x,y,z) funktsiyalarning nol nuqtalari ustma-ust joylashgan deb hisoblaymiz. U holda $U_0=0$ bo‘ladi, shu sababli (30.4) formulaga ko‘ra $A_{MO}=U_0-U=-U$ bo‘ladi, bu erdagi U -maydonning M nuqtasidagi kuchning funktsiyasi. Shunday qilib

$$P(x,y,z)=-U(x,y,z),$$

ya’ni, *kuch maydonining ixtiyoriy nuqtasidagi potentsial energiya, shu nuqtadagi kuch funktsiyasining teskari ishorali qiymatiga teng ekan.*

Bundan ko‘rinib turibdiki, potentsial kuch maydonining barcha xususiyatlarini o‘rganishda kuch funktsiyasining o‘rniga potentsial energiya tushunchasidan foydalanish mumkin ekan. Xususan, potentsial kuchning bajargan ishini hisoblashda (30.4) formulaning o‘rniga

$$A_{(M_0M_1)}=P_1-P_2 \qquad (30.10)$$

formuladan foydalanish mumkin ekan.

Demak, *potentsial kuchning bajargan ishi, harakatlanayotgan nuqtaning boshlang‘ich va keyingi holatlaridagi potentsial energiyalarining ayirmasiga teng ekan.*

Bizga ma’lum bo‘lgan kuch maydonlarining potentsial energiyasining ifodalarini P=-U ekanligini hisobga olib (30.6) - (30.6’’) tengliklardan aniqlash mumkin ekan. Shunday qilib potentsial energiya:

1) o g‘ i r l i k k u ch i maydoni uchun (z -o‘qi vertikal ravishda yuqoriga yo‘nalgan)

$$P=Rz; \qquad (30.11)$$

2) e l a s t i k l i k k u ch i ning maydoni uchun

$$P=sx^2/2; \qquad (30.11’)$$

3) t o r t i l i sh k u ch i ning maydoni uchun

$$P=-mgR^2/r. \qquad (30.11’’)$$

Sistemaning potentsial energiyasi bitta nuqtaning potentsial energiyasi kabi aniqlanadi, ya’ni: *mexanik sistemaning mazkur holatidagi potentsial energiyasi P, sistemaning mazkur holatdan nol holatga ko‘chishda bajarilishi mumkin bo‘lgan ishning qiymatiga teng bo‘ladi*, ya’ni

$$P=\sum A_{(M_kO_k)} \text{ bo‘ladi.}$$

Agar bir vaqtning o‘zida bir nechta kuch maydonlarida (masalan, og‘irlik kuchi va elastiklik kuchi maydonlarida) turilsa, har bir maydon uchun o‘zining alohida bo‘lgan nol holatlarini tanlab olish kerak. Sistemaning potentsial energiyasi va uning kuch maydoni orasidagi munosabat ham nuqtalardagi kabi bo‘ladi, ya’ni

$$P(x_1, y_1, z_{1,\ldots} x_n, y_n, z_n)=-U(x_1, y_1, z_{1,\ldots} x_n, y_n, z_n);$$

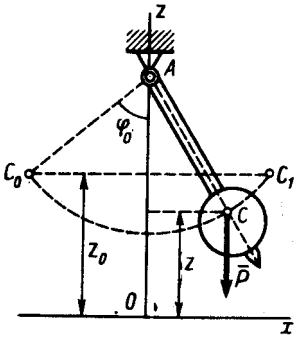
Mexanik energiyaning saqlanish qonuni. Sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi va ichki kuchlar potentsial kuchlardan iborat deb faraz qilaylik. U holda

$$\sum A_k=P_0-P_1 \text{ bo‘ladi.}$$

Ishning bunday ifodasini (30.3) formulaga keltirib qo‘ysak, sistemaning ixtiyoriy holati uchun o‘rinli bo‘lgan: $T-T_0=P_0-P$ yoki

$$T+P=T_0+P_0=sonst \qquad (30.12)$$

ifodani aniqlaymiz.



30.2 shakl

Demak, *potentsial kuchlar ta’siridagi harakatda sistemaning ixtiyoriy holatidagi kinetik va potentsial energiyalarining yig‘indisi o‘zgarmas qiymatligicha qolaverar ekan.* Fizikadagi umumiy energiyaning saqlanish qonunining xususiy holidan iborat bo‘lgan *mexanik energiyaning saqlanish qonuni* deb shunga aytiladi. T+P qiymat *sistemaning to‘liq mexanik energiyasi* deb ataladi va (30.12) qonun o‘rinli bo‘lgan mexanik sistema *konservativ sistema* deb ataladi.

Misol. Vertikalga nisbatan φ_0 burchakka og‘dirilib, boshlang‘ich tezliksiz qo‘yib yuborilgan (30.2 shakl) mayatnikni ko‘rib chiqaylik. Boshlang‘ich holatdagi $P_0=Rz_0$ va $T_0=0$, bu erdagi R -mayatnikning og‘irligi, z -uning og‘irlik markazining koordinatasi. Demak, agar hamma qarshilik kuchlarini hisobga olmasak, ixtiyoriy boshqa har qanday holat uchun $P+T=P_0$ bo‘ladi yoki

$$Rz+J_A\omega^2/2=Rz_0,$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, mayatnikning og‘irlik markazi z_0 -balandlikdan yuqoriga ko‘tarila olmas ekan. Mayatnik pastga harakatlangan sari, uning potentsial energiyasi kamayib boradi, kinetik energiyasi esa ortib boradi. Ko‘tarilishida esa kinetik energiyasi kamayib boradi, potentsial energiyasi esa ortib boradi. Yuqorida tuzilgan tenglamadan $\omega^2=2R(z^0-z)/J_A$ ekanligini aniqlaymiz.

Shunday qilib, ixtiyoriy olingan vaqtda mayatnikning burchakli tezligi, faqat uning og‘irlik markazining balandligiga bog‘liq ekan va shu balandlikka har safar ko‘tarilganda, uning burchakli tezligi yana shu qiymatga teng bo‘lar ekan. Bunday bog‘liqlik faqat potentsial kuch maydonidagi harakatdagina sodir bo‘lishi mumkin xolos.

D i s s i p a t i v s i s t e m a l a r. Potentsial kuchlardan tashqari er sharoitida har doim mavjud bo‘ladigan qarshilik (muhit qarshiligi, tashqi va ichki ishqalanish) kuchlari ta’sirlaridagi sistemaning harakatini olib ko‘raylik. U holda (22.4) tenglamadan

$T-T_0=P_0-P+A^d$ yoki $T+P=T_0+P_0+A^d$ bo‘ladi. (30.12’)

bu erda A^d - qarshilik kuchlarining bajargan ishlari. Qarshilik kuchlari, har doim harakat yo‘nalishiga teskari bo‘lganligi sababli A^d -ning

qiymati har doim *manfiy* ($A^d<0$) bo‘ladi. Demak, ko‘rilayotgan mexanik sistemaning harakatida mexanik energiyaning kamayishi (*ishga aylanishi*) yoki mexaniklar tili bilan aytilganda dissipatsiya (tarqalish, *yo‘qolmagan holda boshqa ko‘rinishga o‘tish, chunki umumiy energiyaning miqdori saqlanib qolinishi shart*) sodir bo‘ladi. Ushbu dissipatsiyani sodir etuvchi kuchlarni *dissipativ kuchlar* deb ataladi. Energiyasi dissipatsiya bo‘ladigan mexanik sistemani *dissipativ sistema* deb ataladi.

Masalan, yuqorida ko‘rib o‘tilgan (30.2 shakl) mayatnikning harakatida o‘qdagi ishqalanish va havoning qarshiligi ta’sirida mexanik energiya sekin-asta kamayib boradi, uning tebranishi esa so‘nib boradi, demak u dissipativ sistema ekan.

Yuqorida olingan natijalar, aslida umumiy energiyaning saqlanish qonuniga zid emas, chunki dissipativ sistemadagi kamayayotgan mexanik energiya, energiyaning boshqa turlariga aylanadi, masalan, issiqlik energiyasiga, bosim energiyasiga.

Lekin, qarshilik kuchlari mavjud bo‘lgan mexanik sistema ham dissipativ sistema bo‘lmasligi mumkin, buning uchun kamayayotgan energiyani tashqaridan keladigan energiya orqali *kompensatsiya* qilinib turilishi lozim. Masalan, soatlarning mayatniklaridagi energiyaning (*davriy ravishdagi*) tarqalishini zanjirga ulangan toshning pasayishi yoki soatga o‘rnatilgan spiralning elastiklik kuchi hisobidan, ya’ni tashqaridan kompensatsiya qilinib turiladi.

Natijada soatning mayatnigi so‘nmaydigan tebranma harakatda bo‘ladi, bunday hodisani *avtotebranish* deb ataladi. Avtotebranish hodisasini, majburiy tebranishlardan farqi shundan iboratki, birinchidan avtotebranishda davriy ravishda o‘zgaradigan qo‘zg‘atuvchi kuch ta’sir etmaydi, ikkinchidan amplitudasi, chastotasi va tebranish davri sistemani o‘zining xususiyatlaridan kelib chiqadi (majburiy tebranishlarda esa, qo‘zg‘atuvchi kuch davriy ravishda o‘zgaradi, hamda amplituda, chastota va tebranish davri qo‘zg‘atuvchi kuchga bog‘liq bo‘ladi).

Tayanch so‘z va iboralar: Kuch maydoni, kuch funktsiyasi, potentsial energiya, dissipatsiya, avtotebranish, kuch maydonida bajarilgan ish, sathlar, sath sirtlari.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.

Er atrofidagi kuch maydoni, harakatlanayotgan yoki fazoning ixtiyoriy nuqtasidagi o‘rniga bog‘liq ravishda, ularga ta’sir etib turar ekan.
Kuch maydonidagi har bir nuqta o‘ziga tegishli bo‘lgan kuch funktsiyasiga bo‘lar ekan.
Sath sirtlari deb, kuch funktsiyalari o‘zaro teng bo‘lgan sirtlarga aytilar ekan.
Kuch maaydonida bajarilgan ishni aniqlash uchun, sath sirtlari orasidagi farqni aniqlash kifoya qilar ekan.
Bitta kuch maydonidagi sath sirtlari o‘zaro kesishmaydigan sirtlardan iborat bo‘lar ekan.
Potentsial kuchning bajargan ishi, harakatlanayotgan nuqtaning boshlang‘ich va keyingi holatlaridagi potentsial energiyalarining ayirmasiga teng ekan.
Mexanik energiyani boshqa energiya turlariga aylanish hisobiag kamayib ketishi dissipatsiya hodisasi deb atalar ekan.
Mexanik soatning mayatnigi so‘nmaydigan tebranma harakatda bo‘ladi, bunday hodisani *avtotebranish* deb ataladi. Avtotebranish hodisasini, majburiy tebranishlardan farqi shundan iboratki, birinchidan avtotebranishda davriy ravishda o‘zgaradigan qo‘zg‘atuvchi kuch ta’sir etmaydi.

Takrorlash uchun savollar:

Kuch maydoni deb qanday maydonga aytiladi?
Potentsial maydondagi kuchning funktsiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
Kuch maydonida elementar ish qanday hisoblanadi?
Kuch maydonida to‘liq ishni qanday hisoblanadi?
Kuch funktsiyasining differentsiali nimani ifodalaydi?
Og‘irlik kuch maydoni qanday ko‘rinishda ifodalanadi?
Elastiklik kuch maydoni qanday ko‘rinishda ifodalanadi?
Tortilish kuch maydoni qanday ko‘rinishda ifodalandi?
Mexanik energiyani saqlanish qonunini ifodalab bering?
Qanday sistemada mexanik energiyani saqlanish qonuni o‘rinli bo‘ladi?
Dissipativ kuchlaar deganimizda nimani tushunasiz?
Avtotebranish hodisasi nimani anglatadi?
Avtotebranish bilan majburiy tebranish orasida qanday farq bor?

Mavzuni mustahkamlash uchun 30 ilovadagi masalalarni mustaqil echishni tavsiya qilamiz:

31 Ma’ruza

Mavzu: Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakati. Fizik mayatnik. Inertsiya momentlarini tajriba orqali aniqlash. Qattiq jismning tekislikka parallel harakati.

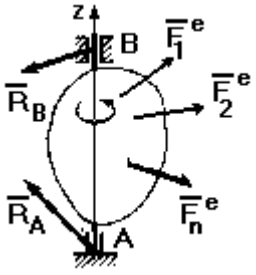
Reja:

Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakati.
Fizik mayatnik. Inertsiya momentlarini tajriba orqali aniqlash.
Qattiq jismning tekislikka parallel harakati.

Muammo: **Biz yuqorida mexanik sistema dinamikasining umumiy xarakteristikalari nimalardan iborat ekanligi xususida, hamda hamma mexanik sistemalar uchun o‘rinli bo‘lgan dinamik qiymatlarni o‘rganib chiqdik. Endi texnikada uchraydigan konkret jismlar va ularning turli harakatlarida sodir bo‘ladigan dinamik xususiyatlar ustida fikr yuritamiz.**

31.1§. Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakati

Dinamikaning umumiy teoremalarini qattiq jismning harakatlariga tadbiq qilishga oid masalalarini ko‘rib o‘tamiz. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning harakati, moddiy nuqtaning harakati bilan bir xil bo‘lganligi uchun, qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatidan boshlaymiz.



31.1 shakl

Qo‘zg‘almas o‘qqa ega bo‘lgan qattiq jismga (31.1 shakl) $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, ..., \bar{F}_n^e$ kuchlar sistemasi ta’sir etsin. Bir vaqtning o‘zida bu jismga podshipniklarning $\bar{R}_A$ va $\bar{R}_B$ reaktsiyalari ta’sir etadi. Noma’lum reaktsiya kuchlarini harakatning tenglamalaridan chiqarib tashlash uchun z - o‘qiga nisbatan momentlar teoremasidan foydalanamiz. $\bar{R}_A$ va $\bar{R}_B$ reaktsiya kuchlarining z - o‘qiga nisbatan momentlari nolga teng bo‘lganligi uchun

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z \text{ bu erdagi } M_z = \sum m_z(\bar{F}_k^e)$$

Bundan keyin M_z – ni *burovchi moment* deb ataymiz. $K_z=J_z\omega$ - ni yuqordagi tenglikka qo‘ysak

$$J_z\frac{d\omega}{dt}=M_z \quad \text{yoki} \quad J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M_z \text{ ni aniqlaymiz.} \qquad (31.1)$$

(31.1) tenglama *qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatining differentsial tenglamasi* deb ataladi. Shunga binoan, *jismning aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya momentini burchakli tezligiga ko‘paytmasi burovchi bosh momentga teng ekan:*

$$J_z\varepsilon=M_z \qquad (31.1')$$

(31.1’) tenglikdan ko‘rinib turibdiki, mazkur M_z uchun qanchalik inertsiya momenti katta bo‘lsa burchakli tezlanish shunchalik nisbatda kichkina bo‘ladi yoki aksincha. Shu sababli, jismning ilgarilama harakatida massa qanday rol o‘ynasa, aylanma harakatda inertsiya momenti ham shunday rol o‘ynaydi, ya’ni inertsiya momenti aylanma harakatning inertlik o‘lchovidan iborat ekan.

(31.1) formula yordamida: 1) agar jsmning aylanma harakat qonuni, ya’ni $\varphi=f(t)$ ma’lum bo‘lsa, burovchi moment M_z – ni aniqlash mumkin; 2) agar burovchi moment M_z ma’lum bo‘lsa, $\varphi=f(t)$ – ni, ya’ni jismning aylanma harakat qonunini yoki uning burchakli tezligi ω - ni aniqlash mumkin. Ikkinchi masalani echishda shunga alohida e’tibor berish lozimki, burovchi moment M_z umuman olganda o‘zgaruvchan qiymat bo‘lib t, ц va $\omega=\varphi$’ larning funktsiyasidan iborat bo‘lishi mumkin.

Aylanma harakatni o‘rganishda (31.1) tenglamaning o‘rniga kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasidan foydalanishimiz ham mumkin: $T-T_0=A^e$, bu erdagi T va A^e – lar (21.15) va (22.1) formulalar orqali aniqlanadi.

Quyidagi xususiy hollarni ko‘rib chiqamiz:

agar $M_z=0$ bo‘lsa, u holda $\omega=const$ bo‘ladi, ya’ni jism tekkis aylanma harakat qiladi;.

2) agar $M_z=const$ bo‘lsa, u holda $\varepsilon=const$ bo‘ladi, ya’ni jism tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat qiladi.

(31.1) tenglama, o‘z ko‘rinishi bo‘yicha nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakatining differentsial tenglamasiga juda o‘xshab ketadi. Shu sababli agar kuch F - ni, massa m - ni, koordinata x - ni, tezlik v – ni, tezlanish a-ni va aylanma harakatdagi jismning burovchi momenti M_z- larni, inertsiya momenti J_z, burilish burchagi φ, burchakli tezlik ω va burchakli tezlanish ε - lar bilan tegishlicha almashtirsak, nuqtaning

to‘g‘ri chiziqli harakati uchun chiqarilgan barcha formulalar o‘z kuchini saqlab qoladi.

Masalalarni echishda, agar sistema faqat bitta qattiq jismdan iborat bo‘lgan hollardagina (31.1) formuladan foydalanishimiz qulayroq bo‘ladi. Agar sistema aylanayotgan bitta qattiq jismdan tashqari yana boshqacha harakatlarda bo‘lgan (masalan, 28.5, 29.5 va boshqa masalalardagi kabi) qo‘shimcha jismlardan iborat bo‘lsa, u holda sistemaning harakat tenglamalarini umumiy teoremalar yoki 34.1§, 34.5§ larda keltirilgan usullar bilan tuzish tavsiya etiladi.

28.5 -ga o‘xshash masalalarni echishda, shunga e’tibor berish lozimki, barabanga kuch emas, balki -ga teng bo‘lmagan kuch, ya’ni ipning tortilish kuchi ta’sir etmoqda va baraban uchun (31.1) formula orqali olinadigan tenglama $J_O \cdot \varepsilon = F \cdot r - M_{ishq}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamani echish uchun F -ning qiymatini aniqlab beruvchi, ya’ni qo‘shimcha ravishda A yukning harakat tenglamasini tuzish lozim, bu esa hisobni murakkablashtiradi.

31.1 masala. Massasi -m bo‘lgan g‘ildirak O o‘q atrofida ω_0 burchakli tezlik bilan aylanmoqda (31.2 shakl). Ma’lum vaqtdan keyin tormozlash kolodkalarini kuch bilan g‘ildirakka bosadilar. Tormozlash kolodkasi bilan g‘ildirak orasidagi ishqalanish koeffitsienti *f*, g‘ildirakning radiusi r. Aylanish o‘qidagi ishqalanishni va spitsalarning massalarini hisobga olmasdan, g‘ildirakning qancha vaqtdan keyin to‘xtashi aniqlansin.

E ch i sh. Ishqalanish kuchining momenti manfiy ishorali bo‘lgani uchun (31.1) formula asosida differentsial tenglama tuzamiz

$$J_O \frac{d\omega}{dt} = -fQr, \qquad \text{(a)}$$

chunki $F = f \cdot Q$. Tenglamani integrallaymiz

$J_O\omega = -fQ\text{-}r\text{-}t + C_1$ topamiz.

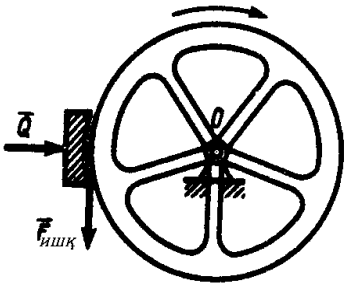
Boshlang‘ich shartlarga ko‘ra, t=0 da $\omega = \omega_0$ edi. Shu sababli $S_1 = J_O\omega_0$ bo‘ladi, natijada

$\omega = \omega_0 - f \cdot Q \cdot r \cdot t / J_O$ hosil bo‘ladi. (b)

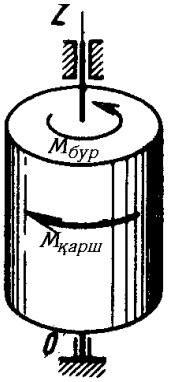
Baraban to‘xtaganda, uning burchakli tezligi $\omega = 0$ va $t = t_1$ bo‘ladi. Halqaning inertsiya momenti $J_O = mr^2$ ekanligini e’tiborga olib, ushbu qiymatlarni (b) tenglamaga qo‘ysak,

$$t_1 = \frac{J_O\omega_0}{fQr} = \frac{mr\omega_0}{fQ}$$ natijani olamiz.

Agar baraban to‘xtaguncha, necha marta aylanganligini aniqlash zarur bo‘lsa, (b) tenglamani yana bir marta integrallash lozim bo‘ladi, lekin undan osonroq yo‘l shuki, bu masalaga kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasini qo‘llash qulayroq hisoblanadi.



31.2 shakl



31.3 shakl

31.2 masala. Oz o‘qiga nisbatan inertsiya momenti J_z bo‘lgan, tsilindrsimon vertikal rotor (31.3 shakl), unga qo‘yilgan M_{bur} burovchi moment ta’sirida aylanma harakat oladi. Agar $\omega_0=0$ va havoning qarshiligi ω -ga proportsional, ya’ni $M_{qarsh}=\mu\omega$ bo‘lsa, rotorning burchakli tezligi ω -ning aylanishdagi qonuni aniqlansin.

E ch i sh. Aylanayotgan rotorning differentsial tenglamasi (31.1) formulaga ko‘ra (aylanish tomonga yo‘nalgan momentlar musbat ishorali bo‘ladi) quyidagicha bo‘ladi:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_{bur} - \mu\omega$$

O‘zgaruvchilarni ajratib, $\mu/J_z=n$ deb belgilaymiz va tenglikning ikkala tomonidan aniq integrallar olamiz, natijada

$$\int_0^{\omega} \frac{-\mu d\omega}{M_{\text{bur}} - \mu\omega} = -n\int_0^t dt$$

Bundan,

$$\ln \frac{M_{\text{bur}} - \mu\omega}{M_{\text{bur}}} = \text{-nt} \qquad \text{yoki} \qquad \frac{M_{\text{bur}} - \mu\omega}{M_{\text{bur}}} = e^{-nt} \text{ bo‘ladi.}$$

Bundan oxirgi natijani olamiz, ya’ni

$$\omega = \frac{M_{\text{bur}}}{\mu}(1 - e^{-nt}) \qquad \text{(a)}$$

Rotorning burchakli tezligi o‘zining chegaraviy

$$\omega_{cheg}=M_{bur}/\mu \qquad \text{(b)}$$

qiymatiga intilib vaqt mobaynida ortib boradi. Yuqorida aytilgan o‘xshatishlar, ya’ni massasi m bo‘lgan moddiy nuqtaning $\overline{F} = \overline{const}$ aktiv va $\overline{R} = -\mu\overline{v}$ qarshilik kuchi ta’sirlaridagi to‘g‘ri chiziqli harakati misol bo‘ladi. Shunga asosan nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakatidagi v -tezligi uchun (a) va (b) formulalardan quyidagi javobni olamiz

$v=(F/\mu)(1-e^{-nt})$ bu erdagi $n=\mu/m$ va $v_{cheg}=F/\mu$.

31.2§. Fizik mayatnik. Inertsiya momentlarini tajriba orqali aniqlash.

Fizik mayatnik deb, og‘irlik kuchi ta’sirida qo‘zg‘almas gorizontal o‘q atrofida tebranma harakat qilishi mumkin bo‘lgan qattiq jismga aytiladi.

Mayatnikni aylanish o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan va mayatnikning og‘irlik markazi S nuqtadan o‘tuvchi tekislik bilan kesamiz (31.4, a shakl).

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: R -mayatnikning og‘irligi, a- og‘irlik markazidan aylanish o‘qigacha bo‘lgan OS masofa, J_O - mayatnikning aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya momenti. Mayatnikning holati, OS chiziqning vertikal bilan tashkil etgan φ burchak orqali aniqlanadi.

Mayatnikning tebranish qonunini aniqlash uchun aylanma harakatning differentsial tenglamasidan, ya’ni (31.1) formuladan foydalanamiz. Ushbu masalada $M_z=M_O=-Rasin\varphi$ (manfiy ishoraning sababi shuki, $\varphi>0$ bo‘lsa moment manfiy va $\varphi<0$ bo‘lsa moment musbat bo‘ladi), natijada (31.1) tenglama, quyidagi ko‘rinishga keladi

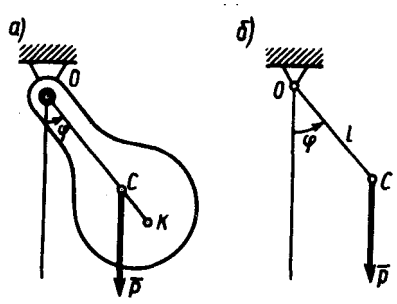
$$J_O=-Rasin\varphi.$$

Tenglamaning ikkala tomonini J_O -ga bo‘lib yuborsak va

$$Ra/J_O=k^2, \qquad (31.2)$$

belgilashni kiritsak, mayatnikning tebranma harakati differentsial tenglamasini hosil qilamiz

$$+k^2\sin\varphi=0.$$



31.4 shakl

Ushbu differentsial tenglama oddiy funktsiyalar orqali integrallanmaydi. Shu sababli, φ ning kichkina qiymatlarida taqriban $\sin\varphi\approx\varphi$ ekanligini e’tiborga olib, mayatnikning *kichkina tebranishlari*ni o‘rganish bilan chegaralanamiz. U holda yuqoridagi tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi

$$+k^2\varphi=0$$

Ushbu differentsial tenglamaning ko‘rinishi, moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli erkin tebranishlarining differentsial tenglamalariga o‘xshaydi, shu sababli 24.1§ dagi (24.4) tenglikning umumiy echimiga o‘xshash bo‘lgan echimni olamiz

$$\varphi=C_1\sin kt+C_2\cos kt.$$

Boshlang‘ich vaqtda, ya’ni t=0 da mayatnikni $\varphi=\varphi_0$ bo‘lgan kichkina burchakka og‘dirib, so‘ngra boshlang‘ich tezliksiz ($\omega=0$) qo‘yib yuborilgan deb hisoblab, tenglamadagi integral doimiylarini aniqlaymiz, ular $S_1=0$, $S_2=\varphi_0$ bo‘ladi. U holda, mayatnikning kichkina tebranishlarining shunday boshlang‘ich shartlar bo‘yicha harakat tenglamasi

$$\varphi=\varphi_0\cos kt.$$

Demak, fizik mayatnikning kichkina tebranishlari *garmonik* bo‘lar ekan. Agar k -ning (31.2) dagi qiymatini keltirib qo‘ysak, fizik mayatnikning tebranish davri kelib chiqadi

$$T_f=2\pi/k=2\pi, \qquad (31.3)$$

Ko‘rinib turganidek, kichkina tebranishlardagi tebranish davri boshlang‘ich og‘ishlik φ_0 ta’sir qilmas ekan. Bunday natija taqribiy hisoblanadi. Agar, olingan differentsial tenglamadagi φ ni kichkina emas deb hisoblab (φ ni $\sin\varphi$ bilan almashtirmasdan) integrallasak, T_f ning qiymati φ_0 ga bog‘liq bo‘ladi. Ushbu bog‘lanishlik taxminan quyidagicha bo‘ladi

$$T_f\approx 2\pi(1+/16).$$

Masalan, $\varphi_0=0{,}4$ rad ($\approx 25°$) bo‘lganda (31.3) formuladagi xatolik 1% ni tashkil etar ekan.

Olingan natijalar, *matematik mayatnik* deb ataluvchi, ya’ni uzunligi l -ga teng bo‘lgan va uning massasi yukning massasiga nisbatan hisobga olinmaydigan, hamda cho‘zilmaydigan ipga (31.4, b shakl), osib qo‘yilgan kichkina hajmda bo‘lgan (moddiy nuqta deb hisoblash mumkin bo‘lgan) yukdan iborat jismning tebranishlarini ham o‘z ichiga oladi. Matematik mayatnik, bitta moddiy nuqtadan iborat sistema bo‘lganligi uchun

$$J_O=ml^2=(R/g)l^2\ ,\ a=OS=l.$$

Bularni (31.3) tenglikka keltirib qo‘ysak, matematik mayatnikning tebranish davrini aniqlash formulasini olamiz

$$T_m=2\pi \qquad (31.3')$$

(31.3) va (31.3’) formulalarni solishtirsak, uzunligi

$$l_1= J_Og/Ra=J_O/Ma \qquad (31.4)$$

bo‘lgan ipga osilgan R yukdan iborat matematik mayatnikning va og‘irlik markazidan a -masofadagi o‘q atrofida tebranayotgan, shu og‘irlikdagi fizik mayatnikning tebranish davrlari o‘zaro teng bo‘lar

ekan. Ipning ushbu l_1 - uzunligini, *fizik mayatnikning keltirilgan uzunligi* deb ataladi.

Fizik mayatnikning aylanish o‘qidan OK= l_1 masofada joylashgan K nuqtasini, *tebranish markazi* deb ataladi (31.4 shakl).

Gyuygens teoremasiga asosan $J_O=J_S+Ma^2$, bo‘lganligi uchun, (31.4) formula quyidagi ko‘rinishga keladi

$$l_1=a+J_S/Ma. \qquad (31.4')$$

Demak, OK masofa har doim OS=a dan katta bo‘ladi, ya’ni fizik mayatnikning tebranish markazi har doim, uning og‘irlik markazidan pastroqda joylashar ekan.

(31.4’) formuladan ko‘rinib turgandek $KS=J_C/Ma$. Shu sababli, aylanish o‘qini K nuqtaga ko‘chirsak, hosil bo‘lgan mayatnikning keltirilgan l_2 - uzunligi (31.4’) formulaga asosan

$$l_2=KC+J_C/(M\cdot KC)= J_C/Ma+a=l_1$$

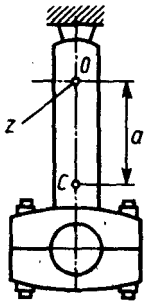
bo‘ladi. Demak, K va O nuqtalar o‘zaro almashinuvchi nuqtalar bo‘ladi, ya’ni aylanish o‘qi K nuqtadan o‘tsa, O nuqta tebranish markazi bo‘ladi (chunki $l_1=l_2$) va mayatnikning tebranish davri o‘zgarmaydi. Mayatnikning bunday xossasi, og‘irlik kuchining tezlanishini aniqlashda foydalaniladigan, almashinuvchi deb ataladigan mayatnikda qo‘llaniladi.

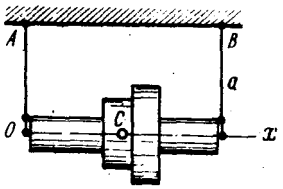
Inertsiya momentini tajriba orqali aniqlash. Jismlarning inertsiya momentlarini tajriba (mayatnik tebranishlari usuli) orqali aniqlash (31.3) formula orqali tebranish davrini aniqlashga asoslangan.

Masalan, 31.5 shaklda tasvirlangan R og‘irlikdagi jism (shatun)ning Oz o‘qiga nisbatan inertsiya momentini aniqlash zarur bo‘lsin. Jismning gorizontal holda yo‘nalgan Oz o‘qiga osib, kichkina tebranishlar beramiz va sekundomer yordamida uning tebranish davri T -ni aniqlaymiz. So‘ngra tortib ko‘rish usuli bilan OS=a (*ya’ni og‘irlik markazigacha bo‘lgan*) masofani aniqlaymiz. Ushbu qiymatlarni (31.3) formulaga keltirib qo‘ysak

$$J_{Oz}=RaT^2/4\pi^2.$$

Agar, og‘irlik markazidan o‘tuvchi Ox o‘qiga nisbatan inertsiya momentini aniqlash zarur bo‘lsa, u holda jismni ikkita shtangaga (sterjenga) mahkamlaymiz va shu shtangalarning ikkinchi uchidan o‘tuvchi AV (bu, a - masofa ekanligini bildiradi) o‘qqa osib qo‘yamiz. Shunga e’tibor berish lozimki jismning o‘qi gorizontal holatda bo‘lishligi kerak (31.6 shakl).





31.5 shakl 31.6 shakl

Yuqoridagi tajriba orqali AV o‘qqa nisbatan inertsiya momentini aniqlaymiz, so‘ngra izlanayotgan inertsiya momentini Gyugens teoremasi orqali aniqlaymiz:

$$J_{ox}=J_{AV}-(R/g)a^2.$$

31.3§. Qattiq jismning tekislikka parallel harakati.

Tekislikka parallel harakatdagi qattiq jismning ixtiyoriy olingan vaqtdagi holati, qutbning harakati va jismning qutb atrofidagi aylanma harakati orqali aniqlanadi. Agarda qutbni jismning og‘irlik markaziga joylashtirilsa (31.7 shakl) va jismning holatini x_C, y_C va φ burchak orqali aniqlanilsa, tekislikka parallel harakatdagi jismlarning dinamikaga oid masalalarini echish nihoyat soddalashadi.

31.7 shaklda jismning harakatiga parallel bo‘lgan va og‘irlik markazi S nuqtadan o‘tuvchi tekislik bilan kesilgan yuzasi tasvirlangan. Jismga, shu kesim yuzasida joylashgan „.. lardan iborat tashqi kuchlar ta’sir etsin. U holda, S nuqtaning harakatini, massa markazini harakatini o‘zgarish teoremasi orqali aniqlaymiz

$$M_S=\sum, \qquad (31.5)$$

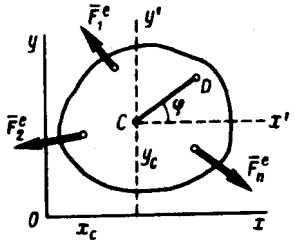
Jismning S markaz atrofidagi aylanma harakatini esa, (31.1) tenglama orqali aniqlaymiz, chunki bu teoremadan olingan natija, massa markazi atrofidagi aylanma harakatda ham o‘rinli bo‘ladi. (31.5) tenglamaning ikkala tarafini koordinat o‘qlarga proektsiyalab, quyidagini olamiz

$$Ma_{Sx}=\sum, \quad Ma_{Su}=, \quad J_C\cdot\varepsilon=\sum m_C(). \qquad (31.6)$$

yoki

$$M_S=\sum, \quad M_S=, \quad J_C\cdot=\sum m_C(). \qquad (31.6')$$

(31.6) tenglama *qattiq jismning tekislikka parallel harakatining differentsial tenglamasi* deb ataladi. Ularning yordamida, berilgan kuchlarga bog‘liq ravishda jismning harakat qonuni aniqlanadi yoki harakat qonuni ma’lum bo‘lsa, unga ta’sir etuvchi kuchlarning bosh vektorini va bosh momentini aniqlash mumkin.



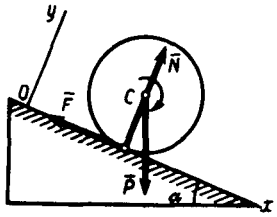
31.7 shakl.

Erkin bo‘lmagan harakatda, agar massa markazining traektoriyasi ma’lum bo‘lsa, S nuqtaning harakatini tenglamasini urinma τ va normal n o‘qlaridagi proektsiyalar orqali aniqlash qulayroq bo‘ladi. U holda (31.6) sistema o‘rniga:

$$M=\sum, \quad M=\sum, \quad J_C\cdot=\sum m_C(). \qquad (31.7)$$

bu erdagi ρ_S -massa markazining egrilik radiusi.

Agar jismning harakati erkin bo‘lmasa, u holda (31.6) va (31.7) tenglamaning o‘ng tomonlariga bog‘lanishlarning noma’lum reaktsiyalarining proektsiyalari va momentlari ham qo‘shiladi. Ularni aniqlash uchun, jismga qo‘yilgan bog‘lanishlarning shartlaridan kelib chiquvchi, qo‘shimcha tenglamalar (31.3 masalaga q.) tuzish kerak bo‘ladi. Erkin bo‘lmagan qattiq jismning harakatini o‘rganishda, ko‘pincha (31.6) va (31.7) tenglamalardan birining o‘rniga jismning kinetik energiyasini o‘zgarish teoremasidan kelib chiqadigan tenglama ishlatiladi.



31.8 shakl.

31.3 masala. Bir jinsli yaxlit tsilindr α burchak ostidagi qiyalikdan pastga qarab dumalab tushib kelmoqda (31.8 shakl). Sirpanishsiz dumalash mumkin bo‘lgan quyidagi ikki holat: 1) dumalashdagi qarshilikni hisobga olmagan holat; 2*)dumalashdagi qarshilikni hisobga olingandagi (dumalashdagi ishqalanish koeffitsienti k va tsilindrning radiusi R ma’lum) holatlar uchun tsilindr markazining tezlanishini va tsilindr bilan tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti f -ning eng kichik qiymati aniqlansin.

E ch i sh. 1. Tsilindrga qo‘yilgan kuchlarni shaklda tasvirlaymiz: og‘irlik kuchi =m, sirpanishsiz dumalash uchun zarur bo‘lgan eng kam bo‘lgan ishqalanish kuchi , dumalashdagi qarshilikni hisobga olinmagan holda, tekislikning urinish nuqtasiga qo‘yiladigan reaktsiyasi . Ox o‘qini qiya tekislik bo‘ylab (*harakat tomonga*), Ou o‘qni unga perpendikulyar ravishda yo‘naltiramiz.

Tsilindrning massasini markazi Ou o‘qi bo‘ylab harakatlanmaganligi uchun, $a_{Su}=0$ bo‘ladi va (31.6) tenglamalarning birinchisidan

$$N-R\sos\alpha=0, \text{ bundan } N=R\sos\alpha \text{ hosil bo‘ladi.}$$

(31.6) sistemaning qolgan tenglamalarini tuzishda, $a_{Sx}=a_S$ va burovchi moment harakat tomonga yo‘nalganda uning ishorasini musbat deb olinishini hisobga olib, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$ma_C=R\sin\alpha-F, \quad J_C\cdot\varepsilon=FR \qquad (a)$$

(a) tenglamalar uchta a_S, ε va F (bu erda $F=fN$, deb hisoblash mumkin emas, chunki bunday holda jism tekislik ustida sirpanib harakat qiladi, sirpanish yo‘q bo‘lgan holatda esa $F\le fN$ bo‘ladi. Shuning uchun, sof dumalashdagi S nuqtaning tezligi $v_C=\omega R$ va undan olingan hosila $a_S=\varepsilon R$ ekanligidan foydalanib, qo‘shimcha tenglama olamiz. U holda, yaxlit tsilindr uchun $J_C=mR^2/2$ ekanligini hisobga olib, (a) tenglamalarning ikkinchisidan,

$$ma_S/2=F \text{ bo‘ladi.} \qquad (b)$$

a - ning ushbu qiymatini (a) dagi birinchi tenglamaga keltirib qo‘ysak

$$a_S=(2/3)g\sin\alpha \text{ kelib chiqadi.} \qquad (v)$$

Endi, (b) tenglamadan

$$F=(R/3)\sin\alpha \text{ ni aniqlaymiz.} \qquad (g)$$

Tsilindr sirpanmasdan dumalab harakat qilishi uchun, zarur bo‘lgan eng kichkina ishqalanish kuchi F -ning qiymatini aniqladik. Yuqorida $F\le fN$ ekanligi aytib o‘tilgan edi. Demak, sof dumalash sodir bo‘lishi uchun

$$(R/3)\sin\alpha\le fR\sos\alpha \text{ yoki } f\ge(tg\alpha)/3,$$

bo‘lishi shart. Agar ishqalanish koeffitsienti bundan kichkina bo‘lsa, u holda F kuchining qiymati (g) tenglama orqali aniqlanadigan qiymatni olishi mumkin emas va tsilindr qisman sirpanib dumalaydi. Bu holda v_C va ω lar $v_C=\omega R$ tenglik orqali (tsilindrning tekislikka urinish nuqtasi oniy aylanish markazi bo‘la olmaydi) bog‘lana olmaydilar, ammo F - o‘zining chegaraviy qiymatini oladi, ya’ni $F=fN=fR\sos\alpha$ va (a) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi

$$(R/g)a_C=R(\sin\alpha-f\sos\alpha), \quad RR^2\varepsilon/2g=fRR\sos\alpha,$$

bundan

$$a_S=g(\sin\alpha-f\cos\alpha); \qquad \varepsilon=(2gf/R)\cos\alpha \qquad (d)$$

Bunday holda, tsilindrning markazi a_S tezlanish bilan, tsilindrning burchakli tezlanishi esa ε harakat qiladi va ularning son qiymatlari (d) tenglamalar orqali aniqlanadi.

2*. Dumalanishdagi qarshilikni hisoblashda, tekislikning normal reaktsiya kuchi , harakat tomonga qarab (o‘ziga parallel holda, 308, b shaklga q.) k masofaga siljigan bo‘ladi va uning S markazga nisbatan momenti -kN bo‘ladi. U holda (a) tenglamalarning ikkinchisi quyidagi ko‘rinishga keladi:

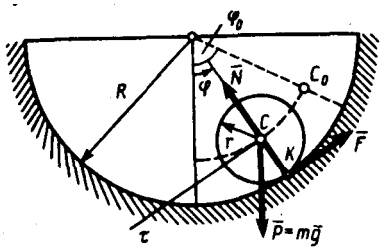
$$J_C\cdot\varepsilon=FR-kN \quad \text{yoki} \quad mR^2\varepsilon/2=FR-kN \qquad (e)$$

Qolgan tenglamalar o‘z kuchini saqlab qoladi, ya’ni ilgarigi holicha qoladi

$$N=R\cos\alpha, \qquad ma_C=R\sin\alpha-F \qquad (j)$$

Ushbu holatda $a_S=\varepsilon R$ ekanligini e’tiborga olib (a) va (j) tenglamalardan, masalaning javobini olamiz,

$$a_S=g(\sin\alpha-\cos\alpha), \qquad F=(\sin\alpha+\cos\alpha).$$



31.9 shakl.

Bundan so‘ng, $F\le fN$ tengsizlik orqali, sirpanmasdan sof dumalanish uchun zarur bo‘lgan ishqalanish koeffitsientining qiymati f -ni aniqlaymiz, ya’ni $f\ge[(tg\alpha)/3+2k/3R]$.

31.4 masala. Radiusi R bo‘lgan g‘adir-budur tsilindrik sirt ustida (31.9 shakl), radiusi r bo‘lgan bir jinsli tsilindr, φ_0 orqali aniqlanadigan boshlang‘ich holatdan boshlab dumalab harakatlanmoqda. Dumalashdagi qarshilikni hisobga olmagan holda, φ_0 ning kichkina qiymatlari uchun, tsilindrning harakat qonuni aniqlansin. Hamda, agar tsilindrning sirtga ishqalanish koeffitsienti *f* bo‘lsa, φ_0 ning qaysi qiymatlarida sirpanishsiz dumalash sodir bo‘lishligi aniqlansin.

E ch i sh. Tsilindrning pastga qarab qilgan harakatini ko‘rib chiqamiz (harakat vertikal tekislikda sodir bo‘ladi). φ -ning ixtiyoriy holatida, tsilindrga uning og‘irlik kuchi =m, sirpanib ishqalanish kuchi va reaktsiya kuchi ta’sir etadi. Tsilindrning S markazidan uning traektoriyasiga(harakat yo‘nalishi tomonga qarab) $S\tau$ - urinma o‘tkazamiz. Tsilindr uchun $J_C=mr^2/2$ ekanligini e’tiborga olib (31.7) tenglamaning birinchi va uchinchi tenglamasini tuzamiz,

$$M=mg\sin\varphi-F, \quad =Fr, \qquad (a)$$

bu erdagi ω -tsilindrning burchakli tezligi.

Barcha tezliklarni -orqali ifodalab olamiz. Oniy tezliklar markazi K nuqtada joylashganligini va tsilindrning pastga qarab qilgan harakatida uning φ burchagi kamayib borayotganligi sababli, <0 bo‘lishini e’tiborga olsak,

$$v_C=-(R-r), \qquad \omega= v_C/r=-(R-r)/r.$$

v_C va ω ning ushbu qiymatlarida, (a) tenglamaning ko‘rinishi:

$$m(R-r)=-mg\sin\varphi+F, \qquad m(R-r)=-2F \qquad (b)$$

(b) dagi tenglamalardan F -ni yo‘qotib yuborib, S markazining harakatini aniqlovchi, differentsial tenglamaning oxirgi ko‘rinishini yozamiz

$$+k^2\sin\varphi=0 \qquad k^2=2g/3(R-r).$$

Tsilindrning harakatida $\varphi \le \varphi_0$ bo‘lganligi uchun, φ_0 kichkina qiymatlarida taqriban $\sin\varphi\approx\varphi$ deb hisoblash mumkin bo‘ladi. U holda, bizga tanish bo‘lgan garmonik tebranma harakatning differentsial tenglamasini olamiz.

$$\ddot{\varphi} +k^2\varphi=0 \qquad (v)$$

Ushbu masalada, t=0 da $\varphi=\varphi_0$ va =0 bo‘ladi. Ushbu boshlang‘ich shartlarga asosan (v) tenglamani integrallasak, tsilindrning kichkina tebranishlarining qonunini aniqlaymiz

$$\varphi=\varphi_0\text{soskt} . \qquad (g)$$

Tebranishlar davri

$$\tau=2\pi/k=2\pi\sqrt{3(R-r)/2g}$$

Endi F≤fN asosan, sirpanmasdan dumalanish shartini aniqlaymiz. F -ning qiymatini (b) tenglamalarning ikkinchisi orqali hisoblaymiz:

$$F=-m(R-r)/2.$$

Lekin (v) tenglamaga asosan $=-k^2\varphi$ va $k^2=2g/3(R-r)$ ekanligini hisobga olsak,

$$F=(mg/3)\varphi \text{ bo‘ladi.}$$

E’tiborni shunga qaratish lozimki, φ - ning kichkina qiymatlarida, tsilindr dumalayotgan sirtning bir qismi uchun, taqriban N=R=mg va gorizontal tekislikda dumalayotganday deb qarash mumkin ekan. U holda F≤fN tengsizlikdan φ≤3f bo‘lishligini aniqlaymiz. φ -ning eng katta qiymati faqat φ_0 bo‘lishi mumkinligi sababli, agar $\varphi_0\le3f$ bo‘lsa, tsilindrning kichkina tebranma harakatlaridagi dumalashi sirpanishsiz sodir bo‘lar ekan.

31.5 masala. Og‘irligi R bo‘lgan jism V nuqtada, bosim kuchini o‘lchovchi priborning p’ezoelektrik datchigiga tayanib turar ekan, A nuqtada esa, AD ipga osib qo‘yilgan (31.10 shakl). Muvozanat holatda

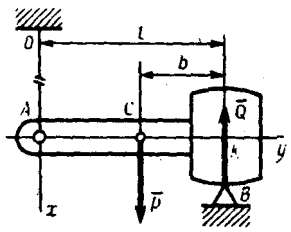
AS chizig‘i gorizontal va V nuqtadagi bosim kuchi esa Q_0 bo‘ladi. Agar ipni yondirib yuborilgan paytda V nuqtaning shu ondagi bosim kuchi Q_1 ga teng bo‘lsa, jismning massa markazi S nuqtadan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti J_C aniqlansin. Masofa - l berilgan.

E ch i sh. 1. Muvozanat holatda $Q_0l=R(l-b)$. Bundan $b=(R-Q_0)l/R$ bo‘ladi.

2. Ip kuydirib yuborilganda, jism tekislikka parallel harakat qila boshlaydi. Boshlang‘ich elementar vaqt uchun, jismning holatini saqlab turaylik. U holda (31.6) tenglama faqat shu elementar vaqt uchungina o‘rinli bo‘ladi va uning ko‘rinishi:

$$Ma_{Sx}=R-Q_1, \quad a_{Cy}=0, \quad J_C\cdot\varepsilon=Q_1b \qquad (a)$$

bo‘ladi. $a_{Su}=0$ bo‘lganligi sababli, S nuqta vertikal ravishda pastga qarab harakat qiladi, V nuqta esa gorizontal bo‘yicha sirpanadi (tayanchdagi ishqalanishni, juda kichkina deb hisoblaymiz). Shu harakatlarga perpendikulyarlar o‘tkazib, oniy tezliklar markazi bo‘lgan K nuqtaning o‘rnini aniqlaymiz. Shu sababli $v_C=b\omega$ bo‘ladi. Bu tenglikni differentsiallab va shu elementar vaqt uchun b=sonst deb hisoblasak $a_S=b\varepsilon$ bo‘ladi. U holda (a) tenglamalarning birinchisidan



31.10 shakl.

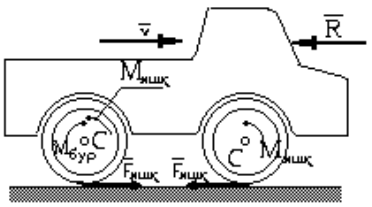
$$Rb\varepsilon=(R-Q_1)g.$$

Bundan ε ning qiymatini aniqlab, so‘ngra

$$J_C=Q_1b/\varepsilon=RQ_1b^2/(R-Q)g.$$

Yuqoridagi olingan natijalardan, jismlarning inertsiya momentlarini tajriba usuli bilan aniqlashda foydalanish mumkin bo‘ladi.

31.6 masala. Avtomobilning g‘ildiraklari bilan birgalikdagi og‘irligi R (31.11 shakl). To‘rtta g‘ildiraklarning har birining og‘irliklari r, radiusi r, S o‘qqa nisbatan inertsiya radiuslari ρ_S.



31.11 shakl

Avtomobilning orqa (etaklovchi) g‘ildiraklariga M_{bur} - burovchi moment qo‘yilgan. Avtomobil harakatini tinch holatdan boshlab, tezligining kvadratiga proportsional bo‘lgan havoning qarshilik kuchi $R=\mu v^2$ -ga uchraydi. Har bir o‘qlardagi ishqalanish momentlari M_{ishq}=sonst. G‘ildiraklarning dumalashlaridagi qarshilikni hisobga olmagan holda: 1) avtomobilning chegaraviy tezligini; 2) etaklovchi va etaklanuvchi g‘ildiraklarga sirpanib ishqalanish kuchlarining qiymatlari aniqlansin.

E ch i sh. Avtomobilning chegaraviy tezligini aniqlash uchun (49) tenglikdan foydalanib avtomobilning harakat differentsial tenglamasini tuzamiz

$$dT=\sum+\sum. \qquad (a)$$

Avtomobilning kinetik energiyasi, uning kuzovi va g‘ildiraklari kinetik energiyalarining yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Avtomobilning umumiy og‘irligi R va $v=\omega r$ (chunki, v_C -g‘ildirakning markazining tezligi kuzovning v -tezligiga teng bo‘ladi) ekanligini e’tiborga olsak

$$T=Rv^2/2g+4(J_C\omega^2/2)=(R+4r/r^2)2g \text{ ni olamiz,}$$

ω -g‘ildiraklarning burchakli tezlikalari deb hisoblangan.

Tashqi kuchlardan faqat havoning qarshilik kuchi ish bajaradi, chunki dumalashdagi qarshilik kuchlarini hisobga olmadik va g‘ildiraklarning tuproqqa ko‘rsatgan $_1$ va $_2$ ishqalanish kuchlarining bajargan ishlari nolga teng. Shu sababli

$$\sum=-Rds=-\mu v^2 ds,$$

bu erdagi ds- kuzovning elementar ko‘chishi.

Agar $ds_C=ds=rd\varphi$, φ -g‘ildirakning burilish burchagi bo‘lsa, ichki kuchlarning (o‘qlardagi burovchi momentlar va ishqalanish momentlarining) bajargan ishlari

$$\sum=(M_{bur}-4M_{ishq})d\varphi=(M_{bur}-4M_{ishq})ds/r \text{ bo‘ladi.}$$

Ushbu qiymatlarni (a) tenglamaga qo‘yib, tenglamaning ikkala tomonini dt ga qisqartirib yuboramiz hamda $ds/dt=v$ va $dv/dt=a$ ekanligini e’tiborga olsak

$$(R+4r/r^2)\, va/g=(M_{bur}/r-4M_{ishq}/r-\mu v^2)v \text{ ni topamiz,}$$

v – ga qisqartirsak,

$$(R+4r/r^2)a=(M_{bur}-4M_{ishq}-\mu v^2)v. \qquad (b)$$

Tezlik chegaraviy qiymatiga yaqinlashganda, uning tezlanishi a - nolga teng intiladi. Demak, v_{cheg} ning qiymatini

$$M_{bur}-4M_{ishq}-\mu r v^2=0$$

tenglama orqali aniqlaymiz. Bundan

$v_{cheg}=\sqrt{(M_{бур}-4M_{кщч})/\mu r}$ hosil bo‘ladi.

Ushbu natijani bajarilgan barcha ishlarni nolga tenglash orqali ham aniqlash mumkin edi. Yuqoridagi hisoblashlarni bajarilishdan asosiy kutilgan maqsad, harakatning (b) tenglamasini qanday tuzish lozimligini ko‘rsatishdan iborat edi.

2. Har bir g‘ildirakka ta’sir etuvchi ishqalanish kuchlarini aniqlash uchun g‘ildiraklarning o‘z o‘qlariga nisbatan aylanma harakatlarining tenglamalarini tuzamiz. Ikkita etaklovchi orqa g‘ildiraklarga ta’sir etuvchi ishqalanish kuchlar $_1$ ning yo‘nalishlari harakat tomonga (26.5§ dagi 26.3 shaklga q.) yo‘nalganliklari uchun

$$2r\cdot\varepsilon/g= M_{bur}-2M_{ishq}-2F_1r \text{ olamiz}$$

Dumalashda $\varepsilon r=a_C=a$ bo‘lganligi uchun,

$$F_1=M_{bur}/2r-M_{ishq}/r- ra/gr^2 \text{ topamiz.} \qquad (v)$$

Har bir etaklanuvchi g‘ildiraklarga ta’sir etuvchi ishqalanish kuchlari harakatga teskari yo‘nalgan. Shu sababli etaklanuvchi g‘ildiraklar uchun

$$ra/g=F_2r- M_{ishs}$$

bundan

$$F_2= M_{bur}/r+ra/gr^2 \text{ hosil bo‘ladi.} \qquad (g)$$

(b) tenglikdan ko‘rinib turibdiki, tezlikning ortishi bilan tezlanish *a* kamayib boradi, tezlik v chegaraviy qiymatga v_{cheg} intilganda, *a* nolga intiladi. Shunday qilib, etaklovchi g‘ildiraklarga ta’sir etuvchi ishqalanish kuchlari avtomobilning tezligini oshirishda birmuncha oshadi va u o‘zining eng katta o‘rnashilgan qiymatiga erishganda a=0 bo‘ladi. Agar *a* ning qiymatini (b) ga qo‘ysak, ko‘rinib turgandek oxirgi yig‘indi birinchi yig‘indidan juda kichik ekan, chunki R≥r. Shu sababli, F_1 ning qiymati unchalik katta o‘zgarmaydi.

Etaklanuvchi g‘ildiraklarga ta’sir etuvchi qarshilik kuchlarining eng katta qiymati harakat boshlanishida ro‘y beradi, keyinchalik kamayib boradi va a=0 bo‘lganda o‘zining eng kichik - M_{bur}/r qiymatiga erishadi.

Agar g‘ildiraklar bilan tuproq orasidagi ishqalanish koeffitsienti F_1 va F_2 kuchlarni hosil qilish uchun kichkina bo‘lsa, u holda shu g‘ildirak o‘z o‘rnida aylana boshlaydi (buksovat qiladi). M_{bur} moment M_{ishq} -dan juda katta bo‘lganligi sababli, birinchi navbatda etaklovchi g‘ildiraklar o‘z o‘rnilarida qolib sirpana boshlaydilar («buksovat» qila boshlaydi).

O‘chirilgan dvigatelda barcha g‘ildiraklar etaklanuvchi bo‘ladilar va ularga $F=M_{ishq}/r$ dan iborat bo‘lgan ishqalanish kuchlari ta’sir etadi. Tormozlash kolodkalarining ishga tushirilishlari ham M_{ishs} momentining ortishiga ekvivalent bo‘ladi, shu sababli har bir g‘ildirakka ta’sir etuvchi ishqalanish kuchini orttiradi va natijada avtomobilni tormozlanishi tezlashadi (26.5§ ga q.).

Tayanch so‘z va iboralar: qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatining differentsial tenglamasi, fizik mayatnik, matematik mayatnik, fizik mayatnikning keltirilgan uzunligi, chastotasi, amplitudasi, boshlang‘ich fazasi, tekis aylanma harakat, tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.

Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi harakatini differentsial tenglamasini tuzish uchun, harakat miqdori momentini o‘zgarish teoremasidan foydalanish lozim ekan.

Agar jismga ta’sir etuvchi kuchlarning aylanish o‘qiga nisbatan bo‘lgan momentlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, jism tekis aylanma harakat qilar ekan.

Agar jismga ta’sir etuvchi kuchlarning aylanish o‘qiga nisbatan bo‘lgan momentlarining yig‘indisi o‘zgarmas qiymatga ega bo‘lsa, jism tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat qilar ekan.

Ixtiyoriy qattiq jismni massa markazidan o‘tmaydigan o‘qqa osib qo‘yilsa, bunday jism fizik mayatnik deb atalar ekan.

Fizik mayatnikning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi tebranma harakati, kinetik momentning o‘zgarish teoremasi orqali ifodalanar ekan.

Fizik mayatnikning tebranish davri ga teng bo‘lgan davr bilan tebranuvchi matematik mayatninkning uzunligi, fizik mayatnikning keltirilgan uzunligi deb atalar ekan.

Fizik mayatnikning chastotasi, uning aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya momentiga bog‘liq ekan

Fizik mayatnikning amplitudasi, uning chastotasiga bog‘liq bo‘lmas ekan.

Fizik mayatnikning aylanish o‘qidan $OK=l_1$ masofada joylashgan K nuqtasini, *tebranish markazi* deb atalar ekan.

Fizik mayatnikning tebranishlar chastotasini tajriba usulida aniqlash orqali jismning inertsiya momentini aniqlash mumkin ekan.

Takrorlash uchun savollar:

Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatini differentsial tenglamasi qaysi teorema orqali tuziladi?
Jismga ta’sir etuvchi kuchlarning aylanish o‘qiga nisbatan momentlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, jism aylanishi mumkinmi?
Jismga ta’sir etuvchi kuchlarning aylanish o‘qiga nisbatan momentlarining yig‘indisi o‘zgarmas qiymatdan iborat bo‘lsa, jism qanday aylanadi?
Jismga ta’sir etuvchi kuchlarning aylanish o‘qiga nisbatan momentlarining yig‘indisi o‘zgaruvchan qiymatdan iborat bo‘lsa, jismning aylanish qonuni qanday o‘zgaradi?
Fizik mayatnik deb qanday qurilmaga aytiladi?
Fizik mayatnikni matematik mayatnikdan farqi nimada?
Fizik mayatnikni keltirilgan uzunligi deb nimaga aytiladi?
Fizik mayatnikning tebranish markazi deb qaysi nuqta aytiladi?
Fizik mayatnikning tebranish chastotasi nimalarga bg‘og‘liq o‘zgaradi?
Bir xil qattiq jismlan ikki xil chastotali fizik mayatnik hosil qilish mumkinmi?
Fizik mayatnikning tebranish amplitudasi nimaga bog‘liq o‘zgarishi mumkin?
Fizik mayatnikni amplitudasi bilan uning tebranish chastotasi orasida bog‘lanish bormi?
Qattiq jismning tekislikka parallel harakatini differentsial tenglamasini yozib bering?

Mavzuni mustahkamlash uchun 31 ilovadagi masalalarni mustaqil ravishda echishni tavsiya qilamiz:

32 Ma’ruza

Mavzu: Dalamber printsipi. Nuqta va mexanik sistema uchun Dalamber printsipi. Inertsiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti. Aylanayotgan jismning o‘qiga ta’sir etayotgan dinamik reaktsiyalar. Aylanayotgan jismlarni muvozanatlash.

Reja:

Dalamber printsipi. Nuqta va mexanik sistema uchun Dalamber printsipi.

Inertsiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti.

Aylanayotgan jismning o‘qiga ta’sir etayotgan dinamik reaktsiyalar.

Aylanayotgan jismlarni muvozanatlash.

Muammo: Ushbu mavzugacha bo‘lgan mexanika masalalarini echish usullari, bevosita Nyutonning qonunlari yoki ularning asosida keltirilib chiqarilgan tenglamalar yoki teoremalar yordamida bajarildi. Lekin bunday masalalarni echish yo‘li yagona hisoblanmaydi. Olimlar tomonidan tasdiqlandiki, mexanik sistemaning harakati va muvozanatining tenglamalarini olishda Nyuton qonunlarining o‘rniga, *mexanika printsiplari* deb ataluvchi umumiy qoidalar orqali ham amalga oshirish mumkin ekan. Ushbu mavzuda, *Dalamber printsipi* deb ataladigan, mexanikaning umumiy printsiplaridan biri bayon etiladi.

32.1§. Nuqta va mexanik sistema uchun Dalamber printsipi.

Avvalo, ushbu printsipning bitta moddiy nuqta uchun bo‘lgan ifodasini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, massasi m ga teng bo‘lgan moddiy nuqtaga teng ta’sir etuvchisi bo‘lgan aktiv kuchlar sistemasi va bog‘lanish (agar nuqta erkinmas bo‘lsa) reaktsiyasi ta’sir etsin. Moddiy nuqta shu kuchlarning ta’sirida inertsial sistemaga nisbatan -tezlanish bilan harakat qilsin.

Quyidagi kattalikni kiritamiz,

$$F=-ma \qquad (32.1)$$

ushbu qiymatning o‘lchov birligi kuchning o‘lchov birligi bilan bir xil. Moduli nuqtaning massasini uning tezlanishiga ko‘paytamasiga teng bo‘lgan, yo‘nalishi esa tezlanishga teskari bo‘lgan vektor qiymatni nuqtaning *inertsiya kuchi* deb ataladi.

U holda, nuqtaning harakati quyidagi xossaga ega ekanligini aniqlaymiz: nuqtaning harakatidagi qaysi vaqt bo‘lishidan qat’iy nazar agar, nuqtaga ta’sir etayotgan aktiv va reaktiv kuchlarga inertsiya kuchi qo‘shilsa, hosil bo‘lgan kuchlar sistemasi muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasi bo‘lar ekan, ya’ni

$$F+J+N=0 \qquad (32.2)$$

Ushbu qoida, moddiy nuqta uchun Dalamber printsipini ifodalab beradi. Ushbu printsip, Nyutonning ikkinchi qonuniga ekvivalent va aksincha ekanligi ko‘rinib turibdi. Haqiqatdan ham, ushbu moddiy nuqta uchun Nyutonning ikkinchi qonuni m=+ tenglamani beradi. m qiymatni tenglamaning o‘ng tomoniga o‘tkazib, (32.1) belgilashni e’tiborga olsak, (32.2) tenglamaga qaytamiz. Aksincha, (32.2) tenglikdagi -ni tenglamaning boshqa tomoniga o‘tkazib, (32.1) belgilashni e’tiborga olsak, Nyutonning ikkinchi qonunini ifodasini olamiz.

Endi, n - ta moddiy nuqtalardan iborat bo‘lgan mexanik sistemani olib ko‘raylik. Shu moddiy nuqtalardan massasi m_k bo‘lgan ixtiyoriy bittasini «ajratib», uning harakatini tekshirib ko‘ramiz (bunda, nuqtani sistemaning ichidan tashqariga ajratib olish deb tushunmaslik lozim). Ushbu nuqtaga ta’sir etuvchi tashqi va ichki va kuchlar (bularning ichiga aktiv kuchlar va bog‘lanishlar reaktsiyalari ham kiradi) ta’sirida, inertsial hisob sistemasiga nisbatan qandaydir $_k$ tezlanish bilan harakat qiladi. Ushbu nuqta uchun inertsiya kuchi $=-m_k$ ni kiritsak, (32.2) tenglikka ko‘ra

$$F+J+N=0 \text{ bo‘ladi.} \qquad (32.2’)$$

ya’ni , va lar muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadi. Sistemaning har bir nuqtasi uchun, shunday mulohazalarni kiritib, sistema uchun Dalamber printsipini ifodalovchi natijaga kelamiz: *harakatning qaysi davri bo‘lishidan qat’iy nazar, sistemaning har bir nuqtasiga, unga ta’sir etuvchi tashqi va ichki kuchlarga qo‘shimcha ravishda inertsiya kuchini qo‘shsak, u holda hosil bo‘ladigan kuchlar sistemasi muvozanatlashuvchi sistema bo‘ladi va unga statikaning barcha tenglamalarini qo‘llash mumkin bo‘ladi.*

Sistema uchun Dalamber printsipining matematik ifodasi (32.2’) tenglikdagi n ta vektor tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi va ular 26.3§ da olingan sistema harakatining differentsial tenglamalari (26.2) - ga ekvivalent bo‘ladi. Shu sababli, Dalamber printsipidan (26.2) tenglamadan olingan kabi, dinamikaning barcha umumiy teoremalarini keltirib chiqarish mumkin.

Dalamber printsipining mohiyati shundan iboratki, dinamika masalalarini echishda undan bevosita qo‘llanilganda, sistema harakatining tenglamasi bizga yaxshi tanish bo‘lgan statika qismidagi muvozanat tenglamalari shaklida tuziladi; bu esa masalalarni echishni bir rusumga keltiradi va ko‘p hollarda hisoblash ishlarini osonlashtiradi. Undan tashqari, keyingi mavzuda ko‘rib o‘tiladigan, mumkin bo‘lgan printsipi bilan birgalikda, Dalamber printsipi orqali dinamika masalalarini echishning yangi umumiy metodini yaratishga imkon beradi.

Statika kursidan ma’lumki, muvozanatda bo‘lgan kuchlar sistemasining geometrik yig‘indisi va ularning ixtiyoriy O markazga nisbatan momentlarining yig‘indisi ham nolga teng bo‘ladi. Hamda 28.8§ da ko‘rsatilganidek, bu shart nafaqat qattiq jismga ta’sir etuvchi kuchlar sistemasi uchungina o‘rinli bo‘lib qolmay, balki barcha o‘zgaruvchan mexanik sistema uchun ham o‘rinli hisoblanadi. U holda Dalamber printsipiga asosan:

bo‘ladi (32.3)

Belgilashlar kiritamiz:

=, = (32.4)

va qiymatlar *inertsiya kuchlari sistemasining bosh vektorini va O markazga nisbatan bosh momentini* ifodalaydi. Ichki kuchlarning geometrik yig‘indisi va ichki kuchlarning momentlari nolga teng bo‘lganli sababli, (32.3) tengliklardan quyidagilarni olamiz:

+=0 , +=0. (32.5)

Dalamber printsipidan kelib chiqadigan (32.5) tenglamalarni dinamika masalalarini echishda qo‘llanilishi orqali, masalalarni echishni osonlashtiradi, chunki bu tenglamalarda noma’lum bo‘lgan ichki kuchlar qatnashmaydilar. Mazmunan olganda, (32.5) tenglamalar, sistemaning harakat miqdorini o‘zgarish teoremasini va harakat miqdori bosh momentining o‘zgarishi haqidagi teoremalarga ekvivalent hisoblanadi va ulardan faqat shaklan farq qiladilar.

Qattiq jismlarning va qattiq jismlardan tashkil topgan mexanik sistema harakatlarining dinamikasiga oid masalalarni echishda, (32.5) tenglamalardan foydalanish katta qulayliklar tug‘diradi. Har qanday (shaklan) o‘zgaruvchan mexanik sistemalarning muvozanat holatini o‘rganishda statika tenglamalari etarli bo‘lmagani kabi, bunday

mexanik sistemalarning harakatlarini to‘liq o‘rganish uchun (32.5) tenglamalar ham etarli bo‘lmaydi (28.8§ ga q.).

(32.5) tengliklarning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari, statikadagi shunga o‘xshash tenglamalarga juda ham o‘xshab ketadi. Masalalarni echishda (32.5) formuladan foydalanish uchun avvalo inertsiya kuchlarining bosh vektori va bosh momentini aniqlab olish lozim.

Yuqoridagilarga asoslanib shuni ta’kidlash lozimki, mexanik sistemaning *inertsial hisob sistemasi*dagi harakatlarini o‘rganishda, Dalamber[32] printsipini qo‘llanilgan holdagina inertsiya kuchlari kiritiladi xolos.

32.2§. Inertsiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti.

(32.5) tenglamalarning birinchisini 26.4§ dagi massa markazining harakatini ifodalovchi $m_S=\sum$ bilan solishtirib (ushbu mavzuda sistemaning umumiy massasini m - harfi bilan belgilangan) quyidagini yozish mumkin

$$=-m_S, \qquad (32.6)$$

ya’ni, *mexanik sistemaning (xususiy holda, qattiq jismning) inertsiya kuchlarining bosh vektori, sistema (jism)ning umumiy massasini massa markazining tezlanishiga ko‘paytmasiga teng ekan va shu tezlanishning yo‘nalishiga teskari tomonga yo‘nalar ekan*.

Agar, $_S$ tezlanishni urinma va normal tezlanishga ajratib yuborsak, u holda ham shu o‘qlar bo‘yicha tashkil etuvchilarga[33] ajraladi

$$\overline{R}_{\tau}^{и}=-m \quad \overline{R}_{n}^{и}=-m \qquad (32.6')$$

Endi, (32.5) tenglamalarning ikkinchisini (28.6§ dagi) momentlar teoremasini ifodalovchi $=\sum_O()$ tenglik bilan solishtirsak va ularni o‘qlarga nisbatan momentlari o‘xshash bo‘lishini e’tiborga olib

$$=- \text{ va } =- \text{ larni hosil qilamiz} \qquad (32.7)$$

ya’ni, *mexanik sistemaning (xususiy holda, qattiq jismning) inertsiya kuchlarining birorta O markazga yoki z o‘qqa nisbatan olingan bosh momenti, sistema (jism)ning shu markazga yoki shu o‘qqa nisbatan*

[32] 91§ da (ko’chirma va koriolis) inertsiya kuchlarini ko’rib o’tgan edik. Ular yordamida noinertsial hisob sistemalarida ham, inertsial sistemalardagi kabi harakat tenglamalarini tuzishimiz mumkin bo’lgan edi. Bu erda esa, inertsiya kuchlari yordamida inertsial hisob sistemasidagi harakatlarning tenglamalarini muvozanat tenglamalari kabi tuzish uchun foydalanamiz. Bu erdagi barcha inertsiya kuchlari 76§ da ko’rib o’tilgan kuchlarning fizik kategoriyasiga taalluqli emas.

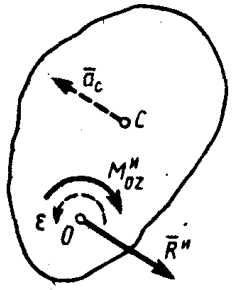
[33] Inertsiya kuchining normal tashkil etuvchisini markazdan qochma tashkil etuvchisi yoki markazdan qochma inertsiya kuchi deb ataladi.

kinetik momentidan vaqt bo‘yicha olingan hosilasining manfiy ishorali qiymatiga teng bo‘lar ekan.

Qattiq jismning inertsiya kuchlarini hisoblash. Ixtiyoriy kuchlar sistemasi uchun olingan natijaga ko‘ra, qattiq jismlarning inertsiya kuchlarini ham, ixtiyoriy olingan birorta O nuqtaga qo‘yilgan ga teng bo‘lgan bitta kuch bilan va momenti ga teng bo‘lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin. Ayrim xususiy hollarni ko‘rib o‘tamiz.

1. I l g a r i l a m a h a r a k a t. Ilgarilama harakatda, jismning barcha nuqtalarining tezlanishlari bir xil bo‘lib, massa markazi S nuqtaning tezlanishiga teng ($_k=_C$) bo‘ladi. U holda jismning barcha nuqtalarining inertsiya kuchlari, og‘irlik kuchlari $_k=m_k$ kabi, o‘zaro parallel bo‘lgan $=-m_{kC}$ kuchlar sistemasini tashkil etadi. Shu sababli, ular ham og‘irlik kuchlarining teng ta’sir etuvchisi kabi, jismning og‘irlik markazi S nuqtadan o‘tadi.

Demak, *qattiq jismning ilgarilama harakatida inertsiya kuchlari massa markazidan o‘tuvchi teng ta’sir etuvchi bitta kuchga keltirilar ekan.*



32.1 shakl

2. A y l a n m a h a r a k a t. Faraz qilaylik, qattiq jism Oxu dan iborat moddiy simmetrik tekislikka ega bo‘lsin, shu tekislikka perpendikulyar[34] bo‘lgan Oz o‘q atrofida aylanma harakatda bo‘lsin (32.1 shaklda, jismning shu Oxu tekislik bilan bo‘lgan kesimi tasvirlangan). Agar, jismning barcha nuqtalarining inertsiya kuchlari shu O nuqtaga keltirilsa, simmetriya xossasiga asosan teng ta’sir etuvchi inertsiya kuchi ham, inertsiya kuchlarining shu Oz o‘qiga nisbatan momentlarining yig‘indisidan iborat bo‘lgan bosh juft ham shu Oxu moddiy simmetrik tekislikda joylashadilar va bosh juftning momenti ga teng bo‘ladi. U holda, $K_z=J_{Oz}\omega$ bo‘lgani uchun (32.7) formulaning ikkinchisiga ko‘ra

$$=-J_{Oz}=-J_{Oz}\cdot\varepsilon, \qquad (32.8)$$

bu erdagi ε- jismning burchakli tezlanishi.

Demak, aylanayotgan jismning inertsiya kuchlarining sistemasi (32.6) formula orqali aniqlanadigan va O nuqtaga qo‘yiladigan (32.1 shakl) bitta kuchga, va momenti (32.8) formula orqali aniqlanadigan bitta juftga keltirilar ekan. Bu bosh juft ham shu Oxu moddiy simmetrik tekislikda joylashadi.

[34] Qo’zg’almas o’q atrofidagi aylanma harakat qilayotgan ixtiyoriy shaklli jismning inertsiya kuchlarini keltirish formulalari 32.4§ da ko’rsatib o’tilgan.

3. Jismning massa markazidan o‘tuvchi o‘q atrofidagi aylanma harakati. Agar 2 punktda ko‘rib o‘tilgan jism massa markazidan o‘tuvchi Sz o‘q atrofida aylansa, u holda =0 bo‘ladi, chunki $_S$=0. Demak, bunday holda inertsiya kuchlarining sistemasi momenti ga teng bo‘lgan va simmetriya tekisligida joylashgan bitta juftga keltirilar ekan.

4. Tekislikka parallel harakat. Agar jism simmetriya tekisligiga ega bo‘lsa va u shu tekislikka parallel ravishda harakat qilsa, u holda jismning inertsiya kuchlar sistemasi, shu simmetriya tekisligida joylashgan bo‘lib, jismning massa markazi S nuqtaga qo‘yilgan kuchga, va momenti =-J_{Sz}·ε ga teng bo‘lib, shu simmetriya tekislikda joylashgan bitta juftga keltirilar ekan.

Masalalarni echishda, ning moduli (32.8) formula orqali aniqlanadi va uning yo‘nalishini shaklda ε - ga qarama-qarshi tomonga qaratib tasvirlanadi.

32.3§. Masalalar echish.

Dalamber printsipi ixtiyoriy harakatdagi erkin bo‘lmagan mexanik sistema harakatlarining tenglamalarini tuzishning yagona usulini yaratishga imkon yaratadi. Agar harakat qonunlari ma’lum bo‘lsa yoki ularni noma’lum reaktsiyalar qatnashmagan tenglamalar orqali, masalan, kinetik energiyaning o‘zgarishi teoremasi yoki 34.1§, 34.5§ larda keyinroq ko‘rib o‘tiladigan tenglamalar orqali aniqlash mumkin bo‘lgan hollarda, erkinmas jismlarning bog‘lanish reaktsiyalarini aniqlashda Dalamber printsipi eng qulay usul hisoblanadi. Hamda, bizga noma’lum bo‘lgan ichki kuchlar tenglamada qatnashmaydilar. Agar ichki bog‘lanishlarning reaktsiya kuchlarini aniqlash zarur bo‘lgan hollarda, sistemaning qaysi ichki qismini reaktsiyasini aniqlash zarur bo‘lsa, o‘sha qismlari ajratib olinib, alohida tekshiriladi.

Erkin bo‘lmagan moddiy nuqtalar uchun Dalamber printsipini qo‘llanilganda, 23.1§ da aniqlangan tenglamalarga qaytib kelinadi (32.1 masalaga q.).

32.1 masala. Dalamber printsipi yordamida 23.3 masala echilsin (23.1§ ga q.).

E ch i sh. Tortilish kuchini ipning tarangligi bo‘ylab tasvirlaymiz (32.2 shakl). Yukka uning og‘irlik kuchi va ipning reaktsiyasi ta’sir etadi. Ushbu kuchlar qatoriga normal - va urinma -inertsiya kuchlarini qo‘shamiz. Dalamber printsipiga ko‘ra, hosil bo‘lgan kuchlar sistemasi

ixtiyoriy olingan vaqt uchun har doim muvozanatda bo‘ladi. Barcha kuchlarning M_1O normal o‘qqa proektsiyasini nolga tenglaymiz

T-R-=0

=ma_n=m/l, bu erdagi v_1 -yukning M_1 holatdagi tezligi. U holda

T=R+=R+ m/l.

Shunday qilib, T uchun 23.3 masaladagi javobni oldik. Endi, 23.3 masaladagi kabi, kinetik energiyani o‘zgarish teoremasi orqali v_1 ni aniqlab, izlanayotgan echimni topamiz.

Kuchlarning urinma o‘qlardagi proektsiyalarning yig‘indisi =0 bo‘ladi. CHunki, moddiy nuqtaning M_1 holatdagi tezligi maksimum bo‘lib, a_τ=dv/dt=0 bo‘ladi, natijada =ma_τ=0.

32.2 masala. Og‘irliklari R_1 va R_2 bo‘lgan va bir-birlari bilan cho‘zilmaydigan ip orqali bog‘langan ikkita yuklar, birinchi yukka qo‘yilgan kuch ta’sirida gorizontal tekislik ustida harakatlanmoqdalar. Yuklar bilan tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti *f*. Yuklarning tezlanishi va ipning tortilishi aniqlansin.

E ch i sh. Sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarni shaklda tasvirlaymiz. Bu kuchlar qatoriga inertsiya kuchlarini qo‘shamiz. Ikkala yuk ham ilgarilama harakatda bo‘lganliklari uchun, ularning tezlanishlari o‘zaro teng bo‘ladi, modullari esa

=R_1a/g, =R_2a/g,

kuchlarning yo‘nalishlari shaklda tasvirlangan. Ishqalanish kuchlari:

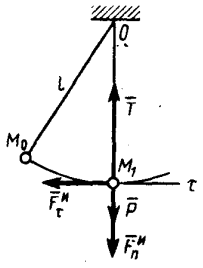
F_1=*f*R_1, F_2=*f*R_2.

Dalamber printsipiga asosan, hosil bo‘lgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo‘lishi shart. Gorizontal o‘q bo‘yicha muvozanatlik shartining tenglamasini tuzamiz

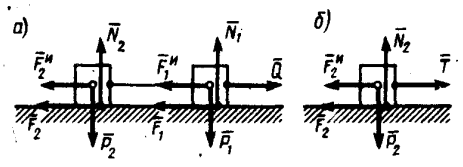
Q-*f*(R_1+R_2)- (R_1+R_2)a/g=0

bundan

a=[Q/(R_1+R_2)-*f*]g.



32.2 shakl



32.3 shakl

Ushbu tenglamadan ko‘rinib turganidek, yuk harakat qilishi uchun *f* <Q/(R_1+R_2) bo‘lishi shart.

Ipning izlanayotgan tortilish kuchi, ushbu masalada ichki kuchlar hisoblanadi. Uni aniqlash uchun sistemani ikkiga ajratib yuboramiz va uning birorta qismiga, masalan, ikkinchi qismiga Dalamber printsipini qo‘llaymiz (32.3, b shakl). Bu yukka uning og‘irlik kuchi $_2$, normal reaktsiya kuchi $_2$, ishqalanish kuchi $_2$ va ipning tortilish kuchi lar ta’sir etadilar. Ushbu kuchlar qatoriga inertsiya kuchi - ni qo‘shamiz va yuqoridagi kabi gorizontal o‘q bo‘yicha muvozanatlik sharti tenglamasini tuzamiz

$$T-fR_2-R_2a/g=0$$

Bu tenglamaga yuqorida aniqlangan, *a* ning son qiymatini qo‘yamiz, natijada

$$T=QR_2/(R_1+R_2)$$ bo‘ladi.

Shunisi qiziqarliki, ipning tortilish kuchi, ishqalanish koeffitsientiga bog‘liq emas ekan va ikkala yuklarning umumiy og‘irligini saqlagan holda ikkinchi (orqadagi) yukning og‘irligini qancha kamaytirsak, ipning tortilish kuchi ham shuncha kamayar ekan. Shu sababli, temir yo‘l sostavlaridagi og‘ir vagonlarni oldinga, engil vagonlarni esa eng oxiriga ulashlik samarali hisoblanadi.

Raqamli misollarni keltiramiz. Faraz qilaylik, Q=200 H, R_1=400 N, R_2=100 N. U holda, yuklar harakatlanishi uchun f<0,4 bo‘lishi shart. Ipning tortilish kuchi esa 40 N bo‘ladi. Agarda yuklarning o‘rinlarini almashtirib qo‘ysak, ipning tortilish kuchi 160 N bo‘ladi.

32.3 masala. Dalamber printsipi yordamida 28.5 masala echilsin (28.7§ ga q.) va qo‘shimcha ravishda ipning tortilish kuchi aniqlansin.

E ch i sh. 1. Baraban va yukni bir mexanik sistema deb hisoblaymiz; sistemaning jismlariga ularning inertsiya kuchlarini qo‘shamiz (32.4 shakl). A yuk ilgarilama harakat qiladi va uning inertsiya kuchi $R^i=Qa/g=Qr\varepsilon/g$ bo‘ladi. Barabanning inertsiya kuchlari momentining moduli $=J_O\cdot\varepsilon=R\rho^2\varepsilon/g$ ga teng bo‘lgan juftga keltiriladi, yo‘nalishi esa aylanish tomonga teskari yo‘nalishda bo‘ladi. Barcha kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamasining quyidagi ko‘rinishini yozamiz $\sum m_O(_k)=0$

$$||+R^ir-Qr+M_{ishq}=0$$

yoki

$$R\rho^2\varepsilon/g+Qr^2\varepsilon/g-Qr+M_{ishq}=0.$$

Bundan,

$$\varepsilon=.$$

2. Endi φ yukni alohida qilib ajratamiz va unga ta’sir qilayotgan va kuchlarga qo‘shimcha ravishda kuchini qo‘shamiz va muvozanat tenglamalari orqali ipning tortilish kuchini aniqlaymiz

$$T=Q-R^i=Q(1-)=.$$

32.4 masala. Massasi m ga teng bo‘lgan tekkis aylanuvchan maxovikni parchalab tashlashi mumkin bo‘lgan gardishlari bo‘yicha qo‘yilgan kuchning qiymati aniqlansin, maxovikning massasi gardishi bo‘ylab teng taqsimlangan.

E ch i sh. Izlanayotgan kuch ichki kuch hisoblanadi. Uni aniqlash uchun maxovik gardishini ikki qismga bo‘lib yuboramiz va ulardan bir qismiga Dalamber printsipini qo‘llaymiz (32.5 shakl). Tashlab yuborilgan qismining ta’sir kuchlarini, izlanayotgan noma’lum F kuchga qiymati jihatidan teng bo‘lgan, ikkita bir xil ’ kuchlardan iborat deb hisoblaymiz. Gardishning har bir elementiga tegishli radiuslari bo‘ylab yo‘nalgan (markazdan qochma) inertsiya kuchlari ta’sir etadi. Bu kuchlar uchrashuvchi kuchlar bo‘lib, ularning bosh vektori , ularning teng ta’sir etuvchisiga teng bo‘lib, kuchlarning simmetrik joylashganligi sababli, u Ox o‘qida o‘tadi. (32.6) formulaga asosan $R^i=0,5ma_C=0,5mx_C\omega^2$ bo‘ladi, bu erdagi x_S-yarim aylananing massa markazi, ya’ni $OS=2r/\pi$.

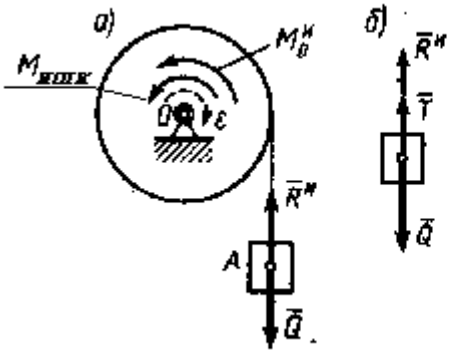
Demak,

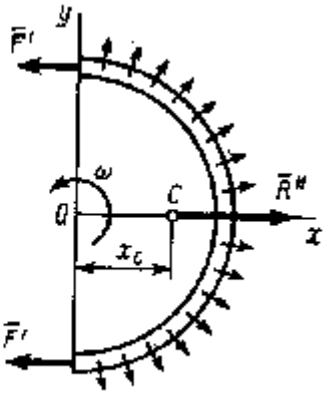
$$R^i=mr\omega^2/\pi \text{ bo‘lar ekan.}$$

Muvozanatlik shartiga ko‘ra $2F=R^i$ bo‘ladi, bundan

$$F=mr\omega^2/2\pi \quad \text{ni aniqlaymiz.}$$

Ushbu formula yordamida maxovikning aylanishida mumkin bo‘lgan chegaraviy burchakli tezlik aniqlanadi, bundan ortiq burchakli tezlikda maxovik parchalanib ketishi mumkin.





32.4 shakl 32.5 shakl

32.5 masala. Sharnir orqali A nuqtaga biriktirilgan AV sterjenning og‘irligi R bo‘lib, uni gorizontal holatgacha og‘dirib, so‘ngra

boshlang‘ich tezliksiz qo‘yib yuboriladi (32.6 shakl). A sharnirdagi reaktsiyani φ burchakning funktsiyasi sifatida aniqlansin.

E ch i sh. Sterjenni ixtiyoriy holatda tasvirlab, Axu o‘qlarni (*u* o‘qini sterjen bo‘ylab, *x* o‘qini unga perpendikulyar ravishda) o‘tkazamiz, sterjenga ta’sir etayotgan og‘irlik kuchi -ni hamda A nuqtaning reaktsiyasi va - larni shaklda tasvirlaymiz. Dalamber printsipiga asosan, sterjen harakatidagi inertsiya kuchlarini, avvalo A nuqtaga (32.2§ dagi 2 punktga q.) keltiramiz, so‘ngra ularni yuqorida ko‘rsatilgan kuchlarga qo‘shamiz, U holda, inertsiya kuchlari ikkita va tashkil etuvchilardan iborat bo‘lgan bosh vektor ga va A nuqtaga nisbatan momenti bo‘lgan juftga keltiriladi. (32.6’) va (32.7) formulalar orqali ushbu inertsiya kuchlarining va momentining modullarini aniqlaymiz

$$=a_{C\tau}=\varepsilon, \quad =a_{Cn}=\omega^2, \quad =J_A\cdot\varepsilon=\varepsilon. \qquad (a)$$

bu erdagi l -sterjenning uzunligi; ω va ε - sterjenning burchakli tezligi va burchakli tezlanishi.

Ushbu yassi kuchlar sistemasi uchun statika kursidagi muvozanat tenglamalari sistemasini tuzamiz, ya’ni

$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0, \quad \sum m_A(_k)=0:$$

$$X_A-R\text{sos}\varphi+=0, \quad Y_A-R\sin\varphi-=0, \quad -R(l/2)\,\text{sos}\varphi=0. \qquad (b)$$

Oxirgi tenglamadan, ni uning qiymati bilan almashtirib, ε ning qiymatini aniqlaymiz:

$$\varepsilon=(3g/2l)\,\text{sos}\varphi. \qquad (v)$$

ц – ning qiymatini aniqlash uchun (v) ni bir marta integrallash yoki kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasidan foydalanishimiz mumkin.

Kinetik energiya o‘zgarish teoremasidan

$T_0=0$, $\frac{J_A\omega^2}{2}=\frac{Pl}{2}\sin\varphi$ va $\frac{Pl^2}{3g}\omega^2=Pl\sin\varphi$ - lardan $\omega^2=\frac{3g}{l}\sin\varphi$

Aniqlangan ω^2 va ε larning qiymatlarini (a) ga qo‘ysak

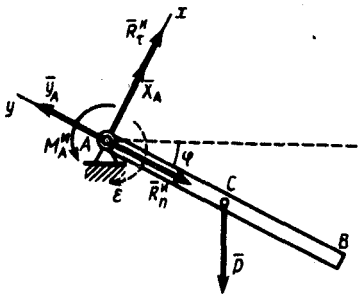
$$=(3R/4)\text{sos}\varphi, \quad =(3R/2)\sin\varphi.$$

Ushbu aniqlangan qiymatlarni, (b) tenglamalarning birinchi ikkitasiga qo‘ysak, axtarilayotgan noma’lum reaktsiyalarning son qiymatlarini aniqlaymiz

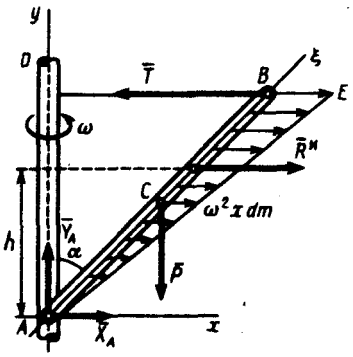
$$X_A=0{,}25R\text{sos}\varphi, \quad Y_A=2{,}5\sin\varphi.$$

Boshlang‘ich payt ($\varphi=0$)da, $X_A=0{,}25R$, $Y_A=0$. Sterjen vertikal holatdan o‘tayotgan payt ($\varphi=90°$)da $X_A=0$, $Y_A=2{,}5R$.

32.6 masala. Og‘irligi R, uzunligi l bo‘lgan bir jinsli AV sterjen, ω=sonst burchakli tezlik bilan aylanayotgan vertikal valga A sharnir orqali biriktirilgan (32.7 shakl). Sterjenni valga nisbatan α burchak ostida ushlab turuvchi gorizontal ipning tortilishi aniqlansin.



32.6 shakl



32.7 shakl

E ch i sh. Dalamber printsipiga asosan, sterjenga ta’sir qilayotgan , , , tashqi kuchlar qatoriga inertsiya kuchlarini qo‘shamiz. Sterjenning massasi Δm bo‘lgan har bir elementining inertsiya kuchi $\Delta m\omega^2 x$ ga teng, bu erdagi *x* sterjenning tegishli elementi bilan Ou aylanish o‘qi orasidagi masofa. CHiziqli qonun bilan tarqalgan, ushbu parallel kuchlarning teng ta’sir etuvchi vektori AVE uchburchakning og‘irlik markazidan o‘tadi, ya’ni Ax o‘qidan h=(2/3)sosα masofadan o‘tadi. Ushbu teng ta’sir etuvchi vektor, inertsiya kuchlarining bosh vektoriga[35] teng bo‘lganligi sababli, (32.6) formulaga asosan

$$R^i=ma_C=m\omega^2x_C=(R/g)\omega^2(l/2)\sin\alpha$$

(bu erdagi x_S -sterjenning og‘irlik markazi).

Endi, statikaning $\sum m_A(_k)=0$ tenglamalarini tuzamiz,

$$T_l\cos\alpha-R^ih-R(l/2)\sin\alpha=0.$$

Ushbu tenglamaga R^i va h larning qiymatlarini keltirib qo‘ysak, T ning qiymatini aniqlaymiz

$$T=R.$$

B o sh q a ch a e ch i m. Masalani bevosita integrallash yordami bilan, A markazga nisbatan inertsiya kuchlarining momentlarini yig‘indisini aniqlash mumkin. AV sterjen bo‘ylab, Aξ o‘qini o‘tkazamiz. Koordinatasi ξ dan iborat bo‘lgan sterjenning har bir dξ elementining inertsiya kuchi ω^2xdm bo‘ladi. Ularning A markazga nisbatan momenti $-y\omega^2xdm$ bo‘ladi. U holda momentlar tenglamasi

$$\sum m_A(_k)=0 \text{ yoki } Tl\cos\alpha-R(l/2)\sin\alpha-=0. \qquad (a)$$

Integral ostidagi barcha qiymatlarni ξ orqali ifodalab olamiz,

[35] Statikadan ma’lumki, ixtiyoriy kuchlar sistemasining (agar u mavjud bo’lsa) teng ta’sir etuvchisi ularning bosh vektoriga teng bo’ladi. Shu sababli, inertsiya kuchlarining teng ta’sir etuvchisi, agar u mavjud bo’lsa, $\overline{R}^и$-ga teng bo’ladi. Lekin ilgarilanma bo’lmagan harakatda, bu teng ta’sir etuvchi kuch massa markazini umuman kesib o’tmaydi, ushbu masalada ham bu holat tasdiqlangan.

$$x=\xi\sin\alpha. \quad Y=\xi\cos\alpha, \quad dm=(m/l)d\xi.$$

Oxirgi natija

$$=(m/l)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha=(R/3g)l^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Ushbu qiymatni (a) tenglamaga qo‘yib, T uchun, oldingi usul bilan olingan natijani hosil qilamiz.

32.4§*. Aylanayotgan jismning o‘qiga ta’sir etayotgan dinamik reaktsiyalar. Aylanayotgan jismlarni muvozanatlash.

A va V podshipniklarga biriktirilgan va AV o‘q atrofida ω burchakli tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan qattiq jismni olib ko‘ramiz (32.8 shakl). Qattiq jism bilan birgalikda harakatlanuvchi Axyz o‘qlarni o‘tkazamiz, bunday o‘qlarga nisbatan jismning massa markazi va uning inertsiya momenti o‘zgarmas qiymatlardan iborat bo‘ladi. Jismga ,,..., kuchlar sistemasi ta’sir etayotgan bo‘lsin deb faraz qilaylik.

Ushbu kuchlarning bosh vektorini Axyz o‘qlardagi proektsiyalarini , , ($R_x=\sum$va h.) bilan va o‘sha o‘qlarga nisbatan bosh momentning proektsiyalari , , [$=\sum m_x$ () va h.k.]; ω=sonst bo‘lganligi uchun =0 bo‘ladi.

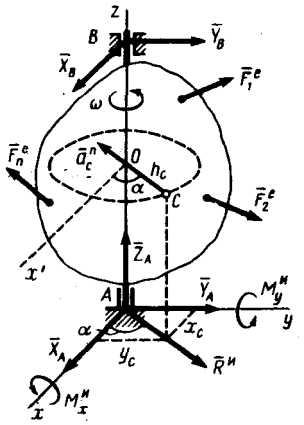
Podshipniklarga ta’sir etuvchi X_A, Y_A, Z_A,, X_B , Y_B, Z_B -lardan iborat bo‘lgan dinamik reaktsiyalarni, ya’ni jismning aylanishidan paydo bo‘ladigan qo‘shimcha reaktsiyalarni aniqlash uchun, jismga ta’sir etuvchi reaktsiya kuchi va tashqi kuchlar qatoriga aylanayotgan jismning inertsiya kuchlari -ni A nuqtaga keltirib, so‘ngra qo‘shamiz. U holda inertsiya kuchlarining yig‘indisi A nuqtaga qo‘yilgan bitta kuchga va momenti $=\sum_k()$ bo‘lgan juftdan iborat bo‘ladi. Ushbu moment vektorining *x* va *u* o‘qlaridagi proektsiyalari: $=\sum m_x()$, $=\sum m_y()$; va yana =0 bo‘ladi, chunki. ω=sonst.

Dalamber printsipiga asosan (32.5) formulalar orqali Axyz o‘qlardagi proektsiyalardan iborat bo‘lgan tenglamalarini tuzamiz, agar AV=b deb hisoblasak

$$X_A+X_B\ ++=0$$
$$Y_A+Y_B++=0$$
$$Z_A++=0$$
$$-Y_Bb++=0; \quad X_Bb++=0, \qquad (32.9)$$

Oxirgi +=0 tenglama ayniyatga aylanib qoladi, chunki=0 va =0.

Inertsiya kuchlarining bosh vektori =-m_S, bu erdagi m -jismning massasi [(32.6) formulaga q.]. Agar ω=sonst bo‘lsa, massa markazi faqat normal tezlanishga ega bo‘ladi xolos, $a_{Cn}=\omega^2 h_C$, bu erdagi h_C-massa markazidan o‘qqacha bo‘lgan masofa.



32.8 shakl.

Demak, vektor OS chiziq bilan bir xil yo‘nalishda bo‘ladi; $h_C$sosα=x_C, $h_C$sinα=y_C, x_C, y_C massa markazining koordinatalari ekanligini e’tiborga olib, vektorni koordinata o‘qlarga proektsiyalasak:

$$R^{и}_{x}=m\omega^2 h_C sos\alpha=m\omega^2 x_C;$$

$$R^{и}_{y}=m\omega^2 h_C sin\alpha=m\omega^2 y_C;$$

$$R^{и}_{z}=0.$$

$M^{и}_{x}$ va $M^{и}_{y}$ larni aniqlash uchun, jismning aylanish o‘qidan h_k masofada joylashgan m_k massali zarrachasini tanlab olamiz; ω=sonst bo‘lganligi uchun, uning faqat markazdan qochma inertsiya kuchi =$m_k\omega^2 h_k$ bo‘ladi xolos va uning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari ning proektsiyasi kabi:

$$F^{и}_{kx}=m_k\omega^2 x_k,\ F^{и}_{ky}=m_k\omega^2 y_k,\ =0.$$

U holda:

$$m_x()=-z_k=-m_k\omega^2 y_k z_k;$$

$$m_y()=z_k=m_k\omega^2 x_k z_k;\ \text{bo‘ladi.}$$

Har bir nuqta uchun shunday tenglamalarni tuzib chiqib, ularni hadma-had qo‘shamiz va umumiy ko‘paytmalarni qavsdan chiqarib, quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$=-(\sum m_k y_k z_k)\ \omega^2=-J_{yz}\omega^2;\quad =-(\sum m_k x_k z_k)\ \omega^2=-J_{xz}\omega^2 \qquad (32.10)$$

bu erdagi J_{yz} va J_{xz} lar tegishli bo‘lgan markazdan qochma inertsiya momentlari[36]. Aniqlangan ushbu qiymatlarni (32.9) formulaga qo‘ysak

$$X_A+X_B=--mx_C\omega^2;\quad Y_A+Y_B=--my_C\omega^2$$

$$Z_A=-;\quad X_B b=--J_{xz}\omega^2;\quad Y_B b=-J_{yz}\omega^2; \qquad (32.11)$$

(32.11) tenglamalar sistemasi z qo‘zg‘almas o‘qi atrofidagi o‘zgarmas ω burchakli tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan jismning aylanish o‘qiga ko‘rsatadigan *dinamik reaktsiyalar*ni ifodalaydi.

[36] 27.3§ dagi (27.10) formulaga qarang. (32.10) tenglamalardagi J_{xz}, J_{yz} -ifodalar markazdan qochma inertsiya kuchlari momentlarining ifodalariga kirgan; «markazdan qochma inertsiya momenti» degan iboraning paydo bo’lganligining asosiy sababi ham shunda.

(32.11) formuladagi ω=0 bo‘lgan holatdagi reaktsiyalar *statik reaktsiyalar* deb ataladi. (32.11) formuladan ko‘rinib turgandek, dinamik reaktsiyalar statik reaktsiyalarga nisbatan bir necha marta katta bo‘lishlari mumkin ekan va bu faqat ω -ga bog‘liq bo‘libgina qolmasdan, balki jism massalarini Oz aylanish o‘qiga nisbatan qanday joylashganligini aniqlovchi x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} xarakteristikalarga ham bog‘liq ekan.

Lekin, (32.11) tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, agar:

$$x_C=0,\ y_C=0, \qquad (32.12)$$

$$J_{xz}=0,\ J_{yz}=0 \qquad (32.13)$$

bo‘lsa, jismning aylanishi A va V podshipniklardagi reaktsiyalarga bo‘lgan (*qo‘shimcha dinamik*) ta’siri nolga teng bo‘lar ekan. (32.12) va (32.13) tengliklar, *aylanish o‘qiga ko‘rsatiladigan dinamik reaktsiyalar, faqat statik reaktsiyalardan iborat bo‘lishligini* yoki *jismning z o‘qi atrofidagi aylanma harakatni dinamik muvozanatlashganligini ifodalovchi shartlar* hisoblanadi.

(32.12) shart, massa markazi aylanish o‘qida yotishi kerakligini anglatadi, (32.13) shart esa, A nuqtadan o‘tuvchi aylanish o‘qi jismning bosh inertsiya o‘qi bo‘lishligi kerakligini anglatadi. Agar (32.12) va (32.13) shartlar bir vaqtning o‘zida bajarilsa, u holda Az o‘qi bosh markaziy inertsiya o‘qi hisoblanadi 27.3§ ga q.). Shunday qilib, *agar aylanish o‘qi jismning birorta bosh markaziy inertsiya o‘qidan iborat bo‘lsa, u holda jismning aylanish o‘qidagi reaktsiyalar faqat statik reaktsiyalardan iborat bo‘lar ekan xolos*.

Ushbu xulosa qattiq jismning notekis harakatida ham o‘rinli bo‘ladi. Yuqorida ko‘rib o‘tilgan masala J_{xz} va J_{yz} qiymatlarning mexanik mazmunini tushunishga yordam beradi, aniqrog‘i: *markazdan qochma J_{xz} va J_{yz} inertsiya momentlari, jismning z o‘qi atrofidagi aylanma harakatining dinamik muvozanatlashganlik darajasini xarakterlab beradi.*

Aylanayotgan jismlarni dinamik muvozanatlash masalasi juda muhim texnik masaladan iborat bo‘lib, uning mohiyati bosh markaziy inertsiya momentlarini aniqlashga borib taqalar ekan. 27.3§ da har qanday jism, hech bo‘lmaganda uchta o‘zaro perpendikulyar yo‘nalgan bosh markaziy inertsiya o‘qiga ega bo‘lishi mumkinligi ko‘rsatib o‘tilgan edi.

Endi esa, *jismning ichidan ixtiyoriy ravishda o‘tkazilgan o‘qqa, ikkita nuqtaviy massalarni qo‘shish evaziga, uni bosh markaziy inertsiya o‘qiga aylantirish mumkin* ekanligi haqidagi amaliy, juda bir muhim

qoidani ko‘rib chiqamiz. Faraz qilaylik, massasi m -dan iborat bo‘lib, aylanayotgan jismning x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} xarakteristikalari bizga ma’lum bo‘lsin va ular nolga teng bo‘lmasinlar. Qiymatlari m_1 va m_2 bo‘lgan ikkita nuqtaviy massalarni, jismning (x_1, y_1, z_1) va (x_2, y_2, z_2) nuqtalariga mahkamlab joylashtiraylik. U holda (27.1) va (27.10) formulalarga asosan

$$mx_C+m_1x_1+m_2x_2=0,\quad my_C+m_1y_1+m_2y_2=0$$

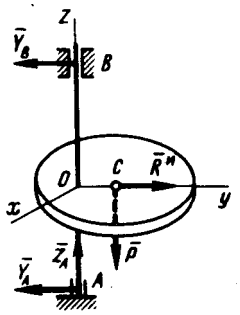
$$J_{xz}+m_1x_1z_1+m_2x_2z_2=0,\quad J_{yz}+m_1y_1z_1+m_2x_2z_1=0 \qquad (32.14)$$

tenglamalar qanoatlansa, u holda bu jism uchun ====0 bo‘ladi, ya’ni z o‘qi bosh markaziy inertsiya o‘qi bo‘lib qoladi; m_1 va m_2 massalarni va ularning koordinatalarini (32.14) formulaga asoslanib tegishlicha tanlab olinsa, oldimizga qo‘yilgan masala bajariladi. Ushbu qiymatlardan bir qismini o‘zimiz tanlab olishimiz kerak. Masalan, m_1, m_2 va z_1, z_2 (ammo, $z_1 \neq z_2$ bo‘lishligi kerak) eanligini o‘zimiz tanlasak, x_1, x_2, y_1, y_2 larni (32.14) tenglamalar orqali aniqlanadi.

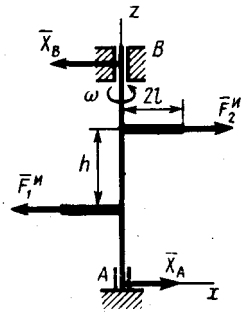
Aylanuvchi jismlarni muvozanatlashtirilish usuli, texnika sohasidagi tirsakli vallar, krivoshiplar, sparniklar va b., -larni dinamik muvozanatlashda keng qo‘llaniladi. Hamda, eng oxirgi natijaviy muvozanatlash ishlari maxsus stendlar yordamida amalga oshiriladi.

Konkret masalalarni echishda o‘qqa tushayotgan bosim kuchlarni (32.11) formuladagi tayyor ifodalar orqali hisoblanmaydi, balki har bir masala uchun Dalamber printsipini qo‘llab alohida tenglamalar tuziladi.

32.7 masala. Yuzasiga perpendikulyar bo‘lgan diskning aylanish o‘qi, massa markazidan OS=b masofaga siljitib o‘rnatilgan. Diskning og‘irligi R va uning burchakli tezligi ω=sonst. Agar OA=OV=h bo‘lsa, A va V podshipniklardagi dinamik reaktsiyalar aniqlansin.



32.9 shakl



32.10 shakl

E ch i sh. Disk bilan birgalikda aylanadigan va Ou o‘qi massa markazi S nuqtadan o‘tuvchi Oxyz o‘qlarini o‘tkazamiz (32.9 shakl). Oz o‘qi O nuqtadagi bosh inertsiya o‘qi hisoblanadi, chunki Oxu tekisligi, diskning simmetrik tekisligi hisoblanadi. U holda, $J_{xz}=J_{yz}=0$ va (32.10)

formuladan hamda ω=sonst bo‘lganligi uchun =0 bo‘ladi. Demak, inertsiya kuchlari O nuqtadan o‘tuvchi va OS chiziq (Ou o‘qi) bo‘ylab yo‘nalgan faqat bitta teng ta’sir etuvchiga keltirilar ekan. Moduli esa $R^i=ma_{Cn}=(R/g)b\omega^2$. va bitta Oxu tekisligida joylashganligi uchun podshipniklarning dinamik reaktsiyalari ham shu tekislikda yotadilar, ya’ni A nuqtada Y_A, Z_A va V nuqtada Y_B lardan iborat bo‘ladi.

U holda, Dalamber printsipiga asoslanib, jismga ta’sir etuvchi barcha aktiv va inertsiya kuchlarining y va z o‘qlaridagi proektsiyalarini, hamda A markazga nisbatan momentlarini tuzib, quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$R^i-Y_A-Y_B=0, \quad Z_A-R=0,$$

$$Y_B\cdot 2h-Rb-R^ih=0.$$

Ushbu tenglamalarni noma’lumlarga nisbatan echamiz:

$$Y_B=Rb(\omega^2/2g+1/2h), \quad Y_A=Rb(\omega^2/2g-1/2h), \quad Z_A=R.$$

Y_A va Y_B reaktsiyalar jism bilan birgalikda harakatlanuvchi Oxu tekislikda joylashadilar.

32.8 masala. Uzunligi b ga teng bo‘lgan vertikal AV valga, perpendikuyalar ravishda ikkita bir xil sterjen bir-birlaridan h masofada payvand qilingan (32.10 shakl) har bir sterjenning uzunligi 2l, massalari m. Og‘irlik kuchlarini hisobga olmasdan, o‘zgarmas ω burchakli tezlik bilan aylanayotgan shu valning aylanish o‘qiga bo‘lgan dinamik bosim kuchlari aniqlansin.

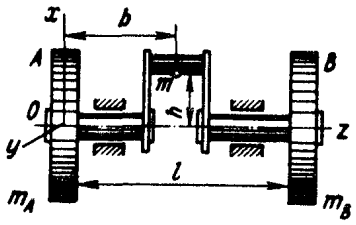
E ch i sh. Dalamber printsipiga asosan, podshipniklarning reaktsiyalari va inertsiya kuchlari muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadilar. Ushbu masalada, har bir sterjenning inertsiya kuchlarining modullari

$$==ml\omega^2$$

ga teng bo‘lib, va lar bilan o‘zaro muvozanatlashuvchi juft kuchlarni hosil qiladilar. Shu sababli, $X_Ab=h/b$ bo‘ladi, bundan

$$X_A=X_B=h/b=mlh\omega^2/b.$$

Juft kuchlar har doim val bilan birgalikda aylanma harakat qilayotgan Axu tekisligida joylashadi.



32.11 shakl.

32.9 masala. Bir tsilindrli dvigatelning tirsakli valiga, har birining radiuslari r=0,5 m bo‘lgan ikkita A va V maxoviklar o‘rnatilgan. Tirsakli valning bo‘yinlarining massalari m=21 kg bo‘lib, ular aylanish o‘qidan h=0,2 m masofada joylashgan bo‘lsalar, shu

sistemani dinamik balansirlanishi uchun maxoviklarning zarur bo‘lgan m_1 va m_2 massalarini qiymatlari aniqlansin; b=0,6 m va l=1,4 m (32.11 shakl).

E ch i sh. Tirsakli val o‘qining Oxz tekisligida joylashtirilgan holda val bilan birgalikda aylanma harakat qiluvchi Oxyz o‘qlarni o‘tkazamiz. U holda Oxz tekisligi simmetrik tekislik bo‘ladi va Ou o‘qi O nuqta uchun bosh inertsiya o‘qi hisoblanadi. Shu sababli, $J_{yz}=0$ bo‘ladi. Hamda, agar sistemaning umumiy massasini M harf bilan belgilasak, bu sistema uchun

$$x_C=mh/M, \quad J_{xz}=mhb.$$

Oxirgi natija shundan kelib chiqdiki, sistemaning markazdan qochma inertsiya momenti, uning qismlari markazdan qochma inertsiya momentlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. Maxovik va uning atrofidagi qismlarining markazdan qochma inertsiya momentlari J_{xz} nolga teng bo‘ladi (Oz o‘q, simmetriya o‘qi).

U holda, (32.14) tenglamalardan ko‘rinib turganidek, koordinatalari $y_A=y_B=0$ va massalari esa m_A va m_B larga teng bo‘lgan yuklarni sistemaga qo‘shsak

$$Mx_C+m_Ax_A+m_Bx_B=0, \quad J_{xz}+m_Ax_Az_A+ m_Bx_Bz_B=0$$

tengliklarni qanoatlantirishi lozim bo‘ladi. Yuklar maxoviklarning gardishlariga mahkamlanganligi sababli $z_A=0$, $z_B=l$ va $x_A=x_B=-r$ (agar ishora musbat bo‘lsa tenglama echimga ega bo‘lmaydi, yuklar pastda joylashgan bo‘lishlari shart). Ushbu tenglamalarni echib, noma’lumlarni aniqlaymiz

$$m_A=(l-b)hm/(rl)=4,8 \text{ kg}. \quad m_V=bhm/(rl)=3,6 \text{ kg}.$$

Bunday massali yuklar sistemaga qo‘yilsa, sistema muvozanatlashadi va Oz o‘qi jismning bosh markaziy inertsiya o‘qi bo‘lib qoladi (lekin simmetriya o‘qi emas).

Tayanch so‘z va iboralar: Dalamber printsipi, inertsiya kuchi, inertsiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti. Statik reaktsiya, dinamik reaktsiya, dinamik muvozanat, ixtiyoriy o‘qlarni bosh markaziy o‘qqaa aylantirish, mexanizmlarni dinamik muvozanatlashtirish. simmetriya o‘qi.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.

Dalamber printsipi mexanikaning asosiy printsiplaridan biri bo‘lib, inertsiya kuchi degan tushunchani kiritish orqali, dinamika masalalarini statika tenglamalari orqali echishga yo‘l ochib berar ekan.
Texnikada dinamikaning sof birinchi yoki sof ikkinchi masalalaridan tashqari aralash masalalar ham ko‘p uchrab turadi. Masalan, jismga ta’sir etayotgan kuchlarning bir qismi ma’lum bo‘lib birortasi noma’lum bo‘lib, jismning harakat qonuni bizga ma’lum bo‘lsa, bunday masalalarni echishda Dalamber printsipi juda qo‘l kelar ekan.
Dalamber printsipini qo‘llashdan avval, harakatlanayotgan jismning inertsiya kuchini aniqlab olish lozim bo‘lar ekan.
Harakatlarning turlariga qarab inertsiya kuchlari ham turlicha usulda aniqlanar ekan.
Inertsiya kuchlarini aniqlab, ularni ham aktiv kuch qatorida hisoblab, statikadagi muvozanat tenglamalarini tuzib, noma’lum kuchlarga nisbatan tenglamani echilar ekan.
Dalamber printsipi, aylanma harakat qilayotgan jismning aylanish o‘qiga ko‘rsatadigan dinamik reaktsiyalarini aniqlashda juda katta ahamiyat kasb etar ekan
Dalamber printsipi yordamida massa markazi aylanish o‘qidan o‘tmagan mexanizmlarni balansirovka qilishda asosiy nazariya bo‘lib xizmat qilar ekan.
Agar zarur bo‘lsa, Dalaamber printsip yordamida, ixtiyoriy o‘qni bosh maarkaziy o‘qqa aaylantirish mumkin ekan.
Dalamber printsipi orqali har qanday mexanizmni dinamik muvozanatlash mumkin ekan.
Keyingi maavzularda Dalamber printsipi orqali dinamikaning juda soddalashgan harakat tenglamalarini keltirib chiqarilishi ko‘rib o‘tiladi.

Takrorlash uchun savollar:

Dalamber printsipining mohiyatini tushuntirib bering?
Qanday masalalarni echishda Dalamber printsipini qo‘llash yaxshi natija beradi?
Ilgarilama harakatdagi jismning inertsiya kuchi qanday aniqlanadi?
Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanayotgan qattiq jismning inertsiya kuchi qanday aniqlanadi?
Tekislikka parallel harakatdagi qattiq jismning inertsiya kuchi qanday aniqlanadi?
Statik reaktsiyalar deb qanday reaktsiyalarga aytiladi?

Dinamik reaktsiyalar deb qanday reaktsiyalarga aytiladi?
Dinamik muvozanatlashtirish deb nimani tushunasiz?
Texnikaning qaysi sohalarida dinamik muvozanatlashtirish eng asosiy vazifalardan biri hisoblanadi?
O‘zingizning hayotingizda dinamik muvozanatlashtiruvchi jihozni uchratganmisiz?

11. Dinamik muvozanatlashmagan jihozlar qanday nosozlikka olib kelishini bilasizmi?
12. Avtomobilning kuzovini dinamik muvozanatlashtirish shartmi?
13. Ot aravaning g‘ildiragin dinamik muvozanatlashtirish kerakmi?

Mavzuni mustahkamlash uchun 32 ilovadagi masalalarni mustaqil ravishda echishni tavsiya qilamiz:

33 Ma’ruza

Mavzu: Analitik mexanika. Bog‘lanishlar klassifikatsiyasi. Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar. Erkinlik darajasi. Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi. Masalalar echish.

Reja:
Analitik mexanika. Bog‘lanishlar klassifikatsiyasi,
Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar. Erkinlik darajasi.
Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi.
Masalalar echish

33.1§. Bog‘lanishlarning klassifikatsiyasi.

Muammo: Statika qismida kiritilgan bog‘lanishlar haqidagi tushunchalar, bog‘lanishlar haqidagi hamma tushunchalarni qamrab ololmagan edi. Chunki, biz quyida ko‘rib o‘tadigan masalalarning echish usullarini har qanday bog‘lanishlar uchun qo‘llanilishi mumkin emas. Shu sababli, bog‘lanish va bog‘lanishlarning klassifikatsiyasi haqidagi tushunchalarni, yana

ham batafsilroq ko‘rib o‘tamiz.

Bog‘lanishlar deb, sistemaga ta’sir etayotgan kuchlarning qanday bo‘lishligidan qat’iy nazar, mexanik sistema nuqtalarining holatlariga va ularning tezliklariga qo‘yiladigan chegaralanishga aytiladi. Bunday bog‘lanishlarning qanday klassifikatsiya qilinishini ko‘rib o‘tamiz.

Vaqtga bog‘liq bo‘lmagan bog‘lanishlarni, *statsionar* bog‘lanishlar deb ataladi vaqtga bog‘liq holda o‘zgaruvchi bog‘lanishlarni *nostatsionar* bog‘lanishlar deb ataladi.

Sistema nuqtalarining holatlariga (koordinatalariga) chegaralar qo‘yuvchi bog‘lanishlarni, *geometrik* bog‘lanishlar deb ataladi. Lekin, ular agar nuqtalarning tezliklariga (nuqtalarning koordinatalaridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosilalariga) ham chegara qo‘yadigan bo‘lsalar -*kinematik* yoki *differentsial37* bog‘lanishlar deb ataladi.

Agar, differentsial bog‘lanishni geometrik bog‘lanish ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lsa, ya’ni tezliklarga qo‘yilgan chegaralarni, ularning koordinatalariga qo‘yilgan chegaralar ko‘rinishiga keltirish mumkin bo‘lsa, bunday bog‘lanishlarni *integrallanuvchi*, aks holda *integrallanmaydigan* bog‘lanishlar deb ataladi.

Bog‘lanishlarning ko‘rinishlariga qarab, mexanik sistemalar ham *golonom* (golonomli bog‘lanishlarga ega) va *nogolonom* (nogolonom bog‘lanishlarga ega) bo‘lgan sistemalarga bo‘linadi.

Va nihoyat, *ushlab tura oluvchi* (bunday chegaralar sistemaning ixtiyoriy holatida ham ta’sir etadigan) va *ushlab tura ololmaydigan*, ya’ni yuqoridagi xossaga ega bo‘lmagan (sistema bunday bog‘lanishlardan «ozod bo‘la olishi» mumkin bo‘lgan) bog‘lanishlarga ajraladilar. Yuqoridagilarga oid misollarni ko‘rib o‘tamiz.

1. Statika qismida ko‘rib o‘tilgan barcha turdagi bog‘lanishlar geometrik (golonomli) va statsionar hisoblanadilar. 23.13, a shaklda tasvirlangan, harakatlanayotgan liftning kabinasi ichdagi yuk uchun, lift nostatsionar geometrik bog‘lanish hisoblanadi (yuk joylashgan lift vaqt mobaynida o‘zining fazodagi holatini o‘zgartirib boradi), chunki yukning Oxyz o‘qlarga nisbatan holati vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarib bormoqda.

37 Mazmunan olganda geometrik bog’lanishlar bir vaqtni o’zida kinematik bog’lanishlardan iborat bo’ladi. CHunki sistemaning koordinatalarini qanoatlantiruvchi geometrik bog’lanishlardan olingan differentsiallar orqali, ularning tezliklari ham tegishli qonuniyat bo’yicha o’zaro bog’langanlar (quyidagi misolning 2 p.-ga qaralsin).

2. Sirpanmasdan dumalayotgan tsilindrning holati (31.8 shakl), uning markazi S nuqtaning x_C - koordinatasi va burilish burchagi φ - orqali aniqlanadi. Sof dumalashda $v_C=R\omega$ yoki $_C=R$ shart bajarilishi lozim. Bu differentsial bog‘lanish hisoblanadi, lekin qo‘yilgan shart integrallanadi va $x_C=R\varphi$ ko‘rinishga keltiriladi, ya’ni koordinatalarga bog‘liq holga keltiriladi. Shu sababli, bu golonom bog‘lanish hisoblanadi.

Albatta bunday bog‘lanishni to‘g‘ridan-to‘g‘ri $x_C=R\varphi$ ko‘rinishda yozish ham mumkin edi. Lekin, u holda ushbu shartdan vaqt bo‘yicha bir marta hosila olib, yuqoridagi shartni kinematik hisoblash mumkin.

3. Yuqoridagi tsilindr o‘rniga, g‘adir-budur yuza ustida sof dumalayotgan sharni olib ko‘raylik. U holda, sharning yuza bilan tutashgan nuqtasi nolga teng ekanligini (masalan, sharning markazi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanmasa) va sharning holatini faqat uning koordinatalari orqali ifodalangan ko‘rinishdagi shartni (munosabatni) yoza olmaymiz. Bunday bog‘lanishlar, nogolonom bog‘lanishlar turiga misol bo‘ladi. Bunday bog‘lanishlar qatoriga harakati boshqariluvchi jismlarning harakati ham misol bo‘ladi. Masalan, agar nuqta (raketa) ning harakatida ixtiyoriy vaqt uchun uning tezlik yo‘nalishi, harakatlanuvchi boshqa biror nuqta (dushman samolyoti)ning holatiga yo‘nalgan bo‘lishi shart bo‘lsa, u holda bunday shartni faqat nuqtaning koordinatalari orqali bog‘langan tenglamalar orqali ifodalab bo‘lmaydi.

33.2§. Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar. Erkinlik darajasi.

Yuqoridagi masalalarda ko‘rib o‘tganimizdek, mexanik bug‘lanishlarning samarasini, faqat ularning ko‘rsatgan reaktsiyalarini tenglamaga kiritish orqaligina aniqlash mumkin edi. Endi esa mexanik sistemalarga qo‘yilgan bog‘lanishlarni hisobga olgan holda, ular tomonidan qo‘yiladigan cheklanishlarni hisobga olgan holda, mexanik sistemalarning harakatlari orqali ham aniqlash mumkin ekanligini ko‘rib o‘tamiz. Bunday yo‘l bilan reaktsiyalari noma’lum bo‘lgan mexanik sistemalarning muvozanat yoki harakat tenglamalarini to‘g‘ridan -to‘g‘ri tuzish mumkin ekanligini ko‘rib o‘tamiz, natijada mexanika masalalarini echish ancha soddalashadi.

Yuqorida aytib o‘tilgan *mumkin bo‘lgan* (*virtual*) *ko‘chishlar,* quyidagi shartlarni bajarishi lozim: 1) ular o‘ta kichkina bo‘lishlari kerak, aks holda sistemaning katta ko‘chishlarida u mutloq boshqa sistemaga aylanib qolishi mumkin va bog‘lanishlarning samarasi

o‘zgarib qoladi; 2) shu elementar ko‘chishda, sistemaga qo‘yilgan barcha bog‘lanishlar saqlanib qolinishi kerak, aks holda sistema boshqa turdagi bog‘lanishlar ta’siriga kirib qolishi mumkin.

Masalan, (33.4§ dagi) 33.3 shakldagi krivoship-shatunli mexanizmni olib ko‘raylik, agar sistemani shaklda ko‘rsatilgan holatdan $\varphi=0$ holatga ko‘chirsak, bunday ko‘chishni mumkin bo‘lgan ko‘chish deb hisoblash mumkin emas. Chunki, bog‘lanishlarning $\varphi=0$ bo‘lgan holatdagi samarasi butunlay boshqacha bo‘ladi va shu xususiy holni olib ko‘radigan bo‘lsak, $\overline{P}$ kuch va momenti ga teng bo‘lgan juft ta’siridagi mexanizmning muvozanat tenglamasi ham mutloq boshqacha bo‘ladi. Shunga o‘xshash yana bir holat, ya’ni shatunning V nuqtasini, AV shatun bo‘ylab hatto elementar ko‘chishi ham aslo mumkin emas; bunday bo‘lishi uchun mexanizm umuman boshqa mexanizmga aylanib qoladi, ya’ni V polzunning o‘rniga tebranuvchi mufta qo‘yilgan, mutloq boshqa turdagi mexanizmga aylanib qoladi.

Shunday qilib, *mexanik sistemaning mumkin bo‘lgan ko‘chishi deb, sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlar tomonidan ko‘rsatiladigan chegaralanishlar saqlangan holda, uning mazkur holatidan bog‘lanishlarning ta’siri o‘zgarmaydigan ixtiyoriy bo‘lgan boshqa hamma holatlardagi elementar ko‘chishlar mumkin bo‘lgan ko‘chishlar deb ataladi.* Agar ushlab tura olmaydigan bog‘lanishlar qo‘yilgan bo‘lsa, bunday elementar ko‘chishda, bog‘lanish saqlanib qolingan bo‘lishligi zarur (sistemaning nuqtalari «erkin» holatga o‘tib olmasligi lozim).

Bundan keyingi mavzularda, harakatdagi jism nuqtasining dt vaqt ichidagi haqiqiy ko‘chishi -ni va nuqtaning unga qo‘yilgan bog‘lanishlar saqlanib qolingan holdagi mumkin bo‘lgan, lekin amalga oshirilmagan ixtiyoriy ko‘chishlarini farqlab olish lozim bo‘ladi.

Shu sababli nuqtaning mumkin bo‘lgan ko‘chishlarining barchasini 38 elementar vektor bilan belgilaymiz. Uning modulini δs ($\delta s=||$) bilan belgilaymiz va -ning koordinata o‘qlardagi proektsiyalarini tegishlicha δx, δy, δz bo‘ladi; ushbu proektsiyalar nuqtaning koordinatalarini mumkin bo‘lgan ko‘chishidagi elementar orttirmalaridan iborat bo‘lib, nuqtaning harakatini differentsiallash kabi shartli (formal, haqiqiy bo‘lmagan) ravishda aniqlanadi.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, agar bog‘lanishlar statsionar bo‘lsa, ixtiyoriy mexanik sistema nuqtasining mumkin bo‘lgan ko‘chishlaridan

38 Matematika fanida «d» belgisi orqali differentsial tushuniladi, «δ» belgi orqali funktsiyaning varitsiyasi tushuniladi.

bittasi, albatta haqiqiy ko‘chish bilan ustma-ust tushadi. Agar bog‘lanish nostatsionar bo‘lsa, birorta mumkin bo‘lgan ko‘chish, haqiqiy elementar ko‘chish bilan ustma-ust tushmaydi.

Buni 33.1§ dagi harakatlanayotgan lift ichidagi yukning (23.13, a shakl) misolida ko‘rib chiqamiz. Bu erdagi yuk uchun vektori AV bo‘ylab yo‘naladi, -esa AV bo‘yicha bo‘lgan elementar ko‘chish , hamda AV ga perpendikulyar bo‘lgan dt dan iborat lift bilan birgalikdagi elementar ko‘chishlarning vektor yig‘indisidan iborat bo‘ladi; shu sababli vektori AV ga qandaydir burchak ostida yo‘nalgan bo‘ladi, natijada u birorta bilan ustma-ust tusha olmaydi.

Umuman olganda, har qanday mexanik sistema, bir nechta mumkin bo‘lgan ko‘chishlarga ega bo‘lishligi mumkin. Lekin biz ko‘rib o‘tadigan ixtiyoriy sistemalar uchun, ma’lum miqdordagi mumkin bo‘lgan ko‘chishlarni tanlab olish mumkin bo‘lib, qolgan barcha mumkin bo‘lgan ko‘chishlar ular orqali ifodalanadi. Masalan, birorta tekislik (yuza)ning ustida joylashgan nuqtaning mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ko‘chishini, o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan ikkita $_1$ va $_2$ elementar ko‘chishlar orqali ifodalash mumkin bo‘ladi, ya’ni $=a_1+b_2$, bu erdagi *a* va *b* -ixtiyoriy bo‘lgan musbat yoki manfiy sonlar.

Mexanik sistemaning o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan mumkin bo‘lgan ko‘chishlarining soni, uning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi.

Shu sababli, tekislikda joylashgan nuqta ikkita erkinlik darajasiga ega bo‘ladi; uning tekislik ustidagi ixtiyoriy holatini bir vaqtning o‘zida ikkita o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan (har bir koordinata ikkinchisiga bog‘liq bo‘lmagan) koordinatalar orqali aniqlash mumkin bo‘ladi, masalan, *x* va *u* koordinatalar orqali. Erkin moddiy nuqtaning erkinlik darajasi uchta (o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan uchta o‘qlar bo‘yicha harakatlanishi mumkin) bo‘ladi; nuqtaning holati bir vaqtning o‘zidagi o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan x,y,z koordinatalar orqali aniqlanadi.

Ushbu natija, umumiy hisoblanadi, ya’ni *geometrik bog‘lanishlarga ega bo‘lgan mexanik sistemaning holatini aniqlovchi, o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan koordinatalar soni, sistemaning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi.* Shu sababli, bunday sistemalarning erkinlik darajasini, mumkin bo‘lgan ko‘chishlar soni orqali yoki o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan koordinatalar orqali aniqlash mumkin ekan.

Masalan, krivoship-shatunli mexanizmning (33.3 shakl) erkinlik darajasi bitta (mumkin bo‘lgan ko‘chishlar soni bitta, masalan, OA krivoshipning aylanishi va φ burchakdan iborat bo‘lgan bitta koordinata) bo‘ladi. Erkin qattiq jismning erkinlik darajasi oltita (uchta o‘qlar

bo‘yicha ilgarilama va uchta o‘qlar atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo‘lgan ko‘chishlar va qutbning uchta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan koordinatasi, hamda qutb atrofidagi Eyler burchaklarining koordinatalaridan iborat) bo‘ladi.

33.3§. Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi.

Mexanik sistemaning umumiy muvozanat shartlarini belgilovchi mexanikaning yana bir muhim printsipi bilan tanishib chiqamiz. Muvozanat holat deb, sistemaning shunday holatiga aytiladiki, unda sistemaga qo‘yilgan barcha kuchlar ta’siridagi sistemaning hamma nuqtalari («absolyut» sistema deb hisoblanuvchi) inertsial sistemaga nisbatan tinch holatda bo‘ladi. Hamda shu sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlar statsionar deb hisoblanadi, shu sababli keyinchalik bu haqda alohida yana aytib o‘tilmaydi.

Moddiy nuqtaning harakatida, uning haqiqiy elementar ko‘chishlaridan birortasi bilan ustma-ust tushadigan mumkin bo‘lgan ko‘chishda, shu nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlarning bajarishi mumkin bo‘lgan elementar ishni, *mumkin bo‘lgan ish* deb ataladi. Sistemaga ta’sir etuvchi aktiv kuchlarning mumkin bo‘lgan ko‘chishda bajargan ishlarini $\delta A^a(\delta A^a\cdot)$ va reaktsiya kuchlari -ning bajargan ishlarini $\delta A^r(\delta A^r=\cdot)$ orqali belgilaymiz.

Endi ilgari biz foydalangan ideal bog‘lanishlar tushunchasining umumiy ifodasini kiritamiz: *ideal bog‘lanishlar deb, shunday bog‘lanishlarga aytiladiki, sistemaning mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ko‘chishlarida, ularning bajargan elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘ladi,* ya’ni

$$\sum=0 \qquad (33.1)$$

Agar bog‘lanishlar statsionar bo‘lsa, 29.3§ dagi (29.12) tenglik orqali ideal bog‘lanishlarning sharti (33.1) ifoda bilan bir xil bo‘ladi, chunki statsionar bog‘lanishlardagi mumkin bo‘lgan ko‘chishlardan bittasi haqiqiy ko‘chish bilan albatta ustma-ust tushadi. Shu sababli 29.3§ da ko‘rib o‘tilgan bog‘lanishlar, ideal bog‘lanishlar hisoblanadilar.

Sistemaning muvozanatini zaruriy sharti shundan iborat bo‘ladiki, agar ideal bog‘lanishlarga ega bo‘lgan mexanik sistema, unga qo‘yilgan kuchlar ta’sirida muvozanatda bo‘lsa, sistemaning mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ko‘chishida

$$\sum\delta A^a=0 \qquad (33.2)$$

yoki

$$\sum \cdot_k = \delta s_k \cos\alpha_k = 0 \qquad (33.2')$$

bo‘lishi shart, bu erdagi α_k -k nuqtaning mumkin bo‘lgan ko‘chish vektori bilan kuch vektori orasidagi burchak.

Sistemaning ixtiyoriy V_k nuqtasiga ta’sir etuvchi barcha (tashqi va ichki) aktiv kuchlarning va bog‘lanish reaktsiyalarining teng ta’sir etuvchilarini va $_k$ bilan belgilaymiz. U holda har bir nuqta muvozanatda bo‘lganligi sababli $+_k=0$ bo‘ladi, shu sababli V_k nuqtaning mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ko‘chishidagi bajarilgan ishlar ham nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\sum\delta+\sum\delta=0.$$

Lekin bog‘lanishlar ideal bo‘lganliklari va $_k$ sistema nuqtalarining mumkin bo‘lgan ko‘chishlaridan iborat ekanligi sababli (33.1) shartga ko‘ra ikkinchi yig‘indi nolga teng bo‘ladi. U holda birinchi yig‘indi ham o‘z-o‘zidan nol bo‘lar ekan, ya’ni (33.2) shart ham bajariladi. Shunday qilib, (33.2) tenglik mexanik sistema muvozanatining zaruriy sharti ekanligini isbot qildik. Endi esa shu shart etarli ham ekanligini, ya’ni agar muvozanat holatdagi mexanik sistemaning nuqtalariga (33.2) shartni qanoatlantiruvchi aktiv kuchlarni qo‘ysak, sistema muvozanat holatini o‘zgartirmaydi. Aksincha qarab ko‘raylik, ya’ni sistema harakatga kelib, uning ayrim nuqtalari $_k$ dan iborat bo‘lgan haqiqiy elementar ko‘chishlar olsin. U holda ushbu ko‘chishda kuchlari ish bajaradilar va kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasiga asosan

$$dT=\sum d \quad (d=\cdot_k)$$

bu erda, $dT>0$ bo‘ladi, chunki sistema avval muvozanatda bo‘lgan edi; shu sababli $\sum d>0$ bo‘ladi. Lekin statsionar bog‘lanishlarda, haqiqiy elementar ko‘chish $_k$, mumkin bo‘lgan $_k$ ko‘chishlarning birortasi bilan ustma-ust tushadi va bu ko‘chishda $\sum\delta>0$ bo‘lishi kerak, bu esa (33.2) shartni qanoatlantirmaydi. Shunday qilib, agar sistemaga qo‘yilgan kuchlar (33.2) shartni qanoatlantirsa, sistema muvozanat holatdan chiqmaydi, natijada ushbu shart etarli hisoblanadi.

Yuqorida isbot qilinganlar asosida quyidagi mumkin bo‘lgan ko‘chish printsipi[39] kelib chiqadi: *ideal bog‘lanishlarga ega bo‘lgan mexanik sistema muvozanatda bo‘lishining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ekanki, sistemaning mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ko‘chishida, unga ta’sir etuvchi aktiv kuchlarning bajargan elementar*

39 Ushbu printsipni isbotsiz holda, lekin hozirgi ko’rinishdagiga yaqin bo’lgan ifodani (shveytsariyalik olim) Iogann Bernulli (1667-1748y.) aytib o’tgan edi. Ushbu printsipni umumiy holdagi ko’rinishini birinchi bo’lib J.Lagranj (1788y.) ifodalagan va isbot qilib bergan. M.V. Ostrogradskiy o’zining 1838-1842 yillardagi ilmiy ishlarida bu printsipni ushlab tura olmaydigan bog’lanishlarga umumlashtirib bergan.

ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lishi kerak. Muvozanatning matematik sharti (33.2) tenglik orqali ifodalanadi va uni mumkin bo‘lgan ishlar tenglamasi deb ataladi. Ushbu tenglikning analitik ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

(33.3)

Mumkin bo‘lgan ko‘chish printsipi mexanik sistemaning umumiy muvozanat shartini belgilab beradi. Natijada, sistema qism (jism)larining muvozanatlik shartlarini alohida-alohida ko‘rib chiqishlikning hojati qolmaydi va ideal bog‘lanishlarga ega bo‘lgan sistemalarning noma’lum reaktsiyalari tenglamadan chiqib ketadi.

33.4§. Masalalar echish.

Masalalar echishni boshlashdan oldin, mumkin bo‘lgan ko‘chishlar soniga yoki koordinatalar sistemasiga bog‘liq holda, sistemaning (xususiy holda mexanizmning) erkinlik darajasini aniqlab olish lozim.

Tekislikda joylashgan mexanizmlarning erkinlik darajasi amalda quyidagicha aniqlanadi. Mexanizm harakatlanmoqda deb faraz qilinadi. Agar birorta ilgarilama yoki aylanma harakat qilayotgan zvenoni to‘xtatib qo‘yganimizda, butun mexanizm ham to‘xtab qolsa, u holda bu mexanizmning erkinlik darajasi bitta bo‘ladi. Mabodo mexanizmning biror qismi harakatni davom ettiraversa, yana harakatlanayotgan birorta zvenoni to‘xtatamiz, shundan keyin mexanizm to‘liq to‘xtasa, demak mexanizmning erkinlik darajasi ikkita ekan.

Mabodo, ushbu mexanizmning biror qismining harakatini yana davom etdirilsa, yana yuqoridagi amallarni qaytarib, mexanizmning erkinlik darajasi aniqlanadi. Shunga o‘xshash, agar mexanizmning holati uning koordinatalari orqali berilgan bo‘lsa, birorta koordinata o‘zgarmas bo‘lgan holda mexanizm to‘xtab qolsa, demak mexanizmning erkinlik darajasi bitta ekan. Agar, bundan keyin mexanizmning bir qismi harakatini davom etaversa, harakatlanayotgan qismining birorta koordinatasi o‘zgarmas qilinadi va h.k.

Bitta erkinlik darajaga ega bo‘lgan mexanik sistemaga oid masalalarni *geometrik* usulda echish uchun: 1) sistemaga ta’sir etayotgan barcha aktiv kuchlarni shaklda tasvirlash kerak; 2) sistemaga birorta mumkin bo‘lgan ko‘chish berish kerak va sistemaning kuch qo‘yilgan barcha nuqtalarining δs_k ko‘chishlarini yoki kuch qo‘yilgan qismlarining elementar $\delta\varphi_k$ burilishlarini shaklda ko‘rsatish lozim (elementar

ko‘chishlarni shaklda tasvirlashda, ularning tenglamaga bevosita kiritiladigan modullari δs_k ko‘rsatiladi); 3) quyidagi:

$$\delta=\cdot_k=F^a_{k\tau}\delta s_k sos\alpha_k \quad \text{yoki} \quad \delta=m_O()\cdot\delta\varphi_k \quad (33.4)$$

formulalar orqali, barcha aktiv kuchlarning mumkin bo‘lgan ko‘chishda bajargan elementar ishlari aniqlanadi va (33.2) shart yoziladi; 4) (33.2) shartga asosan yozilgan tenglamadagi δs_k bilan $\delta\varphi_k$ lar orasidagi bog‘lanish aniqlanadi va ularning hammasini birorta elementar ko‘chish orqali ifodalaniladi, erkinlik darajasi bitta bo‘lgan sistema uchun albatta bajarish mumkin.

(33.2) formuladagi barcha δs_k va $\delta\varphi_k$ larni birortasi orqali ifodalangandan uni qavsdan chiqarib tashlanib, qavs ichidagi ifodani nolga tenglanadi va undan noma’lum qiymat aniqlanadi.

δs_k bilan $\delta\varphi_k$ orasidagi munosabatni: a) tegishli geometrik munosabatlar orqali (33.6 masalaga q.); b) sistema harakatda deb hisoblab, ya’ni mazkur holatda tegishli nuqtaning chiziqli v_k va burchakli ω_k tezliklari orasidagi kinematik munosabatlar orqali. So‘ngra, statsionar bog‘lanishlardagi mumkin bo‘lgan ko‘chishlardan biri haqiqiy ko‘chishga teng ekanligidan foydalanib, $\delta s_k=v_k dt$; va $\delta\varphi_k=\omega_k dt$ deb hisoblanadi (aks holda, mumkin bo‘lgan ko‘chishlar orasidagi bog‘lanish o‘rniga 33.3 masaladagi kabi to‘g‘ridan-to‘g‘ri ularning tezliklari orasidagi munosabatni yozish mumkin bo‘ladi);

Erkinlik darajasi bir nechta bo‘lgan mexanik sistemalarning muvozanatiga oid masalalarni echishda, har bir erkinlik darajasiga alohida-alohida (33.2) tenglik yozilib chiqiladi va yuqoridagi kabi amallar bajariladi. Natijada, nechta erkinlik darajasi mavjud bo‘lsa, shuncha tenglamalardan iborat bo‘lgan sistema hosil bo‘ladi. Xuddi shunday natijalarga keladigan usul keyingi mavzularda bayon qilinadi.

Masalalarni *analitik* usulda echish uchun, (33.3) formula ko‘rinishidagi muvozanat tenglamasi tuziladi. Buning uchun sistema bilan bog‘langan, lekin mumkin bo‘lgan ko‘chishlarda qo‘zg‘almas bo‘ladigan koordinata o‘qlari tanlab olinadi. So‘ngra sistemaga ta’sir etuvchi barcha aktiv kuchlarning o‘qlardagi proektsiyalari aniqlanadi hamda kuch qo‘yilgan nuqtalarning x_k, y_k, z_k barcha koordinatalarini birorta parametr (masalan, burchak) orqali ifodalanadi. So‘ngra x_k, y_k, z_k larni parametr bo‘yicha differentsiallash orqali δx_k, δy_k, δz_k qiymatlar aniqlanadi.

Agarda, x_k, y_k, z_k larni birorta parametr orqali ifodalashning iloji qiyinroq bo‘lsa, u holda bir nechta parametr tanlab olinadi va ular orasidagi bog‘lanishlar aniqlanadi.

33.1 shakl

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, agar sistemaga ishqalanish kuchlari ham ta’sir etadigan bo‘lsa, ularni aktiv kuchlar qatoriga kiritilib, (33.2) va (33.3) formulalar orqali muvozanat tenglamalari tuzish mumkin bo‘ladi. Agar reaktsiya kuchlarini aniqlash lozim bo‘lsa, ushbu bog‘lanish tashlab yuboriladi va o‘rniga uning reaktsiyasi qo‘yiladi. So‘ngra shu noma’lum reaktsiya kuchini aktiv kuchlar qatoriga qo‘shib, muvozanat tenglamalari tuzilib, kerakli noma’lumlar aniqlanadi, natijada sistemaning erkinlik darajasi ortadi.

33.1 masala. 33.1 shaklda tasvirlangan mexanizmning muvozanat holatida, unga ta’sir etuvchi va kuchlar orasidagi bog‘lanish aniqlansin.

E ch i sh. Sistemaning erkinlik darajasi bitta. Agar sistemaga mumkin bo‘lgan ko‘chishlar berilsa, sterjenlardan iborat bo‘lgan parallelogrammlarning diagonallari bir xil δs masofaga uzayadi. U holda $\delta s_A=\delta s$, $\delta s_V=3\delta s$ bo‘ladi. Sistema uchun (33.2) tenglamani tuzamiz:

$$R\delta s_V-Q\delta s_A=0 \quad \text{yoki} \quad (3R-Q)\delta s=0$$

bundan, $Q=3R$. Natija juda oson aniqlanadi.

33.2 masala. Ikkita tsilindrsimon katoklarning har birini og‘irliklari R, ularning ustiga qo‘yilgan to‘sinning og‘irligi Q. Ushbu to‘sinni, qiyalik burchagi α -bo‘lgan tekislik ustida muvozanat holatda ushlab turish uchun, zarur bo‘lgan F kuchning qiymati aniqlansin (33.2 shakl). Katoklar bilan to‘sin va tekislik orasidagi ishqalanish kuchlari, ularni sirpanmasligi uchun etarli deb hisoblansin.

E ch i sh. Agar katoklarning dumalashidagi qarshilikni hisobga olinmasa, katoklar uchun tekislik ideal bog‘lanish hisoblanadi. Sirpanmasdan dumalashda, sistemaning erkinlik darajasi bitta bo‘ladi. Sistemaga mumkin bo‘lgan ko‘chish berib, (33.2) shartga binoan tenglama tuzamiz:

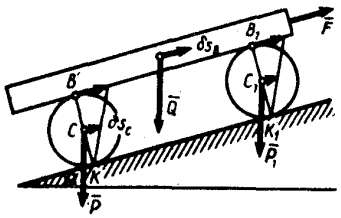
$$F\delta s_V-Q\sin\alpha\cdot\delta s_B-2R\sin\alpha\cdot\delta s_C=0$$

bu erdagi δs_V -to‘sinning V nuqtasi bilan tutashgan nuqtasining mumkin bo‘lgan ko‘chishi.

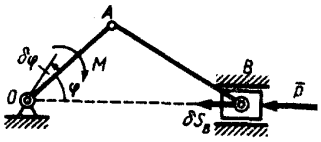
Katokning tekislik bilan tutashgan K nuqtasi uning oniy tezliklar markazi bo‘ladi. Shu sababli, $v_B=2v_C$ va $\delta s_B=2\delta s_C$, hamda $\delta s_B=v_B dt$ $\delta s_C=v_C dt$. Aniqlangan ushbu δs_V ning qiymatlarini yuqoridagi tenglamaga qo‘ysak

$$F=(Q+R)\sin\alpha.$$

33.3 masala. Krivoship-polzunli mexanizmning krivoshipiga ta’sir etuvchi juftning momenti M bilan (33.3 shakl) porshenga ta’sir etuvchi R bosim kuchi orasidagi munosabat qanday bo‘lganda mexanizm muvozanatda bo‘lishligi aniqlansin. OA=r, AB=l, ∠AOV=φ.



33.2 shakl.



33.3 shakl.

E ch i sh. Mexanizmning erkinlik darajasi 1-ga teng. (33.2) muvozanatlik shartiga ko‘ra, agar $\delta s_B=v_B dt$ va $\delta\varphi=\omega_{OA}dt$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$R\delta s_B-M\delta\varphi=0 \quad \text{yoki} \quad M\omega_{OA}=Rv_B.$$

Masalaning echimi v_B va ω_{OA} ning orasidagi bog‘lanishni aniqlashga qarab qoladi. Bunday masala ilgari kinematika qismida ko‘rib o‘tilgan. O‘sha natijadan foydalanib masalani echamiz

$$M=Rr\left(1+\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi.$$

33.4 masala. Detallari K korobkaning ichiga ko‘rinmaydigan qilib, o‘rnatilgan ko‘taruvchi mexanizmga qo‘yilgan R va Q kuchlar orasidagi bog‘lanish aniqlansin (33.4 shakl). AV (AV=l) dastgohning har bir buralishida D vint h balandlikka ko‘tariladi.

E ch i sh . Sistema uchun (33.2) tenglamani tuzamiz,

$$Rl\delta\varphi_{AB}-Q\delta s_D=0$$

Dastgohning tekis aylantirilishida vint ham tekis ko‘tariladi deb hisoblasak, u holda

$$\frac{\delta\varphi_{AB}}{2\pi}=\frac{\delta s_D}{h} \qquad \text{yoki} \quad \delta\varphi_{AV}=\delta s_D.$$

$\delta\varphi_{AV}$ -ning qiymatini yuqoridagi tenglamaga qo‘ysak

$$Q=2\pi lR/h.$$

Shuni aytib o‘tish lozimki, ushbu masalani geometrik usul bilan aslo echib bo‘lmaydi, chunki mexanizmning ichidagi konstruktsiya bizga noma’lum edi.

Ushbu echilgan masaladan ko‘rinib turibdiki, qo‘llanilayotgan usulning qanday (printsipial) qulayliklarga ega ekanligi namoyon

bo‘lmoqda. Lekin, konkret injenerlik hisoblash ishlarida, albatta zvenolar orasidagi ishqalanishlarni ham hisobga olish lozim bo‘ladi, buning uchun esa mexanizmning konstruktsiyasini bilish kerak bo‘ladi.

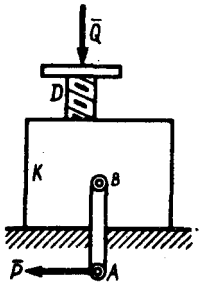
33.5 masala. S nuqtada sharnir orqali biriktirilgan ikkita brusdan tashkil topgan (qo‘shma) balkaning ustiga R yuk qo‘yilgan (33.5, a shakl). Balkaning o‘lchamlari va tayanchlarning qanday joylashganligi shaklda tasvirlangan. Qo‘yilgan yuk ta’sirida V tayanchga bo‘lgan bosim kuchi aniqlansin.

E ch i sh. V tayanchni tashlab yuboramiz va uning o‘rniga axtarilayotgan bosim kuchiga moduli bo‘yicha teng bo‘lgan N_B reaktsiya kuchini qo‘yamiz (33.5, b shakl). Sistemaga mumkin bo‘lgan ko‘chishlar beramiz (sistemaning erkinlik darajasi birga teng bo‘ldi, avval nolga teng edi) va (33.2) shartni tuzamiz:

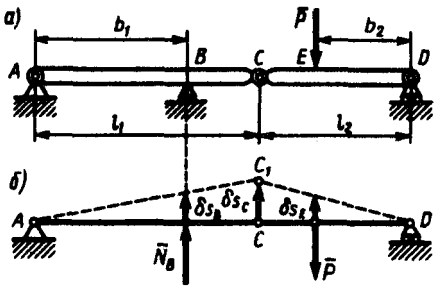
$$N_B\delta s_B - R\delta s_B = 0.$$

δs_B bilan δs_E orasidagi bog‘lanishni quyidagi proportsiya orqali aniqlaymiz

$$\frac{\delta s_B}{b_1} = \frac{\delta s_C}{l_1}, \qquad \frac{\delta s_B}{b_2} = \frac{\delta s_C}{l_2}, \quad \text{bundan} \quad \delta s_E = \frac{b_2 l_1}{b_1 l_2}\delta s_V.$$



33.4 shakl.



33.5 shakl.

Demak,

$$N_B = (b_2 l_1 / b_1 l_2)R.$$

Agar geometrik usulni qo‘llaganimizda, masala juda murakkablashib ketar edi (balkani qismlarga ajratib, har birining muvozanatini alohida tekshirish lozim bo‘lar edi va boshqa reaktsiyalarni ham qo‘shish lozim bo‘lar edi, so‘ngra tuzilgan tenglamalardan noma’lumlarni chiqarib tashlanar edi va h.k.).

33.6 masala. Og‘irligi R_1 bo‘lgan gorizontal brus 1, bir uchi bilan sharnir orqali A nuqtaga biriktirilgan, ikkinchi uchi ham sharnir orqali V nuqtada, og‘irligi R_2 bo‘lgan brus 2 ning uchiga biriktirilgan; brus 2 ning S uchi gorizontal tekislikka tayanib turibdi va brus 2 gorizont bilan α burchak ostida og‘ma holda muvozanatni saqlab turibdi. Sistema shaklda ko‘rsatilgan holatda muvozanatini saqlashi uchun S nuqtaga qo‘yilishi zarur bo‘lgan ishqlanish kuchi aniqlansin.

E ch i sh. Sistemaga ta’sir etuvchi ,aktiv kuchlarni va ishqalanish kuchini ham aktiv kuchlar qatoriga qo‘shib, vektor shaklida tasvirlaymiz; kuchni ikkita bir xil /2 tashkil etuvchilarga ajratamiz va ularni V va S nuqtalarga qo‘yamiz (*bunday qilishdan asosiy maqsad shuki, mumkin bo‘lgan ishlarni aniqlash juda osonlashadi*).

(33.4) formulani va AV=l ekanligini e’tiborga olib, (33.2) muvozanatlik sharti tenglamasini tuzamiz:

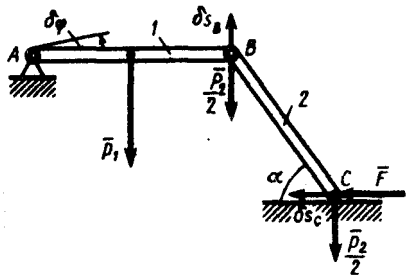
$$-(R_1l/2+ R_2l/2)\delta\varphi+F\delta s_C=0.$$

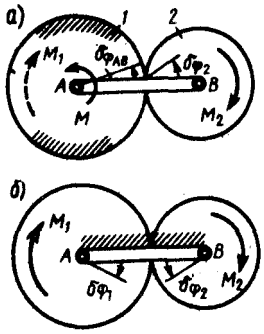
Lekin ikkita nuqtalar tezliklarining proektsiyalari haqidagi teoremaga asosan, $\delta s_S sos\alpha=\delta s_B sin\alpha$, bu erdagi $\delta s_V=l\delta\varphi$. U holda, $\delta s_S=ltg\alpha\cdot\delta\varphi$ va oxirgi natija

$$F=0,5(R_1+R_2)ctg\alpha.$$

Shuni eslatib o‘tish lozimki, masalani geometrik usul bilan echilganda faqat bitta tenglama tuzish mumkin bo‘lar edi xolos va u orqali to‘g‘ridan-to‘g‘ri F kuchni aniqlab bo‘lmas edi.

33.7 masala. Differentsial uzatmali planetar mexanizmda A o‘qqa bir- biriga bog‘liq bo‘lmagan harakat qiluvchi r_1 radiusli shesternya 1 va AV krivoship o‘rnatilgan. Krivoshipning ikkinchi uchiga radiusi r_2 bo‘lgan shesternya 2 ning V o‘qi mahkamlangan (33.7 shakl). Krivoshipga burovchi moment M qo‘yilgan, shesternya 1 va 2 larga tegishlicha M_1 va M_2 qarshilik momentlari qo‘yilgan. Mexanizmning muvozanat holatidagi M_1 va M_2 qarshilik momentlarining qiymatlari aniqlansin.





33.6 shakl 33.7 shakl

E ch i sh. Mexanizm ikkita erkinlik darajasiga ega, chunki unda o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan ikkita harakatlar sodir bo‘ladi: a)qo‘zg‘almas shesternya 1 ning atrofida AV krivoshipning burilishi va b) AV krivoship qo‘zg‘almas bo‘lganda shesternya -1 ning harakati. Shesternya 1 ni qo‘zg‘almas deb hisoblab sistemaga mumkin bo‘lgan ko‘chishlar beramiz (360, a shakl). Ushbu ko‘chish uchun (33.2) formula orqali

$$M\delta\varphi_{AV}- M_2\delta\varphi_2=0.$$

Lekin, shesternya 1 qo‘zg‘almas bo‘lganda, shesternyalarning tutash nuqtasi shesternya 2 uchun oniy tezliklar markazi hisoblanadi. Shu sababli, $v_B=\omega_2 r_2$. Shuningdek $v_B=\omega_{AV}(r_1+r_2)$. Bundan $\omega_2 r_2=\omega_{AV}(r_1+r_2)$ yoki $r_2\delta\varphi_2=(r_1+r_2)\,\delta\varphi_{AB}$ va bundan $M_2=r_2M/(r_1+r_2)$.

Endi sistemaga birinchi erkinlik darajasiga bog‘liq bo‘lmagan, ya’ni AV krivoship qo‘zg‘almas bo‘lgan holatdagi boshqa mumkin bo‘lgan ko‘chish beramiz (360, b shakl). Bunday ko‘chishda (33.2) formula quyidagicha tuziladi:

$$M_1\delta\varphi_1- M_2\delta\varphi_2=0.$$

Lekin, krivoship qo‘zg‘almas bo‘lganda,

$$\delta\varphi_2/\delta\varphi_1=\omega_2/\omega_1=r_1/r_2 \quad \text{va} \quad M_1=(r_1/r_2)M_2.$$

Oxirgi natija quyidagicha bo‘ladi

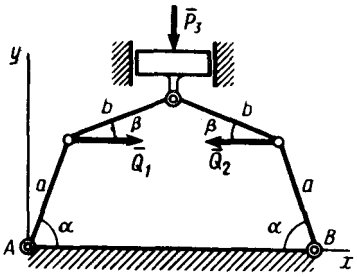
$$M_1=r_1M(r_1+r_2), \quad M_2=r_2M(r_1+r_2).$$

33.8 masala. 33.8 shaklda tasvirlangan pressning muvozanat holatida , va kuchlarning orasidagi munosabat aniqlansin ($Q_1=Q_2=Q$, $R_3=R$). α va β burchaklar ma’lum. Sterjenlar og‘irliklari e’tiborga olinmasin.

Echish. Analitik hisobga misol keltirish uchun, (33.3) shartga muvofiq muvozanat tenglama tuzamiz. A nuqtani koordinata boshi deb tanlab olib, qo‘zg‘almas x va u o‘qlarni o‘tkazamiz va

$$Q_{1x}\delta x_1+ Q_{2x}\delta x_2+ R_{3u}\delta u_3=0, \qquad (a)$$

qolgan kuchlarning proektsiyalari nolga teng bo‘ladi.



33.8 shakl.

δx_1, δx_2, δu_3 larni aniqlash uchun, avvalo kuch qo‘yilgan nuqtalarning x_1, x_2 va u_3 koordinatalarini α va β lar orqali aniqlash lozim. Sterjenlarni uzunligini a va b -lar bilan belgilab,

$$x_1=a\cos\alpha,\ x_2=a\cos\alpha+2b\cos\beta,\ y_3=b\sin\beta+a\sin\alpha.$$

Ushbu qiymatlarni differentsiallarini yozamiz

$$\delta x_1=-a\sin\alpha\cdot\delta\alpha,$$

$$\delta x_2=-(a\sin\alpha\cdot\delta\alpha+2b\sin\beta\cdot\delta\beta),$$

$$\delta y_3=b\cos\beta\cdot\delta\beta+ a\cos\alpha\cdot\delta\alpha.$$

Ushbu qiymatlarni (a) tenglamaga keltirib qo‘ysak (va $Q_{1x}=Q$, $Q_{2x}=-Q$, $R_{3u}=-R$ ekanligini hisobga olib)

$$2Qb\sin\beta\cdot\delta\beta-R(b\cos\beta\cdot\delta\beta+a\cos\alpha\cdot\delta\alpha)=0.$$

$\delta\alpha$ bilan $\delta\beta$ orasidagi bog‘lanishni aniqlash uchun, AV=sonst ekanligidan foydalanamiz. Shu sababli $2(a\cos\alpha+b\cos\beta)$=sonst. Ushbu tenglikni differentsiallasak:

$$a\cdot\sin\alpha\cdot\delta\alpha+b\cdot\sin\beta\cdot\delta\beta=0 \quad \text{va} \quad \delta\alpha=-\delta\beta.$$

$\delta\alpha$ -ning qiymatini (b) ga qo‘ysak

$$2Q\sin\beta-R(\sos\beta-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\beta)=0$$

bundan

$$R=2Q/(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha).$$

Agar β burchak α burchakka yaqin bo‘lsa, bosim kuchi o‘ta katta miqdorga ko‘tariladi.

Tayanch so‘z va iboralar: Statsionar va nostatsionar bog‘lanishlar, geometrik bog‘lanishlar, kinematik yoki differentsial bog‘lanishlar, golonom va nogolonom bog‘lanishlar, ushlab turuvchi va ushlab tura olmaydigan bog‘lanishlar.ideal bog‘lanishlar, erkinlik darajasi, mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi, virtual ko‘chish, virtual ko‘chishda bajariladigan ish.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.

Erkin bo‘lmagan harakatdagi nuqta yoki jismlar albatta birorta bog‘lanish orqali, o‘z harakatini chegaralangan traektoriyalar bo‘yicha olib boradi,

Harakat davomida nuqta yoki jismning harakatini chegaralovchi bog‘lanishlar, ularga tegishli reaktsiyalar orqali ta’sir ko‘rsatadilar.

Bog‘lanishlar, bir necha turlarga bo‘linar ekanlar. Nuqtaning holatini chegaralovchi bog‘lanishlar geometrik bog‘lanishlar deb atalar ekan.

Nuqta yoki jismning tezligini chegaralovchi bog‘lanishlar kinematik yoki differentsial bog‘lanishlar deb atalar ekan,

Integrallash mumkin bo‘lgan differentsial bog‘lanishlar golonom, integrallanmaydigan bog‘lanishlar esa nogolonom bog‘lanishlar deb atalar ekan,

Ixtiyoriy holatda ham bog‘lanishlar saqlanib qolsa bunday bog‘lanishlar ushlab turuvchi, aks holda ushlub tura olmaydigan bog‘lanishlar deb atalar ekan,

Jismning bog‘lanishlar saqlanib qolgan holdagi barcha elementar ko‘chishlari, virtual yoki mumkin bo‘lgan ko‘chishlar deb atalar ekan.

Mexanik sistemaning o‘zaro bog‘lanmagan virtual ko‘chishlari, uning erkinlik darajasi deb atalar ekan,

Mumkin bo‘lgan ko‘chishlarda bog‘lanishlar reaktsiyalarining bajargan ishlari nolga teng bo‘lsa, bunday bog‘lanishlar ideal bog‘lanishlar deb atalar ekan,

Agar ideal bog‘lanishlarga ega bo‘lgan mexanik sistema muvozanatda bo‘lsa, unga ta’sir etayotgan kuchlarning mumkin bo‘lgan ko‘chishda bajargan elementar ishlarinng yig‘indisi nolga teng bo‘lar ekan. Ushbu qoidani mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi deb atalar ekan.

Takrorlash uchun savollar

Bog‘lanishlar deganimizda nimani tushunasiz?
Statsionar va nostatsionar bog‘lanishlarga misollar keltiring?
Geometrik va kinematik bog‘lanishlarga misollar keltiring?
Ushlab tura oluvchi va ushlab tura olmaydigan bog‘lanishlarga misollar keltiring?
Golonom va nogolonom bog‘lanishlarga qanday bog‘lanishlar kiradi?
Ideal bog‘lanishlar deb qanday bog‘lanishlarga aytiladi?
Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar deb qanday ko‘chishlarga aytiladi?
Ideal bog‘lanishlar qo‘yilgan mexanik sistemaning mumkin bo‘lgan ko‘chishlarda bog‘lanishlar reaktsiyasining bajargan ishlari nechaga teng bo‘ladi?
Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi nimadan iborat?
Mumkin bo‘lgan ko‘chishda, aktiv kuchlarning bajargan elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, bu qanday vaziyatni anglatadi?
Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipining zaruriy va etarli shartlari nimalardan iborat?

Mavzuni mustahkamlash uchun 33 ilovadagi masalalarni mustaqil ravishda echishni tavsiya qilamiz:

34 Ma’ruza

Mavzu: Dinamikaning umumiy tenglamasi. Umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar. Umumlashgan kuchlar, mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalardagi muvozanatlik sharti, Lagranjning tenglamasi.

Reja:

Dinamikaning umumiy tenglamasi.
Umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar.
Umumlashgan kuchlar,
Mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalardagi muvozanatlik sharti,
Lagranjning tenglamasi.

34.1§. Dinamikaning umumiy tenglamasi.

Muammo: Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi, statikaga oid masalalarning umumiy echimini aniqlab beradi. Agar shu printsipga Dalamber printsipi qo‘llansa, dinamika maslalarini ham statika tenglamalari orqali echsa bo‘ladi. Shu sababli, bu ikkala printsipni bir vaqtning o‘zida qo‘llab, dinamikaga oid masalalarning ham umumiy echimlarini aniqlash mumkin bo‘ladi.

Ideal bog‘lanishlar qo‘yilgan moddiy nuqtalar sistemasini olib ko‘raylik. Agar, sistemaning har bir nuqtasiga ularga ta’sir etayotgan aktiv kuchlar va bog‘lanishlarning reaktsiya $_k$ kuchlaridan tashqari inertsiya, ya’ni =-m_{kk} kuchlarini ham qo‘shsak, u holda hosil bo‘lgan kuchlar sistemasi Dalamber printsipiga asosan muvozanatda bo‘ladi. Shu sababli, ushbu kuchlar sistemasiga mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipini qo‘llab,

$$\sum\delta+\sum\delta+\sum\delta=0$$

Lekin, (33.1) shartga ko‘ra oxirgi yig‘indi nolga teng bo‘ladi va bunday sistema uchun mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi

$$\sum\delta+\sum\delta=0. \qquad (34.1)$$

Olingan natijadan quyidagi Dalamber - Lagranj printsipi kelib chiqadi: *ideal bog‘lanishlar qo‘yilgan mexanik sistemaning harakatida, ixtiyoriy olingan vaqt uchun unga ta’sir etuvchi aktiv kuchlarning va inertsiya kuchlarining mumkin bo‘lgan ko‘chishlaridagi bajargan ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lar ekan.*

Ushbu printsipni ifodalovchi (34.1) tenglamani dinamikaning umumiy tenglamasi deb ataladi. Ushbu (34.1)tenglamaning analitik ifodasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

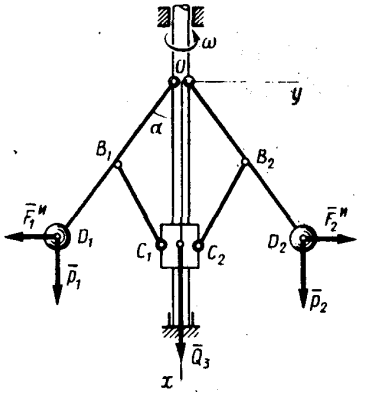
$$\sum[(F_{kx}^{a}+F_{kx}^{и})\delta x_k+(F_{ky}^{a}+F_{ky}^{и})\delta y_k+(F_{kz}^{a}+F_{kz}^{и})\delta z_k]=0 \qquad (34.2)$$

(34.1) yoki (34.2) tenglamalar yordamida, mexanik sistema harakatining differentsial tenglamasini tuzish mumkin bo‘ladi.

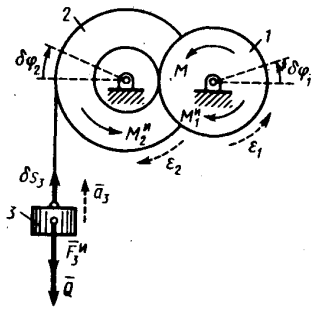
Agar, mexanik sistema bir nechta qattiq jismlardan tashkil topgan bo‘lsa, har bir jismga ta’sir etayotgan aktiv kuchlar qatoriga ixtiyoriy markazga qo‘yilgan inertsiya kuchlarining bosh vektoriga teng bo‘lgan kuchni va momenti inertsiya kuchlarning shu nuqtaga nisbatan olingan momentlarining yig‘indisiga teng bo‘lgan juftni (yoki ulardan bittasini) qo‘shish kerak, undan so‘ng mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipini qo‘llash lozim bo‘ladi.

34.1 masala. Vertikal o‘q atrofida o‘zgarmas ω burchakli tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan markazdan qochma regulyatorning (34.1 shakl) har bir D_1 va D_2 sharlarning og‘irligi r -ga teng; S_1S_2 muftaning og‘irligi Q; Agar, $OD_1=OD_2=l$, $OB_1=OB_2=B_1C_1=B_2C_2=b$ bo‘lsa, sterjenlarning og‘irligini hisobga olmasdan, α burchakning qiymati aniqlansin.

E ch i sh. , va $_3$ aktiv kuchlar qatoriga, sharlarning markazdan qochma inertsiya va (muftaning inertsiya kuchi nolga teng) kuchlarni qo‘shamiz va (34.2) ko‘rinishdagi dinamikaning umumiy tenglamasini tuzamiz.



34.1 shakl



34.2 shakl

U holda, barcha kuchlarning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalarini hisoblab chiqsak

$$r_1\delta x_1+ r_2\delta x_2-\delta u_1+\delta u_2+Q_3\delta x_3=0 \qquad (a)$$

Hamda, $Q_3=Q$, $r_1=r_2=r$, ==$(r/g)a_D=(r/g)\omega^2 l\sin\alpha$ bo‘ladi.

Kuchlar qo‘yilgan nuqtalarning koordinatalari:

$$x_1=x_2=l\cos\alpha,\ y_2=-y_1=l\sin\alpha,\ x_3=2b\cos\alpha.$$

Bularni differentsiallaymiz:

$$\delta x_1=\delta x_2=-l\sin\alpha\cdot\delta\alpha,\quad \delta y_2=-\delta y_1=l\cos\alpha\cdot\delta\alpha,\quad \delta x_3=-2b\sin\alpha\cdot\delta\alpha,$$

Aniqlangan qiymatlarni (a) tenglamaga qo‘ysak,

$$[-2rl\sin\alpha+2(r/g)\omega^2 l^2\sin\alpha\cos\alpha-2Qb\sin\alpha]\delta\alpha=0,$$

ushbu tenglamani α ga nisbatan echsak, masalaning javobi aniqlanadi:

$$\text{sos}\alpha=\frac{(pl+Qb)g}{pl^2\omega^2}.$$

sos$\alpha\le 1$ bo‘lganligi uchun, sharlar $\omega^2\ge(rl+Qb)g/rl^2$ bo‘lgandagina og‘a boshlaydilar. ω ortgan sari α ham ortib boradi va $\alpha=90°$ bo‘lganda $\omega\to\infty$.

34.2 masala. 34.2 shaklda tasvirlangan ko‘targich (podemnik) dagi og‘irligi R_1, aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya radiusi ρ_1 bo‘lgan shesternya 1 ga burovchi M moment qo‘yilgan.

O‘qlardagi ishqalanish kuchlarini va arqonning og‘irligini hisobga olmasdan, yuqoriga ko‘tarilayotgan og‘irligi Q ga teng bo‘lgan yukning tezlanishi aniqlansin. Arqon o‘ralayotgan baraban, boshqa shesternya bilan mahkam tishlashib turibdi; ularning umumiy og‘irliklari R_2 va aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya radiusi ρ_2.. Shesternyalarning radiuslari tegishlicha r_1 va r_2, barabanning radiusi r.

E ch i sh. Sistemaga ta’sir etayotgan aktiv kuchni (va kuchlar ish bajarmaydilar) va burovchi momentni shaklda tasvirlaymiz; ular qatoriga yukning inertsiya kuchi ni va aylanuvchi jismlarning inertsiya kuchlarining bosh momentlari va bo‘lgan juftlarni qo‘shamiz. Ushbu vektorlarning modullarini aniqlaymiz:

$$F_3^{и}=(Q/g)a_3.\ ||=(R_1/g)\varepsilon_1,\ \ ||=(R_2/g)\varepsilon_2,$$

Barcha kattaliklarning yo‘nalishlari shaklda ko‘rsatilgan. Sistemaga mumkin bo‘lgan ko‘chish beramiz va (34.1) formulaga asosan tenglama tuzamiz:

$$-(Q+)\delta s_3+(M-)\delta\varphi_1-\delta\varphi_2=0.$$

Barcha elementar ko‘chishlarni $\delta\varphi_2$ orqali ifodalaymiz:

$$\delta s_3=r\delta\varphi_2,\quad \frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_2}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}\quad \text{va}\ \ \delta\varphi_1=\delta\varphi_2.$$

Sistemaning harakat tenglamasini oxirgi ko‘rinishini yozamiz,

$$Q(1+)r+\varepsilon_2+\varepsilon_1-M=0.$$

Ushbu tenglamalardagi ε_1 va ε_2 larni a_3 orqali ifodalab olamiz. Hamda ε_1 va ε_2 lar o‘zaro ω_1 va ω_2 lar kabi bog‘langan ekanligini hisobga olsak

$$\varepsilon_2=a_3/r \quad \varepsilon_1=r_2\varepsilon_2/r_1= r_2a_3/rr_1.$$

Natijada masalaning javobini olamiz

$$a_3=\frac{(r_2r/r_1)\cdot M - r^2Q}{r^2Q+\rho_2^2P_2+(\rho_1^2r_2^2/r_1^2)P_1}\,g\,.$$

Ushbu masalani kinetik energiyaning o‘zgarishi teoremasi orqali ham echish mumkin edi.

34.2§. Umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar.

Mexanik sistemaning holatini aniqlovchi koordinata (parametr)lar soni, sistemani tashkil etuvchi nuqta(jism)larning va bog‘lanishlarning soniga hamda shu sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlarning xarakteri (xossalari)ga bog‘liq ravishda bo‘ladi. Biz faqat geometrik (aniqrog‘i, golonom) bog‘lanishlar qo‘yilgan mexanik sistemalarni o‘rganamiz xolos. 33.2§ da ko‘rsatib o‘tilganidek, sistemaning holatini aniqlab beruvchi erkin koordinatalar soni, sistemaning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi. Shunday koordinatalar sifatida, ixtiyoriy o‘lchovli va ixtiyoriy geometrik (yoki fizik) mazmunga ega bo‘lgan parametrlarni tanlab olish mumkin, masalan, to‘g‘ri yoki egri chiziqli kesmani, burchakni, yuzani va h.

Ixtiyoriy o‘lchovli, o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan va mexanik sistemaning holatini bir qiymatli ifodalovchi parametrlarni *umumlashgan koordinatalar* deb ataladi va ularning soni sistemaning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi. Umumlashgan koordinatalarni lotincha q bilan belgilash qabul qilingan. U holda, erkinlik darajasi s -ga teng bo‘lgan mexanik sistemaning holati, s -ta umumlashgan koordinatalar orqali aniqlanadi

$$q_1, q_2,...,q_s. \qquad (34.3)$$

Umumlashgan koordinatalar erkin (o‘zaro bog‘lanmagan) bo‘lganliklari sababli, ularning elementar orttirmalari

$$\delta q_1, \delta q_2,..., \delta q_s. \qquad (34.4)$$

ham erkin bo‘ladi. Hamda (34.4) dagi *har bir qiymat, boshqalariga bog‘liq bo‘lmagan holda, sistemaga mumkin bo‘lgan ko‘chish beradi*.

Har qanday bir koordinatalar sistemasidan boshqasiga o‘tilgandagi kabi, mexanik sistemaning ixtiyoriy nuqtasining dekart koordinatalari x_k, y_k, z_k -ni ham, umumlashgan koordinatalar orqali ifodalab olamiz: $x_k=x_k(q_1,q_2,..,q_s)$ va h. Shu sababli, k nuqtaning radius-vektori uchun = $x_k+y_k+z_k$ ham tegishlicha[40]

$$=(q_1, q_2,..,q_s). \qquad (34.5)$$

1 Misol. Yassi matematik mayatnik bitta erkinlik darajasiga ega (s=1); shu sababli, uning holati bitta umumlashgan koordinata q orqali aniqlanadi. Shunday koordinata sifatida, φ burchakni, yoki AM yoyning uzunligi S -ni, yoki(harakat bitta tekislikda sodir bo‘lganligi sababli) OAM sektorning yuzasi σ -ni tanlab olish mumkin, hamda har bir umumlashgan koordinatalarning musbat va manfiy ishoralarining yo‘nalishlari belgilab qo‘yilishi shart. Ushbu misolda, umumlashgan koordinata sifatida, M nuqtaning abstsissasi x ni tanlash noqulay bo‘ladi, chunki bu koordinata nuqtaning holatini bir qiymatli qilib aniqlay olmaydi (x -ning bir xil qiymatida, mayatnik vertikalning o‘ng yoki chap tomonida bo‘lishi mumkin).

Agar, umumlashgan koordinata sifatida φ burchak tanlab olinsa, u holda burchakka δφ orttirma berib, uning mumkin bo‘lgan ko‘chishini aniqlashimiz mumkin. M nuqtaning x va u Dekart koordinatalarini φ orqali x=lsosφ, y=lsinφ ko‘rinishda ifodalab olish mumkin, bu erdagi l=OM. U holda, (34.5) tenglikka binoan, =(φ) bo‘ladi.

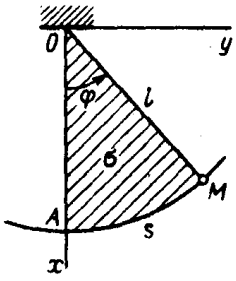
2 Misol. Ikkilangan yassi mayatnik (34.3 shakl) ikkita erkinlik darajasiga ega. Umumlashgan koordinatlar sifatida φ va ψ ($q_1=\varphi$, $q_2=\psi$) burchaklarni tanlab olishimiz mumkin. Ular o‘zaro bog‘langan emaslar, ya’ni ψ o‘zgarmas holda saqlab, φ ni o‘zgartirish mumkin yoki aksincha. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan δψ va δφ qiymatlar, ikkita mumkin bo‘lgan erkin ko‘chishlarni belgilab beradi. A va V nuqtalarning dekart koordinatalarini umumlashgan koordinatalar orqali: $x_A=l_1sos\varphi$, $x_B=l_1sos\varphi+l_2sos(\varphi+\psi)$ va h. ko‘rinishda ifodalab olamiz, bu erdagi l_1=OA, l_2=AV. Shu sababli (34.5) tenglikka binoan, $_A=_A(\varphi)$, $_V=_V(\varphi+\psi)$ bo‘ladi.

Sistemaning harakatida, uning umumlashgan koordinatalari vaqt mobaynida muntazam o‘zgarib turadi va bunday harakatning qonuni quyidagi tenglama orqali aniqlanadi:

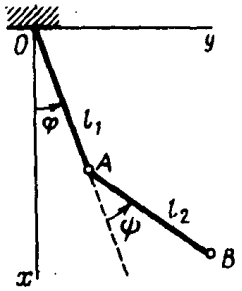
[40] Y’zuv ishlarni kamaytirish maqsadida qo’yilgan bog’lanishlarni statsionar deb hisoblaymiz (aks holda, $\bar{r}_k$ -t argumentga ham bog’liq bo’ladi). Oxirgi tenglamalarning ko’rinishi bunday cheklanishga bog’liq bo’lmaydi va nostatsionar bog’lanishlar uchun ham o’rinli hisoblanadi.

$$q_1=f_1(t),\ q_2=f_2(t),\ldots,\ q_s=f_s(t) \qquad (34.6)$$

(34.6) tenglamalar, *sistema harakatining umumlashgan koordinatalardagi kinematik tenglamalari* deb ataladi.



34.3 shakl



34.4 shakl

Umumlashgan koordinatalardan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosila, sistemaning *umumlashgan tezliklari* deb ataladi. Umumlashgan tezliklarni

$$1,2,\ldots,s$$

orqali belgilash qabul qilingan, bu erdagi $_1=dq/dt$ va h.. Umumlashgan tezlikning o‘lchov birligi tegishli umumlashgan koordinatalarning o‘lchov birligiga bog‘liq bo‘ladi. Agar, q- ning o‘lchovi uzunlik bo‘lsa, - ning o‘lchovi chiziqli tezlik bo‘ladi; q- ning o‘lchovi burchak bo‘lsa, - ning o‘lchovi burchakli tezlik bo‘ladi; q- ning o‘lchovi yuza bo‘lsa, - ning o‘lchovi sektor tezlik bo‘ladi va h.. Ko‘rinib turganidek, umumlashgan tezliklar tushunchasi, ilgari biz kinematika qismida tezlik to‘g‘risida ko‘rib o‘tgan barcha tushunchalarni qamrab olar ekan.

34.3§. Umumlashgan kuchlar.

,,,..., kuchlar ta’siridagi n -ta moddiy nuqtalardan iborat bo‘lgan mexanik sistemani olib ko‘raylik. Sistemaning erkinlik darajasi s -ga teng bo‘lsin va uning holati (34.3) ko‘rinishdagi umumlashgan koordinatalar orqali aniqlansin. Sistemaga mumkin bo‘lgan shunday ko‘chish beraylikki, unda faqat q_1 koordinatagina δq_1 orttirma olsin, qolgan barcha δq_i umumlashgan koordinatalar o‘zgarmasdan qolsin. U holda, sistemaning har bir nuqtasining radius-vektorlari lar ham tegishlicha $(\delta)_1$[41] elementar orttirma oladi. (34.5) formulaga asosan =(q_1, q_2,..,q_s) bo‘lganligi uchun va hozirgi ko‘chishda faqatgina q_1

[41] $(\delta\bar{r}_k)_1$ -belgi, faqat koordinata q_1 o’zgarganda radius-vektor $\bar{r}_k$ -ni δq_1 -elementar qiymatga ortishini ko’rsatib turadi.

o‘zgarayotganligi (qolganlari o‘zgarmasligicha qoladilar) uchun, $(\delta)_1$ ni xususiy differentsial olish kabi aniqlanadi, shu sababli

$$(\delta)_1=\delta q_{1.}$$

Ushbu tenglikdan foydalanib 21.5§ dagi (21.14) formula orqali sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarning sistemaning shu ko‘chishida bajargan elementar ishlarini aniqlaymiz va ularni δA_1 deb belgilaymiz. Natijada:

$$\delta A_1=\cdot(\delta q_1)_1+\cdot(\delta q_2)_1+...+\cdot\ (\delta q_n\ )_1=\ \cdot\delta q_1+\cdot\delta q_1+....+\cdot\delta q_1.$$

Umumiy ko‘paytma bo‘lgan δq_1 ni qavsdan tashqariga chiqarsak,

$$\delta A_1=Q_1\delta q_{1,} \qquad (34.7)$$

bu erdagi

$$Q_1=\sum_k\cdot. \qquad (34.8)$$

kuchning bajargan ishi $\delta A=F_\tau\delta s$ tenglik orqali aniqlangani kabi, ushbu ifodani (34.7) bilan solishtirsak, Q_1 qiymat, umumlashgan koordinata q_1 ga tegishli bo‘lgan *umumlashgan kuch* deb ataladi.

Sistemaga ikkinchi q_2 umumlashgan koordinataga mumkin bo‘lgan ko‘chish berish orqali, sistemaga ta’sir etuvchi barcha kuchlarning shu ko‘chishdagi bajargan ishlarini aniqlaymiz,

$$\delta A_2=Q_2\delta q_{2,} \qquad (34.9)$$

bu erdagi

$$Q_2=\sum_k\cdot. \qquad (34.10)$$

Q_2 qiymat umumlashgan koordinata q_2 ga tegishli bo‘lgan *umumlashgan kuch* deb ataladi va h..

Agar sistemaning barcha umumlashgan koordinatalariga, tegishlicha mumkin bo‘lgan ko‘chishlar berib chiqib, sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarning har bir ko‘chishdagi elementar bajargan ishlarini yig‘ib chiqsak, quyidagi tenglik hosil bo‘ladi:

$$\sum\delta A_k=Q_1\delta q_1+\ Q_2\delta q_2+...+\ Q_s\delta q_s. \qquad (34.11)$$

(34.11) formula *sistemaga ta’sir etayotgan barcha kuchlarning bajargan to‘liq elementar ishlarining umumlashgan koordinatalardagi ifodasi* hisoblanadi. Undan ko‘rinib turibdiki, *umumlashgan kuchlar, bu sistemaga ta’sir etayotgan barcha kuchlarning bajargan to‘liq elementar ishlarining ifodasidagi umumlashgan koordinatalarning orttirmalari oldidagi koeffitsientdan iborat bo‘lgan qiymat ekan.*

Agar sistemaga faqat ideal bog‘lanishlar qo‘yilgan bo‘lsa, u holda mumkin bo‘lgan ko‘chishlardagi barcha ishlarni faqat aktiv kuchlargina

bajaradilar xolos, shu sababli Q_1, Q_2,...,Q_s qiymatlarni sistemaning *umumlashgan aktiv kuchlar* deb ataladi.

Umumlashgan kuchlarning o‘lchov birliklari tegishli umumlashgan koordinatalarning o‘lchov birliklariga bog‘liq holda bo‘ladi. Ish Q·q ko‘paytmadan iborat bo‘lgani uchun, u holda Qq ning o‘lchov birligi ishning o‘lchov birligidan iborat bo‘ladi, shu sababli

[Q]=, (34.12)

ya’ni, *umumlashgan kuchning o‘lchov birligi, ishning o‘lchov birligini tegishli bo‘lgan umumlashgan koordinataning o‘lchov birligiga bo‘lgan nisbatiga teng bo‘ladi.* Bundan ko‘rinib turibdiki, agar q -masofa orqali o‘lchansa, u holda Q ning o‘lchov birligi kuchning o‘lchov birligidan iborat bo‘ladi (SI sistemasida nyutonlarda o‘lchanadi); agar q -burchak (o‘lchovsiz) orqali o‘lchansa, u holda Q ning o‘lchov birligi N·m, ya’ni momentning o‘lchov birligidan iborat bo‘ladi; agar q -hajm (masalan, porshenning tsilindr ichidagi holatini, porshenning orqasidagi hajm orqali o‘lchanadi), orqali o‘lchansa, u holda Q ning o‘lchov birligi N/m^3, ya’ni bosimning o‘lchov birligidan iborat bo‘ladi va h.. Ko‘rinib turganidek, umumlashgan tezlikning analogi sifatida, umumlashgan kuchlar tushunchasi, moddiy jismlarning o‘zaro ta’sirlaridan iborat bo‘lgan barcha o‘lchovlarni qamrab olar ekan (kuch, kuchning momenti, bosim).

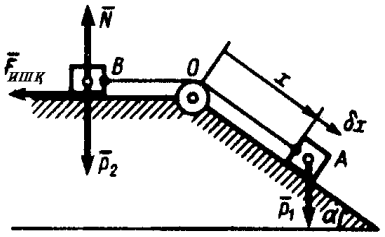
Umumlashgan kuchlarni hisoblash. Ularni (34.7) va (34.9)[42] formulalar yordamida hisoblanadi, ya’ni mumkin bo‘lgan elementar ishni aniqlashdan boshlanadi. Avvalo sistemaning erkinlik darajasi aniqlanadi, umumlashgan koordinatalar tanlab olinadi va sistemaga qo‘yilgan barcha aktiv kuchlar va ishqalanish (agar ular ish bajarasalar) kuchlar shaklda tasvirlanadi.

So‘ngra Q_1 ni aniqlash uchun sistemaga shunday ko‘chish beramizki, unda faqat q_1 koordinata o‘zgaradi xolos, uning musbat ishorali orttirmasini aniqlab, sistemaga qo‘yilgan barcha kuchlarning shu ko‘chishda bajargan elementar ishlarini (33.4) formula orqali hisoblab chiqamiz va ularni (34.7) ko‘rinishda ifodalaymiz. U holda, δq_1 ning oldida turgan koeffitsient biz axtarayotgan Q_1 dan iborat bo‘ladi. Xuddi shunday amallarni bajarish orqali Q_2, Q_3,..... lar aniqlanadi.

---

[42] Q_i-ning qiymatini x_k, y_k, z_k -larni q_1, q_2,... q_n - lar orqali ifodalab va $\bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_1} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_1} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_1}$ va h.k., ekanligini e’tiborga olib (34.8), (34.10) formulalar orqali ham bevosita aniqlash mumkin. Q_i -ni undan tashqari barcha kuchlarning bajargan elementar ishlarini hisoblab, ularni (34.11) ko’rinishga keltiramiz. So’ngra δq_i -ning oldidagi koeffitsient sifatida ham aniqlash mumkin. Lekin, bunday usul orqali hisoblash qulaylik keltirmaydi, balki undan ham murakkabroq holatga keltirishi mumkin.

1 Misol. 34.5 shaklda tasvirlangan sistema uchun, umumlashgan kuchning ifodasi aniqlansin. Og‘irligi R_1 bo‘lgan A yuk, silliq qiya tekislik ustida sirpanib harakatlanmoqda, og‘irligi R_2 bo‘lgan V yuk esa, g‘adir-budur gorizontal tekislik ustida harakatlanmoqda, ishqalanish koeffitsienti f ga teng. Yuklar blok ustidan o‘tkazilgan ip orqali o‘zaro bog‘langanlar. Ipning va blokning massasini hisobga olmaymiz. Sistema bitta erkinlik darajasiga ega va uning holati $q_1=x$ (x -ning musbat yo‘nalishi shaklda strelka orqali ko‘rsatilgan) koordinata orqali aniqlanadi. Q_1 ni aniqlash uchun, sistemaga mumkin bo‘lgan δx ko‘chish beramiz, lekin $\delta x>0$ bo‘lishi kerak.



34.5 shakl

So‘ngra, va $_{ishq}$ kuchlarning bajargan elementar ishlarini hisoblaymiz, boshqa kuchlar ish bajarmaydi. $F_{ishq}=fN= fR_2$ bo‘lganligi uchun

$$\delta A=(R_1\sin\alpha-fR_2)\delta x \text{ bo‘ladi.}$$

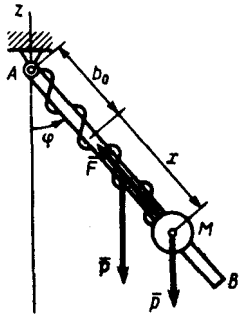
Demak,

$$Q_1= R_1\sin\alpha-fR_2.$$

2 Misol. Ishqalanish kuchini hisobga olmasdan, 34.6 shaklda tasvirlangan sistemaning umumlashgan kuchlari aniqlansin. Bir jinsli AV sterjenning uzunligi l, og‘irligi R ga teng bo‘lib, A nuqta atrofida vertikal tekislikda aylanma harakat qilishi mumkin. Shu sterjenga kiydirilgan M sharchaning og‘irligi r. AM prujinaning erkin uzunligi b_0, uning qattiqligi - **s.**

Sistema ikkita erkinlik darajasiga ega (sharchaning sterjen bo‘ylab harakati va sterjenning A nuqta atrofidagi aylanma harakati). Umumlashgan koordinatalar sifatida, burchak φ va prujinaning erkin holatidagi uchining koordinatasi x -ni ($q_1=\varphi$, $q_2=x$) tanlab olamiz; koordinatalarning musbat yo‘nalishlari shaklda strelkalar orqali ko‘rsatilgan.

Avvalo φ bo‘yicha mumkin bo‘lgan δφ (δφ>0) ko‘chish beramiz, lekin x=sonst bo‘ladi. Ushbu ko‘chishda va lar ish bajaradilar. (33.4) ning ikkinchi tenglamasidan (bu erdagi manfiy ishoraning sababi shuki, momentning yo‘nalishi δφ ga teskari)



34.6 shakl

$$\delta A_1=[-(Rl/2)\sin\varphi-r(b_0+x)\sin\varphi]\delta\varphi.$$

Demak,

$$Q_1=-[(Rl/2)+r(b_0+x)]\sin\varphi.$$

Endi, x koordinata bo‘yicha mumkin bo‘lgan δx(δx>0) ko‘chish beramiz, lekin burchak φ=sonst bo‘ladi. Bunday ko‘chishda og‘irlik kuchi va moduli F=cx ga teng bo‘lgan prujinaning elastiklik kuchi ish bajaradi. U holda

$$\delta A_2=(rsos\varphi-sx)\delta x$$

va

$$Q_2=rsos\varphi-sx.$$

Umumlashgan Q_1 kuchning o‘lchov birligi kuchning momenti orqali ifodalanadi, chunki $q_1=\varphi$, Q_2 kuchning o‘lchov birligi oddiy kuchning o‘lchovi bilan ifodalanadi.

Potentsial kuch maydondagi sistema. Agar sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarning barchasi potentsial kuchlardan iborat bo‘lsa, u holda bizga ma’lumki sistema uchun x_k, y_k, z_k, koordinatalarga bog‘liq bo‘lgan shunday bir U kuch funktsiyasi mavjudki, uning to‘liq differentsiali, sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarning elementar bajargan ishlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni $\sum\delta A_k=\delta U$ [30.1§ dagi (30.9) formula]. Lekin, umumlashgan q_1, q_2,..,q_s koordinatalarga o‘tishda barcha x_k, y_k, z_k, lar, umumlashgan koordinatalar orqali ifodalangan bo‘lishlari kerak, ya’ni $U=U(q_1, q_2,....,q_s)$. Shu sababli, δU-ni $U(q_1, q_2,...,q_s)$ funktsiyaning to‘liq differentsiali kabi aniqlanadi, natijada

$$\sum\delta A_k=\delta U=\delta q_1+\delta q_2+.....+\delta q_s,$$

Ushbu ifodani (34.11) tenglik bilan solishtirib, quyidagini aniqlaymiz

$$Q_1=,\ Q_2=,...,Q_s=, \qquad (34.13)$$

yoki, potentsial energiya P=-U bo‘lganligi uchun

$$Q_1=-,\ =-,\ ..,\ Q_s=- \qquad (34.14)$$

Demak, *sistemaga ta’sir etuvchi barcha kuchlar potentsial kuchlardan iborat bo‘lsa, umumlashgan kuchlar kuch funktsiyasidan (yoki potentsial energiyasidan manfiy ishora bilan)tegishli umumlashgan koordinatalar bo‘yicha olingan xususiy hosilalarga teng ekan.*

3 Misol. 34.6 shaklda tasvirlangan sistemaga ta’sir etuvchi barcha kuchlar potentsial kuchlardan iborat. Agar, Az koordinata o‘qini vertikal yuqoriga qarab yo‘naltirsak, u holda 30.2§ dagi (30.11), (34.11’) formulalar orqali butun sistemaning potentsial energiyasini aniqlaymiz

$$P=-(Rl/2)sos\varphi-r(b_0+x)sos\varphi+cx^2/2,$$

bu erdagi umumlashgan koordinatalar $q_1=\varphi$, $q_2=x$. U holda,

$$Q_1=-=-[Rl/2+ r(b_0+x)]sin\varphi,\ Q_2=-= rsos\varphi-cx.$$

Ya’ni, 2 misolda olingan natija bilan bir xil javob olindi.

34.4§. Sistemaning umumlashgan koordinatalaridagi muvozanat shartlari.

Mumkin bo‘lgan printsipga binoan, har qanday mexanik sistema muvozanatining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ediki, sistemaning ixtiyoriy mumkin bo‘lgan ko‘chishida, unga ta’sir etuvchi aktiv (agar ish bajarsalar, ishqalanish kuchlarining ham) kuchlarning bajargan elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lishi kerak, ya’ni $\sum\delta A_k=0$. (34.11) tenglikka asosan, ushbu muvozanatlik sharti quyidagicha bo‘ladi:

$$Q_1\delta q_1+ Q_2\delta q_2+....+ Q_s\delta q_s=0, \qquad (34.15)$$

δq_1, δq_2,...,δq_s qiymatlar o‘zaro bog‘lanmaganligi sababli (34.15) tenglama qanoatlanishi uchun, faqatgina har δq_1, δq_2,...,δq_s larning oldilaridagi koeffitsientlar, alohida-alohida nolga teng bo‘lishlari shart, ya’ni

$$Q_1=0,\ Q_2=0,....,\ Q_s=0, \qquad (34.16)$$

Haqiqatdan ham, birortasi aytaylik Q_1 nolga teng bo‘lmasin deb hisoblasak, sistemaga har doim shunday $\delta q_1\neq0$ va $\delta q_2=\delta q_3=....=\delta q_s=0$ bo‘lgan ko‘chish berish mumkinki, u holda (34.15) shart bajarilmay qoladi.

Shunday qilib, *mexanik sistema muvozanatda bo‘lishining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ekanki, sistema uchun tanlab olingan barcha umumlashgan koordinatalarga mos bo‘lgan umumlashgan kuchlarning har biri nolga teng bo‘lishi shart ekan.* (34.16) dagi muvozanat *tenglamalarning soni, sistemaning erkinlik darajasiga teng* ekan.

Umumlashgan kuchlarni hisoblash (34.3§ ga q.)dagi va masalalarni echishda 33.4§ dagi usullarni solishtirish natijasida shu narsa tasdiqlandiki, mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi orqali

masalalarni echishda tegishli bo‘lgan umumlashgan kuchlarni aniqlab, so‘ngra ularni nolga tenglagan ekanligimiz ayon bo‘ldi.

Yana ikkita misolni ko‘rib o‘tamiz.

1. 34.5 shaklda tasvirlangan sistema $Q_1=0$ yoki $R_1=fR_2/\sin\alpha$ bo‘lgandagina muvozanatda bo‘ladi. Lekin Q_1 ni hisoblashda $F_{ishq}=fN=F_{cheg}$, bo‘lsa, $Q_1=0$ bo‘lishligi, sistemaning muvozanatda bo‘lishi uchun, ya’ni A yukning pastga harakatlanmasligi zarur bo‘lgan R_1 kuchining eng katta bo‘lgan chegaraviy qiymatini belgilab beradi. Sistema $R_1<fR_2/\sin\alpha$ da ham muvozanatda bo‘ladi.

2. 34.6 shaklda tasvirlangan sistemaning muvozanati uchun $Q_1=0$ va $Q_2=0$ shartlardan quyidagini aniqlaymiz: muvozanat holatida $\varphi=0$, $x=r/c=\lambda_{st.}$

P o t e n ts i a l m a y d o n d a g i s i s t e m a. Bunday holda, agar (34.13) va (34.14) tengliklarni e’tiborga olsak (34.16) muvozanatlik sharti quyidagicha bo‘ladi:

$$=0, \quad =0,...=0, \qquad (34.17)$$

yoki, potentsial energiya $P=-U$ bo‘lganligi uchun,

$$=0, \quad =0, \ ... \ =0 \qquad (34.17')$$

shu sababli, sistemaning muvozanat holatida kuch funktsiyasining yoki potentsial funktsiyaning to‘liq differentsiali nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$dU(q_1, q_2,....,q_s)=0, \quad \text{yoki} \quad dP(q_1, q_2,...,q_s)=0. \qquad (34.18)$$

(34.17) yoki (34.18) tenglama, bir nechta o‘zgaruvchilar funktsiyasining ekstremumini ifodalaydi. Shu sababli potentsial kuchlar ta’siridagi sistema, kuch funktsiyasi yoki sistemaning potentsial energiyasi ekstremumga (xususiy holda, maksimum yoki minimumga) erishgan holatda muvozanatda bo‘ladi. Lekin bunday muvozanat holatning turg‘unligi haqidagi masalalar 34.7§ da ko‘rib o‘tiladi.

34.5§. Lagranj tenglamasi.

Mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalaridagi harakat tenglamalarini aniqlash uchun dinamikaning umumiy tenglamasi (34.1) ga murojaat qilamiz

$$\sum\delta A_k+\sum\delta=0. \qquad (34.19)$$

Har turli sistemalarni qamrab olish maqsadida sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlarni ideal deb hisoblamaymiz. Shu sababli, birinchi yig‘indiga aktiv kuchlarning bajargan ishlaridan tashqari, ishqalanish kuchlarning ham bajargan ishlarini (agar ular mavjud bo‘lsa) qo‘shamiz.

Faraz qilaylik, sistema s -ta erkinlik darajasiga ega bo‘lsin va uning holati (34.3) dagi umumlashgan koordinatalar orqali aniqlansin. U holda (34.11) formuladan

$$\sum\delta A_k=Q_1\delta q_1+ Q_2\delta q_2+...+ Q_s\delta q_s. \qquad (34.20)$$

34.3§ da $_k$ aktiv kuchlar uchun bajarilgani kabi, inertsiya kuchlarining bajargan elementar ishlarini ham umumlashgan koordinatalar orqali ifodalaymiz. U holda,

$$\sum\delta= \delta q_1+\delta q_2+...+\delta q_s. \qquad (34.20')$$

bu erdagi ,,..., lar, *umumlashgan inertsiya kuchlari* va ular (34.8), (34.10) formulalarga ko‘ra:

$$Q_1^{и} =\sum\cdot, \quad Q_2^{и} =\sum \bar{F}_k^{i}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}.... \qquad (34.21)$$

va (34.20’) qiymatlarni (120 ga qo‘ysak,

$$(Q_1+)\delta q_1+(Q_2+)\delta q_2+,....,+(Q_s+)\delta q_s=0$$

δq_1, δq_2,,..,δq_s o‘zaro bog‘lanmaganliklari sababli, ushbu tenglama qanoatlanishi uchun faqat va faqat har bir δq_1, δq_2,...,δq_s larning oldilaridagi koeffitsientlar alohida-alohida nolga teng bo‘lishlari shart, bunday kabi shartlar (34.16) tenglamalarni keltirib chiqarishda ham bajarilmagan edi. Shu sababli

$$(Q_1+)=0, \quad (Q_2+)=0,..., (Q_s+)=0 \qquad (34.22)$$

Ushbu tenglamalar sistemasini dinamika masalalarini echishda bevosita qo‘llash mumkin. Lekin shu tenglamalardagi umumlashgan inertsiya kuchlarini sistemaning kinetik energiyasi orqali ifodalab olinsa, bunday tenglamalarni tuzish juda ham soddalashadi. Avvalo qiymatga tegishlicha o‘zgartirishlar kiritamiz. Sistemaning ixtiyoriy olingan k nuqtasining inertsiya kuchi =-m_{kk}=-m_kd/dt bo‘lganligi uchun, (34.21) formulaning birinchisidan

$$-=\sum m_k\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}. \qquad (34.23)$$

-ni sistemaning kinetik energiyasi orqali ifodalash uchun, (34.23) tenglikning o‘ng tomoniga shunday o‘zgartirishlar kiritish lozimki, natijada ular faqat sistema nuqtalarining tezliklari orqaligina ifodalanishi lozim. Shu maqsadda (34.23) ning o‘ng tomonidagi ifodani quyidagicha yozib olamiz

$$\cdot=-\cdot \qquad (34.24)$$

(34.24) tenglamani to‘g‘ri ekanligiga ishonish uchun, uning o‘ng tomonidagi qavslarning ichidagi ko‘paytmani differentsiallab ko‘rish mumkin. Bundan keyingi o‘zgartirishlarni quyidagi ikkita tenglik orqali amalga oshiramiz:

= va =. (34.25)

Avvalo, ularning birinchisini o‘rinli ekanligini isbot qilamiz. (34.5) ga binoan =(q_1, q_2,..,q_s) ekanligi uchun

==++...+ va =.

(34.25) tenglamalarning ikkinchisini o‘rinli ekanligi, shundan isbot bo‘ladiki, t -bo‘yicha to‘liq differentsiallash va q_1 bo‘yicha xususiy hosila olishlikning o‘rinlarini almashtirish mumkin ekanligiga asoslangan, ya’ni

==.

Endi (34.25) dagi isbot qilingan o‘zgartirishlarni (34.24) ga qo‘ysak

·=-·=-,

hosilalarning yig‘indisi yig‘indining hosilasiga teng bo‘lishi va = ekanligini e’tiborga olsak, (34.24) formuladan

$$-Q_1^{\text{i}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q},$$

bu erdagi T=$\sum m_k/2$ -sistemaning kinetik energiyasi.

Shunday amallarni bajarib, umumlashgan inertsiya kuchlarning har biri uchun tegishli bo‘lgan ifodalarni olishimiz mumkin. Natijada (34.22) tenglikning oxirgi ko‘rinishini yozamiz

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_1}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{q}_1} = \mathrm{Q}_{1,}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_2}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{q}_2} = \mathrm{Q}_{2,}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_s}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{q}_s} = \mathrm{Q}_{s.}
\end{aligned}\right\} \qquad (34.26)$$

(34.26) formula, *sistema harakatining umumlashgan koordinatalardagi differentsial tenglamalarini yoki Lagranjning*[43] *tenglamalarini matematik ko‘rinishini ifodalaydi.* Tenglamalarning soni sistemaning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi. Lagranj tenglamalari dinamika masalalarini bir xil hamda sodda bo‘lgan echimini yaratishga imkon berdi. Eng muhim tomonlaridan yana biri shuki, tenglamalarning ko‘rinishi va ularning soni, mexanik sistemani tashkil etuvchi jism (nuqta)larning soniga va ularning qanday harakatda ekanligiga bog‘liq

[43] Lagranj tenglamasidan golonom (aniqrog’i golonomli) bog’lanishli ixtiyoriy mexanik sistemaning harakatini o’rganishda foydalanish mumkin. Nogolonom sistemalarning harakatlarini o’rganishda (33.1§ ga q.) boshqa tenglamalardan foydalaniladi, lekin biz unday masalalarni bu qismda ko’rib o’tmaymiz, ular maxsus mavzularda ko’rib o’tiladi.

bo‘lmas ekan; Lagranj tenglamalari sistemasining soni faqat uning erkinlik darajasiga bog‘liq ekan.

Agar sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlar ideal bo‘lsa, (34.26) tenglamaning o‘ng tomonidagi qiymatlar faqat umumlashgan aktiv kuchlar ekanligi sababli, bog‘lanishlarning noma’lum bo‘lgan reaktsiya kuchlarini tenglamalardan chiqarib yuborishga imkon beradi.

Dinamikaning umumlashgan koordinatalardagi asosiy vazifasi shundan iboratki, umumlashgan Q_1, Q_2,..., Q_s kuchlarni va boshlang‘ich shartlari ma’lum bo‘lsa, sistemaning (34.6) ko‘rinishdagi harakat qonunini aniqlash mumkin ekan, ya’ni umumlashgan q_1, q_2,....,q_s koordinatalarining vaqt t -ga bog‘liq bo‘lgan funtsiyalarini aniqlash mumkin ekan.

Kinetik energiya umumlashgan tezliklar $_i$ -ga bog‘liq bo‘lganligi uchun, (34.26) tenglamalardan vaqt t -bo‘yicha bir marta hosila olinishligi sababli, tenglamalarning o‘ng tomonlarida axtarilayotgan umumlashgan koordinatalarning ikkinchi tartibli $_i$ hosilalari paydo bo‘ladi. Shu sababli, Lagranj tenglamalari umumlashgan q_1, q_2,..,q_s koordinatalarning ikkinchi tartibli oddiy differentsial tenglamalaridan iborat bo‘lar ekan.

Potentsial kuch maydondagi sistema. Agar sistemaga ta’sir etuvchi kuchlar potentsial kuchlardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda (34.14) formuladan foydalanib (34.26) tenglamalarning birinchisini quyidagicha yozib olishimiz mumkin bo‘ladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=0 \quad \text{yoki} \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_1}\right]-\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_1}=0$$

Oxirgi tenglik o‘rinli bo‘ladi, chunki potentsial energiya P faqat umumlashgan q_1, q_2,...,q_s koordinatalarga bog‘liq bo‘ladi xolos, umumlashgan tezliklarga bog‘liq bo‘lmaydi, shu sababli bo‘ladi.

(34.26) ning qolgan tenglamalarini ham shu tarzda o‘zgartiriladi. Quyidagi

$$L=T-P \qquad (34.27)$$

funktsiyani kiritamiz. Sistemaning kinetik va potentsial energiyasining ayirmasidan iborat bo‘lgan hamda umumlashgan koordinatalarga va umumlashgan tezliklarga bog‘liq bo‘lgan L funktsiyani *Lagranj funktsiyasi* yoki *kinetik potentsial* deb ataladi. U holda, potentsial kuchlardan iborat bo‘lgan sistema uchun, Lagranjning tenglamalari quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (34.28)$$

Olingan natijalardan ko‘rinib turibdiki, potentsial kuchlar ta’siridagi mexanik sistemaning holati faqat bitta Lagranj funktsiyasi orqali berilar ekan xolos, shu sababli ushbu funktsiya ma’lum bo‘lsa sistemaning differentsial tenglamasini tuzish mumkin ekan.

Ushbu tushunchalarni tegishlicha umumlashtirsak, Lagranjning funktsiyasiga o‘xshash bo‘lgan funktsiyalar turli fizik sistemalarning holatlarini ifodalab beradi(uzluksiz muhitni, gravitatsion yoki elektr maydonini va h.k.). Shu sababli, (34.28) ko‘rinishdagi Lagranj tenglamalari fizikaning qator sohalarida muhim ahamiyat kasb etadi.

34.6§. Masalalar echish.

Yuqorida ta’kidlab o‘tilganidek, geometrik yoki geometrik ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lgan (golonom) bog‘lanishlar qo‘yilgan mexanik sistemalarning, nechta jism(nuqta) dan iborat bo‘lishligi va qanday harakat qilishligidan (nisbiymi, absolyutmi) qat’iy nazar, shu sistemalarning harakatini o‘rganishda Lagranj tenglamalaridan keng foydalanish mumkin ekan.

Berilgan mexanik sistema uchun Lagranjning tenglamasini tuzishda: 1) sistemaning erkinlik darajasini aniqlash va umumlashgan koordinatalarni (34.2§ ga q.) tanlab olish kerak. 2) sistemani ixtiyoriy holatda tasvirlash lozim va barcha ta’sir etuvchi kuchlarni shaklda tasvirlash kerak (ideal bog‘lanishlar qo‘yilgan sistema uchun faqat aktiv kuchlar tasviralnadi); 3) 34.3§ da ko‘rsatilgan yo‘l bilan umumlashgan kuchlar aniqlanadi, ularni aniqlashda har bir mumkin bo‘lgan ko‘chishning yo‘nalishi faqat musbat ishora tomonga bo‘lishi shart; 4) sistemaning absolyut harakatidagi kinetik energiyasini aniqlab, uni umumlashgan koordinata q_i -lar va umumlashgan tezlik -lar orqali ifodalash lozim; 5) T dan q_i va lar bo‘yicha xususiy hosilalar olish kerak va ularni (34.26) tenglamaga keltirib qo‘yish lozim.

Lagranjning tenglamasini tuzishda mexanik sistema hoh absolyut (inertsial hisob sistemasiga nisbatan) harakatda, xoh nisbiy harakatda bo‘lishidan qat’iy nazar yuqorida aytilgan ko‘rsatmalar bir xil bajarilishi kerak. Oxirgi holatda, ya’ni nisbiy harakatda boshqacha yo‘l tutish mumkin, kinetik energiya nisbiy harakat uchun aniqlanadi, lekin umumlashgan kuchlarni aniqlashda aktiv kuchlar qatoriga ko‘chirma inertsiya kuchlarini qo‘shish (absolyut harakatda bunday qilinmaydi)lozim bo‘ladi.

Agar ta’sir etuvchi kuchlar va boshlang‘ich shartlar ma’lum bo‘lsa, hosil bo‘lgan tenglamalarni integrallash orqali, sistemaning (34.6) ko‘rinishdagi harakat qonuni aniqlanadi. Agar harakat qonuni ma’lum bo‘lsa, tenglamalar yordamida sistemaga ta’sir etuvchi kuchlar aniqlanadi.

Agar sistemaga ta’sir etuvchi kuchlar potentsial kuchlardan iborat bo‘lsa, Lagranj tenglamasi (34.28) ko‘rinishda tuziladi. Hamda, umumlashgan kuchlarni hisoblash o‘rniga, sistemaning umumlashgan koordinatalar orqali ifodalangan potentsial energiyasi aniqlanadi, so‘ngra uning kinetik energiyasi ham aniqlanib, umumlashgan koordinatalar orqali ifodalaniladi va (34.27) ko‘rinishdagi Lagranj tenglamalari tuziladi.

Lagranj tenglamalarini tuzishning qoidalarini tushunib olishga yordam beruvchi oddiy masalalarni ko‘rib o‘tamiz.

34.3 masala. Lagranj usuli yordamida, fizik mayatnikning differentsial tenglamasi tuzilsin (30.4§ ga q.).

E ch i sh. Mayatnikning erkinlik darajasi birga teng va uning holati φ burchak orqali aniqlanadi (31.4 shakl). Shu sababli, $q_1=\varphi$. Umumlashgan koordinata φ -ga, uning musbat yo‘nalishida bo‘lgan δφ - orttirma beramiz. Bunday ko‘chishda faqat og‘irlik kuchi R ish bajaradi va uning bajargan elementar ishi $\delta A_1=(-R\sin\varphi)\delta\varphi$ bo‘ladi, bu erdagi a=OS. Shu sababli $Q_1=-R\sin\varphi$. Mayatnikning kinetik energiyasi $T=J_O\omega^2/2$ yoki $T=J_O{}^2/2$ (chunki T, albatta umumlashgan tezlik orqali ifodalanishi lozim, ya’ni ω=). U holda, $q_1=\varphi$ ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_1 \qquad \text{(a)}$$

T burchak φ -ga bog‘liq emasligi sababli,

$$=0\ ,\quad =J_O \quad \text{va} \quad =J_O.$$

Aniqlangan qiymatlarni (a) tenglamaga keltirib qo‘ysak,

$$J_O=-R\sin\varphi,$$

ya’ni, 31.2§ da olingan natija olindi.

Og‘irlik kuchi potentsial kuch hisoblanganligi uchun, Lagranj tenglamasini (34.28) formuladagi ko‘rinishda yozish mumkin. Oz o‘qini vertikal pastga yo‘naltiramiz va potentsial energiyani aniqlaymiz, P=-Rz=--Rasinφ. U holda (34.27) formuladan

$$L= J_O^2/2+Rasos\varphi \quad va \quad =J_O, \ =-Rasin\varphi,$$

Bularni (34.28) tenglamaga qo‘ysak, natijada $J_O+Rasin\varphi=0$, bo‘ladi.

34.4 masala. Lagranj tenglamasi yordamida (28.7§ dagi) 28.5 masala echilsin.

E ch i sh. Mexanizmning erkinlik darajasi birga teng va uning holati φ burchak orqali aniqlanadi (28.7 shakl). Shu sababli, $q_1=\varphi$. Umumlashgan koordinata φ -ga, uning musbat yo‘nalishida bo‘lgan δφ -orttirma beramiz. Bunday ko‘chishda bajarilgan elementar ish δA_1 ning ifodasi, 28.5 masaladagi δA^i ning ifodasi bilan bir xil bo‘ladi, lekin u erdagi dφ -ni δφ bilan almashtirish lozim bo‘ladi. Shu sababli,

$$Q_1=-c\varphi(l-r)^2/r^2.$$

T-ning qiymati ham ilgari aniqlangan edi [28.5 masaladagi (b) formula]. ω_{cheg}= ekanligini hisobga olsak,

$$T=(9R+2Q)l^{22}/12g,$$

bundan,

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0 , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=(9R+2Q)l^2/6g.$$

Bularni Lagranj tenglamasiga qo‘ysak,

$$\cdot l^2 \ddot{\varphi} =-s\varphi \quad yoki \quad \ddot{\varphi} +k^2\varphi=0.$$

Ya’ni, 28.5 masaladagi javob olindi.

E’tiboringizni shunga qaratmoqchimizki, erkinlik darajasi bitta bo‘lgan mexanik sistemaga Lagranj usuli orqali differentsial tenglamalarni tuzish, kinetik energiyaning o‘zgarish teoremasi yordamida tuzilgan usulga o‘xshab ketar ekan.

34.5 masala. Massasi m bo‘lgan sharchaning gorizontal tekislikda o‘zgarmas ω burchak tezlik bilan aylanayotgan OA trubkaning ichida qilayotgan harakatining qonuni aniqlansin (34.7 shakl). Sharcha boshlang‘ich paytda aylanish o‘qi O dan x_0 masofada joylashgan bo‘lib, trubka ichidagi boshlang‘ich tezligi nolga teng. Hamda trubkaga ta’sir etayotgan burovchi moment M_{bur} aniqlansin.

E ch i sh. Sistema ikkita erkinlik darajasiga ega. Umumlashgan koordinatalar sifatida nuqtaning nisbiy harakatini aniqlovchi x -ni va trubkaning burilish burchagi φ -ni tanlab olamiz,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_2 \qquad (a)$$

Avvalo, Q_1 va Q_2 larni aniqlaymiz. Sharchaning nisbiy harakatdagi mumkin bo‘lgan δx ko‘chishida, unga ta’sir qilayotgan kuchlardan birortasi ish bajarmaydi (chunki trubka gorizontal tekislikda harakat qilmoqda); shu sababli $\delta A_1=0$. Trubkaning gorizontal tekislikdagi aylanma harakat yo‘nalishidagi mumkin bo‘lgan $\delta\varphi$ ko‘chishda bajarilgan elementar ish $\delta A_2=M_{bur}\cdot\delta\varphi$. Shularga asosan:

$$Q_1=0,\ Q_2=M_{bur}. \qquad (b)$$

Sistemaning to‘liq kinetik energiyasi sharchaning T_1 va trubkaning T_2 energiyalarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi. T_1 ni sharchaning absolyut harakatidan aniqlaymiz. U holda $T_1=m/2$, bu erdagi v_B - sharchaning absolyut tezligi, uning vektor ifodasi $_V=_{nis}+_{ko‘ch}$. Ushbu masalada, $v_{nis}=$, $v_{ko‘ch}=OV\cdot\omega=x$ va $_{nis}\perp_{ko‘ch}$ bo‘lganligi sababli

$$T_1=m(^2+x^{22})/2$$

$T_2=J_O\omega^2/2$, bu erdagi J_O - trubkaning inertsiya momenti. U holda sistemaning to‘liq kinetik energiyasi

$$T=m(^2+x^{22})/2+J_O\omega^2/2.$$

Bundan

$$=m,\quad =mx^2;\quad =mx^2+J_O;\quad =0,$$

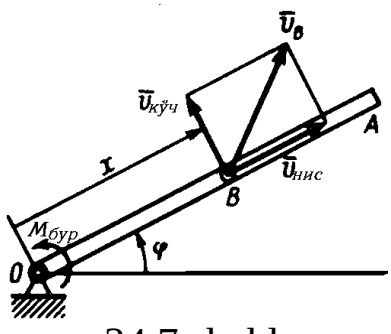
Ushbu qiymatlarni va (b) dagi Q_1, Q_2 larni (a) ga qo‘yamiz hamda masalaning shartiga ko‘ra ω=sonst ekanligini e’tiborga olsak

$$+k^2x=0, \qquad 2m\omega x=M_{bur}. \qquad (v)$$

Ushbu tenglamalarning birinchisini integrallab va integral doimiylarini boshlang‘ich (t=0 da $x=x_0$ va =0) shartlarga ko‘ra aniqlasak, sharchaning trubka ichidagi harakat qonunini aniqlaymiz:

$$x=x_0(e^{\omega t}+e^{-\omega t})/2 \quad \text{yoki} \quad x=x_0ch\omega t. \qquad (g)$$

Endi (v) tenglamalarning ikkinchisi axtarilayotgan momentni bildiradi (ko‘rinib turgandek, u koriolis inertsiya kuchining momentiga teng). Agar (g)tenglama yordamida -ni x - orqali ifodalab olsak, burovchi moment M_{bur} ning x koordinatasiga bog‘liq bo‘lgan ifodasini aniqlaymiz:



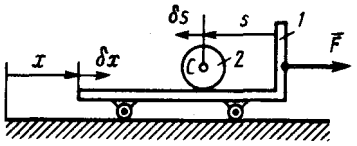
34.7 shakl.

$$M_{bur}.=2m\omega^2x. \qquad (d)$$

Shunga e’tiborni qaratish lozimki, ushbu masalada sharcha uchun dinamikaning asosiy ikkinchi masalasi echildi (berilgan kuchlar bo‘yicha harakat qonuni aniqlandi), hamda uning nisbiy harakati o‘rganildi xolos, lekin

kinetik energiya T, sistemaning absolyut harakati uchun aniqlandi, shu sababli inertsiya kuchlarining hojati bo‘lmadi; trubka uchun esa, aksincha, uning harakati asosida unga ta’sir etayotgan kuchlarning bosh momenti (yoki juft kuchlar) aniqlandi.

34.6 masala. Aravacha 1 ning massasi m_1, uning ustida joylashgan tsilindrsimon yaxlit katokning massasi m_2. Agar aravachaning ustidagi katok sof dumalab aylanma harakat qilayotgan bo‘lsa, aravachaning unga qo‘yilgan F kuchi ta’siridagi tezlanishi aniqlansin (34.8 shakl). Aravacha g‘ildiraklarining massalari hisobga olinmasin.



34.8 shakl.

E ch i sh. Sistema ikkita erkinlik darajasiga ega (aravachaning ustidagi katokning dumalashi va aravachaning harakati). Umumlashgan koordinatalar sifatida, aravachaning x o‘qi bo‘yicha harakati va katok massa markazining aravachaga nisbatan bosib o‘tgan s masofasini tanlab olamiz. U holda, shu sistemaning harakati uchun Lagranj tenglamalari quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right)-\frac{\partial T}{\partial s}=Q_2 \qquad (a)$$

Aravachaning kinetik energiyasi $T_1=m_1{}^2/2$, katokning kinetik energiyasi $T_2=m_2/2+J_C\omega^2/2$, bu erdagi v_C -katokning massa markazi S nuqtaning absolyut tezligi, uning son qiymati v_C=-. Yaxlit tsilindr uchun $J_C=m_2r^2/2$, sirpanmasdan dumalashdagi ω=/r, bu erdagi -aravachaga nisbatan katok markazi S nuqtaning nisbiy tezligi ($\omega=v_C/r$ deb hisoblash noto‘g‘ri bo‘ladi), u holda sistemaning to‘liq kinetik energiyasi

$$T=T_1+T_2=m_1{}^2/2+m_2(-)^2/2+m_2{}^2/4. \qquad (b)$$

U holda,

$$=m_1+m_2(-),\quad =m_2(-)+m_2,\quad ==0 \qquad (v)$$

Umumlashgan kuchlarni aniqlash uchun, avvalo, x bo‘yicha sistemaga mumkin bo‘lgan $\delta x>0$ ko‘chish beramiz. Ushbu ko‘chishdagi bajarilgan elementar ish $\delta A_1=F\delta x$. So‘ngra s bo‘yicha katokning markaziga mumkin bo‘lgan $\delta s>0$ ko‘chish beramiz. Ushbu ko‘chishdagi bajarilgan elementar ish $\delta A_2=0$, natijada

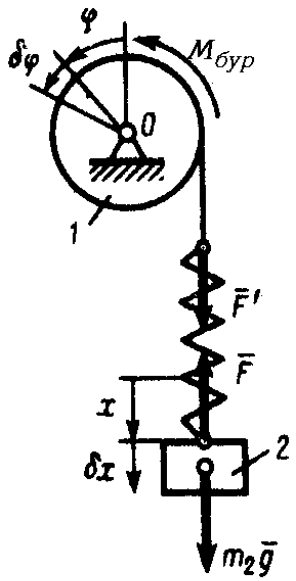
$$Q_1=F,\ Q_2=0$$

Q_1 va Q_2 larning qiymatlarini hamda (v) dagi xususiy hosilalarning ifodalarini (a) tenglikka keltirib qo‘ysak, sistemaning quyidagi ko‘rinishdagi differentsial tenglamasi kelib chiqadi:

$$(m_1+m_2)-m_2=F,\quad 3-2=0 \qquad (g)$$

Oxirgi tenglikdan, =2/3 bo‘ladi, (g) dagi birinchi tenglama orqali aravachaning a_1 tezlanishini aniqlaymiz

$$a_1==3F/(3m_1+m_2).$$



34.9 shakl

Agar katok aravachaga harakatlanmaydigan qilib mahkamlanganda, aravachaning tezlanishi $a_1==F/(m_1+m_2)$ bo‘lar edi.

Yana bir natijani eslatib o‘tamiz. Faraz qilaylik, katok bilan aravachaning orasidagi ishqalanish kuchi nolga teng bo‘lsin. U holda, katok aravachaning ustida ilgarilama harakat qilib sirpanadi, natijada

$$T_2= m_2/2=m_2(-)^2/2$$

bo‘lar edi. Shu sababli

$$T=m_1/2+ m_2(-)^2/2.$$

U holda, (g) -ning birinchi tenglamasi o‘zgarmaydi, ikkinchisi esa = m_2(-) bo‘lgani uchun -=0 ko‘rinishda bo‘ladi va =. Natijada (g)-ning birinchi tenglamasidan aravachaning tezlanishi $a_1==F/m_1$ ekanligini aniqlaymiz.

Buning sababi shuki, agar ishqalanish kuchi bo‘lmasa, aravacha katokni o‘zi bilan olib ketolmaydi, ya’ni katok o‘z joyida qoladi va aravacha uning ustida katok yo‘qdek harakat qilar ekan.

34.7 masala. Massasi m_1 gardishi bo‘ylab tarqalgan, R radiusli baraban 1 -ga, tros o‘ralib, trosning uchiga qattiqligi s bo‘lgan prujina orqali, m_2 massali yuk osilgan (34.9 shakl; bunday prujinani qo‘shish orqali trosning elastikligini modellash mumkin bo‘ladi). Barabanga momenti M_{bur} bo‘lgan juft qo‘yilgan. Shu sistema uchun Lagranj tenglamasi tuzilsin va yukning harakatidagi tebranishlarning chastotasi aniqlansin.

E ch i sh. Sistema ikkita erkinlik darajasiga ega. Umumlashgan koordinatalar sifatida, barabanning burilish burchagi φ va prujinaning uzayishi *x* ni tanlab olamiz (q_1=φ, q_2=x). U holda Lagranj tenglamalari

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_2 \qquad \text{(a)}$$

Sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarni shaklda tasvirlaymiz (va prujinaning elastiklik kuchlari; son qiymatlari F=F’=cx), avvalo Q_1 va Q_2 larni aniqlaymiz. Sistemaga δφ>0 mumkin bo‘lgan ko‘chish beramiz va x=sonst deb hisoblaymiz, bunday ko‘chishda va kuchlarning bajargan ishlari nolga teng bo‘ladi, shu sababli bunday ko‘chishdagi

elementar bajarilgan ish $\delta A_1=(M_{bur}-m_2gR)\delta\varphi$. Erkin o‘zgaruvchi ikkinchi umumlashgan koordinata ($\delta x>0$, φ=sonst)ning o‘zgarishidagi $\delta A_2=(m_2g-sx)\delta x$ bo‘ladi. Shu sababli,

$$Q_1=M_{bur}-m_2gR, \qquad Q_2= m_2g-sx. \qquad (b)$$

Sistemaning kinetik energiyasi, $T=T_1+T_2$, bu erdagi $T_1=J_1{}^2/2$, $T_2=m_2/2$. Ushbu masalada $J_1=m_1R^2$, $_2=_{nis}+_{ko‘ch}$ va $v_2=-R$. U holda,

$$T= m_1R^{22}/2+m_2(-R)^2/2.$$

$$= m_1R^2-m_2R(-R); \quad = m_2(-R), \quad ==0 \qquad (v)$$

(v) va (b) larni (a) ga qo‘ysak:

$$(m_1+m_2)R-m_2=M_{bur}/R-m_2g, \qquad (g)$$

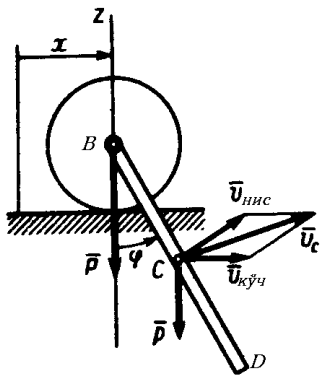
$$-m_2R+m_2=m_2g-cx. \qquad (d)$$

Izlanayotgan tenglamalar shulardan iborat. Oxirgi ikkita tenglamani hadma-had qo‘shsak, $m_1R=M_{bur}/R-sx$, ushbu tenglikdan va (d) tenglamadan R ni chiqarib tashlasak, yukning nisbiy tebranma harakatining differentsial tenglamasini olamiz, uning tebranish chastotasi k -ga teng bo‘ladi

$$+k^2x=+g, \qquad k=\sqrt{c\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}}\ .$$

Yukning absolyut harakati $s=x-R\varphi$ qonuniyat bo‘yicha sodir bo‘ladi. Ushbu harakat ham, k -chastotali tebranish bilan sodir bo‘ladi. Barabanning aylanma harakati ham shunday tebranishlar bilan sodir bo‘ladi.

34.8 masala. Gorizontal tekislikda sirpanmasdan aylanishi mumkin bo‘lgan, og‘irligi R bo‘lgan bir jinsli katokning o‘qiga, uzunligi l, og‘irligi r bo‘lgan BD sterjen sharnir orqali biriktirilgan (34.10 shakl). Agar boshlang‘ich holatda sterjenni φ_0 burchakka og‘dirib, boshlang‘ich tezliksiz qo‘yib yuborilsa, shu sistemaning keyingi harakatini differentsial tenglamasi tuzilsin va uning kichik tebranishlarining qonuni aniqlansin.



34.10 shakl

E ch i sh. Sistema ikkita erkinlik darajasiga ega bo‘ladi. Umumlashgan koordinatalar sifatida, tsilindrning markazini boshlang‘ich holatdan nuqtagacha bo‘lgan masofasi *x* ni va sterjenning vertikaldan og‘ish burchagi φ ni tanlab olamiz ($q_1=x$, $q_2=\varphi$).

Sistemaga ta’sir etuvchi kuchlar (og‘irlik kuchi) potentsial bo‘lganligi sababli, Lagranj tenglamasini (34.28) ko‘rinishda yozamiz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \qquad \text{(a)}$$

bu erdagi L=T-P Lagranjning funktsiyasi.

Sistemaning potentsial energiyasi

P=-r(l/2)sosφ.

Sistemaning kinetik energiyasi $T=T_{tsil}+T_{st}$. T_{tsil} -ning qiymati 29.1 masalada hisoblangan, sterjen uchun $J_C=Ml^2/12$ ekanligini va (29.4) formulani hisobga olsak

T_{tsil}=, T_{st}=+^{2}.

Bu erdagi v_B= va $_V$=$_{nis}$+$_{ko'ch}$ ning son qiymatlari v_{nis}=0,5l, $v_{ko'ch}$=v_B= bo'ladi, shu sababli (34.10 shakl),

=l^{22}/4+^{2}+lsosφ.

Lagranj funktsiyasining oxirgi ko'rinishini yozamiz

$$L=^2+\frac{p}{2g}\left(\dot{x}^2+l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+\frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2\right)+rsos\varphi,$$

bundan,

=, =.

Ushbu qiymatlarni (a) ga qo'ysak, tegishli o'zgartirishlardan so'ng, sistemaning harakat differentsial tenglamalari sistemasini olamiz.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}[(3P+2p)\dot{x}+pl\dot{\varphi}\cos\varphi]=0,\\&\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\varphi+\frac{2}{3}l\dot{\varphi}\right)+\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi+g\sin\varphi=0\end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Endi sistemaning kichkina tebranishlarining harakat qonunini aniqlaymiz. Masalada φ burchak va x siljishlarni birinchi tartibli kichkina qiymatlar, ya'ni $\varphi=\varepsilon f_1(t)$, $x=\varepsilon f_2(t)$ deb hisoblaymiz. Bu erdagi ε-juda kichkina qiymat va $f_1(t)$, $f_2(t)$ - lar esa vaqtning birorta funktsiyalaridan iborat (ularning o'zlari va hosilalari ham cheklangan) bo'lgan tebranish qonunlari. Shu sababli =ε$f'_1(t)$, =ε $f'_2(t)$ ularning hosilalari ham ε ga teng bo'lgan tartibda bo'ladilar.

Sistemaning kichkina tebranishlari differentsial tengalamalarini tuzish uchun (b) tenglamalardagi qiymatlarning faqat ε -ga yaqin bo'lgan tartibdagilarini saqlab qolamiz xolos. Buning uchun (b) sistemaning birinchisidagi rlsosφ yig'indidagi sosφ=1 deb, ikkinchisidagi sinφ=φ, sosφ=1 deb hisoblaymiz va sinφ-ni ε^2 tartibli

juda kichkina qiymat bo‘lganligi uchun tashlab yuboramiz. Natijada (b) tenglamalarning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{d}{dt}[(3P+2p)\dot{x}+pl\dot{\varphi}]=0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\dot{x}+\frac{2}{3}l\dot{\varphi}\right)+g\varphi=0$$

Bu tenglamalardagi hosilalarni olib, berilgan sistemaning kikina tebranma harakatining differentsial tenglamasini tuzamiz

$$(3P+2p)\ddot{x}+pl\ddot{\varphi}=0, \qquad \ddot{x}+\frac{2}{3}l\ddot{\varphi}+g\varphi=0 \qquad (v)$$

Birinchi tenglamadan ning qiymatini aniqlab ikkinchisiga qo‘ysak,

$$+k^2\varphi=0$$

bu erdagi

$$k^2=\frac{3(3P+2p)}{6P+p}\cdot\frac{g}{l} \qquad (d)$$

(g) tenglamani integrallab va boshlang‘ich (t=0 da, $\varphi=\varphi_0$ va =0) shartlarga ko‘ra integral doimiylarni aniqlab, quyidagi echimni olamiz

$$\varphi=\varphi_0 coskt \qquad (e)$$

Endi (v) tenglamalarning birinchisini integrallaymiz va t=0 da, x=0, =0, $\varphi=\varphi_0$, =0 ekanligini e’tiborga olsak

$$(3P+2p)x+pl(\varphi-\varphi_0)=0,$$

(e) tenglikdagi φ ning qiymatini olib kelib qo‘ysak,

$$x=l\varphi_0(1-coskt). \qquad (j)$$

Yuqoridagi (e) va (j) tenglamalar, sistemaning kichik tebranishlarining qonunini belgilab beradi. Bunday tebranishlarning chastotasi k (d) tenglik orqali aniqlanadi.

Shunday osongina natijalarni olishimizning asosiy sababi $Q_1=0$ ekanligi xolos. Umuman olganda, ikkita erkinlik darajasiga ega bo‘lgan sistemaning tebranishlari ancha murakkab bo‘lib, asosan ikkita k_1 va k_2 chastotali tebranishlarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

Mavzuni mustahkamlash uchun 34 ilovadagi masalalarni mustaqil echishni tavsiya qilamiz.

35-Ma’ruza

Mavzu: Mexanik sistemaning turg‘un muvozanat holati yaqinidagi kichik tebranishlari. Turg‘un muvozanat haqida tushuncha. Erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan sistemaning kichik erkin tebranishlari. Erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan sistemaning majburiy va so‘nuvchi kichik tebranishlari. Erkinlik darajasi ikkita bo‘lgan mexanik sistemaning kichik erkin tebranishlari.

Reja:

Turg‘un muvozanat haqida tushuncha.
Erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan sistemaning kichik erkin tebranishlari.
Erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan sistemaning majburiy va so‘nuvchi kichik tebranishlari.
Erkinlik darajasi ikkita bo‘lgan mexanik sistemaning kichik erkin tebranishlari.

35.1§. Turg‘un muvozanat haqida tushuncha.

Mexanik sistemaning muvozanat holatini aniqlash jarayonida, juda muhim bo‘lgan savol paydo bo‘ladi, u ham bo‘lsa shundan iboratki, aniqlangan muvozanat holat amalda bajo bo‘ladimi, ya’ni turg‘unmi yoki yo‘qmi. Agar bunday masalalar echilmagunga qadar uchayotgan samolyotmi, suv usti

yoki suv osti kemasimi o‘zini behos turtkidan keyin qanday tutishini mutloq bilib bo‘lmaydi. Quyida shunday savollarga aniq javoblar keltiriladi

Bayoni:

Agar muvozanat holatdagi mexanik sistemani juda kichkina (siljitish, turtki berish) miqdordagi qo‘zg‘atish orqali harakat berilsa, sistemaning undan keyingi tebranishlaridagi muvozanat holatdan og‘ishi, berilgan boshlang‘ich qo‘zg‘atishdan kichkina bo‘lib qolaversa, mexanik sistemaning bunday muvozanat holatini *turg‘un muvozanat* deb ataladi. Aks holda, *noturg‘un muvozanat* deb ataladi.

Turg‘un muvozanatning va harakatning bunday ifodasi A.M.Lyapunovga taalluqlidir. Masalan, shu ifodaga asoslanib, 324 shaklda tasvirlangan mayatnikning $\varphi=0°$ da turg‘un muvozanatda va $\varphi=180°$ da esa noturg‘un muvozanatda bo‘lishligini tushunib olish oson bo‘ladi.

Konservativ sistema turg‘un muvozanatda bo‘lishligi etarli shartining (30.2§ ga q.) umumiy kriteriyasini Lagranj - Dirixle teoremasi orqali aniqlanadi: *agar konservativ sistemaning muvozanat holatidagi potentsial energiyasining minimumligi muqim bo‘lsa, sistemaning shu holatdagi muvozanati turg‘un bo‘ladi.*

Isbot sifatida, quyidagi mulohazalarni keltirish bilan cheklanamiz. Konservativ sistema uchun, mexanik energiyaning saqlanish qonuni o‘rinli ekanligini ilgari ko‘rib o‘tgan edik, ya’ni $T+P=sonst$, bu erdagi T-sistemaning kinetik energiyasi, P -potentsial energiyasi. Shu sababli, agar sistema muvozanat holatda $P=P_{min}$ bo‘lsa, u holda ozgina turtki sababli harakatga kelib, muvozanat holatdan uzoqlasha boshlaydi, natijada P ning qiymati orta borib, T ning qiymati esa kamaya boradi.

Lekin, P ning ortishi, birorta belgilangan, ya’ni kinetik energiyaning nolga teng bo‘lishidagi $P_1=P_{min}+\Delta P$ qiymatdan katta bo‘la olmaydi. Buni e’tiborga olib, boshlang‘ich qo‘zg‘atish (muvozanat holatdan chiqarishdagi turtki)ni va u bilan birga ΔP-ni shunchalik kichkina miqdorda tanlash mumkinki, sistemaning $P=P_{min}+\Delta P$ bo‘lganda, uning muvozanat holatdan og‘ishi har qanday berilgan boshlang‘ich qiymatdan kichkina bo‘ladi. Shu sababli, sistemaning muvozanat holati turg‘un bo‘ladi.

Teoremada aytilgan shart faqat etarli hisoblanadi xolos va agar muvozanat holatdagi potentsial energiya minimum bo‘lmagan holdagi muvozanat holat haqida hech qanday fikr olib bo‘lmaydi.

Erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan, konservativ sistemaning muvozanatini olib ko‘raylik. Umumlashgan koordinata sifatida shunday koordinata tanlab olaylikki, sistemaning muvozanat holatida uning qiymati q=0 bo‘lsin. 34.4§ dagi (34.17’) formulaga asosan, sistemaning muvozanat holatida =0 bo‘ladi. Undan tashqari, agar P(q) funktsiya q=0 bo‘lganda minimum bo‘lsa, u holda >0 bo‘lishi kerak. Shunday qilib, quyidagi:

=0, >0 (35.1)

(etarli, lekin zaruriy bo‘lmagan) shartlar bajarilsa sistemaning shu (q=0) holatdagi muvozanati turg‘un bo‘ladi.

Masalalar echishda, q ning qiymatini kichkina hisoblab, P(q) ni hisoblashda faqat q^2 qiymatlarnigina qoldiramiz, chunki (35.4) shartlarga ko‘ra q^3 va undan yuqori darajalilarni tashlab yuboramiz (q=0 da nolga aylanib ketadilar).

35.1 masala. Agar massasi m, uzunligi l bo‘lgan AD (mayatnik) sterjen, A nuqtadan o‘tuvchi aylanish o‘qiga vertikal holda o‘rnatilgan bo‘lsa, qanday shartlarga binoan sterjenning muvozanati turg‘un bo‘lishligi (35.1, a shakl) aniqlansin. Sterjenning V (AV=h) nuqtasiga o‘rnatilgan 1 va 2 prujinalarning qattiqliklari tegishlicha s_1 va s_2. Ularning boshlang‘ich holatlaridagi siqilishlari (ikkala prujinalar ham siqib o‘rnatilgan) tegishlicha λ_{10} va λ_{20}.

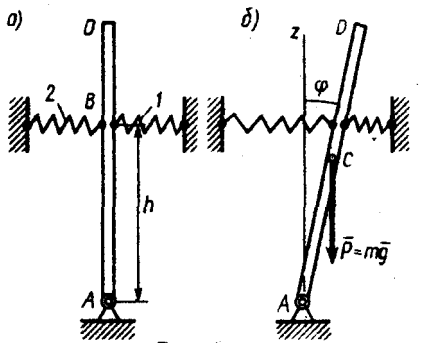
E ch i sh. Umumlashgan koordinata sifatida, sterjenning vertikalga nisbatan og‘ishi φ ni tanlab olamiz. Hamda φ ni kichkina (35.1, b shakl) qiymat deb hisoblab, P(φ) ning qiymatini φ^2 aniqlikda hisoblaymiz. 30.2§ dagi (30.11) va (30.11’) formulalarga asosan

$$P_1=Rz_C=(mgl/2)\cos\varphi, \quad P_2=0{,}5[c_1(\lambda_{10}+h\varphi)^2+c_2(\lambda_{20}-h\varphi)^2].$$

P_2 ni aniqlashda φ ning qiymati kichkina bo‘lganligi sababli, V nuqtaning ko‘chishini gorizontal to‘g‘ri chiziq sifatida qabul qilamiz va uning qiymati hφ bo‘ladi. Hamda 1 prujinaning siqilishi ortadi, 2 prujinaning siqilishi hφ qiymatga kamayadi. Endi cosφ funktsiyani qatorga yoyib, faqat $\cos\varphi=1-\varphi^2/2$ hadlarinigina olsak va P_2 qavslarni ochib yuborsak

$$P=P_0-(mgl/4)\varphi^2+(c_1\lambda_{10}-c_2\lambda_{20})h\varphi+0{,}5(c_1+c_2)h^2\varphi^2.$$

bu erdagi $P_0=P(0)$ ga (P_0 -ning qanday qiymatga ega bo‘lishidan qat’iy nazar) barcha o‘zgarmas qiymatlar kiritilgan.



35.1 shakl

Bundan

$$=-(mgl/2)\varphi+(c_1\lambda_{10}-c_2\lambda_{20})h+(c_1+c_2)h^2\varphi.$$

$\varphi=0$ bo‘lganda sterjen muvozanatda bo‘lishi uchun, ushbu hosila $\varphi=0$ da nolga teng bo‘lishi kerak. Shu sababli,

$$c_1\lambda_{10}=c_2\lambda_{20} \qquad (a)$$

bo‘lishi shart, buni oldindan ham bilish albatta mumkin edi. Yana,

$$=-mgl/2+(c_1+c_2)h^2. \qquad (b)$$

U holda, (35.1) shartga ko‘ra, agar

$$(c_1+c_2)> \qquad (v)$$

bo‘lsa muvozanat turg‘un bo‘ladi.

(a) va (v) larning ikkalasi bajarilsa, masalaning javobini olamiz.

Sistemaning turg‘un muvozanatligini tekshirishning boshqacha usuli 35.3 masalada ko‘rsatilgan.

35.2§. Erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan sistemaning kichik erkin tebranishlari.

Erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan n -ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan konservativ mexanik sistema, o‘zining birorta holatida turg‘un muvozanatda bo‘lsin. Agar shu sistemani muvozanat holatidan kichkina qiymat bilan qo‘zg‘atib yuborilsa, uning keyingi harakati qanday bo‘lishini tekshirib chiqaylik. Ilgari aytganimizdek umumlashgan koordinata q-ni shunday tanlaymizki, sistema muvozanatda bo‘lganda uning qiymati $q=0$ bo‘lsin.

Sistemaning differentsial tenglamasini tuzish uchun Lagranj tenglamasidan foydalanamiz. Agarda umumlashgan kuchni sistemaning potentsial energiyasi P orqali [35.2§ dagi (34.14) formulaga q.] ifodalasak, Lagranj tenglamasining ko‘rinishi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial \Pi}{\partial q}=0 \qquad (35.2)$$

Umuman olganda, ushbu tenglama chiziqli bo‘lmaydi, lekin tenglamalardagi q va larning juda kichik qiymat ekanliklari [birinchi tartibli kichkina; 34.6§ dagi 34.8 masalaga q.] sababli, faqat ularning birinchi darajalilarinigina saqlab qolish evaziga uni chiziqli tenglamaga

aylantiramiz, natijada masala ancha soddalashadi. Buning uchun, T(q,) va P(q) larning qiymatlarini taqriban hisoblaymiz. (35.2) tenglamaga P va T lardan q va lar bo‘yicha olingan xususiy hosilalarda q va larning faqat birinchi darajalilarini olib qolish uchun P va T lardagi q va larning faqat ikkinchi darajalilarini qoldiramiz, ya’ni faqat q^2 va ^{2} larni olib qolamiz.

Avvalo T(q,) ning taqribiy qiymatini hisoblab olamiz. Statsionar bog‘lanishdagi sistemaning ixtiyoriy nuqtasi uchun

$_k=_k(q)$ va $_k==.$

Umumiy ko‘paytma -ni qavsdan tashqariga chiqarib, quyidagini yozamiz

$$T=\sum m_k= \quad \text{yoki} \quad T=F(q)^2,$$

chunki, va $_k$ lar q -ning funktsiyalaridan iborat. F(q) funktsiyani Teylor qatoriga yoysak,

$$F(q)=F(0)+F'(0)q+.....$$

T ni q^2 aniqlikda ifodalash zarurligi uchun, ushbu qatordagi faqat birinchi o‘zgarmas yig‘indi F(0) ni qoldiramiz. U holda T uchun quyidagi ifodani olamiz

$$T=a^2, \text{ bu erdagi } a= F(0). \qquad (35.3)$$

T faqat musbat qiymatga ega bo‘lishi mumkin ekanligi sababli, o‘zgarmas koeffitsient a>0 bo‘ladi va uni inertlik koeffitsienti deb ataladi. Uning o‘lchov birligi -ning o‘lchov birligiga bog‘liq bo‘ladi; xususiy holda, a - ning o‘lchov birligi massa yoki inertsiya momenti bo‘lishi mumkin.

P(q) ning funktsiyasini Teylor qatoriga yoyib yuborsak va sistemaning muvozanat holatida =0 bo‘lganligi sababli (q^2 tartibli aniqlikda) hisoblasak,

$$P(q)=P(0)+ sq^2, \quad \text{bu erdagi } s=. \qquad (35.4)$$

(35.1) shartga ko‘ra s>0 bo‘ladi. Xususiy holda, agar q -prujinaning uzayishi bo‘lsa (35.4) ifoda, elastiklik kuch maydonining potentsial energiyasini ifodalaydi; shuning uchun koeffitsient s-ni *kvazielastik koeffitsient* (yoki *umumlashgan qattiqlik koeffitsienti*) deb ataladi. (35.3) va (35.4) tenglamalardan:

$$=a, \quad =0, \quad =sq$$

Ushbu qiymatlarni (35.2) ga qo‘ysak, erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan sistemaning tebranma harakatining differentsial tenglamasini olamiz

$$+k^2q=0 \quad \text{bu erdagi} \quad k^2=c/a. \qquad (35.5)$$

Bu tenglama moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli, erkin tebranma harakatining differentsial tenglamasi bilan bir xil (9424.1 ga q.)bo‘lib va uning umumiy echimi

$$q=A\sin(kt+\alpha), \qquad (35.6)$$

bu erdagi A va α lar boshlang‘ich shartlar orqali aniqlanadigan integral doimiylari. (35.5) ga binoan tebranish chastotasi va davri quyidagi tengliklar orqali aniqlanadi

$$k=, \quad \tau=2\pi/k=2\pi. \qquad (35.7)$$

Bunday sistema nuqtalarining harakatlarini aniqlaymiz. Sistema birorta nuqtasining radius -vektori $_k(q)$ ni Teylor qatoriga yoyamiz, natijada $_k(q)= _k(0)+ \,'_k(q)q+.....$ (35.6) dan q ning qiymatini keltirib qo‘ysak va faqat birinchi darajali aniqlikda hisoblasak,

$$|_k(q)-_k(0)|=|'_k(0)|A\sin(kt+\alpha), \quad (k=1,2,3.....n). \qquad (35.8)$$

Shunday qilib, sistemaning nuqtalari ham chastotasi k, amplitudasi $|'_k(0)|A$ -ga teng bo‘lgan kichkina tebranishlar bo‘yicha harakat qiladi. Yuqorida olingan natijalarga asosan, kichik tebranishlarning quyidagi xossasi kelib chiqadi:

1) sistemaning erkin (xususiy) tebranishlari garmonik tebranishlardan iborat bo‘ladi; ularning chastotasi va davri boshlang‘ich shartlarga bog‘liq bo‘lmaydi va (35.7) formula orqali aniqlanadi;

2) A va α lar boshlang‘ich shartlarga bog‘liq bo‘lganligi sababli, sistema nuqtalarining amplitudalari $-A|'_k(0)|$ va boshlang‘ich fazalari ham boshlang‘ich shartlarga bog‘liq bo‘ladi;

3) sistema turli nuqtalarining amplitudalari ularning har birlarining boshlang‘ich shartlariga bog‘liq bo‘lmasdan faqat $'_k(0)$ ga, ya’ni sistemaning konfiguratsiyasiga bog‘liq bo‘ladi;

4) (35.8) tenglikdan ko‘rinib turganidek, sistemaning barcha nuqtalari har doim faqat bir $(kt+\alpha)$ fazada joylashar va shu sababli, muvozanat holatdan bir vaqtda o‘tar ekanlar hamda bir vaqtda shu holatdan maksimal uzoqlashadilar.

Masalalarni echishda sistemaning tebranish chastotasi k va tebranish davri τ -ni aniqlash eng muhim vazifa hisoblanadi, chunki bular orqali rezonans hodisasini sodir bo‘lishi mumkinmi yoki mumkin emasligini aniqlash (35.3§ ga q,) uchun kerak bo‘ladi. Buning uchun (35.3) va (35.4) formulalardan *a* va *s* larni aniqlab, (35.7) ga qo‘yish lozim bo‘ladi.

35.2 masala. 35.1 masalada ko‘rib o‘tilgan sistemaning kichkina tebranishlarining chastotasi va tebranish davri aniqlansin (35.1§ ga q.).

E ch i sh. 35.1 masalada sistema (35.1 shakldagi AD sterjen,)ning kinetik energiyasi $T=0,5J_A{}^2$. Shu sababli, ushbu masalada $F(q)=F(\varphi)=J_A=sonst$ va

$$a=J_A=ml^2/3. \qquad (a)$$

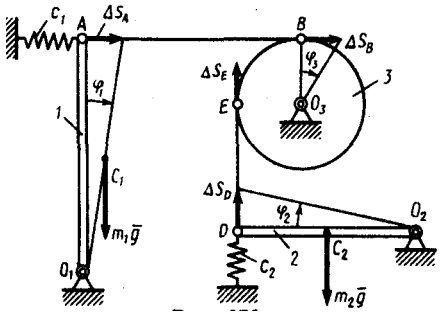
Hamda (35.4) formulaga va 35.1 masaladagi (b), (v) larga asosan

$$s=\left(\frac{\partial^2 \text{п}}{\partial \varphi^2}\right)_0=(s_1+s_2)h^2-mgl/2, \qquad (c>0) \qquad (b)$$

Shu sababli (35.7) formulaga asosan

k=, τ=.

35.3 masala. Mexanik sistema, O_1, O_2, O_3 o‘qlar atrofida aylanma harakatdagi 1, 2 og‘ir sterjenlardan va disk 3 dan tashkil topgan bo‘lib ular AB va DE vaznsiz sterjenlar (A, B, D, E nuqtalarda sharnirlar) orqali bir-birlari bilan bog‘langan. Sistema 35.2 shaklda tasvirlangan holatda muvozanatda bo‘ladi; ushbu holatda sterjen 1 vertikal (uning A uchiga mahkamlangan prujina λ_{st} masofaga uzaytirilgan) joylashgan, sterjen 2 gorizontal (uning D uchiga mahkamlangan prujina deformatsiyalanmagan) holatda joylfshgan. Sterjenlarning uzunligi l_1 va l_2, ularning massalari m_1 va m_2, diskning massasi m_3, prujinalarning qattiqlik koeffitsientlari s_1, s_2.



35.2 shakl

Aniqlansin: 1) λ_{st} qiymati; 2) sistemaning turg‘un muvozanatlik sharti; 3) uning tebranish chastotasi va tebranish davri;

E ch i sh. Sistemaning umumlashgan koordinatasi sifatida, 1 sterjenning muvozanat holatidan kichkina og‘ishi φ_1 ni tanlab olamiz. Bunday og‘ishda, $\Delta s_A=\Delta s_B=\Delta s_E=\Delta s_D$ bo‘ladi. Shu sababli $l_2\varphi_2=l_1\varphi_1$ va $r_3\varphi_3=l_1\varphi_1$; bu erdagi r_3 -diskning radiusi.

Undan tashqari, gorizontal prujinaning uzayishi $\lambda_1=\lambda_{st}+\Delta s_A=\lambda_{st}+ l_1\varphi_1$ va vertikal prujinaning uzayishi esa $\lambda_2=\Delta s_D= l_2\varphi_2=l_1\varphi_1$. 30.2§ dan (30.11) va (30.11’) larni e’tiborga olgan holda, sistemaning potentsial energiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$P=m_1g\text{sos}\varphi_1+m_2g\sin\varphi_2+ (\lambda_{cn}+ \lambda_1\varphi_1)^2+,$$

yoki, $\text{sos}\varphi_1=1-/2$, $\sin\varphi_2=\varphi_2$ va $l_2\varphi_2=l_1\varphi_1$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$P=P_0+(m_2g+2c_1\lambda_{ct})\,\varphi_1+[2(c_1+c_2)l_1-m_1g].$$

(barcha o‘zgarmas qiymatlar P_0 -ning ichiga kiritilgan). Bundan

$$=(m_2g+2c_1\lambda_{ct})+[2(c_1+c_2)l_1-m_1g]\varphi_1.$$

Muvozanat holatda, ya'ni $\varphi_1=0$ da ushbu hosila nolga teng bo'lishi shart. Shu sababli $m_2g+2c_1\lambda_{ct}=0$ bo'lishi kerak yoki

$$\lambda_{st}= m_2g/(2c_1) \qquad (a)$$

Shunday qilib, muvozanat holatda prujina shuncha qiymatga siqilib turar ekan. Endi

$$=[2(c_1+c_2)l_1-m_1g]$$

ni hisoblab chiqaramiz. U holda (35.1) tenglamaga asosan, muvozanat turg'un bo'lishi uchun

$$2(c_1+c_2)l_1>m_1g \qquad (b)$$

Undan tashqari, (35.4) ga ko'ra, kvazielastik koeffitsient

$$s=[2(c_1+c_2)l_1-m_1g] \qquad (v)$$

Sistemaning kinetik energiyasi

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{3}l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2}{3}l_2^2\dot{\varphi}_2^2+\frac{m_3}{2}r_3^2\dot{\varphi}_3^2\right),$$

bu erdagi, $m_1/3$, $m_2/3$, $m_3/2$ -1, 2, 3 jismlarning o'z aylanish o'qlariga nisbatan inertsiya momentlari. $_{1,2}$, $_3$ lar shu jismlarning burchakli tezliklari; Lekin yuqorida φ_2, φ_1 va φ_3, φ_1 lar oralaridagi aniqlangan bog'lanishlar, $l_{22}=l_{11}$ va $r_{33}=l_{11}$ ekanligidan kelib chiqqan edi. U holda, (35.3) tengalamani e'tiborga olsak,

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{3}+\frac{m_2}{3}+\frac{m_3}{2}\right)l_1^2\dot{\varphi}^2 \quad \text{va} \quad a=(2m_1+2m_2+3m_3) \qquad (g)$$

Aniqlangan a va s larning qiymatlaridan foydalanib (35.7) formulaga asosan

$$k=\sqrt{\frac{6(c_1+c_2)l_1-3m_1g}{(2m_1+2m_2+3m_3)l_1}}, \qquad \tau= \qquad (d)$$

35.3§. Erkinlik darajasi birga teng bo'lgan sistemaning majburiy va so'nuvchi kichik tebranishlari.

Quyida ko'riladigan mexanik sistemani 35.2§ dagi kabi, q=0 bo'lganda u turg'un muvozanat holatida bo'ladi deb hisoblaymiz. Uning kichik tebranishlarini yana ikkita holat uchun tekshiramiz.

1. S o' n u v ch i t e b r a n i sh l a r. Sistemani muvozanat holatdan chiqarib yuborilgandan keyin unga potentsial kuchlardan tashqari, yopishqoq qarshilik (dissipativ) $=-\mu_k=-\mu_k(d/dq)$[44] kuchlari ta'sir

[44] Bunday kuchlar turg'un muvozanatlik (35.1) shartiga ta'sir qilmaydilar, chunki muvozanatlik holatda $\bar{v}_k = 0$ bo'ladi va shu sababli $\bar{F}_k = 0$ bo'ladi.

eta boshlasin. U holda umumlashgan dissipativ Q_d kuchni 34.3§ dagi (34.8) formuladan foydalanib, [(35.3) tenglikni keltirib chiqarishda bajarilgan amallar kabi] tegishli o‘zgartirishlar kiritilgandan keyin

$$Q_d=-\mu \qquad (\mu=\text{sonst}) \qquad (35.9)$$

-ga teng ekanligini aniqlaymiz. Endi Lagranj tenglamasini tuzamiz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial \Pi}{\partial q}=Q_d \qquad (35.10)$$

T, P va Q_d larni (35.3), (35.4) va (35.9) lardagi qiymatlari bilan almashtirsak, so‘nuvchi tebranishlarning differentsial tenglamasining oxirgi ko‘rinishini yozamiz

$$+2b+k^2q=0 \qquad (35.11)$$

bu erdagi

$$\mu/a=2b, \quad c/a=k^2. \qquad (35.11')$$

(35.11) tenglama 24.2§ dagi (24.12) tenglama bilan bir xil ko‘rinishda. Shu sababli, bitta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan mexanik sistemaning so‘nuvchi kichik tebranishlari uchun, 9524.2 da olingan barcha natijalar o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib:

a) agarda k>b bo‘lsa, sistema

$$k_1=\text{chastota va } \tau=2\pi/k_1$$

davr bilan so‘nuvchi tebranishlar bajaradi;

b) agarda k≤b bo‘lsa, sistema tebranma bo‘lmagan harakat qiladi.

24.2§ dagi *x* ni *q* ga almashtirsak, sistemaning turli holatlari uchun harakat qonuni kelib chiqadi. Bunday harakatlarning umumiy xossalari 35.2§ dagi kabi bo‘ladi.

2. M a j b u r i y t e b r a n i sh l a r. Birinchi punktda ko‘rilgan sistemaning nuqtalariga yuqoridagi kuchlardan tashqari vaqt mobaynida o‘zgaruvchi bo‘lgan $=_0\sin rt$ kuch ta’sir etsin. U holda, 1p da Q_d -ni qanday aniqlagan bo‘lsak, xuddi shu yo‘l bilan umumlashgan qo‘zg‘atuvchi kuchni aniqlaymiz

$$Q_q=Q_0\sin rt \qquad (35.12)$$

Natijada, (35.10) dagi Lagranj tenglamasining o‘ng tomoniga Q_q qo‘shilib qolar ekan va undan sistemaning majburiy tebranishlarining differentsial tenglamalari kelib chiqadi:

$$+2b+k^2q=R_0\sin rt, \qquad \text{bu erdagi } R_0=Q_0/a; \qquad (35.13)$$

qolgan belgilashlar (35.11’) dagi kabi bo‘ladi.

(35.13) tenglama 25.1§ dagi (25.9) tenglama bilan bir xil bo‘ladi. Shu sababli, 25.1§ da olingan barcha natijalar o‘rinli bo‘ladi va agar u erdagi x ni q bilan almashtirsak erkinlik darajasi bitta bo‘lgan mexanik sistemaning majburiy tebranishlarining harakat qonuni ham o‘shanday

bo‘ladi. Bunday o‘xshashlik 25.1§ da ko‘rib o‘tilgan holat, ya’ni qarshilik kuchi yo‘q (b=0) bo‘lgan xususiy holga ham taalluqli bo‘ladi. Masalan, kichik qarshilik bo‘lgandagi rezonans hodisasi ham r≈k bo‘lganda sodir bo‘ladi.

35.4§. Erkinlik darajasi ikkita bo‘lgan mexanik sistemaning kichik erkin tebranishlari.

Bir necha erkinlik darajasiga ega bo‘lgan sistemalarning tebranma harakatlari erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan sistemaning tebranma harakatidan qator muhim xususiyatlari bilan katta farq qiladi. Bu to‘g‘rida tegishli tushunchalar olish uchun erkinlik darajasi ikkiga teng bo‘lgan sistemaning erkin tebranma harakatlarini ko‘rib chiqamiz.

Sistemaning holati umumlashgan q_1, q_2 koordinatalar orqali aniqlanadi va $q_1=q_2=0$ bo‘lganda sistema turg‘un muvozanatda bo‘ladi deb faraz qilaylik. U holda sistemaning kichkina qiymatlarning ikkinchi darajalilari bilan cheklangan holdagi kinetik va potentsial energiyalari (35.3) va (35.4) tenglamalar orqali aniqlangani kabi aniqlanadi

$$T=\frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{22}\dot{q}_2^2); \qquad (35.14)$$

$$P=P_0+\frac{1}{2}(c_{11}q_1^2+2c_{12}q_1q_2+c_{22}q_2^2) \qquad (35.15)$$

bu erdagi inertlik koeffitsientlari -a_{11}, a_{12}, a_{22} va kvazielastik s_{11}, s_{12}, s_{22} koeffitsientlar o‘zgarmas qiymatlardan iborat. Agar Lagranjning (35.2) ko‘rinishdagi ikkita tenglamalaridan foydalanib, ularga P va T larning qiymatlarini qo‘ysak, erkinlik darajasi ikkita bo‘lgan mexanik sistemaning harakat differentsial tengalamalarini olamiz

$$\begin{aligned} a_{111}+a_{122}+s_{11}q_1+s_{12}q_2=0 \\ a_{121}+a_{222}+s_{12}q_1+s_{22}q_2=0 \end{aligned} \qquad (35.16)$$

tenglamalarning echimi

$$q_1=A\sin(kt+\alpha), \quad q_2=B\sin(kt+\alpha) \qquad (35.17)$$

shaklda axtaramiz, bu erdagi A, V, k va α lar o‘zgarmas qiymatlar. Ushbu q_1 va q_2 larning qiymatlarini (35.16) ga qo‘yib, $\sin(kt+\alpha)$ qisqartirib yuborsak

$$\left.\begin{aligned} (c_{11}-a_{11}k^2)A+(c_{12}-a_{12}k^2)B \\ (c_{12}-a_{12}k^2)A+(c_{22}-a_{22}k^2)B \end{aligned}\right\} \qquad (35.18)$$

(35.18) tenglamalardagi A va V larning noldan boshqa echimlarini aniqlash uchun ushbu sistemaning aniqlovchilari nolga teng bo‘lishi

kerak yoki A va V larning oldilaridagi koeffitsientlar o‘zaro proportsional bo‘lishlari kerak, ya’ni

$$\frac{c_{11}-a_{11}k^2}{c_{12}-a_{12}k^2}=-\frac{c_{12}-a_{12}k^2}{c_{22}-a_{22}k^2}=\frac{B}{A}=n \qquad (35.19)$$

Bundan k^2 ni aniqlash uchun quyidagi *chastotalar tenglamasi* deb nomladigan tenglamani olamiz

$$(c_{11}-a_{11}k^2)(c_{22}-a_{22}k^2)-(c_{12}-a_{12}k^2)^2=0 \qquad (35.20)$$

bu tenglamaning va ildizlari haqiqiy va musbat sonlardan iborat; bu holatni matematik usulda isbotlash mumkin, lekin uni boshqacha asoslash ham mumkin. Agar k_1=; k_2= bo‘lsa, ular haqiqiy sonlar bo‘lmaydi va (35.16) echimi (35.17) bo‘lmaydi.

(35.20) dan va larni aniqlab, (35.17) dagi ikkita bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan tebranishlarning xususiy echimlarining yig‘indisini aniqlaymiz. Agar (35.19) ga asosan B=nA ekanligini e’tiborga olsak,

$$q_1^{(1)}=A_1\sin(k_1t+\alpha_1), \qquad q_2^{(1)}=n_1A_1\sin(k_1t+\alpha_1); \qquad (35.21)$$

$$q_1^{(2)}=A_2\sin(k_2t+\alpha_2), \qquad q_2^{(2)}=n_2A_2\sin(k_2t+\alpha_2); \qquad (35.22)$$

bu erdagi n_1 va n_2 lar, (35.19) tenglikdagi $k=k_1$ va $k=k_2$ bo‘lgandagi n ning qiymatlari.

(35.21) va (35.22) tenglamalar orqali aniqlanadigan tebranishlar *bosh tebranishlar* deb ataladi. Ularning va chastotalari esa *sistemaning xususiy chastota*lari deb ataladi. Hamda k_1 chastota (har doim, eng kichkina bo‘ladigan)ni *birinchi bosh tebranish* deb ataladi va k_2 chastotali tebranishni *ikkinchi bosh tebranish* deb ataladi. Amplitudalarning nisbatlarini (yoki ularning koordinatalrini, ya’ni q_1/q_2 ni) belgilovchi n_1 va n_2 qiymatlarni *shakliy koeffitsientlari* deb ataladi.

(35.16) tenglama chiziqli bo‘lganligi sababli, ularning xususiy (35.21) va (35.22) echimlarining yig‘indilari quyidagicha bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} q_1&=A_1\sin(k_1t+\alpha_1)+A_2\sin(k_2t+\alpha_2),\\ q_2&=n_1A_1\sin(k_1t+\alpha_1)+n_2A_2\sin(k_2t+\alpha_2).\end{aligned}\right\} \qquad (35.23)$$

To‘rtta A_1, A_2, α_1, α_2 lardan iborat integrall doimiylari sistemaning boshlang‘ich shartlari orqali aniqlanadi va ular (35.16) *differentsial tenglamalarning umumiy echimi* deb atalib, *sistemaning kichkina tebranish qonuniyatlari*ni aniqlab beradi. Ushbu tebranishlar, chastotalari k_1 va k_2 larga teng bo‘lgan ikkita bosh tebranishlarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi va garmonik bo‘lmagan tebranish hisoblanadi. Lekin, ayrim xususiy holda, aniqrog‘i tegishli boshlang‘ich

shartlarga ega (masalan, agar $A_2=0$) bo‘lganda sistema birorta (birinchi) bosh tebranishlar bilan garmonik harakatda bo‘lishi mumkin.

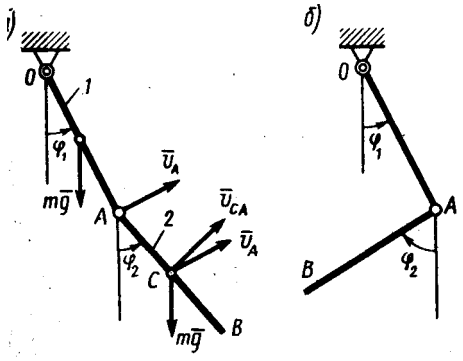
Sistemaning xususiy chastotalari k_1 va k_2 va shakliy koeffitsientlari n_1 va n_2 lar, boshlang‘ich shartlarga umuman bog‘liq bo‘lmaydilar, shu sababli sistemaning kichkina tebranishlarining asosiy xarakteristikalari bo‘lib hisoblanadilar; konkret masalalarni echish, asosan shu xarakteristika (koeffitsient)larni aniqlashdan iborat bo‘ladi.

Ushbu va bundan oldingi paragrafda olingan natijalarni solishtirib, ikkita erkinlik darajasiga ega bo‘lgan mexanik sistemaning so‘nuvchi va majburiy tebranishlarini o‘rganishning mohiyati nimadan iborat ekanligini tushunib olish mumkin bo‘ladi. Biz bularga to‘xtalib o‘ta olmaymiz, lekin shuni ta’kidlab o‘tishimiz lozimki, bunday sistemalarning majburiy tebranishlarida rezonans hodisasi ikkita, ya’ni $r\approx k_1$ yoki $r\approx k_2$ (bu erdagi r -qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi) holatlarda sodir bo‘lishi mumkin ekan.

Nihoyat, agar sistemaning erkinlik darajasi s -ta bo‘lsa, uning tebranma harakati, chastotalari k_1, k_2,....,k_s -lardan iborat bo‘lgan s -ta tebranishlarning yig‘indisidan iborat bo‘lar ekan va ular k^2 -ga nisbatan s -darajali bo‘lgan tenglamalar sistemasi orqali aniqlanar ekan. Shu sababli, bunday masalalarni echish ancha murakkab hisoblanadi, lekin kompg‘yuter (yoki analogli mashina)lar orqali har qanday murakkab sistemalarni ham osongina echish mumkin.

35.4 masala. Massalari m, uzunliklari l -ga teng bo‘lgan ikkita bir xil 1 va 2 sterjenlardan iborat bo‘lgan ikkilangan fizik mayatnikning kichkina tebranishlarining xususiy chastotalari va shakliy koeffitsientlari aniqlansin (35.3, a shakl).

E ch i sh. Umumlashgan koordinatalar sifatida φ_1 va φ_2 larning kichkina burchaklarini tanlab olamiz. U holda, $T=0,5(J_{1O}+ m+J_{2S})$, bu erdagi $J_{1O}=ml^2/3$, $J_{2C}=ml^2/12$ va etarli aniqlikda $v_C=v_A+v_{CA}=l+l/2$. Natijada



35.3 shakl.

$$T=0,5ml^2(4/3++/3). \quad (a)$$

Potentsial energiyani hisoblaymiz.

$$P=-0,5mgl\cos\varphi_1-mgl(\cos\varphi_1+0,5\cos\varphi_2)$$

yoki $\cos\varphi=1-\varphi^2/2$ deb hisoblasak,

$$P=P_0+0,5mgl(3/2+/2). \quad (b)$$

a_{11}, a_{12}, a_{22}, s_{11}, s_{22}, ($s_{12}=0$)-larning qiymatlari qanday bo‘lishi mumkinligi (a) va (b) tenglamalardan ko‘rinib turibdi.

Koeffitsientlarning ushbu qiymatlarini hisobga olgan holda, chastotalar (35.20) tenglamasi quyidagicha bo‘ladi,

$$k^4-6k^2+=0.$$

Uning ildizlari: $k_{1,2}^2 = 3(1 \pm 2/\sqrt{7})g/l$, bundan

$$k_1=0,86, \quad k_2=2,30. \qquad (v)$$

Avval k_1-ni, so‘ngra k_2-ni (35.19) ning chap tomonidagi ixtiyoriy nisbatga qo‘yib, ulardan shakliy koeffitsientlarni aniqlaymiz,

$$n_1=1,43, \quad n_2=-2,10. \qquad (g)$$

Shunday qilib, birinchi bosh tebranishda, ikkala sterjenlar ham har bir olingan vaqtda, vertikaldan bir tomonga (35.3, a shakl) va $\varphi_2/\varphi_1=1,43$ -ga, ikkinchi bosh tebranishda esa, qarama-qarshi tomonga (35.3, b shakl) va $\varphi_2/\varphi_1=2,10$ -ga og‘ar ekanlar.

Tayanch so‘z va iboralar: Turg‘un muvozanat, mexanik sitemaning kichik tebranishlari, Lagranj-Dirixle teoremasi, potentsial energiyaning minimumi, konservativ sitema, statsionar bog‘lanshli mexanik sistema, kvazielastik koeffitsient, keltirilgan qattiqlik koeffitsienti, inertsion koeffitsient,erkinlik darajasi ikkita bo‘lgan sistemaning kichik tebranishlari.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.

Har qanday qurilma yoki jihozlarni foydalanishga topshirilishdan oldin, ularni turg‘un muvozanat holatida bo‘la olishini (ya’ni birorta behos turtki yoki er qimirlashi natijasida o‘z muvozanat holatini ushlab qola olishini) taminlanishini tekshirish muhim vazifalardan biri hisoblanar ekan.

Turg‘unlik holatini qadimda faqat tajribalar o‘tkazish yo‘li orqaligina aniqlanar edi, lekin keyingi davrlardagi inshootlar shu qadar baland va murakkabki, ularning turg‘g‘unligini tajriba yshli bilan aniqlash deyarli bajarib bo‘lmaydigan ishga aylanib qolgan.

Inshoot turg‘un muvozanatda bo‘lishining asosiy shartlaridan biri shu ekanki, uning turg‘un muvozanatdagi holatida sistemaning potentsial energiyasi nolga teng bo‘lishi shart ekan.

Agar konservativ sistema shunday turg‘un muvozanat holatda bo‘lsa, uning nuqtalariga ko‘rsatilgan turtkilar ta’sirida olgan elementar

ko‘chishlar, unga qo‘yilgan elementar ko‘chish chegarsdan ortmasligi shart ekan.
Bunday chegaraviy turg‘unlik shartini bajarilishini Lagranj-Dirixle teoremasi orqali aniqlash lozim ekan.
Masalarani echishdan oldin sistema harakatda bo‘lsa uning kinetik energiyasi va potentsial energiyasi aniqlanib, uni Teylor qatoriga yoyib, faqat ikkinchi darajali o‘zgaruvchilarini qoldirilar ekan.
Agar mexanik sistema muvozanatda bo‘lsa, uning potentsial energiyasi aniqlanib, uni ham Teylor qatoriga yoyib o‘zgaruvchilarning faqat ikkinchi tartibli hadlarinigina qoldirish lozim ekan.
Hosil bo‘lgan qiymatlar asosida, harakataning differentsial tenglamasini tuzish uchun Lagranj tenglamasidan foydalansh lozim ekan.
Hosil bo‘lgan tenglamalarning echimi, sistema nuqtalarining elementar ko‘chishlarining qiymatlarini aniqlashda foydalaniladi.
Shu qiymatlar asosida ssistemaning istalgan nuqtasining elementar ko‘chishi aniqlanadi va ular ruxsat etilgan chegaraviy qiymatga solishtirilib, turg‘unlik aniqlanar ekan..

Takrorlash uchun savollar:

Turg‘un muvozanat deb nimaga aytiladi?
Turg‘un muvozanat holatini tekshirishni qanday amaliy ahamiyati bor?
Mexanik sistema turg‘un muvozanatda bo‘lishi uchun uning potentsial energiyasi qo‘zining qanday qiymatiga ega bo‘lishi lozim?
Mexanik sistemani turg‘un muvozavnat holatini tekshirish uchun qaysi teoremadan foydalanish lozim?
Kvazielastik koeffitsient deb nimaga aytiladi?
Erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan mexanik sistemalarni kichik tebranishlarida turg‘un muvozanatni aniqlash usulini bayon qilib bering?
Erkinlik darajasi ikkiga teng bo‘lgan mexanik sistemalarni kichik tebranishlarida turg‘un muvozanatligini aniqlash usulini bayon qilib bering?
Kichik tebranishlarning nechta xossalari bor?
Kichik tebranishlarning chastotalari boshlang‘ich shartlarga bog‘liq bo‘ladimi?
Amplituda va boshlang‘g‘ich faza chastotaga bog‘liq bo‘ladimi?

Mavzuni mustahkam o‘zlashtirish maqsadida 35 ilovadagi masalalarni mustaqilechishni tavsiya qilamiz.

36 Ma’ruza

Mavzu: Zarbaning elementar nazariyasi. Zarba nazariyasining asosiy tenglamasi. Zarba nazariyasining umumiy teoremalari. Zarbadagi tiklanish koeffitsienti. Jismning qo‘zg‘almas to‘siqqa urilishdagi zarbasi. Ikkita jismning markaaziy to‘g‘ri zarbasi (sharlar zarbasi). Ikkita jismning elastik bo‘lmagan zarbalarida kinetik energiyaning yo‘qolishi. Karno teoremasi. Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanayotgan jismga qo‘yilgan zarba. Zarba markazi.

Reja:

Zarbaning elementar nazariyasi.
Zarba nazariyasining asosiy tenglamasi.
Zarba nazariyasining umumiy teoremalari.
Zarbadagi tiklanish koeffitsienti.
Jismning qo‘zg‘almas to‘siqqa urilishdagi zarbasi.
Ikkita jismning markaaziy to‘g‘ri zarbasi (sharlar zarbasi).
Ikkita jismning elastik bo‘lmagan zarbalarida kinetik energiyaning yo‘qolishi. Karno teoremasi.
Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanayotgan jismga qo‘yilgan zarba. Zarba markazi.

Muammo: Ushbu mavzugacha ko‘rib o‘tilgan harakatlarda jismlar oddiy kuchlar ta’sirida o‘zlarning tezliklarini uzluksiz ravishda muntazam o‘zgarib borar edi, ya’ni har bir cheksiz kichkina vaqt oralig‘i uchun tezlik tegishlicha cheksiz kichkina qiymatga o‘zgarar edi. Lekin texnikada shunday mexanik hodisalar uchraydiki, unda jismning tezligi juda qisqa vaqt oralig‘ida juda katta miqdorga o‘zgaradi. Masalan otilgan o‘q o‘z tezligini birdaniga noldan juda katta qiymatga ko‘taradi, yoki shu o‘q birorta to‘siqqa urilib, o‘zining katta tezligini bir onda nolga tushiradi. Bunday harakaatlarda mexanikaning klassik qonunlarini to‘g‘ridan to‘g‘ri qo‘llash mumkin bo‘lmay qoladi. Quyida shunday masalalarni echish yo‘llari haqida so‘z boradi.

36.1§. Zarba nazariyasining asosiy tenglamasi.

Haqiqatdan ham, ixtiyoriy kuchning τ -vaqt oralig‘idagi impulsini τ ko‘rinishda yozish mumkin, bu erdagi shu kuchning τ -vaqt

oralig‘idagi o‘rtacha qiymati bo‘lsa, u holda kuch ta’siridagi nuqta uchun harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema

$$m(_1-_0)=\sum\tau.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, agar τ -vaqt oralig‘i o‘ta kichkina (nolga yaqin) bo‘lsa, u holda oddiy kuchlar ta’siridagi nuqta tezligining orttirmasi $\Delta_{=1}-_0$ ham o‘ta kichkina (nolga yaqin) qiymat bo‘ladi.

Lekin, nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar ichida juda katta qiymatli ($1/\tau$ tartibdagi) kuchlar bo‘lsa, u holda tezlikning shu τ -vaqt oralig‘idagi o‘zgarishi tugal qiymatga ega bo‘ladi.

CHeksiz kichkina τ - (nolga yaqin) vaqt oralig‘ida, nuqtaning tezligini tugal qiymatga o‘zgarish hodisasini ***zarba*** *deb ataladi.* Nuqta tezligining shunday tugal o‘zgarishiga sabachi bo‘lgan kuchning ***zarba kuchi*** deb ataladi. Tezlikning shunday tugal miqdordagi o‘zgarish vaqtini ***zarba vaqti*** deb ataladi.

Zarba kuchlari juda katta qiymatli va ularning o‘zgarish chegaralari katta bo‘lganligi sababli, jismlarning o‘zaro ta’sirlarini kuch orqali emas, balki ularning impulslari orqali ifodalaydilar.

Zarba impulsi

$$==\tau$$

dan iborat tugal qiymatga ega bo‘ladi. Zarbali bo‘lmagan kuchlarning τ-vaqt oralig‘idagi impulslari, juda kichkina bo‘lganligi sababli, amalda ular e’tiborga olinmaydi.

Zarba nazariyasini o‘rganishda nuqta(jism)ning boshlang‘ich tezligini, ya’ni *zarbagacha bo‘lgan tezligini* - bilan, *zarbadan keyingi tezligini* -harfi bilan belgilash qabul qilingan. U holda, zarbadagi harakat miqdorining o‘zgarish teoremasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi[45]

$$m(-)=\sum. \qquad (36.1)$$

ya’ni, *nuqtaning zarba vaqti oralig‘idagi harakat miqdorining o‘zgarishi, shu nuqtaga ta’sir etgan zarba impulslarining yig‘indisiga teng ekan.*

(36.1) tenglama, ***zarba nazariyasini asosiy tenglamasi*** deb ataladi va zarbasiz kuchlar ta’siridagi harakatda dinamikaning asosiy qonuni m qanday muhim bo‘lgan bo‘lsa, zarba nazariyasida bu tenglama shunday muhim hisoblanadi.

[45] Bundan keyingi mavzularda zarba impulsini $\overline{S}$ -ishora orqali belgilaymiz, chunki zarba nazariyasida zarbasiz impulslar umuman ko’rib o’tilmaydi.

Yana shuni takidlash lozimki, zarba vaqtidagi nuqtaning ko‘chishi (*bosib o‘tgan yo‘li-s*) $s=v^{o‘rt}\tau$ -ga teng bo‘ladi, ya’ni o‘ta kichkina qiymat bo‘ladi, shu sababli uni e’tiborga olinmaydi.

Shunday qilib, olingan natijalarga asosan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1) zarbasiz bo‘lgan kuchlar (masalan, og‘irlik kuchi)ni, zarba vaqtida hisobga olinmaydi;

2) zarba vaqti oralig‘ida nuqtaning bosib o‘tgan yo‘li, o‘ta kichkina qiymat bo‘lganligi sababli, u hisobga olinmaydi, ya’ni nuqta zarba vaqtida qo‘zg‘almas deb hisoblanadi;

3) jism nuqtalarining zarba vaqti oralig‘ida tezliklarining o‘zgarishi, faqat zarbaning asosiy tenglamasi (36.1) orqali aniqladi.

36.2§. Zarba nazariyasining asosiy teoremalari.

Moddiy nuqtalar sistemasining umumiy teoremalarini zarba ta’sirida qanday o‘zgarishini ko‘rib o‘tamiz.

1.Zarba vaqtida sistema harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema. 28.2§ dagi (28.4) tenglama zarba vaqtida ham o‘rinli bo‘ladi. Lekin, oddiy kuchlarning impulslarini e’tiborga olinmaganligi sababli, tenglamaning o‘ng tarafidagi kuchlar faqat zarbali kuchlardan iborat bo‘lishi kerak. Shu sababli, zarba vaqtida

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k^e \qquad (36.2)$$

ya’ni, *zarba vaqtidagi harakat miqdorining o‘zgarishi, sistemaga ta’sir etayotgan barcha tashqi kuchlar impulslarning yig‘indisiga teng ekan. (36.2)* tenglamani ixtiyoriy *x* o‘qdagi proektsiyasi

$$Q_{1x-}\ Q_{0x}=\sum \text{ bo‘ladi.} \qquad (36.2’)$$

Agar tashqi zarba impulslarining geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, u holda (36.2) ga asosan sistemaning zarba vaqtidagi harakat miqdorining vektori o‘zgarmas bo‘lar ekan. Shu sababli, ichki zarba impulslari sistemaning harakat miqdorini o‘zgartira olmas ekan.

2. Zarba vaqtidagi harakat miqdori bosh momentining o‘zgarishi haqidagi teorema (momentlar teoremasi). Zarba hodisasida, 28.5§ dagi momentlar teoremasi orqali aniqlangan ifodalar bir muncha o‘zgaradi, buning asosiy sababi shundan iboratki, zarba vaqtida nuqtaning holati o‘zgarmaydi (yo‘l bosib o‘tilmaydi); n -ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistemani olib ko‘raylik. Sistemaning massasi m_k bo‘lgan ixtiyoriy nuqtasiga ta’sir etuvchi tashqi zarba impulslari bosh vektorini - bilan va ichki zarba impulslari bosh

vektorini - harflari bilan belgilaymiz. U holda, (36.1) tenglamaga asosan, $m_k(_k-_k)=+$ yoki

$$m_{kk}=m_{kk}++ \text{ bo‘ladi.}$$

Ushbu tenglikdagi vektorlar, yuqorida aytilgandek, zarba vaqtida qo‘zg‘almas bo‘lgan nuqtaga ta’sir etadi. U holda, barcha vektorlar uchun o‘rinli bo‘lgan Varinon teoremasiga ko‘ra, ushbu vektorlarning birorta O nuqtaga nisbatan momentlari quyidagicha bo‘ladi:

$$=++.$$

Sistemaning har bir nuqtalari uchun shunday tengliklarni yozib, so‘ngra ularni hadma-had qo‘shib yuborsak

$$\sum-\sum=\sum+\sum \text{ bo‘ladi.}$$

Tenglamaning chap tomonida joylashgan ifodalar O markazga nisbatan sistemaning harakat miqdori momentining zarbadan oldingi va zarbadan keyingi bosh momentlaridan iborat bo‘lib, ularni tegishlicha va lar bilan belgilaymiz. O‘ng tomondagi ichki zarba ipmulslarining momentlari, ichki kuchlarning xossalariga asosan nolga teng bo‘ladi. Natijada,

$$-=\sum, \qquad (36.3)$$

ya’ni, *zarba vaqtida birorta markazga nisbatan sistemaning harakat miqdori momentlarining yig‘indisi shu markazga nisbatan tashqi impulslarning momentlarini yig‘indisiga teng ekan.*

(36.3) tenglamaning ixtiyoriy *x* o‘qidagi proektsiyasi:

$$K_{1x}- K_{0x}=\sum m_x(). \qquad (36.3’)$$

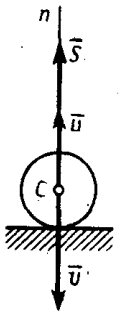
Yuqorida olingan tenglamalarga asosan, quyidagi xulosalar kelib chiqadi. Agar tashqi zarba impulslarining birorta markaz (nuqta)ga nisbatan momentlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistema harakat miqdorining o‘sha markaz (nuqta)ga nisbatan bosh momenti o‘zgarmas bo‘lar ekan. Demak, ichki zarba impulslarining momentlari sistemaning harakat miqdori momentini o‘zgartira olmas ekan.

O‘zaro to‘qnashuvchi jismlarning zarba vaqtidagi kinetik energiyalarining o‘zgarishi haqidagi masalani 36.6§ da ko‘rib o‘tamiz.

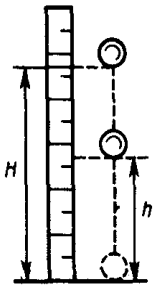
36.3§. Zarbadagi tiklanish koeffitsienti.

Ikkita jismlarning o‘zaro to‘qnashuvlari natijasidagi zarba ta’sirida paydo bo‘ladigan impulsning qiymati ularning massalari va tezliklaridan tashqari to‘qnashuvchi jismlarning elastiklik xusussiyatlariga ham

bog‘liq ekan; Jismlarning shunday xususiyatlarini xarakterlovchi (*belgilovchi, ifodalovchi*) qiymatni *tiklanish koeffitsienti* deb ataladi.



36.1 shakl



36.2 shakl

Qo‘zg‘almas gorizontal tekislikka vertikal holda tushayotgan sharni olib ko‘ramiz (36.1 shakl). Ushbu holda sodir bo‘ladigan to‘g‘ri zarbada, ikkita bosqich ro‘y beradi. Birinchi bosqich davomida sharning zarrachalari harakatining tezliklari zarbagacha bo‘lgan vaqtda v ga teng bo‘ladi (sharning harakatini ilgarilama, deb faraz qilamiz) va u kamaya borib nolga (v=0) teng bo‘ladi. Shu davrda shar deformatsiyalanadi va uning boshlang‘ich kinetik energiyasi $mv^2/2$ - deformatsiyalangan sharning ichki potentsial energiyasiga aylanadi.

Ikkinchi bosqichda esa, shar ichki (elastiklik kuchlar) kuchlar ta’sirida, o‘zining shaklini tiklay boshlaydi; hamda jismning ichki potentsial energiyasi shar zarrachalarini harakatlantirib kinetik energiyaga aylanadi. Zarbaning oxirida shar zarrachalarining tezligi u -ga teng bo‘ladi va uning kinetik energiyasi $mu^2/2$ -ga teng bo‘ladi. Lekin, sharning mexanik energiyasi to‘liq ravishda qayta tiklanmaydi, chunki uning ma’lum qismi sharga qoldiq deformatsiya berishga va uni isitish (qizdirish)ga sarf bo‘ladi. Shu sababli, zarbadan keyingi u -tezlik zarbadan oldingi v -tezlikdan kichik bo‘ladi.

Jismning qo‘zg‘almas tekislikka bo‘lgan to‘g‘ri zarbasidagi, zarbadan keyingi tezlikning modulini, zarbadan oldingi tezlik moduliga bo‘lgan nisbatiga tiklanish koeffitsienti deb ataladi va k *harfi bilan belgilanadi, ya’ni*:

$$k=u/v \qquad (36.4)$$

Turli jismlarning tiklanish koeffitsientlarini son qiymatlari tajriba yo‘llari bilan aniqlanadi. Tajribalar natijasida v tezlikni uncha katta bo‘lmagan oraliqdagi o‘zgarishlarida k - ning aniqlangan qiymati faqat to‘qnashayotgan jismlarning materiallariga bog‘liq bo‘ladi xolos. CHegaraviy holat sifatida absolyut elastik zarba (ya’ni k=1) misol qilib olinadi, bunday holda kinetik energiya to‘liq qayta tiklanadi hamda absolyut elastik bo‘lmagan (ya’ni k=0) zarba misol qilib olinadi, bunday

holda, birinchi bosqichning oxirida jismning to‘liq kinetik energiyasi uni deformatsiyalashga va isitishga sarf bo‘ladi.

Tiklanish koeffitsienti k -ni aniqlash uchun, sharni avvaldan belgilangan H balandlikdan vertikal holda boshlang‘ich tezliksiz tashlab yuboriladi (36.2 shakl) va uning yonida o‘rnatilgan lineyka orqali qancha h -balandlikka qayta ko‘tarilishi o‘lchab aniqlanadi. Hamda quyidagi Galiley formulasidan foydalanib tiklanish koeffitsienti aniqlanadi:

v=, u= va k=u/v=

Tiklanish koeffitsientining turli materiallar uchun aniqlangan qiymatlari maxsus spravochniklarda keltiriladi. Xususiy hol sifatida yog‘ochni yog‘ochga 3 m/s tezlik bilan urilgandagi tiklanish koeffitsienti k≈0,5, po‘latni po‘latga shu tezlik bilan urilishida k≈0,56, shishani shishaga urilishidagi k≈0,94 ekanligi tajribalar usulida aniqlangan.

36.4§. Jismning qo‘zg‘almas to‘siqqa urilishidagi zarbasi.

Massasi M bo‘lgan jism (shar)ni, qo‘zg‘almas plitaga urilishidagi zarbani ko‘rib o‘tamiz. Plitaning reaktsiyasi jismga ta’sir etuvchi zarba kuch hisoblanadi; bu kuchning zarba vaqtidagi impulsini - deb belgilaylik. Jismning plita bilan to‘qnashgan nuqtasining normali, uning massa markazidan (shar uchun har doim shunday) o‘tadi deb faraz qilaylik. Jismning bunday zarbasini, *markaziy zarba* deb ataladi. Agar massa markazining tezlik vektorini yo‘nalishi plitaning normali n - bo‘ylab yo‘nalgan bo‘lsa, to‘g‘ri zarba, aks holda esa qiya zarba deb ataladi.

1. T o‘ g‘ r i z a r b a h o d i s a s i: Ushbu holda (36.2) tenglamani normal n -o‘qqa proektsiyalaymiz (36.1 shakl) va $_0$=M, $_1$=M ekanligini e’tiborga olsak

$$M(u_n-v_n)=S_n.$$

Lekin, to‘g‘ri zarbada $u_n=u$, $v_k=-v$, $S_n=S$ bo‘ladi. Shu sababli,

$$M(u+v)=S.$$

Masalalarni echishda kerak bo‘lgan ikkinchi tenglama (36.4) dan olinadi

$$u=kv.$$

Hosil bo‘lgan tenglamalardan M, v, u lar ma’lum bo‘lsa u va S larni aniqlash mumkin bo‘ladi, bundan

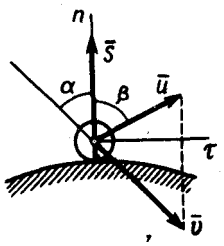
$$S=M(1+k)v.$$

Ushbu tenglikdan ko‘rinib turibdiki, tiklanish koeffitsienti qanchalik katta bo‘lsa, zarba impulsi shunchalik katta bo‘lar ekan. 36.3§ da S bilan k ning mana shu munosabati haqida gapirib o‘tilgan edi.

Zarba kuchi (reaktsiya) ning o‘rtacha qiymatini aniqlash uchun, qo‘shimcha ravishda zarbaga sarflangan τ -vaqtning son qiymatini bilish kerak bo‘ladi, amalda buni tajriba orqali aniqlanadi.

Misol. Massasi m=1 kg bo‘lgan po‘lat sharni N=3 m balandlikdan po‘lat plitaga tashlab yuborilganda (k=0,56), zarbagacha bo‘lgan tezlikning qiymati v=≈7,7 m/c va zarbadan keyingi tezlikning son qiymati u=kv=4,3 m/s bo‘ladi. Zarba impulsi S=mv(1+h)≈12 H·c ga teng bo‘ladi.

Agar zarbaga sarflangan vaqt τ=0,0005 s bo‘lsa, u holda zarba kuchi (reaktsiya)ning o‘rtacha qiymati =S/τ=24 000 H.



36.3 shakl.

2. Q i ya z a r b a h o l a t i. Bunday holda massa markazining tezlik vektori -ning normal bilan zarbagacha tashkil qilgan burchagi α bo‘lsin va zarbadan keyingi tezlikning yo‘nalishi β burchakni tashkil etsin (36.3 shakl). U holda, (36.2) tenglamani urinma va normal o‘qlardagi proektsiyasi

$$M(u_\tau - v_\tau)=0, \quad M(u_n - v_n)=S.$$

Bunday zarbadagi tiklanish koeffitsientining son qiymati zarbadan keyingi $|u_n|$ tezlikning modulini, boshlang‘ich $|v_n|$ -tezlikning moduliga nisbati orqali aniqlaymiz, chunki zarba faqat normal o‘q bo‘yicha sodir bo‘ladi (ishqalanish kuchini e’tiborga olmaymiz). U holda, proektsiyalarning ishoralarini e’tiborga olsak $u_n=-kv_n$. Natijada, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$u_\tau=v_\tau, \quad u_n=-v_n, \quad S=M|v_n|(1+k).$$

Hosil bo‘lgan tenglamalar orqali, agar M, v, α, k -lar ma’lum bo‘lsa, zarbadan keyingi tezlikning moduli va yo‘nalishini hamda zarba impulsini aniqlashimiz mumkin. Xususiy holda, birinchi tenglikdan $v_\tau=|v_n|\mathrm{tg}\alpha$ va $u_\tau=|u_n|\mathrm{tg}\beta$ ekanligini e’tiborga olsak

$$|u_n|\mathrm{tg}\beta=|v_n|\mathrm{tg}\alpha,$$

bundan

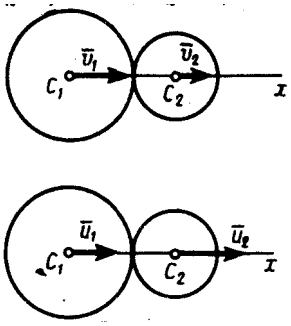
$$k=|u_n|/|v_n|= \mathrm{tg}\alpha/\mathrm{tg}\beta.$$

Demak qiya zarbada, urilishdagi burchakning tangensini qaytishdagi burchak tangensiga nisbati tiklanish koeffitsientiga teng

bo‘lar ekan. Hamda k<1, bo‘lgani uchun $\alpha<\beta$ bo‘ladi, ya’ni urilish burchagi har doim qaytish burchagidan kichkina bo‘lar ekan.

36.5§. Ikkita jasmning markaziy to‘g‘ri zarbasi (sharlar zarbasi).

Agar ikkita jismning to‘qnashuvida ularning to‘qnashgan nuqtalarining umumiy normali ularning massalari markazlaridan o‘tsa va massa markazlarining zarbagacha va zarbadan keyingi tezliklari shu to‘g‘ri chiziqda yotsa, bunday zarbani *markaziy to‘g‘ri zarba* deb ataladi. Masalan, ikkita bir jinsli sharlarning o‘zaro to‘qnashuvlaridan oldingi tezlik vektorlari bir to‘g‘ri chiziqdan o‘tsa, bunday zarba markaziy to‘g‘ri zarba bo‘ladi.



36.4 shakl.

To‘qnashuvchi jismlarning massalari M_1 va M_2 bo‘lsin, ularning massa markazlarining tezliklari to‘qnashuvgacha v_1 va v_2 to‘qnashuvdan keyingi tezliklari u_1 va u_2 bo‘lsin. Massa markazlari S_1, S_2 nuqtalardan *har doim* S_1 *dan* S_2 *-ga yo‘nalgan* S_1x o‘qini o‘tkazamiz (36.4 shakl). To‘qnashuv bo‘lishi uchun, $v_{1x}>v_{2x}$ shart (aks holda birinchi jism ikkinchi jismni quvib eta olmaydi); hamda zarbadan keyin $u_{1x}\le u_{2x}$ bo‘lishi shart, chunki orqadagi shar oldinga o‘tib keta olmaydi.

M_1, M_2, v_{1x},v_{2x} va k -lar ma’lum bo‘lsa, u_{1x} va u_{2x} ni aniqlash mumkin. Buning uchun to‘qnashuvchi jismlarni bitta sistemadan iborat deb hisoblab, harakat miqdorining o‘zgarish teoremasini qo‘llaymiz. U holda, jismlarning o‘zaro to‘qnashuvidan paydo bo‘ladigan kuchlar ichki kuchlar hisoblanadi va $\sum=0$ bo‘ladi. Natijada (36.2’) tenglamadan $Q_{1x}=Q_{0x}$ bo‘ladi yoki

$$M_1u_{1x}+ M_2u_{2x}= M_1v_{1x}+ M_2v_{2x}. \qquad (36.5)$$

Ikkinchi tenglamani olish uchun tiklanish koeffitsientini aniqlash formulasidan foydalanamiz. Ikkita jismning to‘qnashuvida zarbaning (impulsi) intensivligi (muntazamligi) har bir jismning absolyut tezliklarining qiymatlariga emas, balki urayotgan jismning tezligi urilayotgan jismning tezligidan qancha miqdorda katta ekanligiga bog‘liq bo‘ladi, ya’ni ularning tezliklari v_{1x}-v_{2x} ayirmasiga bog‘liq bo‘ladi. Shu sababli har doim $v_{1x}>v_{2x}$ va $u_{1x}\le u_{2x}$ ekanligini hisobga olsak:

k==. (36.6)

yoki

$$u_{1x}-u_{2x}=k(v_{1x}-v_{2x}). \qquad (36.6')$$

(36.5) va (36.6) tenglamalar sistemasi orqali yuqoridagi masala o‘z echimini topadi. To‘qnashuvchi jismlarga ta’sir etgan zarba impulsini aniqlash uchun, birorta jismni alohida ajratib olib, unga (36.2’) tenglamani qo‘llaymiz, masalan, birinchi shar uchun:

$$S_{1x}=M_1(u_{1x}-v_{2x}), \quad S_{2x}=-S_{1x}. \qquad (36.7)$$

Quyida chegaraviy bo‘lgan ikki holatni ko‘rib o‘tamiz:

1. Absolyut elastik bo‘lmagan zarba (k=0). Bunday holda (36.6) va (36.5) tenglamalardan

$$u_{1x}=u_{2x}=, \qquad (36.8)$$

Ikkala jism zarbadan keyin bir xil tezlik bilan harakatlanadi. Jismlarga ta’sir etgan zarba impulslari

$$S_{2x}=-S_{1x}=(v_{1x}-v_{2x}).$$

2. Absolyut elastik zarba (k=1). Bunday holda (36.5) va (36.6) tenglamalardan

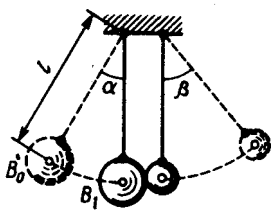
$$\left.\begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x}-\frac{2M_2}{M_1+M_2}(v_{1x}-v_{2x}) \\ u_{2x} &= v_{2x}+\frac{2M_1}{M_1+M_2}(v_{1x}-v_{2x}) \end{aligned}\right\} \qquad (36.9)$$

Jismlarga ta’sir etgan impulslarni aniqlaymiz

$$S_{2x}=-S_{1x}=(v_{1x}-v_{2x}).$$

Ko‘rinib turgandek, absolyut elastik zarbaning impulsi, absolyut elastik bo‘lmagan zarbaning impulsidan ikki marta katta bo‘lar ekan.

Xususiy holda, ya’ni $M_1=M_2$ bo‘lganda (36.9) tenglamadan $u_{1x}=v_{2x}$, $u_{2x}=v_{1x}$; shunday qilib, absolyut elastik va bir xil massali ikkita jism urilishganda, ularning tezliklari o‘zaro almashinib qolar ekan.



36.5 shakl.

36.1 masala. Massalari M_1 va M_2 bo‘lgan ikkita shar 36.5 shaklda ko‘rsatilgandek osib qo‘yilgan. Birinchi sharni vertikalga nisbatan α burchakka og‘dirib, boshlang‘ich tezliksiz qo‘yib yuborildi. Zarbadan keyin ikkinchi shar β - burchakka og‘adi. Ushbu zarbadagi tiklanish koeffitsienti aniqlansin.

E ch i sh. Masalaning shartlari orqali birinchi shar massa markazining zarbadan oldingi tezligi v_1 - ni va ikkinchi sharning zarbadan keyingi tezligi u_2 -ni aniqlaymiz. V_0V_1 ko‘chishdagi kinetik energiyaning o‘zgarishi teoremasidan birinchi shar uchun

$$M_1=2R_1h=2M_1gl(1-\cos\alpha),$$

bu erdagi l -shar markazini shar osib qo‘yilgan nuqtagacha bo‘lgan masofasi.

Bundan, $v_1=2\sin(\alpha/2)$. Shu yo‘l bilan $u_2=2\sin(\beta/2)$.

Ushbu masalada $u_2=0$ bo‘lgani uchun, (36.5) va (36.6) dan:

$$M_1u_{1x}+ M_2u_{2x}= M_1v_{1x}, \quad u_{2x}-u_{1x}=kv_{1x}.$$

Bu tenglamalardan u_{1x} -ni chiqarib tashlasak va $v_{1x}=v_1$, $u_{1x}=u_1$ ekanligini hisobga olsak,

$$M_1v_1(1+k)=(M_1+M_2)u_2.$$

Bundan oxirgi natijani olamiz:

$$k=\frac{(M_1+M_2)u_2}{M_1v_1}-1=\frac{(M_1+M_2)\sin(\beta/2)}{M_1\sin(\alpha/2)}-1.$$

36.6§. Ikkita jismning elastik bo‘lmagan zarbasida kinetik energiyaning yo‘qolishi. Karno teoremasi.

36.3§ dagi mulohazalardan kelib chiqadiki, elastik bo‘lmagan zarbadan keyin to‘qnashuvchi jismlarning kinetik energiyalari qisman yo‘qoladi. Eng katta yo‘qotish absolyut elastik bo‘lmagan zarbada sodir bo‘ladi. Ikkita jismning absolyut elastik bo‘lmagan zarbasidagi yo‘qolgan kinetik energiyani hisoblab chiqamiz.

O‘zaro to‘qnashuvchi jismlarni ilgarilama harakatda deb hisoblab, ularning absolyut elastik bo‘lmagan zarbadan keyingi umumiy tezliklarini u bilan belgilasak, ularning zarbagacha va zarbadan keyingi kinetik energiyalarini quyidagicha aniqlaymiz

$$2T_0=M_1v_{1x}^2+M_2v_{2x}^2, \quad 2T_1=(M_1+M_2)u_x^2, \text{ bo‘ladi.} \qquad (36.10)$$

Zarbadagi yo‘qolgan kinetik energiya T_0 -T_1 -ni aniqlaymiz. Buning uchun quyidagicha belgilash kiritamiz,

$$T_0-T_1=T_0-2T_1+T_1 \qquad (36.11)$$

(36.8) formuladan

$$(M_1+M_2)u_x=M_1v_{1x}+M_2v_{2x},$$

bundan,

$$2T_1=(M_1+M_2)=(M_1v_{1x}+M_2v_{2x})u_x, \qquad (36.12)$$

(36.11) tenglikning o‘ng tomoniga (36.10) dan T_0 va T_1 -larni, (36.12) dan $2T_1$ ni keltirib qo‘ysak

$$T_0\text{-}T_1=\frac{1}{2}(M_1v_{1x}^2+M_2v_{2x}^2-2M_1v_{1x}u_x-2M_2v_{2x}u_x+M_1u_x^2+M_2u_x^2)$$

yoki

$$T_0\text{-}T_1=\frac{1}{2}M_1(v_{1x}-u_x)^2+\frac{1}{2}M_2(v_{2x}-u_x)^2, \qquad (36.13)$$

$(v_{1x}\text{-}u_x)$ va $(v_{2x}\text{-}u_x)$ -lar to‘qnashgan har bir jismning tezliklarini qanchaga kamayganligini aniqlab beradi. Ularni *zarbada yo‘qolgan tezliklar* deb atash ham mumkin.

U holda, (36.13) tenglamadan Karno[46] teoremasi kelib chiqadi: *absolyut elastik bo‘lmagan zarbada sistemaning yo‘qotgan kinetik energiyasi, to‘qnashgan har bir jismning yo‘qotgan tezliklariga teng bo‘lgan o‘zgarmas tezlik bilan qilgan harakatlaridagi kinetik energiyalarning yig‘indisiga teng ekan.*

Agar zarba absolyut noelastik (ya’ni $k\neq0$) bo‘lmasa, tegishli o‘zgartirishlar orqali, zarbada yo‘qolgan kinetik energiya formulasini keltirib chiqaramiz

$$T_0\text{-}T_1=\frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2}M_1(v_{1x}-u_x)^2+\frac{1}{2}M_2(v_{2x}-u_x)^2\right] \qquad (36.13')$$

Xususiy hol sifatida bir jismni qo‘zg‘almas bo‘lgan ikkinchi jismga urilishini ko‘rib chiqamiz. Ushbu holda $v_2=0$ bo‘ladi

$$T_0=\frac{1}{2}M_1v_1^2, \qquad u=\frac{M_1v_1}{M_1+M_2}.$$

U holda,

$$T_1=\frac{1}{2}(M_1+M_2)u^2=\frac{1}{2}\frac{M_1^2v_1^2}{M_1+M_2}=\frac{M_1}{M_1+M_2}\frac{M_1v_1^2}{2}$$

yoki

$$T_1=\frac{M_1}{M_1+M_2}T_{0.} \qquad (36.14)$$

Zarbadan keyin qancha energiya qolishi mumkin ekanligini (36.14) formula orqali aniqlash mumkin bo‘ladi.

Quyidagi ikkita qiziqarli holatni ko‘rib chiqamiz.

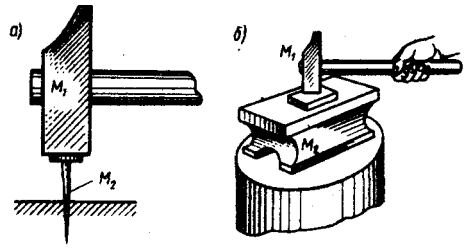
1. Urayotgan jismning massasi urilayotgan jismning massasidan juda katta bo‘lsin (ya’ni $M_1>>M_2$). Bu holda, $M_1+M_2\approx M_1$ deb hisoblaymiz va (36.14) formula orqali $T_1\approx T_0$ bo‘ladi. Demak, zarba absolyut elastik bo‘lishiga qaramasdan kinetik energiya

[46] Lazar Karno (1753-1823y.) - buyuk frantsuz olimi (matematik va mexanik) va frantsuz revolyutsiyasining etuk namoyandasi.

deyarli yo‘qolmas ekan va sistema zarbadan keyin ham zarbadan avvalgi kinetik energiya bilan o‘z harakatini davom etar ekan.

Amalda bunday hodisalar mixni bolg‘a bilan urilganda, qoziqlarni katta bosqon bilan qoqilganda sodir bo‘lishi mumkin. Shu sababli, bolg‘aning massasi mixning massasidan bir qancha katta bo‘lishi shart (36.6, a shakl).

2. Urayotgan jismning massasi urilayotgan jismning massasidan juda kichkina bo‘lsin (ya’ni $M_2 >> M_1$). Bu holda, $M_1/(M_1+M_2) \approx 0$ deb hisoblaymiz va (36.14) dan $T_2 \approx 0$ bo‘ladi. Shu sababli, bunday zarbada barcha kinetik energiya jismni deformatsiyalashga sarf bo‘lar ekan; zarbadan keyin jismning tezligi nolga teng bo‘lar ekan.



36.6 shakl

Amalda bunday zarbalar jismni sandon ustida ishlashda, yoki parchinlash ishlarida sodir bo‘ladi. Shu sababli, sandon bilan jismning massasi (parchin bilan uning ostidagi asosning massasi) bolg‘aning massasidan ancha katta bo‘lishi shart ekan (36.6, b shakl).

36.7§*. Aylanayotgan jismga ko‘rsatilgan zarba. Zarba markazi.

Qo‘zg‘almas z - o‘qi atrofida aylanayotgan jismni ko‘rib chiqamiz (36.7 shakl). Faraz qilaylik shu jismga impulsi -ga teng bo‘lgan zarba berilsin. U holda (36.3’) tenglamaga asosan

$$K_{1z}-K_{0z}=m_z(),$$

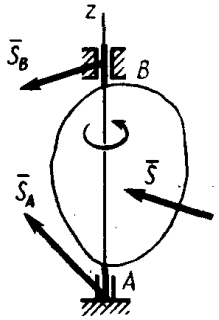
bo‘ladi, chunki podshipniklarda paydo bo‘ladigan $_A$ va $_V$ -impulsiv reaktsiyalarning z -o‘qiga nisbatan momentlari nolga teng bo‘ladi.

Aylanayotgan jismning zarbagacha bo‘lgan burchakli tezligini ω - bilan belgilaylik, zarbadan keyingi burchakli tezligini Ω - bilan belgilaylik. U holda $K_{0x}=J_z\omega$, $K_{1x}=J_z\Omega$ bo‘ladi, natijada

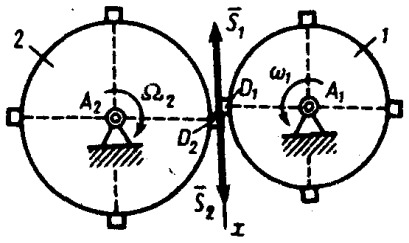
$$J_z(\Omega-\omega)=m_z() \text{ yoki } \Omega=\omega+. \qquad (36.15)$$

(36.15) formuladan, qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanayotgan jismning zarbadan keyingi burchakli tezligini aniqlashda foydalaniladi. Bunga asosan: *aylanayotgan jismning burchakli tezligi unga ko‘rsatilgan zarba impulsining jismni aylanish o‘qiga nisbatan olingan inertsiya momentiga bo‘lgan nisbatiga teng qiymatga o‘zgarar ekan.*

36.2 masala. ω_1 burchakli tezlik bilan aylanayotgan g‘ildirak –1, o‘zining D_1 butog‘i bilan muvozanatda bo‘lgan g‘ildirak 2 ning D_2 butog‘iga uriladi (36.8 shakl). G‘ildiraklarning radiuslari va A_1, A_2 aylanish o‘qlariga nisbatan inertsiya momentlari tegishlicha r_1, r_2, J_1, J_2 . Zarbadan keyin g‘ildirak 2 -ning burchakli tezligi Ω_2 ning qiymati qancha bo‘lishi aniqlansin, tiklanish koeffitsienti k -ga teng.



36.7 shakl.



36.8 shakl.

E ch i sh. Zarba vaqtida, ikkala g‘ildiraklarga ham modullari o‘zaro teng bo‘lgan $_1=_2$ ($S_1=S_2=S$) zarba impulslari ta’sir etadi. U holda $\omega_2=0$ ekanligini e’tiborga olib, har bir g‘ildiraklar uchun (36.15) tenglik asosida tenglamalar tuzamiz,

$$J_1(\Omega_1-\omega_1)=-Sr_1, \quad J_2\Omega_2=Sr_2,$$

Ikkala tengliklardan S-ni chiqarib tashlasak,

$$J_1r_2(\Omega_1-\omega_1)+J_2r_1\Omega_2=0 \qquad (a)$$

D_1 va D_2 nuqtalarning zarbagacha va zarbadan keyingi tezliklari $v_1=\omega_1r_1$, $u_1=\Omega_1r_1$, $v_2=0$, $u_2=\Omega_2r_2$ bo‘lganligi uchun, to‘g‘ri zarbadagi tiklanish koeffitsientini aniqlash formulasi - (36.6’) orqali quyidagi tenglamani tuzamiz

$$\Omega_1r_1-\Omega_2r_2=-k\omega_1r_1. \qquad (b)$$

(a) va (b) tenglamalaradan Ω_1 chiqarib tashlasak

$$\Omega_2=\frac{J_1r_1r_2}{J_1r_2^2+J_2r_1^2}(1+k)\omega_1.$$

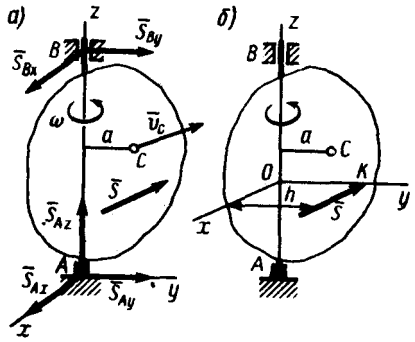
I m p u l s i v r e a k ts i ya l a r. A tovon va V podshipniklarda zarba paytida paydo bo‘ladigan reaktsiyalarni aniqlaymiz. A nuqtadan A*xyz* o‘qlarni shunday o‘tkazamizki, jismning massa markazi S nuqta shu Axyz tekislikda joylashgan bo‘lsin (36.9, a shakl). Izlanayotgan impulsiv reaktsiyalarning tashkil etuvchilarini ushbu o‘qlar bo‘yicha yo‘naltiramiz. Faraz qilaylik AV=b va S nuqtadan Az o‘qigacha bo‘lgan masofasi a -ga teng bo‘lsin. (36.2’) tenglamani uchala o‘qlarga proektsiyalaymiz, (36.3’) tenglamanii Ax, Au o‘qlarga (Az o‘qdagi proektsiyasini 36.15 tenglikni keltirib chiqarishda qo‘llaganmiz)

proektsiyalaymiz. Zarba paytida jism qo‘zg‘almas qolganligi sababli $_S$ va $_S$ lar Ax o‘qiga parallel bo‘ladi; shu sababli $Q_{0x}=-Mv_C=-Ma\omega$, $Q_{1x}=-Ma\Omega$, $Q_y=Q_z=0$ bo‘ladi. (36.3’) tenglamani tuzishda 28.4§ dagi (28.9) tenglikdan foydalanamiz, natijada

$$\left.\begin{aligned} &-Ma(\Omega-\omega)=S_{Ax}+S_{Bx}+S_x,\\ &0=S_{Ay}+S_{By}+S_y,\quad 0=S_{Az}+S_z,\\ &-J_{xz}(\Omega-\omega)=-S_{By}b+m_x(\bar{S}),\\ &-J_{yz}(\Omega-\omega)=S_{Bx}b+m_y(\bar{S}). \end{aligned}\right\} \qquad (36.16)$$

(36.16) tenglama orqali noma’lum bo‘lgan S_{Ax}, S_{ay}, S_{az}, S_{Bx}, S_{By} impulsiv reaktsiyalar aniqlanadi. Ushbu tenglamalarda ishtirok etayotgan Ω-ω -ni (36.15) tenglik orqali aniqlaymiz.

Z a r b a m a r k a z i. Aylanayotgan jismga ta’sir etuvchi impulsiv reaktsiyalarning paydo bo‘lishi yomon oqibatlarga olib keladi, chunki ularning ta’sirida konstruktsiyaning qismlari (podshipniklari vallari va h.k.)ni tez eyilishiga yoki umuman ishdan chiqarib yuborishiga sababchi bo‘ladi. Shu sababli, qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanayotgan jismga zarba berilganda A va V podshipniklarga tushadigan impulsiv reaktsiyalarni umuman yo‘qotib yuborish mumkin ekanligini ko‘rib chiqamiz. Buning uchun $_A=_V=0$ deb hisoblasak, (36.16) tenglamalar sistemasi qaysi shartlar orqali qanoatlanishi mumkinligini ko‘rib chiqamiz.



36.9 shakl.

Agarda $_A=_V=0$ bo‘lsa, (36.16) ning 2 va 3 tenglamalaridan $S_y=S_z=0$ bo‘ladi; bularni qanoatlantirish uchun, impulsni Ayz tekisligiga perpendikular ravishda, ya’ni (yuqorida qabul qilingan shartga ko‘ra) aylanish o‘qidan va massa markazidan o‘tuvchi tekislikka perpendikulyar ravishda yo‘naltirish zarur bo‘ladi.

Endi impuls shunday yo‘nalgan deb faraz qilaylik (36.9 , b shakl). U holda $_A=_V=0$ bo‘lsa, (36.16) tenglamalarning ko‘rinishi koordinata boshi Az -ning qaerda joylashishiga befarq bo‘ladi. Shu sababli, keyingi hisoblash ishlarini soddalashtirish uchun Oxu tekisligini shunday tanlab olamizki, -impuls vektori shu tekislikda joylashgan bo‘lsin. Natijada, $m_x()=m_y()=0$ bo‘ladi va (36.16) ning oxirgi ikkita tenglamasidan $S_B=0$ bo‘lsa, $J_{xz}=J_{yz}=0$ ekanligini aniqlaymiz. Bu esa (27.3§ ga q.) -impuls yotgan Oxu -tekislik O nuqtadan o‘tuvchi shunday tekislikda yotishi

shart ekanki, shu O nuqtadan o‘tuvchi z -o‘qi bosh inertsiya o‘qi bo‘lishi kerak ekan; xususiy holda 27.3§ dagi Oxu tekisligi simmetriya teksiligidan iborat bo‘lsa, u holda $J_{xz}=J_{yz}=0$ bo‘ladi.

Endi (36.16) sistemaning 1 tenglamasini ko‘rib chiqamiz. $_A=_V=0$ va $S_x=-S$ bo‘lgani (36.9, b shakl) uchun, u $Ma(\Omega-\omega)=S$ ko‘rinishga keladi. Bir vaqtning o‘zida $m_z()=Sh$ bo‘lgani uchun (36.15) tenglamadan $J_z(\Omega-\omega)=Sh$ kelib chiqadi. Yuqoridagi ikkita tenglamalardan $(\Omega-\omega)$ chiqarib tashlasak

$$h=J_z/(Ma) \qquad (36.17)$$

ekanligini aniqlaymiz.

Ushbu (36.17) formula orqali qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanayotgan qattiq jismga qo‘yiladigan impulsning qo‘yilish nuqtasi z -o‘qidan qaysi h- masofada bo‘lishligi aniqlanadi.

Shunday qilib, z -o‘qi atrofida aylanayotgan jismga tushayotgan zarba ta’sirida, jismning o‘qqa mahkamlangan podshipniklariga impulsiv reaktsiyalar ta’sir etmasligi uchun quyidagi shartlar bajarilishi lozim ekan:

1)zarba impulsi z-o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan va uning shunday O nuqtasidan o‘tishi lozim ekanki, bu nuqtada z -o‘qi bosh inertsiya o‘qidan iborat bo‘lishi kerak ekan (xususiy holda, Oxu tekisligi faqat simmetriya tekisligidan iborat bo‘lishi shart ekan);

2)zarba impulsi, z -o‘qi va massa markazi S nuqtadan o‘tuvchi tekislikka perpendikulyar ravishda yo‘nalgan bo‘lishi shart ekan;

3)zarba impulsi aylanish o‘qidan $h=J_z/Ma$ masofada (massa markazi yotgan tomonda) joylashishi shart ekan.

Agar, zarba impulsi shu K nuqtadan o‘tib, aylanish o‘qi mahkamlangan nuqtalari (podshipniklari)ga zarba reaktsiyasi ta’sir etmasa, bunday nuqtani *zarba markazi* deb ataladi.

(36.17) formulaga asosan shuni aniqlash mumkin ekanki, zarba markazi fizik mayatnikning tebranish markazi bilan bir nuqtada joylashar ekan. Demak, 13.2§ da ko‘rsatilganidek, $h>a$ bo‘ladi, ya’ni aylanish o‘qidan zarba markazigacha bo‘lgan masofa, aylanish o‘qidan massa markazigacha bo‘lgan masofadan katta ekan. Agar aylanish o‘qi massa markazidan o‘tsa, u holda $a=0$ bo‘ladi, natijada $h=\infty$ bo‘ladi. Shu sababli, jismda zarba markazi yo‘q bo‘ladi va har qanday zarba, albatta aylanish o‘qiga zarba reaktsiyasi ta’sir qilar ekan.

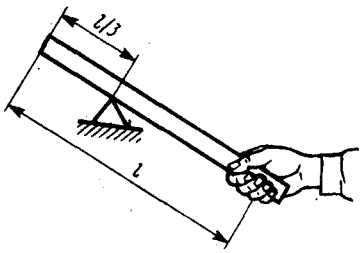
Yuqorida olingan natijalarni, quyidagi misollarda ko‘rib o‘tamiz.

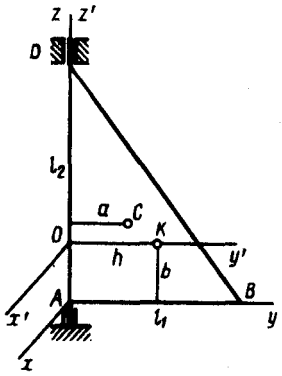
1.Aylanadigan kurok (36.4 masalaga q.) yoki mayatniksimon koper (materiallarni zarba ta’siriga sinashda foydalaniladigan

pribor)ning konstruktsiyasini loyihalashda va b.h. ularning aylanish o‘qlarini shunday tanlash lozimki, ularga uriladigan nuqtaning o‘rni, zarba markazi bo‘lishi lozim.

2. Bolg‘ani ushlaganda, shunday ushlash lozimki, uning jismga urilayotgan nuqtasi, qo‘l ushlangan nuqtaga nisbatan zarba markaziga to‘g‘ri kelsin. Aks holda, qo‘lga «zirqiratuvchi» kuch ta’sir etadi.

3. Y’g‘och bilan urishda (36.10 shakl), qo‘lni «zirqiratmasligi» uchun, yog‘ochning urilish nuqtasi qo‘l bilan ushlangan nuqtaga nisbatan zarba markaziga to‘g‘ri kelishi shart. Agar yog‘ochning uzunligi l bo‘lgan bir jinsli sterjen deb qabul qilsak va aylanish o‘qini uning uchidan o‘tgan deb hisoblasak, u holda a=l/2, $J_z=Ml^2/3$ va h= $J_z/Ma=2l/3$ bo‘ladi.markaziga to‘g‘ri kelsin.





36.10 shakl 36.11 shakl.

Demak (36.10 shakl), sterjen qo‘lingizni «zirqiratmasligi» uchun, uni ushlagan joyingizdan 2l/3 masofada, yoki ikkinchi uchidan l/3 masofadagi nuqta orqali urish lozim ekan.

36.3 masala. Bir jinsli yupqa plastinadan iborat mo‘ljal, Az o‘q atrofida aylanishi mumkin qilib o‘rnatilgan (36.11 shakl). Mo‘ljalning shakli katetlari $AB=l_1$, $AD=l_2$, -ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli to‘rtburchakdan iborat. Agar ABD plastinaning aylanish o‘qiga nisbatan inertsiya momenti $J_z=M/6$ va markazdan qochma inertsiya momenti - $J_{yz}=Ml_1l_2/12$ (M - plastinaning massasi, Ayz -o‘qlariplastina tekisligada joylashgan).

E ch i sh. ABD uchburchak shakldagi plastinaning og‘irlik markazi Az -o‘qidan $a=l_1/3$ masofada joylashganligi uchun (36.17) formulaga asosan uning zarba markazi K nuqta Az -o‘qidan $h=J_z/(Ma)=3J_z/(Ml_1)=l_1/2$.

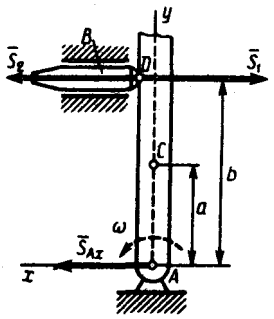
Endi zarba markazi Ay -o‘qidan qancha b -masofada joylashgan ekanligini aniqlaymiz. Buning uchun, Az o‘qida yotuvchi shunday O nuqtani topish lozimki, bu nuqta uchun aylanish o‘qi bosh inertsiya o‘qi bo‘lsin. Agar O nuqtadan Axyz - o‘qlarga parallel ravishda Ox’y’z’

o‘qlarni o‘tkazsak, O nuqtaning o‘rnini aniqlash uchun, $J_{x'z'}=\sum m_k=0$ va $J_{y'z'}=\sum m_k=0$ bo‘lishi shart.

Birinchi shart albatta bajariladi, chunki plastina uchun =0. Ikkinchi shart bajarilishi uchun $J_{yz}=\sum m_k y_k z_k$ va $=y_k$, $=z_k$-b -lar bizga ma’lum deb hisoblaymiz. U holda $J_{y'z'}=\sum m_k y_k(z_k-b)=J_{yz}-(\sum m_k y_k)b= J_{yz}-My_C b$ bo‘ladi, bu erdagi $y_C=a=l_1/3$. Shu sababli, agar $b=J_{yz}/(Ma)=l_2/4$ bo‘lsa $J_{y'z'}=0$ bo‘ladi.

Shunday qilib, zarba markazining koordinatalari $y=h=l_1/2$, $z=b=l_2/4$ ekan.

36.4 masala. Aylanayotgan AD kurok, urilma V - ga urilishidan oldin ω burchakli tezlik olgan bo‘lsa (36.12 shakl), urilmaning zarbadan keyingi tezligi va aylanish o‘qi A -ga ta’sir etgan impulsiv reaktsiya kuchi aniqlansin. Kurok va urilmaning massalari tegishlicha M va m. Kurokning A o‘qqa nisbatan inertsiya momenti J_A, tiklanish koeffitsienti k, a va b lar ma’lum deb hiisoblansin (S nuqta, kurokning massa markazi).



36.12 shakl.

E ch i sh. Zarba paytidagi kurokka va urilmaga ta’sir etgan zarba impulslarini tegishlicha $_1$ va $_2$ deb belgilaymiz. U holda $S_1=S_2=S$ va $v_B=0$ ekanligini e’tiborga olib, kurok uchun [(36.15) formulaga asosan] va urilma uchun [(36.2’) formulaga asosan] quyidagilarni olamiz

$$J_A(\Omega-\omega)=-Sb, \quad mu_B=S \qquad (a)$$

Sb -momentning ishorasi manfiy ekanligining sababi shundan iboratki, uning yo‘nalishi kurokning aylanishiga teskari yo‘nalgan. Hamda, kurokning D nuqtasi uchun $v_D=\omega b$ va $u_D=\Omega b$ (v_D-zarbadan oldingi tezlik, u_D-zarbadan keyingi tezlik) ekanligini hisobga olsak, u holda ikkita jismning to‘qnashuvidagi tiklanish koeffitsientini aniqlash uchun (36.6’)-dan foydalanib, quyidagini yozamiz:

$$u_D-u_B=-k(v_D-v_B) \quad \text{yoki} \quad \Omega b-u_B=-k\omega b.$$

Bu tenglikka (a) tenglamadan Ω va S larning qiymatlarini keltirib qo‘ysak, urilmaning zarbadan keyingi tezligini aniqlaymiz:

$$u_B=.$$

A o‘qqa ta’sir etgan $_A$ impulsiv reaktsiyani aniqlash uchun, kurok uchun (36.2) tenglamaning Ax va A u o‘qidagi proektsiyalarini aniqlaymiz. $Q_{0x}=Mv_{Cx}=M\omega a$, $Q_{1x}=Mu_{Cx}=M\Omega a$ ekanligini e’tiborga olsak:

$$Ma(\Omega-\omega)=-S+S_{Ax}, \quad S_{Ay}=0 \qquad (b)$$

Lekin (a) tenglamaga ko‘ra $S=mu_B$, $(\Omega-\omega)==mbu_B/J_A$. Ushbu qiymatlarni (b) tenglamaga qo‘ysak va u_B -ning qiymatini keltirib qo‘ysak

$$S_{Ax}=\frac{J_A = Mab}{J_A + mb^2} mb(1+k)\omega.$$

Agar, $b=J_A/(Ma)$ bo‘lsa, D nuqta zarba markazi bo‘ladi va $S_A=0$ bo‘ladi.

$$a\cdot\sin\alpha\cdot\delta\alpha+b\cdot\sin\beta\cdot\delta\beta=0 \quad \text{va} \quad \delta\alpha=-\frac{b\sin\beta}{a\cos\alpha}\delta\beta.$$

$\delta\alpha$ -ning qiymatini (b) ga qo‘ysak

$$2Q\sin\beta-R(sos\beta-ctg\alpha\cdot\sin\beta)=0$$

bundan

$$R=2Q/(ctg\beta-ctg\alpha).$$

Agar β burchak α burchakka yaqin bo‘lsa, bosim kuchi o‘ta katta miqdorga ko‘tariladi.

Tayanch so‘z va iboralar: Zarbaning elementar nazariyasi, zarba kuchi, tiklanish koeffitsienti, elastik zarba, elastik bo‘lmagan zarba, absolyut elastik zarba, absolyut elastik bo‘lmagan zarba, to‘g‘ri markaziy zarba, qiya zarba, zarbada kinetik energiyani yo‘qolishi, Karno teoremasi, zarba impulsi.

Ushbu mavzudagi muammolarni bartaraf etish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.

Bir jism ikkinchi bir jismga katta tezlik bilan urilib, o‘ta qisqa vaqt ichida o‘zining tezligini katta miqdorda o‘zgartirsa, bunday hodisani zarba hodisasi deb atalar ekan. Masalan otilgan o‘q o‘z tezligini birdaniga noldan juda katta qiymatga ko‘taradi, yoki shu o‘q birorta to‘siqqa urilib, o‘zining katta tezligini bir onda nolga tushiradi.

CHeksiz kichkina τ - (nolga yaqin) vaqt oralig‘ida, nuqtaning tezligini tugal qiymatga o‘zgarish hodisasini **zarba** deb atalar ekan.

Nuqta tezligining shunday katta tugal miqdordaa o‘zgarishiga sabachi bo‘lgan kuchning ***zarba kuchi*** deb atalar ekan

Tezlikning shunday tugal miqdordagi o‘zgarish vaqtini ***zarba vaqti*** deb atalar ekan.

Zarba kuchlari juda katta qiymatli va ularning o‘zgarish chegaralari katta bo‘lganligi sababli, jismlarning o‘zaro ta’sirlarini kuch orqali emas, balki ularning impulslari orqali ifodalalanar ekan.

Zarba nazariyasini o‘rganishda nuqta(jism)ning boshlang‘ich tezligini, ya’ni *zarbagacha bo‘lgan tezligini* - bilan, *zarbadan keyingi tezligini* - harfi bilan belgilash qabul qilingan ekan.

Zarbasiz bo‘lgan kuchlar (masalan, og‘irlik kuchi)ni, zarba vaqtida hisobga olinmas ekan.

Zarba vaqti oralig‘ida nuqtaning bosib o‘tgan yo‘li, o‘ta kichkina qiymat bo‘lganligi sababli, u hisobga olinmas, ya’ni nuqta zarba vaqtida qo‘zg‘almas deb hisoblanar ekan.

Jismning qo‘zg‘almas tekislikka bo‘lgan to‘g‘ri zarbasidagi, zarbadan keyingi tezlikning modulini, zarbadan oldingi tezlik moduliga bo‘lgan nisbatiga tiklanish koeffitsienti deb atalib, uni k harfi bilan belgilash qabul qilingan ekan.

Agar massa markazining tezlik vektorini yo‘nalishi plita(to‘siq)ning normali n - bo‘ylab yo‘nalgan bo‘lsa, to‘g‘ri zarba, aks holda esa qiya zarba deb ataladi.

Agar k=0 bo‘lsa absolyut plastik, agar k=1 bo‘lsa absolyut elastik zarba deb atalar ekan.

Absolyut elastik bo‘lmagan zarbada sistemaning yo‘qotgan kinetik energiyasi, to‘qnashgan har bir jismning yo‘qotgan tezliklariga teng bo‘lgan o‘zgarmas tezlik bilan qilgan harakatlaridagi kinetik energiyalarning yig‘indisiga teng ekan. Ushbu teoremani Karno teoremasi deb atalar ekan. Ushbu tenglikning koordinata o‘qlardagi proektsiyasi (28.11) formula orqali aniqlanar ekan.

Takrorlash uchun savollar:

Qanday mexanik hodisani zarba hodisasi deb ataladi?

Zarbaning elementar nazariyasini asosiy qonunini yozib bering?

Zarba kuchi deb qanday kuchga aytiladi?

Zarba vaqtida nuqtaning bosib o‘tgan yo‘li qanday hisoblanadi?

Zarba impulsi deb nimaga aytiladi?

Absolyut elastik zarba deb qanday zarbaga aytiladi?

Absolyut plastik zarba deb qanday zarbaga aytiladi?

Markaziy to‘g‘ri zarba deb qanday zarbaga aytiladi?

Qiya zarba deb qanday zarbaga aytiladi?

Zarbadagi tiklanish koeffitsenti qanday anqlanadi?

Zarba vaqtida yo‘qotilgan kinetik energiya qanday aniqlanadi?
Zarba nazariyasining umumiy teoremalari nimalardan iborat?
Zarba markazi deb qanday tushunchaga aytiladi?

Mavzuni mustahkam o‘zlashtirish uchun 36 ilovadagi masalalarni mustaqil echishni tavsiya qilamiz.

A D A B I Y O T L A R.

П.Шохайдарова, Ш.Шозиётов, Ж.Зоиров, Назарий механика. Тошкент - 1982й.
Т.Р.Рашидов, Ш.Шозиётов, К.Б.Мўминов, Назарий механика асослари. Тошкент - 1990й.
Назарий механикадан ҳисоб-график ишларини бажарий бўйича услубий Қўлланма. 1 - 2 Қисмлар. Фарғона, 1994й.
И.В. Мешчерский. Назарий механикадан масалалар тўплами. Тошкент, 1989й.
Азиз Қориев, «Назарий механикадан масалалар ечиш, II Қисм, Тошкент, «Ўқитувчи», 1989 й.

Қўшимча адабиётлар.

С.М.Тарг. Краткий курс теоретической механики. Москва, Высщая школа, 1998 г.
В.В. Добронравов, Н.Н.Никитин, Курс теоретической механики, Москва, Высщая школа, 1983 г.
Н.В.Бутенин, и др. Курс теоретической механики, т.1,2. Москва, Высщая школа, 1987 г.
М.И.Бать и др. Теоретическая механика в примерах и задачах, т.2. Москва, Высщая школа, 1989 г.
James H. Williams, Fundamentals of Alied Dynamics. USA, New York, 1996.
Ferdinand Beer, E. Russel Johnston, “Vector Mechanics for Engineers”. New York, 1988.

M U N D A R I J A

19 – Ma’ruza 5
19.1§ Asosiy tushunchalar va ifodalar 5
19.2§ Dinamika qonunlari. Moddiy nuqta dinamikasining masalalari. 7
19.3§ O‘lchov birliklari. 11
19.4§ Kuchlarning asosiy ko‘rinishlari 13
19.5§ Moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamalari. 15
19.6§. Dinamikaning birinchi masalasini echish (harakat qonuniga binoan kuchlarni aniqlash). 17
20 – Ma’ruza 21
20.1§. Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakatida, dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini echish. 21
20.2§ Masalalar echish tartibi 24
20.3§* Muhit (havo) qarshiligi ostidagi jismning pastga tushishi 31
20.4§ Nuqtaning egri chiziqli harakatida dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini echish 34
21 – Ma’ruza 41
21.1§ Nuqtaning harakat miqdori. Kuch impulsi 41
21.2§ Moddiy nuqta harakat miqdorining o‘zgarish teoremasi 43
21.3§ Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o‘zgarishi haqidagi teorema (Momentlar teoremasi) 46
21.4§ Markaziy kuch ta’siridagi harakat. Yuzalar qonuni 48
21.5§ Kuchning bajargan ishi. Quvvat 50
22 – Ma’ruza 56
22.1§. Ishni hisoblashga oid misollar. 56
22.2§. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema. 60
23 – Ma’ruza 70
23.1§ Moddiy nuqtaning erkinmas harakati 70
23.2§ Moddiy nuqtaning nisbiy harakati 74
23.3§. Erning aylanishini jismlarning muvozanat holatiga va ularning harakatiga ta’siri. 79
23.4§*. Erning aylanishini pastga erkin tushib kelayotgan nuqtaning og‘ishiga ta’siri. 82
23.5§ Vaznsizlik haqida tushuncha. Hududga (joyga) bog‘liq holdagi hisob sistemasi 85
24 – Ma’ruza 94
24.1§ Muhit qarshiligisiz erkin tebranma harakat 94
24.2§ Yopishqoq muhit qarshiligi ta’siridagi erkin tebranishlar (So‘nuvchi tebranishlar). 102
25 – Ma’ruza 108
25.1§ Majburiy tebranishlar. Rezonans 108
26 – Ma’ruza 121
26.1§ Mexanik sistema. Tashqi va ichki kuchlar 121
26.2§ Sistemaning massasi. Massalar markazi. 122
26.3§ Mexanik sistema harakatining differentsial tenglamalari 124
26.4§ Massalar markazining harakati haqidagi teorema. 126
26.5§ Massalar markazining harakatini saqlanish qonuni 128
26.6§ Masalalar echish. 130
27 – Ma’ruza 137
27.1§ O‘qqa nisbatan inertsiya momenti. Inertsiya radiusi. 137
27.2§ Parallel o‘qlarga nisbatan inertsiya momentlari. Gyuygens teoremasi 141
27.3§* Markazdan qochma inertsiya momentlari. Jismning bosh inertsiya o‘qlari haqida tushuncha 143
27.4§* Ixtiyoriy yo‘nalgan o‘qqa nisbatan inertsiya momenti 145

28 – Ma’ruza 150
28.1§ Mexanik sistemaning harakat miqdori 150
Bundan oxirgi natijani olamiz, ya’ni 151
28.2§ Harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema 151
28.3§ Harakat miqdorining saqlanish qonuni 153
28.4§ Mexanik sistema harakat miqdorining bosh momenti 154
28.5§ Sistema harakat miqdorining bosh momentini o‘zgarishi haqidagi teorema. (Momentlar teoremasi) 156
28.6§ Harakat miqdori bosh momentining saqlanish qonuni 158
28.7§ Masalalar echish. 160
28.8§ Mexanik sistemaning muvozanat tenglamasi 164
29 – Ma’ruza 167
29.1§ Mexanik sistemaning kinetik energiyasi 168
29.2§ Ishni hisoblashning ayrim hollari 173
29.3§ Sistema kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema 175
30 – Ma’ruza 187
30.1§ Potentsial kuch maydoni va kuch funktsiyasi 187
30.2§ Potentsial energiya. Mexanik energiyaning saqlanish qonuni 192
31 Ma’ruza 197
31.1§. Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakati 197
31.2§. Fizik mayatnik. Inertsiya momentlarini tajriba orqali aniqlash. 201
31.3§. Qattiq jismning tekislikka parallel harakati. 204
32 Ma’ruza 214
32.1§. Nuqta va mexanik sistema uchun Dalamber printsipi. 214
32.2§. Inertsiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti. 217
32.3§. Masalalar echish. 219
32.4§*. Aylanayotgan jismning o‘qiga ta’sir etayotgan dinamik reaktsiyalar. Aylanayotgan jismlarni muvozanatlash. 225
33 Ma’ruza 232
33.1§. Bog‘lanishlarning klassifikatsiyasi. 232
33.2§. Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar. Erkinlik darajasi. 234
33.3§. Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar printsipi. 237
33.4§. Masalalar echish. 239
34 Ma’ruza 248
34.1§. Dinamikaning umumiy tenglamasi. 248
34.2§. Umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar. 251
34.3§. Umumlashgan kuchlar. 253
34.4§. Sistemaning umumlashgan koordinatalaridagi muvozanat shartlari. 258
34.5§. Lagranj tenglamasi. 259
34.6§. Masalalar echish. 263
35-Ma’ruza 272
35.1§. Turg‘un muvozanat haqida tushuncha. 272
35.2§. Erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan sistemaning 275
kichik erkin tebranishlari. 275
35.3§. Erkinlik darajasi birga teng bo‘lgan sistemaning majburiy va so‘nuvchi kichik tebranishlari. 279
35.4§. Erkinlik darajasi ikkita bo‘lgan mexanik sistemaning kichik erkin tebranishlari. 281
36 Ma’ruza 287
36.1§. Zarba nazariyasining asosiy tenglamasi. 287
36.2§. Zarba nazariyasining asosiy teoremalari. 289
36.3§. Zarbadagi tiklanish koeffitsienti. 290

36.4§. Jismning qo‘zg‘almas to‘siqqa urilishidagi zarbasi. 292
36.5§. Ikkita jasmning markaziy to‘g‘ri zarbasi 294
(sharlar zarbasi). 294
36.6§. Ikkita jismning elastik bo‘lmagan zarbasida kinetik 296
energiyaning yo‘qolishi. Karno teoremasi. 296
36.7§*. Aylanayotgan jismga ko‘rsatilgan zarba. Zarba markazi. 298
A D A B I Y O T L A R. 307

МУАЛЛИФ ҲАҚИДА МАЪЛУМОТ

Сабиржанов Талибжан Мамасалиевич-

1956 йили 25 июлда туғилган.1978 йили Ўзбекистон Миллий Университетининг “Амалий математика ва механика ” факультетининг “Механика ” мутахассислигини битириб,йўлланма бўйича Фарғона политехника институтига ишга келди.1986 йили Москва шаҳридаги “Марказий қурилиш конструкциялари илмий тадқиқот институти ” аспирантурасига ўқишга кириб , 1990 йили “Виброҳимоя воситаларининг резонанс соҳалардаги динамик ҳисоби” мавзусида номзодлик диссертациясини ёқлади.35 йил мобайнида Фарғона политехника институти “Амалий механика ва материаллар қаршилиги ” кафедрасида ассистент, катта ўқитувчи ,доцент ва 2010 йилдан кафедра мудири бўлиб ишлаб келмоқда.Т.М.Сабиржанов битта дарслик ,ўттиздан ортиқ илмий маъқола ва йигирмадан ортиқ услубий қўлланмалар муаллифи.Ҳозирда муаллиф “Шамол энергиясини электр энергияга айлантириб берувчи вертикал ўқли турбинасини яратиш” мавзусида илмий ишларга раҳбарлик қилмоқда.Муаллиф кўп йиллар мобайнида “Назарий механика ” фанидан талабаларга сабоқ бериб келади.Унинг доцент С.И.Исмоилов билан биргаликда “Назарий механика фанидан қисқа масалалар тўплами”(О.Э.Кепе муаллиф) китобининг ўзбек тилида лотин имлосидаги таржима дарслик китоби 2008 йили Ўзбекистон Республикаси ОваЎМТВ томонидан рухсат этилди ва “Янги аср авлоди ” нашриётида чоп этилди. Т.М.Сабиржанов талабаларга билим беришда ахборот ва педагогик технологияларнинг долзарб натижаларидан фойдаланади.Ёш педагогларнинг меҳрибон устози ҳисобланади.