

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

Qo‘lyozma huquqida

**Mavzu: Elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun to‘rt o‘lchovli fazoda
chegaralanmagan sohada Koshi masalasi**

**5A130101 «Matematika» mutaxassisligi
Matematika bo‘yicha magistr akademik darajasini olish uchun**

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

**Ilmiy rahbar: dots. X.X.Ro‘zimuradov
Bajaruvchi: H.SH.Boliqulov**

**“Matematik fizika va funksional
analiz” kafedrasi mudiri**

dots. A.M.Xalxo‘jayev

SAMARQAND-2014

Mundarija

Kirish.....	3
I BOB. 1-§.Ko'phadlar va affin fazo.....	7
2-§.Affin ko'pxilliklar.....	12
3-§.Affin ko'pxilliklarni parametrlash.....	21
4-§.Ideallar.....	35
5-§.Bir o'zgaruvchili ko'phadlar.....	43
I bob uchun xulosa.....	55
II BOB.Ko'pxilliklarda Berilgan polinomial va ratsional funksiyalar.....	56
1-§,Polinomial akslantirishlar.....	56
2-§,Polinomial halqalar faktor halqasi.....	63
II bob uchun xulosa.....	68
III BOB.Maple tizimining ideallarga oid masalalarga qo'llanish.....	69
1-§.Maple tizimi to'g'risida umumiy ma'lumotlar.....	69
2-§.Maple tizimida polinomial ideallarga oid masalalar.....	73
Xulosa.....	89
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	91

KIRISH

Mavzuning dolzarbligi: Ma'lumki, zamonaviy matematikaning barcha asosiy masalalari ko'phadlar, ko'pxilliklar tilida bayon etiladi. Ko'phadlar xalqasi ideallariga oid masalalarga kompyuter algebrasi tizimlarining tadbirlari va olingan natijalarning yaqqol va ravshan namoyon bo'lishi endilikda ko'pgina matematiklarni qiziqtirib, e'tiborini jalb qilib kelmoqda.

Bunday kompyuter tizimlarini matematika faniga kirib kelganiga uncha ko'p bo'lmasada, olimlar tomonidan unga bo'lgan qiziqish, talab va ehtiyoj tez suratlarda o'smoqda. Hozirgi vaqtda matematikada erishilayotgan asosiy natijalar ko'pxilliklar sohasiga oid bo'lib qolmoqda. Matematikaning asosiy masalalarini ko'pxilliklar tilida ifodalash, ularni parametrizatsiyasini amalga oshirish va bu masalalarni kompyuter tiliga o'girish zamon talabi bo'lib qolmoqda. Ushbu magistrlik ishi ko'pxilliklar va ularning ideallariga oid masalalarga kompyuter algebrasi tizimlarini tatbiq etishga bag'ishlangan.

Masalaning qo'yilishi: Ushbu magistrlik dissertatsiya ishi affin ko'pxilliklarida ideallarni tavsiflash masalasiga bag'ishlangan. Affin ko'pxillik nuqtalarini tavsiflash, affin ko'pxillikni parametrlash, ideallarning affin ko'pxilliklar bilan qanday bog'liq ekanligi tadqiq etish, ideallar tilida affin geometriyasining hisoblash masalalarini qanday ifodalanishi ko'rsatish, polinomial akslantirishlarni o'rganish natijasida ko'pxillik haqida qanday ma'lumotlarni olish mumkinligi ko'rsatish kabi masalalar qarab chiqilgan. Maple 12 dasturida ideallarga oid masalalarni yechish uchun paketlar, parametrlar va buyruqlarni o'rganish, ularning har biriga ko'plab misollar ishlab chiqish rejalashtirilgan.

Ishning ilmiy tadqiqot metodlari: Ishda chiziqli algebra, ko'phadlar nazariyasi, ko'pxilliklar nazariyasi, parametrizatsiya, ideallar nazariyasi, algoritmlar, kompyuter algebrasi metodlari qo'llanilgan.

Ishning yangilik darajasi: Ishda ideallar nazariyasiga oid masalalarga kompyuter algebrasi tizimlari qo'llanilgan. Ushbu masalalarga Maple 12 tizimining paketlari, buyruqlarini tatbiqlari o'rganilgan.

Ishning nazariy va amaliy ahamiyati: Ish fundamental va amaliy xarakterga ega bo'lib, undan ideallar nazariyasining masalalarini tadqiq etishda foydalanish mumkin.

Mavzuning ishlab chiqarishga bog'liqligi: Ish nazariy ahamiyatga ega. Shu bilan birga kompyuter algebrasidan maxsus kurslarda ishning natijalaridan foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi: Ish kirish qismi, uchta bob, xulosa, va adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, 91 bet kompyuter matnidan iborat.

Ishning I bobida $V(f_1, \dots, f_s)$ affin ko'pxillik nuqtalarini tavsiflash masalasini qaralgan. Bu masalani $f_1 = \dots = f_s = 0$ polinomial tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini tavsiflash masalasi deb qayta bayon etish mumkin. Agar yechimlar chekli bo'lsa, u holda bizning maqsadimiz-ularni sanab o'tishdan iborat. Agar ular cheksiz ko'p bo'lsa, nima qilish kerak? Bu bobda biz affin ko'pxillikni parametrlash tushunchasini kiritildi va parametrlashga doir ko'plab misollar qarab chiqildi.

Shu bobning maqsadi ideal tushunchasining tabiiy tushuncha ekanligini, ideallarning affin ko'pxilliklar bilan qanday bog'liq ekanligidan iborat bo'ldi. Ideallar tilida affin geometriyasining hisoblash masalalarini qanday ifodalanishi ko'rsatildi.

Shu bilan birga biz bu bobda bir o'zgaruvchili ko'phadlarni bo'lish algoritmini qaradik. Bu oddiy algoritmni qo'llash kuchli natijalar beradi. Masalan, uning yordamida $k[x]$ dagi ideallar strukturasi aniqlandi va eng katta umumiy bo'luvchi tushunchasini tadqiq etildi. Bu yerda qaralayotgan usullar ishda keltirilgan ko'pgina masalalarni yechishga qo'llanildi.

Ishning ikkinchi bobida polinomial akslantirishlarni o'rganib turib, ko'pxillik haqida qanday ma'lumotlarni olish mumkinligi ko'rsatiladi. Masalan, $V \subset C^3$ ko'pxillik quyidagi uchta kvadratiklarning kelishmasi sifatida aniqlangan:

$$x^2 + 2xz + 2y^2 + 3y = 0$$

$$xy + 2x + z = 0$$

$$xz + y^2 + 2y = 0$$

(4)

V ko'pxillikni o'rganish maqsadida $y > z > x$ bo'yicha tartiblangan lex – tartib (4) ko'phadlar orqali hosil qilingan idealning Gryobner bazisi topilgan. Bu bazis quyidagi ikki polinomdan iborat ekanligi ko'rsatilgan

$$g_1 = y - x^2$$

$$g_2 = z + x^3 + 2x$$

Shunday qilib, affin ko'pxilliklarda polinomial funksiyalarni o'rganish natijasida uni keltirilganlik va keltirilmaganlik haqida xulosa chiqarish mumkin ekan. Bundan tashqari $k[V]$ halqaning strukturasi ko'pxilliklarni klassifikatsiya qilish bo'yicha ma'lumotni o'zida saqlaydi.

Ishning uchinchi bobida kompyuter algebrasi tizimlarining ideallarga oid masalalarga tatbiqlari qaralgan.

Bu bobda Maple 12 dasturida ideallarga oid masalalarni yechish uchun paketlar, parametrlar va buyruqlarni keltirilgan. Ularning har biriga ko'plab misollar ham keltirilgan. Qarab chiqilgan masala va misollarning to'liq yechimlari ishlab chiqilgan.

Olingan natijalarning qisqacha bayoni: Ushbu magistrlik ishida:

Qanday affin ko'pxillik ratsional parametrlashga ega bo'lishi;

Affin ko'pxillik parametrik ifoda bilan berilgan bo'lsa, uni aniqlovchi tenglamalrni topish mumkinligi (misollarda);

Affin ko'pxilliklarining robot texnikasiga tadbirlaridan bir misol;

Be'ze kubigining parametric ifodasini tadqiq etish;

- (Idealni tasvirlash). $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ideallardan biri chekli hosil qilinuvchanligiga, ya'ni ba'zi bir $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ lar uchun $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ bo'laishiga;

- (Idealga tegishlilik). $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ko'phadning $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealga tegishlilik masalasini yechuvchi algoritmgaga;

- (Nollar haqidagi teorema) $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ va $I(V(f_1, \dots, f_s))$ lar orasidagi aniq bog'lanishlarni topishga kompyuter algebrasi tizimlarining qo'llanilishi qarab chiqilgan.

I-BOB

KO'PHADLAR VA AFFIN KO'PXILLIKLAR

Bu bobda ba'zi asosiy mavzular kiritiladi. Geometriya deganda ko'phadlar bilan beriladigan egri chiziqlar va sirtlardan (hamda yuqori o'lchamdagi obektlardan) iborat affin ko'pxilliklar geometriyasini tushunamiz. Affin ko'pxilliklar nazariyasini tushunish algebraning ba'zi bo'limlarini xususan, $k[x_1, \dots, x_n]$ ko'phadlar halqalarida ideallar nazariyasidan bilimlarni talab etadi. Nihoyat algoritmlar rolini ko'rsatish uchun bir o'zgaruvchili ko'phadlarni qaraymiz.

1-§. Ko'phadlar va affin fazo

Algebra va geometriya bilan aloqani o'rnatish uchun biror maydondan olingan koeffitsientlarga ega ko'phadlarni qaraymiz.

Maydon tushunchasining muhimligining sabablaridan biri chiziqli algebraning ta'riflari va tasdiqlari ixtiyoriy maydon ustida o'rinli bo'ladi [1] : agar bizning chiziqli algebrada R yoki C ustida qurilgan bo'lsa, u holda ko'pgina teoremlarni ixtiyoriy k maydon uchun ham qo'llash mumkin. Kelgusida biz asosan quyidagi maydonlar bilan ishlaymiz:

- Q ratsional sonlar maydoni: kompyuter algebrasining hisoblashlari shu maydonda bajariladi;
- R haqiqiy sonlar maydoni: bu maydondan egri chiziq va sirtlarni yasash uchun foydalaniladi;
- C kompleks sonlar maydoni: ko'pgina teoremlar shu maydonda o'rinli bo'ladi;

Ba'zida boshqa maydonlarga ham duch kelamiz, masalan, ratsional funksiyalar maydoni (u keyinchalik aniqlanadi). Bundan tashqari chekli maydonlar nazariyasi ham mavjud.

Endi biz ko'phad ta'rifini berishimiz mumkin. Biz k ixtiyoriy maydondagi koeffitsientlarga ega bo'lgan n ta o'zgaruvchili $x_1, \dots, x_n$ larning ko'phadlarini qaraymiz. Avvalo monom ta'rifini beramiz.

1-ta'rif [1]: $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning monomi deb,

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

ko'rinishdagi ko'paytmaga aytiladi, bu yerda $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ daraja ko'rsatkichlari nomanfiy butun sonlar. Monomning to'liq darajasi deb $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ yig'indiga aytiladi. Monomlar uchun quyidagi soddalashtirilgan belgilashlardan foydalanamiz. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - n ta nomanfiy butun sonlar jamlanmasi bo'lganda

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

deb olamiz. Agar $\alpha = (0, \dots, 0)$ bo'lsa, u holda $x^\alpha = 1$. $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ orqali x^α monomning to'liq darajasini belgilaymiz.

2-ta'rif [1]: k maydonda koeffitsientlarga ega $x_1, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning f ko'phadi deb monomlarning chekli chiziqli kombinatsiyasiga aytiladi. f ko'phad

$$f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad a_{\alpha} \in k,$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda yig'indi $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jamlanmalar chekli to'plami bo'yicha olinadi. koeffitsientlari k dan bo'lgan $x_1, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning barcha ko'phadlari to'plami $k[x_1, \dots, x_n]$ deb belgilanadi.

Kam sonidagi o'zgaruvchilarga ega ko'phadlar bilan ishlaganda biz indekslarsiz ish ko'ramiz. Masalan, bir, ikki yoki uch o'zgaruvchi ko'phadlar $k[x], k[x, y], k[x, y, z]$ to'plamlarga tegishli bo'ladi. Masalan,

$$f = 2x^3y^2z + \frac{3}{2}y^3z^3 - 3xyz + y^2$$

ko'phad $Q[x, y, z]$ dagi ko'phad hisoblanadi. Odatda, biz ko'phadlarni belgilash uchun f, g, h, p, q, r harflaridan foydalanamiz.

Ko'phadlar bilan ishlaganda quyidagi atamalardan foydalanamiz.

3-ta'rif [1]: $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in k[x_1, \dots, x_n]$ *dagi ko'phad bo'lsa,*

(i) $a_{\alpha} x^{\alpha}$ *monomning koeffitsiyenti deb ataladi.*

(ii) *agar $a_{\alpha} \neq 0$ bo'lsa, $a_{\alpha} x^{\alpha} - f$ ko'phadning hadi deb ataladi*

(iii) $\deg(f)$ *deb belgilanadigan f ko'phadning to'liq darajasi deb a_{α} nol bo'lmagan koeffitsientlarga ega barcha monomlar bo'yicha $|\alpha|$ darajalarning maksimumiga aytiladi.*

Masalan, $f = 2x^3y^2z + \frac{3}{2}y^3z^3 - 3xyz + y^2$ ko'phad to'rtta hadga ega va uning to'liq darajasi 6 ga teng. f maksimal darajali ikkita hadga ega, buning esa bir o'zgaruvchili ko'phad holida bo'lishi mumkin emas.

Ikkita ko'phadning yig'indisi va ko'paytmasi ko'phad bo'ladi. f ko'phad g ko'phadga bo'linadi deyiladimiz, agar $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ ko'phad uchun $g = fh$ tenglik o'rinli bo'lsa.

$k[x_1, \dots, x_n]$ to'plamda qo'shish va ko'paytirish amallari ko'paytirish bo'yicha teskari elementning mavjudligi aksiomasidan tashqari maydonning barcha aksiomalarini qanoatlantirishini oson isbotlash mumkin (masalan, $\frac{1}{x_1}$ ko'phad emas). Bunday tuzilma komutativ xalqa deb ataladi va shu sababga ko'ra $k[x_1, \dots, x_n]$ ni ko'phadlar halqasi yoki polynomial halqa deb ataymiz.

4-ta'rif [2]: k maydon va n natural son berilgan bo'lsin, u holda k ustidagi n -o'lchovli *affin fazo deb*

$$k^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in k\}.$$

to'plamga aytiladi. Masalan, $k = \mathbb{R}$ bo'lsin. $\mathbb{R}^n$ fazo - matematik analiz va chiziqli algebra kurslaridan ma'lum obekt bo'lsin. $k^1 = k$ - affin to'g'ri chiziq, k^2 - affin tekislik deb ataladi.

Endi ko'phadlar va affin fazolar orasida bog'lanishni qaraymiz. Bu yerda asosiy fakt, $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in k[x_1, \dots, x_n]$ quyidagicha aniqlangan

$$f : k^n \rightarrow k,$$

funksiyani beradi. $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ bo'lsin. f ni aniqlovchi formulada har bir x_i ni a_i ga almashtiramiz. Koeffitsientlar k ga tegishli bo'lganligi uchun, bu amal $f(a_1, \dots, a_n) \in k$ elementni beradi. Ko'phadni funksiya sifatida qarash imkoniyati algebra va geometriya asosidagi bog'lanishni aniqlaydi.

Ko'phadning ikkilanma xarakteri ba'zi natijalarga olib keladi. Masalan “ $f = 0$ to'g'rimi” degan savol ikkita talqinga ega: “ f nol ko'phad bo'ladimi?”, ya'ni barcha a_α koeffitsientlar nolga teng, yoki “ f nol funksiya bo'ladimi?”, ya'ni barcha $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ lar uchun $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ to'g'rimi. Lekin bu ikkita tasdiq umumiy holda teng kuchli. Masalan, 0 va 1 ikkita elementdan iborat to'plamni qaraymiz. Mashqlarda ko'ramizki, bu to'plamni $1+1=0$ bo'lgan maydon qilish mumkin. Bu maydon odatda F_2 deb belgilanadi. Endi $x^2 - x = x(x-1) \in F_2[x]$ ko'phadni qaraymiz. Bu ko'phad 0 va 1 nuqtada nolga aylangani uchun u F_2^1 affin fazoda nol funksiya bo'ladigan nol bo'lmagan ko'phadga misolni beradi.

Lekin agar k cheksiz bo'lsa, hech qanday muammo paydo bo'lmaydi.

5-Lemma. k – cheksiz maydon va $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. U holda $k[x_1, \dots, x_n]$ da $f = 0$ bo'ladi. Faqat va faqat $f : k^n \rightarrow k$ nol funksiya iborat bo'lsa.

Isbot. Bir tomondan tasdiq ravshan, chunki nol ko'phad nol funksiyaning aniqlaydi. Teskari tasdiqni qaraymiz. $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ barcha $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ larda o'rinli bo'lsa, u holda f – nol ko'phad. Isbotni o'zgaruvchilar soni n bo'yicha induksiya bilan foydalanib olib boramiz.

$n=1$ bo'lsin. Ma'lumki $k[x]$ dagi m – darajali nol ko'phad m tadan ziyod bo'lmagan turli ildizlarga ega- $f \in k[x]$ va barcha $a \in k$ uchun $f(a) = 0$ bo'lsin. x cheksiz qiymatlar qabul qilganligi uchun, f cheksiz ko'p ildizlarga ega, demak, f – nol ko'phad.

Endi teskari tasdiq $n-1$ uchun o'rinli bo'lsin va $f \in [x_1, \dots, x_n] - k^n$ dagi barcha nuqtalarda nolga aylanuvchi ko'phad bo'lsin. x_n o'zgaruvchi darajalari bo'yicha guruhlab, f ni

$$f = \sum_{i=0}^N g_i(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^i$$

ko'rinishda yozamiz, bu yerda $g_i \in [x_1, \dots, x_{n-1}]$.

Biz har bir g_i ko'phad $n-1$ o'zgaruvchili ko'phad ekanligini ko'rsatamiz, bundan $f - k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ko'phad ekanligi kelib chiqadi.

Agar $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$ ni tayinlasak, u holda bir o'zgaruvchili $f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n) \in k[x_n]$ ko'phadni hosil qilamiz. Farazga ko'ra f har bir $a_n \in k$ nuqtada nolga aylanadi. Demak, uning koeffitsientlari nolga teng, ya'ni $g_i(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0$ barcha i larda $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$ da ixtiyoriy tanlangani uchun, har bir $g_i \in k[x_1, \dots, x_{n-1}] - k^{n-1}$ da nol funksiya bo'ladi. U holda induksiya faraziga ko'ra har bir $g_i - k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ da nol ko'phaddan iborat. Bundan $f - k[x_1, \dots, x_n]$ da nol ko'phad ekanligi kelib chiqadi. Tasdiq isbotlandi.

5-lemmada " $k[x_1, \dots, x_n]$ da $f = 0$ " degan mulohaza f nol ko'phad ekanligini, ya'ni uning barcha koeffitsientlari nolga tengligini bildiradi. Shunday qilib, 0 simvol ham nol elementni, ham $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi nol ko'phadni bildiradi.

Natija sifatida ikkita polinom teng bo'ladi faqat va faqat agar affin fazoda ular bitta funksiyaning aniqqlas.

6-Natija. k - cheksiz maydon va $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. U holda $k[x_1, \dots, x_n]$ da $f = g$ tenglik faqat va faqat $f: k^n \rightarrow k$ va $g: k^n \rightarrow k$ funksiyalar teng bo'lgandagina bajariladi.

Isbot. Bir tomondan tasdiq trivial. Endi $f, g \in k[x_1, \dots, x_n] - k^n$ da bitta funksiyaning bersin. U holda $f - g$ ko'phad k^n dagi barcha nuqtalarda nolga aylanadi, ya'ni 5-lemmaga ko'ra $f - g$ ko'phad nol ko'phaddan iborat. Demak, $k[x_1, \dots, x_n]$ da $f = g$.

Nihoyat, C kompleks sonlar maydoni ustida ko'phadlarning quyidagi maxsus xossasini ta'kidlab o'tamiz.

7-Teorema[3]. *Har bir o'zgarmas bo'lmagan $f \in C[x]$ ko'phad C da ildizga ega.*

Isbot. Bu tasdiq algebraning asosiy teoremasi deb ataladi va uning isbotini kompleks analiz bo'yicha ixtiyoriy darslikdan topish mumkin.

k maydon algebraik yopiq deyiladi, agar $k[x]$ dagi ixtiyoriy o'zgarmas bo'lmagan ko'phad k da ildizga ega bo'lsa. Masalan, R maydon algebraik yopiq emas (x^2+1 ko'phad haqiqiy ildizlarga ega emas) shu bilan birga C algebraik yopiq (yuqoridagi teoremaga ko'ra). 7- teoremaning umumlashmasi bo'lgan nollar haqidagi Gilbert teoremasi ham isbotlangan.

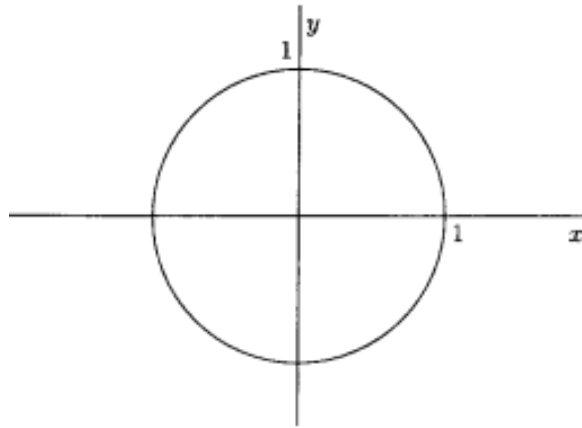
2-§. Affin ko'pxilliklar

1-Ta'rif [2]: k – biror maydon, $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ko'phadlar bo'lsin.

$V(f_1, \dots, f_n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0\}$ deb olamiz. $V(f_1, \dots, f_n) - f_1, \dots, f_n$ ko'phadlar bilan aniqlangan to'plam affin ko'pxillik deb ataladi.

Boshqacha aytganda, $V(f_1, \dots, f_n) \subset k^n$ affin ko'pxillik - $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_s(x_1, \dots, x_n) = 0$ tenglamalar sistemalari yechimlar to'plamidan iborat. V, W va boshqa harflardan affin ko'pxilliklarni belgilash uchun foydalanamiz. $k = R$ bo'lgan holni qaraymiz, bu bizga kompyuter algebrasi tizimlarida ko'pxilliklarning grafiklarini tasvirlash imkonini beradi.

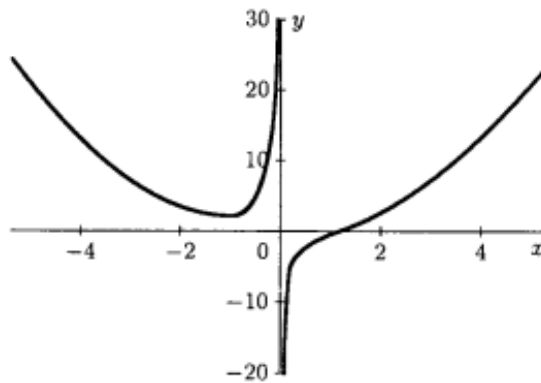
Markazi koordinata boshida bo'lgan radiusi 1 ga teng aylanadan iborat R^2 tekislikdagi $V(x^2 + y^2 - 1)$ ko'pxillikdan boshlaymiz:



Analitik geometriya kursida o'rganiladigan konik kesimlar (aylana, ellips, parabola, va giperbola) affin ko'pxilliklar hisoblanadi.

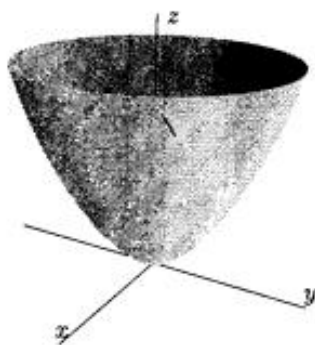
Shunga o'xshash, ko'phadlar grafiklari ham affin ko'pxilliklar bo'ladi. ($y = f(x)$ funksiya grafigi $V(y - f(x))$ affin ko'pxillikdan iborat).

Bu unchalik ravshan bo'lmasada, ratsional funksiyalar grafiklari ham affin ko'pxilliklardan iborat. Masalan, $y = \frac{x^3 - 1}{x}$ funksiya grafigini qaraymiz.

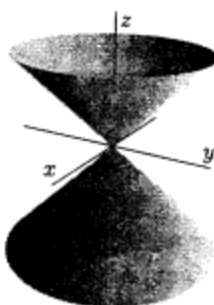


Osongina ko'rish mumkinki, bu $V(xy - x^3 + 1)$ affin ko'pxillikdan iborat.

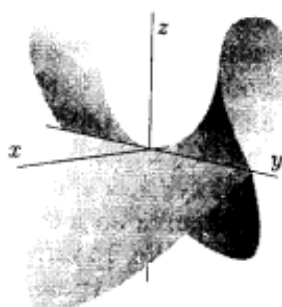
Endi uch o'lchovli R^3 fazoga o'tamiz. $V(z - x^2 - y^2)$ aylanish paraboloidi affin ko'pxillikdan iborat, u z o'qi atrofida $z = x^2$ parabolaning aylanishidan hosil bo'ladi (bu fakt qutb kordinatalarga o'tish yordamida isbotlanadi). Bu ko'pxillik quyidagi ko'rinishda bo'ladi.



$V(z^2 - x^2 - y^2)$ konusdan iborat.

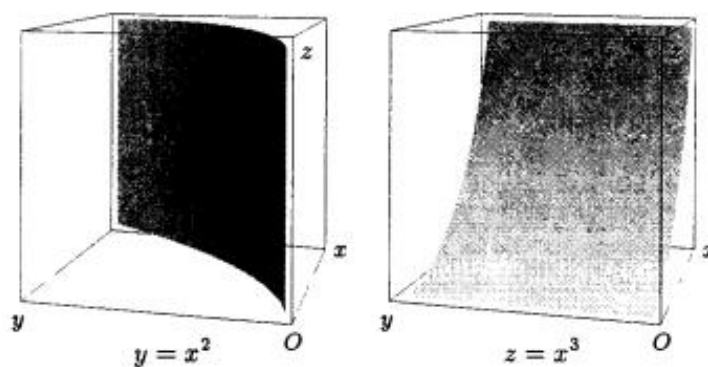


$V(x^2 - y^2 z^2 + z^3)$ ko'pxillik esa murakkabroq sirt hisoblanadi.

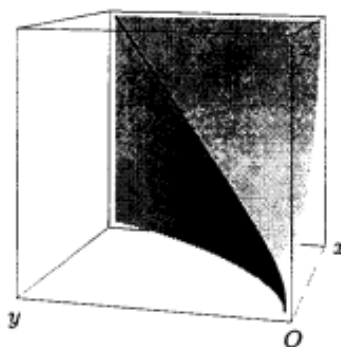


Oxirgi ikkita misoldagi sirtlar hamma joyda silliq emas: konus koordinata boshida uchga ega, oxirgi misolda esa y o'qi sirtning o'z-o'zini kesish chizig'i bo'ladi.

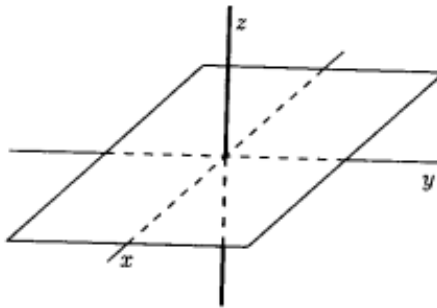
R^3 da egri chiziqqa qiziqarli misol bo'lib o'ralgan kubik- $V(y - x^2, z - x^3)$ ko'pxillik hisoblanadi. Soddalik uchun egri chiziqning birinchi oktantdagi qismini yasaylik. Dastlab $y = x^2$ va $z = x^3$ sirlarni alohida tasvirlaymiz.



Ularning kesishmasi o'ralgan kubik bo'ladi:



R^2 da bitta tenglamaga ega bo'lgan egri chiziq - bir o'lchovli obektni olamiz. R^3 da shunga o'xshash holat R^3 dagi bir tenglama ikki o'lcholi sirtini beradi. Ya'ni o'lchov bir birlikka kamayadi. Endi o'ralgan kubikni qaraymiz: R^3 da ikkita tenglama egri chiziqni beradi, ya'ni o'lchov ikkiga kamayadi. Har bir tenglama qo'shimcha shartni bergani uchun, intuitsiya shuni ko'rsatadiki, har bitta qo'shimcha tenglamani kiritish o'lchovni birlikka kamaytirish lozim. Demak, R^4 da ikkita tenglama sirtini aniqlashi lozim. Afsuski, o'lchov tushunchasi qaralgan misollardagiga nisbatan murakkabroqdir. Masalan, $V(xz, yz)$ ko'pxillikni qaraymiz. Oson tekshirish mumkinki, $xz = yz = 0$ tenglamalar (x, y) tekislik va z o'qining birlashmasini beradi.



Shunday qilib, ko'pxillik turli o'lchamdagi ikkita qismdan iborat va qismlardan biri (tekislik) "noto'g'ri" o'lchamga ega (yuqorida tasvirlangan intuitive mulohazalarga ko'ra).

Bir nechta ko'p o'lchovli misollarni keltiramiz. Chiziqli algebradan yaxshi tanish obekt paydo bo'ladi. n ta noma'lumli $x_1, \dots, x_n$ m ta chiziqli tenglamalardan iborat va koeffitsientlari berilgan k maydondan olingan sistemani qaraymiz.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

bu sistemaning yechimlari k^n da affin ko'pxillikni tashkil etadi, u chiziqli ko'pxillik deb ataladi [3]. To'g'ri chiziqlar va tekisliklar, agar ular koordinata boshidan o'tmasa, chiziqli ko'pxilliklar hisoblanadi. Ixtiyoriy katta o'lchovlarga ega chiziqli ko'pxilliklar mavjud. Chiziqli algebrada o'rganiladigan Gaussning no'ma'lumlarni yo'qotish usuli bunday sistemaning barcha yechimlarini topish algoritmidan iborat.

Chiziqli ko'pxilliklar o'lchov muammosini muhokama qilish uchun yaxshi manba hisoblanadi. Ya'ni agar $V \subset k^n$ (1) sistema bilan aniqlanuvchi chiziqli ko'pxillik hisoblansa, u holda uning o'lchovi $n-m$ ga teng bo'lishi shart emas, vaholanki, V ko'pxillik m ta tenglama bilan aniqlangan [4]. Haqiqatan, agar V bo'sh bo'lmasa, u holda uning o'lchovi $n-r$ ga teng, bu yerda $r = (a_{ij})$ matritsa rangidan iborat. Shunday qilib, chiziqli ko'pxilliklarning o'lchovi chiziqli bog'liq bo'lmagan tenglamalar soni bilan aniqlanadi. Ana shu intuitive mulohaza umumiy

holda ham qo'llaniladi, vaholanki, "bog'liq bo'lmaslik" tushunchasi aniqlashtirishni talab etadi.

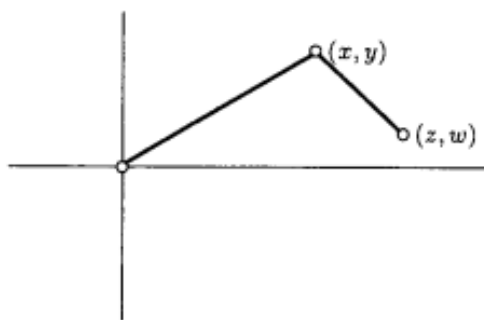
Ba'zi murakkab ko'p o'lchovli misollarni matematik tahlil beradi. Masalan, biz $f(x, y, z) = x^3 + 2xyz - z^2$ funksiyaning $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sirtidagi minimum va maksimumlarni topmoqchimiz. Lagranj ko'paytuvchilar usuliga ko'ra lokal ekstremum nuqtalarda $\nabla f = \lambda \nabla g$ (eslatib o'tamiz, f funksiyaning gradienti $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ xususiy hosilali vektorlar). Bu bizga to'rtta x, y, z, λ noma'lumli to'rtta tenglamalar sistemasini beradi.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2yz &= 2x\lambda, \\ 2xz &= 2y\lambda, \\ 2xy - 2z &= 2z\lambda, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Bu tenglamalar R^4 da affin ko'pxillikni aniqlaydi va bizning intuitsiya shuni ko'rsatadiki, u nuqtalarning chekli to'plamidan (ya'ni 0 o'lchovga ega) iborat, chunki u to'rtta tenglamalar bilan berilgan. Ba'zilar Lagranj ko'paytuvchilar usulini murakkab deb hisoblaydilar, chunki olingan tenglamalar sistemasini odatda yechish qiyin. 3-bobda qaraladigan algoritmlar esa bunday masalalar yechishning qudratli vositasi hisoblanadi. Xususan, (2) sistemaning yechimi ham olinadi.

Ta'kidlash kerakki, affin ko'pxillik bo'sh to'plam bo'lishi mumkin. Masalan, $k = R$ bo'lsin. U holda $V(x^2 + y^2 + 1) = \emptyset$, chunki $x^2 + y^2 = -1$ haqiqiy yechimlarga ega emas (vaholanki u $k = C$ bo'lganda yechimga ega). Boshqa misol bu $V(xy, xy - 1)$ ko'pxillik har qanday maydonda bo'sh, chunki tayinlangan x va y lar bir vaqtda $xy = 0$ va $xy = 1$ ikkita tenglikni qanoatlantirishi mumkin emas.

Affin ko'pxilliklarning tadbiqlari haqida bir nechta mulohazalarni keltiramiz. Quyida robot texnikasidan bir misol keltiramiz. 1 va 2 uzunlikdan bir-biriga biriktirilgan ikkita sterjendan iborat robot qo'li tekislikda harakat qilmoqda. Uzun sterjen koordinata boshiga biriktiriladi



Qo'lining "holati" (x, y) va (z, w) koordinatalar bilan to'la aniqlanadi. Shunday qilib, $(x, y, z, w) \in R^4$ nuqta kabi qaralishi mumkin. Lekin R^4 dagi har qanday nuqtalar ham qo'l holatini ifoda etmaydi. Oson ko'rish mumkinki, holatlar to'plami

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, \\ (x - z)^2 + (y - w)^2 &= 1 \end{aligned}$$

tengliklar bilan aniqlangan R^4 dagi affin ko'pxillikdan iborat.

Ko'p o'lchovli masalalar qanday qilib tabiiy ravishda paydo bo'ladi: agar biz o'sha qo'lni uch o'lchovli fazoda qarasak, u holda holatlar ko'pxilligi R^6 dagi ikkita tenglamalar bilan aniqlanadi.

Shu vaqtgacha barcha rasmlar R da chizilgan edi. Kelgusida biz C ustidagi ko'pxilliklarni qaraymiz. Bu holda ko'pxillik geometriyasini tasavvur qilish qiyinroq.

Nihoyat affin ko'pxilliklarining asosiy xossalarini sanab o'tamiz:

2-Lemma. *Agar $V, W \subset k^n$ affin ko'pxilliklar bo'lsa, u holda $V \cup W$ va $V \cap W$ ham affin ko'pxilliklar bo'ladi.*

Isbot. $V = V(f_1, \dots, f_s)$ va $W = V(g_1, \dots, g_t)$ bo'lsin. Biz

$$\begin{aligned} V \cap W &= V(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t), \\ V \cup W &= V(f_i g_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t) \end{aligned}$$

ekanligini tasdiqlaymiz. Birinchi tasdiq trivial: agar nuqta $V \cap W$ ga tegishli bo'lsa, u holda $f_1, \dots, f_s$ funksiyalar $g_1, \dots, g_t$ kabi bu nuqtada nolga aylanadi. Bu esa $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t$ funksiyalar jamlanmasining nolga aylanishidan iborat.

2-tasdiqning isboti ko'p kuch-harakat talab etadi. Agar $(a_1, \dots, a_n) \in V$ bo'lsa, u holda barcha f_i lar bu nuqtada nolga aylanadi va barcha $f_i g_j$ funksiyalar $(a_1, \dots, a_n)$ da nolga aylanadi. Shunday qilib, $V \subset V(f_i g_j)$ va shunga o'xshash $W \subset V(f_i g_j)$. Demak, $V \cup W \subset V(f_i g_j)$. Ikkinchi tomondan, $(a_1, \dots, a_n) \in V(f_i g_j)$ bo'lsin. Agar bu nuqta V ga tegishli bo'lsa, barchasi isbotlanadi, agar bunday bo'lmasa, u holda $f_{i_0}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ biror i_0 uchun $f_{i_0} g_j$ funksiyalar barcha j larda $(a_1, \dots, a_n)$ da nolga aylangani uchun, u holda barcha g_j lar bu nuqtada nolga teng. Demak $(a_1, \dots, a_n) \in W$ va $V(f_i g_j) \subset V \cup W$.

Bu lemmadan ko'rinadiki, affin ko'pxilliklarning chekli birlashmalari va kesishmalari affin ko'pxilliklar bo'ladi. Haqiqatda, biz birlashmalar va kesishmalarga duch kelganmiz. Masalan, (x, y) tekislik va z o'qining R^3 dagi birlashmasini qaraymiz. 2-lemma isbotidagi formula bo'yicha

$$V(z) \cup V(x, y) = V(xz, yz)$$

Bu tabiiyki oldin qaralgan misollardan biri. Kesishmalarga kelsak, aylanma kubik ikkita sirt kesishishi sifatida berilgan edi.

Ikkita misol tahlili affin ko'pxilliklar haqida qiziqarli masalalar qo'yilishiga olib keladi. U holda quyidagi muammolarni bayon etish mumkin:

- (Birgalikdalik) $V(f_1, \dots, f_s)$ bo'sh bo'lmasligini ya'ni $f_1 = \dots = f_s = 0$ tenglamalar umumiy yechimga ega bo'lishini aniqlash mumkinmi?

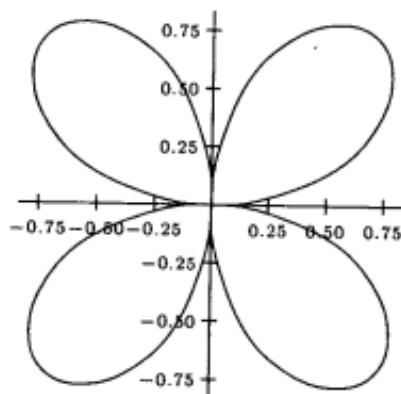
- (Cheklilik) $V(f_1, \dots, f_s)$ to'plam chekli bo'lishini aniqlashimiz mumkinmi, agar shunday bo'lsa barcha yechimlarini oshkora ko'rinishda qanday topish mumkin?

- (O'lchovlilik) $V(f_1, \dots, f_s)$ ko'pxillik "o'lchovini" topishimiz mumkinmi?

Bu savollarga javoblar ijobiy, vaholanki biz ehtiyotlik bilan ko'pxilliklar aniqlanadigan k maydonning tanlanishiga qarashimiz kerak. Eng qiyin masala-o'lchov haqida, chunki uni yechish uchun unchalik oddiy bo'lmagan teorema zarur bo'ladi.

Misollar.

1. Qutb koordinatalarda egri chiziqli grafigini yasashga ajoyib misollardan biri to'rt bargli gul hisoblanadi.



Bu egri chiziqli $r = \sin(2\theta)$ tenglama bilan berilgan. U affin ko'pxillikdan iborat.

(a) Dekart va qutb koordinatalari orasidan $r^2 = x^2 + y^2, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ bog'lanishdan foydalanib, to'rt bargli gul $V((x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2)$ affin ko'pxillikka tegishli bo'ladi.

(b) $V((x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2)$ ko'pxillik to'rt bargli gulda joylashishini isbotlang. Bu masala murakkab, chunki $r = \sin(2\theta)$ tenglikdagi r manfiy bo'lib kelishi mumkin.

(a) va (b) masalalarni birlashtirib to'rt bargli gul $V((x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2)$ affin ko'pxillikdan iborat ekanligining isbotini olamiz.

2. Biror to'plam affin ko'pxillik bo'lmasligini isbotlash ba'zi qiyinchiliklarga ega. Masalan, $y = x$ to'g'ri chiziqli uzoqlashgan $(1, 1)$ nuqta bilan birgalikdagi

$$X = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}, x \neq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

to'plamni qaraymiz. X affin ko'pxillik emasligini isbotlaymiz. Teskarisidan faraz qilaylik: $X = V(f_1, \dots, f_s)$ har bir f_i funksiya X da nolga aylanadi va agar $(1, 1)$ nuqtada har bir f_i nolga teng bo'lishini ko'rsatsak, biz kerakli qarama-qarshiliklarga kelimiz, ya'ni quyidagi tasdiqni isbotlash lozim: $f \in R[x, y]$ X da nolga teng bo'lsin, u holda $f(1, 1) = 0$. $g(t) = f(t, t)$ deb olamiz, u holda $g \in R[t]$. Endi 1-§ dagi 5-lemmaga asosan yuqoridagi tasdiqni hosil qilamiz.

3. Shu paytgacha R va C ustidagi ko'pxilliklarni qaragan edik. Lekin Q maydon ustidagi ko'pxilliklarni ham o'rganish mumkin. Bu holda ko'pxilliklar haqidagi masalalar ancha qiyin. Masalan, n – natural son bo'lsin.

$$x^n + y^n = 1$$

tenglama bilan berilgan $F_n \subset Q^2$ ko'pxillikni qaraymiz. Bu tenglama x yoki y 0 ga teng bo'lganda ravshan yechimlarga ega. Biz ularni trivial yechim deb ataymiz. Notrivial yechimlar haqida qiziqarli masala paydo bo'ladi.

(a) agar n – toq bo'lsa F_n ikkita trivial yechimga ega, agar n – juft bo'lsa to'rtta yechimga ega bo'ladi.

(b) F_n $n > 3$ da biror faqat va faqat Ferma teoremasi o'rinli bo'lmaganda, notrivial yechimga ega bo'lishini isbotlash mumkin. Buyuk Ferma teoremasi $n \geq 3$ da

$$x^n + y^n = z^n$$

butun nol bo'lmagan yechimga ega emas. Umumiy holda bu teorema Endryu Vayls tomonidan 1994-yilda murakkab nazariy-sonli usullardan foydalanib isbotlangan.

3-§. Affin ko'pxilliklarni parametrlash

Bu paragrafda $V(f_1, \dots, f_s)$ affin ko'pxillik nuqtalarini tavsiflash masalasini qaraymiz. Bu masalani $f_1 = \dots = f_s = 0$ polinomial tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini tavsiflash masalasi deb qayta bayon etish mumkin. Agar yechimlar chekli bo'lsa, u holda bizning maqsadimiz-ularni sanab o'tishdan iborat. Agar ular cheksiz ko'p bo'lsa, nima qilish kerak? Bu yerda biz affin ko'pxillikni parametrlash tushunchasini kiritishimiz lozim [5].

Dastlab chiziqli algebradan- R ustidagi quyidagi

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz. Geometrik nuqtayi nazardan bu sistema $x + y + z = 1$ tekislikni $x + 2y - z = 3$ tekislik bilan kesishmasidan iborat R^3 dagi

to'g'ri chiziqni aniqlatadi. Shunday qilib, sistema cheksiz ko'p yechimga ega. Gauss usulidan foydalanib yechimlarni tavsiflash uchun (1) sistemani

$$x + 3z = -1$$

$$y - 2z = 2$$

ko'rinishga keltiramiz. $z = t$ bo'lsin, bu yerda t – ixtiyoriy haqiqiy son; u holda (1) sistemaning barcha yechimlarini

$$x = -1 - 3t,$$

$$y = 2 + 2t, \quad (2)$$

$$z = t$$

ko'rinishda yozish mumkin. Biz t ni parametr deb ataymiz, (2) sistema esa, shunday qilib (1) sistemaning yechimlari to'plamini parametrlash hisoblanadi.

Yechimlarni parametrlash usuli qanday qilib affin ko'pxilliklarni o'rganishga qo'llanishga qo'llanishini qaraymiz. Misol sifatida

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

birlik aylanani olamiz. Bu holda odatdagi parametrlash usuli

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

trigonometrik funksiyalardan foydalanishdan iborat.

Lekin aylanani algebraik parametrlash ham mavjud:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (4)$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

Bunday aniqlangan nuqtalar haqiqatdan (3) aylanada yotadi. Ta'kidlash kerakki, bu

parametrlash aylana nuqtalarini to'la tavsiflamaydi: Chunki $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ -1 ga teng

bo'lmagani uchun $(-1,0)$ nuqta parametrlanmay qoladi.

(4) tenglamalarda ko'phadlar nisbati-ratsional funksiyalardan foydalanilganini ta'kidlaymiz. Parametrlash masalasi bilan jiddiy shug'ullanishdan oldin ratsional funksiyaning umumiy ta'rifini beramiz.

1-Ta'rif [6]. k – biror maydon bo'lsin. Koeffitsientlari k dan bo'lgan $t_1, \dots, t_m$ o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi deb ikkita $f, g \in k[t_1, \dots, t_m]$ ko'phadlarning f/g nisbatiga aytiladi, bu yerda g ko'phad emas. Keyin ikkita f/g va h/k ratsional funksiyalar teng bo'ladi, agar $k[t_1, \dots, t_m]$ da $kf = gh$ tenglik o'rinli bo'lsa. Koeffitsientlari k dan bo'lgan $t_1, \dots, t_m$ o'zgaruvchilarning barcha ratsional funksiyalar to'plami $k(t_1, \dots, t_m)$ deb belgilanadi.

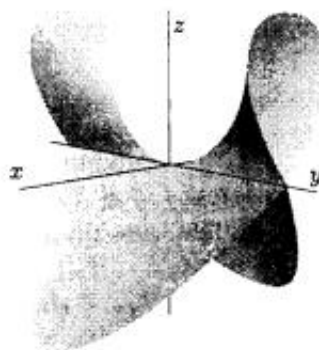
Ratsional funksiyalar yig'indisi va ko'paytmasi ratsional funksiyalar bo'ladi va $k(t_1, \dots, t_m)$ - maydon. Bu tasdiqlarning isbotlari [6] da berilgan. $V = V(f_1, \dots, f_s) \subset k^n$ ko'oxillikni qaraymiz. Uning ratsional parametrlanishi (yoki ratsional parametrik tasviri) deb, shunday $r_1, \dots, r_n \in k(t_1, \dots, t_m)$ n ta ratsional funksiyalar jamlanmasiga aytiladiki, quyidagi koordinatalarga ega bo'lgan

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1(t_1, \dots, t_m), \\ x_2 &= r_2(t_1, \dots, t_m), \\ &\dots \\ x_n &= r_n(t_1, \dots, t_m) \end{aligned}$$

nuqtalar V ga tegishli bo'ladi. Biz yana V bu nuqtalarni o'z ichiga olgan “eng kichik” ko'pxillik bo'lishini talab qilamiz. Aylana misoli shuni ko'rsatadiki, V ko'pxillikning barcha nuqtalarini parametrlab bo'lmasligi mumkin.

V ko'pxillikning shunday parametrlanishi ko'p uchraydiki, $r_1, \dots, r_n$ - ko'phadlardan iborat. Bu holda parametrlash polinomial deb ataladi. V ko'pxillikni aniqlovchi $f_1 = \dots = f_s = 0$ tenglamalar dastlabki jamlanmasi ba'zida uning oshkormas ifodasi deb ataladi. oldingi (1) va (2) misollarda- oshkormas ifodalar, (2) va (4) larda esa parametrik ifodalar. Tasvirlangan.

Egri chiziq yoki sirtni parametrlashning asosiy qulayliklaridan biri uni kompyuter monitori ekranida oson chizishga imkon beradi. Parametrlash formulalarini bilgan holda kompyuter ko'pxillik nuqtalari kordinatalarini parametrlarning turli qiymatlarida hisoblaydi va ularni ekranda chizadi. 2-§ da $V(x^2 - y^2 z^2 + z^3)$ sirtning rasmi keltirilgan:



Bu rasmni yasashda tabiiyki $x^2 - y^2 z^2 + z^3 = 0$ oshkormas ifodadan foydalanilmagan.

Biz

$$\begin{aligned} x &= t(u^2 - t^2), \\ y &= u, \\ z &= u^2 - t^2 \end{aligned} \quad (5)$$

formulalar bilan berilgan parametrik ifodadan foydalandik. Sirtni tavsiflayotganimiz uchun, 2 ta parametr- bu t va u mavjud. Rasm $-1 \leq t, u \leq 1$ bo'lganda sirtning qismini tasvirlaydi.

Shu bilan birga ba'zi maslalani yechishda oshkormas ifodalar qulay. Masalan, biz $(1, 2, -1)$ nuqta bizning sirtga tegishli yoki tegishli emasligini aniqlashimiz lozim. Agar biz (5) parametrlash bilan ishlasak, u holda bu masalaning yechimi t va u noma'lumli

$$\begin{aligned} 1 &= t(u^2 - t^2), \\ 2 &= u, \\ -1 &= u^2 - t^2 \end{aligned} \quad (6)$$

sistemani yechishga olib kelinadi. Ikkinchi tomondan, agar biz $x^2 - y^2 z^2 + z^3 = 0$ oshkormas ifoda bilan ishlasak, u holda nuqtaning koordinatalarini tenglamaga qo'yishimiz yetarli.

$$1^2 - 2^2(-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 4 - 1 = -4 \neq 0$$

bo'lgani uchun $(1, 2, -1)$ nuqta sirtda yotmaydi (demak (6) sistema yechimga ega emas)

Birdaniga ikkita ifodalar bilan ishlashning qulayligi ikkita muammoning qo'yilishiga olib keladi

- (Parametrlash) Har qanday affin ko'pxillik ratsional parametrlashga ega bo'ladimi?

- (Oshkormas ifoda) Affin ko'pxillik parametrik ifoda bilan berilgan bo'lsin. Uni aniqlovchi tenglamalarni topish mumkinmi (ya'ni oshkormas ifodani)?

Birinchi savolga javob salbiy. Haqiqatan, ko'pincha affin ko'pxilliklar ratsional parametrlashga ega emas. Ratsional parametrlashi mumkin bo'lgan ko'pxilliklar uniratsional ko'pxilliklar deb ataladi. Odatda berilgan ko'pxillikning uniratsionalligi haqidagi savolga javob berish ancha qiyin. Ikkinchi savolga javob ijobiy, ya'ni agar parametrik ifoda berilgan bo'lsa, u holda biz hamma vaqt aniqlovchi tenglamalarni topishimiz mumkin.

Quyidagi misolda oshkormas ifodani qanday tuzish mumkinligini ko'rib chiqamiz. Tekislikda parametrik berilgan

$$\begin{aligned}x &= 1+t, \\ y &= 1+t^2\end{aligned}\tag{7}$$

egri chiziqni qaraymiz. Hozircha biz bu egri chiziq qanday affin ko'pxillikda yotishini bilmaymiz. Izlangan tenglamani yasash uchun t ni sistemaning birinchi tenglamasidan topamiz:

$$t = x - 1$$

t ni ikkinchi tenglamaga qo'yib

$$y = 1 + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 2$$

ni olamiz. Bundan (7) parametrik tenglama $V(y - x^2 + 2x - 2)$ affin ko'pxillikni tavsiflashi kelib chiqadi.

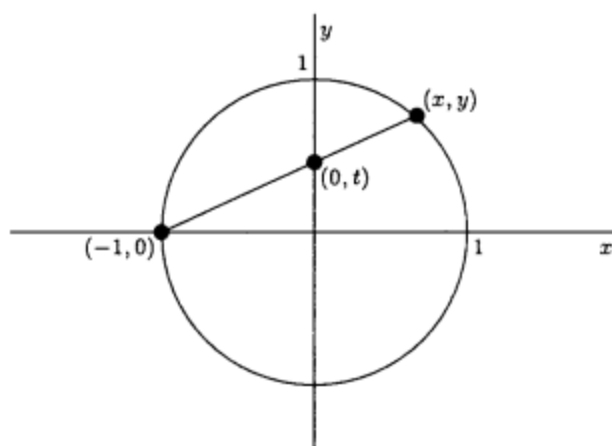
Shunday qilib, yuqoridagi misolda strategiya asosini t o'zgaruvchini shunday yo'qotishdan iboratki, faqat x va y ni o'z ichiga olgan bitta tenglama qolsin. Bu misol yo'qotish nazariyasining rolini ko'rsatadi.

Keyingi ikkinchi misolda, geometrik mulohazalar ko'pxilliklarni parametrlashni topishga imkon beradi. Dastlab birlik aylanani qaraymiz. Uning (4) parametrlashi bizga quyidagi sistemani beradi:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

Bunday parametrlash qayerdan paydo bo'lgan? $(-1,0)$ nuqtadan o'tuvchi har bir novertikal to'g'ri chiziq aylanani yana bitta (x,y) nuqtada kesib o'tadi:



Bundan tashqari har bir novertikal to'g'ri chiziq y o'qini qandaydir $(0,t)$ nuqtada kesib o'tadi (rasmga qarang).

Bularning hammasi aylananing geometrik parametrlanishini beradi. Berilgan t bo'yicha $(-1,0)$ va $(0,t)$ nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziqni yasaymiz; u holda bu to'g'ri chiziq aylanani yana qandaydir (x,y) nuqtada kesib o'tadi. Ta'kidlaymizki, bu yasash haqiqatan parametrlashni beradi: t y o'qini $-\infty$ dan $+\infty$ ga bosib o'tsa, u holda mos (x,y) nuqta $(-1,0)$ nuqtadan tashqari butun aylanani bosib o'tadi.

x va y ni t orqali oshkora ifodalash qoldi. Buning uchun to'g'ri chiziq og'ishini qaraymiz. Biz og'ish kattaligini ikkita usul bilan hisoblashimiz mumkin. Yo $(-1,0)$ va $(0,t)$ nuqtalardan foydalanib yoki $(-1,0)$ va (x,y) nuqtalardan foydalanib

$$\frac{t-0}{0-(-1)} = \frac{y-0}{x-(-1)}$$

tenglamani olamiz, bundan

$$t = \frac{y}{x+1}.$$

Agar biz $y = t(x+1)$ ni $x^2 + y^2 = 1$ aylana tenglamasiga qo'ysak,

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

ni olamiz, bu esa bizga x ni aniqlash uchun

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

kvadrat tenglamani beradi. To'g'ri chiziq aylanani ikki nuqtada kesib o'tgani uchun, bu tenglama ikkita yechimga ega, ulardan biri -1 ga teng. Shuning uchun (8)

$$(x+1)((1+t^2)x - (1-t^2)) = 0$$

ko'paytma kabi yozilishi mumkin.

Izlanayotgan x -koordinata ikkinchi ko'paytma bilan aniqlangani uchun

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ga ega bo'lamiz. $y = t(x+1)$ bo'lgani uchun esa

$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

va biz oldin tavsiflangan parametrlashni yechamiz. Geometrik mulohazalar aniq aylananing qaysi qismi parametrlanganini ko'rsatadi.

Ikkinchi misol sifatida 2-§ dagi aylantirilgan kubikni qaraymiz. Bu egri chiziqqa urinmalar uch o'lchovli fazoda qiziqarli sirt hosil qiladi. Uni yasash g'oyasi quyidagicha: egri chiziqning har bir nuqtasi uchun urinma (bu nuqtada mavjud).



Endi tasavvur qilamizki, aylantirilgan kubikning barcha nuqtalariga urinmalar o'tkazilgan. Bu quyidagi sirtni beradi:



Rasmda bir nechta urinmalar ko'rsatilgan. Butun sirt esa aylantirilgan kubik urinma deb ataladi.

Endi bu geometrik mulohazani algebraik tilga o'tkazamiz. Dastlab $y - x^2 = z - x^3 = 0$ tenglamalarda $x = t$ deb olib, aylantirilgan kubikning

$$\begin{aligned}x &= t, \\y &= t^2, \\z &= t^3\end{aligned}$$

parametrlanishini olamiz. Uni $r(t) = (t, t^2, t^3)$ ko'rinishda yozamiz. Birorta t ni tayinlaymiz va egri chiziqda mos nuqtani qaraymiz. Analiz kursidan ma'lumki, egri chiziqqa $r(t)$ nuqtada urinma vektor $r'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ ga teng, urinma to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi esa

$$r(t) + ur'(t) = (t, t^2, t^3) + u(1, 2t, 3t^2) = (t + u, t^2 + 2tu, t^3 + 3t^2u)$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda u – urinmadagi parametr. Endi t o'zgarsin: u holda butun urinma sirtining parametrlanishini olamiz. t va u parametrlar quyidagi ma'noga ega: t kubikdagi holat haqida, u esa urinma tog'ri chiziqdagi holat haqida ma'lumot beradi. Ana shu parametrlash yuqoridagi urinma sirt rasmini chizish uchun foydalanilgan.

Oxirgi savol urinma sirtni oshkormas berilishiga taaluqli. Uning tenglamasini qanday topish mumkin? Bu oshkormas ifodani qurish haqidagi yuqorida eslatib o'tilgan masalaning xususiy holi. Bizning holda masala parametrik tenglamalardan t va u ni yo'qotish orqali yechiladi. Isbotlanganki, aylanma kubikning urinma sirti

$$-4x^3z + 3x^2y^2 - 4y^3 + 6xyz - z^2 = 0$$

tenglama bilan beriladi. Biz bu bobni kompyuter geometrik loyihalash (KGL) misoli bilan yakunlaymiz. Agar avtomobil kuzovi yoki samolyot qanoti kabi murakkab sirtni loyihalash zarur bo'lsa, muhandislarga oddiy tavsiflanuvchi va oson yasaluvchi egri chiziqlar va sirtlar to'plami kerak. Ratsional va polinomial parametrik tenglamalar bu talabni qanoatlantiradi.

Faraz qilaylik, oddiylik uchun loyihalovchi egri chiziqni tekislikda tavsiflamovchi bo'laylik. Murakkab egri chiziqlar odatda bir nechta oddiy bo'laklardan tuziladi, qismlar silliq birlashishi uchun ikkita qism urinmalari yo'nalishlari birlashish nuqtasida ustma-ust tushishi lozim. Ya'ni har bir qism uchun quyidagi geometrik parametrlarni nazorat qilish lozim:

- (i) bo'lakning boshlang'ich va oxirgi nuqtasini;
- (ii) boshlang'ich va oxirgi nuqtadagi urinma yo'nalishlar.

“Reno” firmasi konstruktori P. Be'ze tomonidan kashf qilingan Be'ze kubigi bu maqsad uchun yaxshi to'g'ri keladi. U quyidagi tenglamalar bilan parametrik aniqlangan:

$0 \leq t \leq 1$ lar uchun

$$\begin{aligned} x &= (1-t)^3 x_0 + 3t(1-t)^2 x_1 + 3t^2(1-t)x_2 + t^3 x_3, \\ y &= (1-t)^3 y_0 + 3t(1-t)^2 y_1 + 3t^2(1-t)y_2 + t^3 y_3 \end{aligned} \quad (9)$$

bu yerda $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ - loyihadagi konstantalar. Konstantalar va geometrik ma'lumotlar o'zaro qanday bog'langanini aniqlashimiz lozim.

(9) da $t=0$ va $t=1$ ni qo'yib

$$\begin{aligned} (x(0), y(0)) &= (x_0, y_0), \\ (x(1), y(1)) &= (x_3, y_3) \end{aligned}$$

larni olamiz. t 0 dan 1 gacha o'zgarganda (9) (x_0, y_0) dan boshlanuvchi va (x_3, y_3) da tugallanuvchi egri chiziqni tavsiflaydi. Bu bizga zarur ma'lumotlarning yarmini beradi. Endi $t=0$ va $t=1$ da egri chiziqqa urinma yo'nalishlarni topamiz. $t=0$ da (9) egri chiziqqa urinma vektor $(x'(0), y'(0))$ ga teng. (9) tenglamalardan birinchisini differensiallab,

$$x' = -3(1-t)^2 x_0 + 3((1-t)^2 - 2t(1-t))x_1 + 3(2t(1-t) - t^2)x_2 + 3t^2 x_3$$

ni olamiz. $t=0$ bo'lsin. U holda

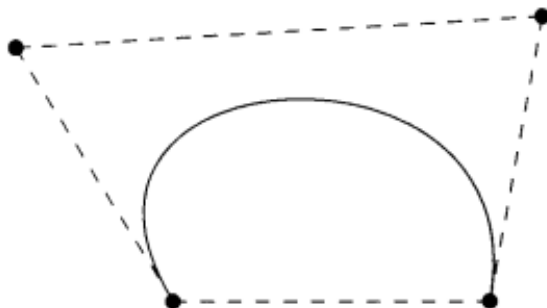
$$x'(0) = -3x_0 + 3x_1 = 3(x_1 - x_0)$$

Shunga o'xshash,

$$\begin{aligned} (x'(0), y'(0)) &= 3(x_1 - x_0, y_1 - y_0), \\ (x'(1), y'(1)) &= 3(x_3 - x_2, y_3 - y_2) \end{aligned} \quad (10)$$

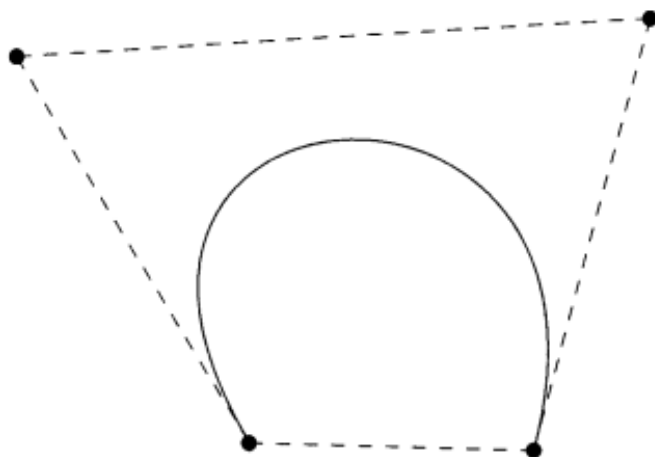
ni olamiz. $(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (x_1, y_1) - (x_0, y_0)$ bo'lgani uchun, $(x'(0), y'(0)) - (x_0, y_0)$ dan (x_1, y_1) ga uchlangan vektor. Ya'ni (x_1, y_1) ni berib konstruktor egri chiziq boshida urinma yo'nalishini beradi. Shunga o'xshash (x_2, y_2) ni berib konstruktor egri chiziq oxiridan urinma yo'nalishni beradi.

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ va (x_3, y_3) nuqtalar Be'ze kubigining boshqaruvchi nuqtalari deb ataladi odatda ular P_0, P_1, P_2 va P_3 deb belgilanadi va ular bilan aniqlaydigan qavariq to'rtburchak boshqaruvchi ko'pburchak deb ataladi. Quyida Be'ze egri chizig'i va uning boshqaruvchi ko'pburchagi rasmi keltirilgan.



Be'ze kubigi o'zining boshqaruvchi ko'pburchagi ichida hamma vaqt yotishi isbotlangan

Be'ze kubigini aniqlovchi parametrlar aniq geometrik ma'noga ega va ularni oson berish mumkin. Ravshan bo'lmagan yagona narsa- $(x'(0), y'(0))$ va $(x'(1), y'(1))$ vektorlar urinmalar uzunliklari geometrik ma'nosi. (10) tenglikarga ko'ra (x_1, y_1) va (x_2, y_2) nuqtalarni urinma yo'nalishlarini ozgartirmasdan ozgartirish mumkin. Masalan, yo'nalishlar oldingi rasmdagi kabi qolishi mumkin, lekin vektorlar uzunliklari oshadi. U holda biz quyidagi egri chiziqni olamiz.



ya'ni chegara nuqtalardagi tezlikning oshishi egri chiziqni urinmalar yaqinida uzoq qolishiga majbur etadi. Tajriba konstruktorga Be'ze kubiklaridan turli xil egri chiziqlar yasashga yordam beradi. Konstruktor katta egri chiziqni beruvchi (9) tenglamalarning mavjudligini hayoliga ham keltirmasligi mumkin.

KGL dan tashqari Be'ze kubigi PostScript tilida qo'llaniladi. PostScript dagi curveto buyrug'ida boshqaruvchi nuqtalar koordinatalari kiruvchi parametrlar kabi beriladi va u holda chiqishda Be'ze kubigi yasaladi. Xuddi shunday kubik rasmlari har bir egri chiziq PostScript da bitta buyruq satri bilan beriladi.

Misollar.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sfera uch o'lchovli fazoda

$$\begin{aligned} x &= \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \\ y &= \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \\ z &= \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{aligned}$$

ko'rinishida parametrlanishini isbotlashdan iborat. Buning uchun paragraf oxiridagi mulohazalarni uch o'lchovli fazo holiga qo'llash lozim.

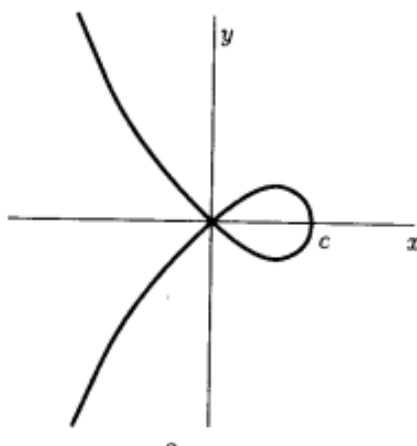
(a) $(u, v, 0)$ koordinatali nuqta xy tekislikka tegishli bo'lsin. Bu nuqtani sferaning "shimoliy qutbi" ya'ni $(0, 0, 1)$ nuqta bilan to'g'ri chiziq orqali tutashtiramiz. (x, y, z) - bu to'g'ri chiziqning sfera bilan kesishgan boshqa nuqtasi bo'lsin.

Grafigini yasang va (u, v) nuqtani (x, y, z) akslantirish shimoliy qutbdan tashqari butun sferani parametrlashni beradi.

(b) $(u, v, 0)$ va $(0, 0, 1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq $(tu, tv, 1-t)$ parametrlashga ega bo'lishini isbotlang. Bu yerda t - to'g'ri chiziqdagi parametr.

(c) $x = tu, y = tv$ va $z = 1-x$ ni $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sfera tenglamasiga qo'ying va bu mashq boshida keltirilgan formulalarni keltirib chiqaring.

2. $y^2 = cx^2 - x^3$, bu yerda bizlar konstanta tenglama bilan berilgan egri chiziqni qaraymiz. $c > 0$ da bu egri chiziq grafigi quyidagi ko'rinishga ega:



Uning parametrlashini qanday topish mumkin?

(a) To'g'ri chiziq bu egri chiziq bilan 0,1,2 yoki 3 ta umumiy nuqtalarga ega bo'lishi mumkinligini ko'rsating. Bu rasmni tavsiflang. To'g'ri chiziq tenglamasi $x = a$ yoki $y = mx + b$ ko'rinishga ega bo'lishi mumkin.

(b) koordinatalar boshidan o'tuvchi novertikal to'g'ri chiziq bu egri chiziqni $m^2 \neq c$ bo'lgan holda yana bitta nuqtada kesib o'tishini isbotlang. Buni chizma bilan tasvirlang va nima uchun bunday bo'lishini ko'rgazmali tushuntirishga harakat qiling.

(c) $x = 1$ vertikal to'g'ri chiziqni qarang. $(1, t)$ nuqta (bu vertikal to'g'ri chiziqda o'tuvchi) va koordinatalar boshidan o'tadigan to'g'ri chiziqni o'tkazing. Bu to'g'ri chiziq egri chiziqni (x, y) nuqtada kesib o'tadi. Buni rasm bilan tasvirlang va shunday qilib butun egri chiziqning parametrlanishini olish mumkin.

(d) yuqorida tasvirlangan geometrik yasash

$$x = c - t^2,$$

$$y = t(c - t^2)$$

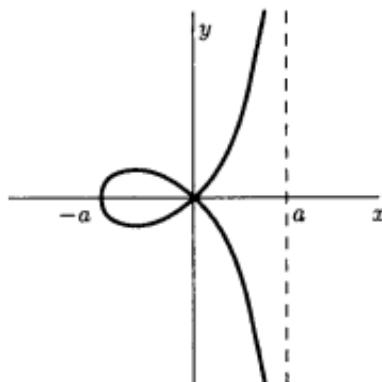
parametrlashga olib keladi.

3. *strofoida* deb ataluvchi egri chiziq ko'p matematiklar jumladan Isaak Barrou (1630-1677), Iogann Bernulli (1718-1799) lar tomonida o'rganilgan. Bu egri chiziqning trigonometrik parametrlanishi

$$x = a \sin t,$$

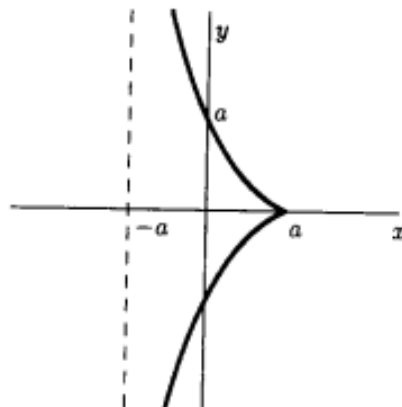
$$y = a \operatorname{tg} t (1 + \sin t)$$

formulalar bilan beriladi, bu yerda a - konstanta. $t \in -4,5 \leq t \leq 1,5$ oraliqda bosib o'tsin; u holda egri chiziqning quyidagi rasmini olamiz:

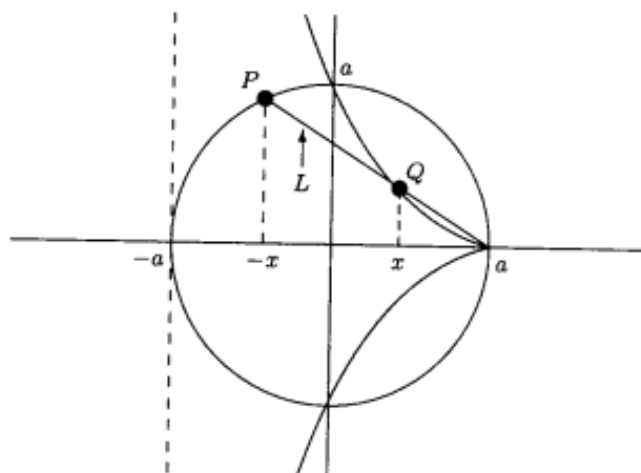


(a) strofoidaning x va y koordinatalardagi oshkormas tenglamasi $(a^2 - x^2)y^2 = x^2(a + x)^2$ bo'ladi

4. Eramizning 180 – yillarida Diokl “kattalashtiruvchi oynalar haqida” kitobni oldi unda *tsissoida* deb ataluvchi egri chiziqni qaragan. Diokl bu egri chiziqni kubni ikkilantirish muammosini yechish uchun bu egri chiziqdan foydalandi. Tsissoida $y^2(a + x) = (a - x)^3$ tenglama bilan berilgan, bu yerda a – konstanta. Bu egri chiziqning grafigi



dan iborat. Diokl tsissoidani quyidagi trigonometrik yasahs yordamida tasvirladi. Markazi koordinata boshida bo'lgan a radiusli aylanani qaraymiz va $-a \leq x \leq a$ bo'lsin. $(a,0)$ nuqtani aylanadagi $P = (-x, \sqrt{a^2 - x^2})$ nuqta bilan tutashtiruvchi L to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Endi biz L da $Q = (x, y)$ nuqtani aniqlashimiz mumkin.



Tsiisoida bunday Q nuqtalarning geometrik o'rnidan iborat bo'ladi.

Kubni ikkilantirish $\sqrt[3]{2}$ sonini tsirkul va chizg'ich yordamida geometrik yasash haqidagi klassik grek masalasi. Ma'lumki, faqat tsirkul va chizg'ichdan foydalanib buni bajarib bo'lmaydi. Diokl agar yana tsissoidadan foydalanilsa $\sqrt[3]{2}$ ni yasash mumkinligini ko'rsatdi. Bu quyidagicha bajariladi. $(-a,0)$ va $(0,a/2)$ nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq o'tkazing. Bu to'g'ri chiziq tsissoidani (x,y) nuqtada kesib o'tadi. Endi

$$2 = \left(\frac{a-x}{y}\right)^3$$

bo'ladi. Bu formula tsirkul, chizg'ich va tsissoidadan foydalanib $\sqrt[3]{2}$ ni yasashni ko'rsatadi.

4-§. Ideallar

1-ta'rif [3]. *Agarda quyidagi shartlar bajarilsa, $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ga ideal deyiladi:*

$$(i) \quad 0 \in I$$

$$(ii) \quad f, g \in I \text{ dan, } f + g \in I \text{ bo'lsa}$$

$$(iii) \quad \text{agar } f \in I \text{ va } h \in k[x_1, \dots, x_n] \text{ dan, } hf \in I \text{ bo'lsa}$$

Bu paragrafning maqsadi ideal tushunchasining tabiiy tushuncha ekanligini, ideallarning affin ko'pxilliklar bilan qanday bog'liq ekanligi, ideallar tilida affin geometriyasining hisoblash masalalarini qanday ifodalanishini ko'rsatishdir.

Idealga eng sodda misol – chekli sondagi ko'phadlar yordamida hosil qilingan idealdir.

2-ta'rif. $f_1, f_2, \dots, f_s$ lar $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ko'phadlar bo'lsin.

$$\langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i : h_1, h_2, \dots, k[x_1, \dots, x_n] \right\}$$

deb belgilaymiz.

Ko'rsatish mumkinki, $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ to'plam ideal bo'ladi.

3-lemma. [3] $f_1, \dots, f_s$ ko'phadlar $k[x_1, \dots, x_n]$ halqaga tegishli bo'lsin, u holda $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ to'plam $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ideal bo'ladi. Bu ideal $f_1, f_2, \dots, f_s$ ko'phadlar yordamida hosil qilingan ideal deb, $f_1, \dots, f_s$ ko'phadlar esa bu idealni tashkil etuvchilari yoki hosil qiluvchi elementlari deyiladi.

Isbot. $0 \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, chunki $0 = \sum_{i=1}^s 0 \cdot f_i$, $f = \sum_{i=1}^s p_i f_i$, $g = \sum_{i=1}^s g_i \cdot f_i$ va

$h \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. U holda

$$f + g = \sum_{i=1}^s (p_i + g_i) f_i$$

$$hf = \sum_{i=1}^s h p_i f_i$$

tengliklardan $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ning ideal ekanligi kelib chiqadi.

$\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ideal ko'phadli tenglamalar tilida "chiroyli" izohlanadi.
 $f_1, \dots, f_s = k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin.

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ &\vdots \\ f_s &= 0 \end{aligned}$$

tenglamalar sistemasini qaraymiz. Bu tenglamalardan odatdagi algebraik almashtirishlar bajarib boshqalarni keltirib chiqarishimiz mumkin. Masalan, birinchi tenglamani $h_1 \in k[x_1, \dots, x_n]$, ikkinchisini - $h_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$ va h. k. ko'paytirsak, va ko'paytmalarni qo'shsak, boshlang'ich sistemaning natijasidan iborat bo'lgan

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_s f_s = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning chap tomoni $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealga tegishli bo'ladi, ya'ni $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealni $f_1 = f_2 = \dots = f_s = 0$ sistemani barcha "ko'phadli natijalar" to'plami ko'rinishda qarash mumkin.

Bu nimani ifodalashini tushunish uchun 3-§ dagi

$$\begin{aligned} z &= 1+t \\ y &= 1+t^2 \end{aligned}$$

sistemani qaraymiz. 3-§ da biz t ni yo'qotib

$$y = x^2 - 2x + 2$$

tenglamani hosil qildik.

Xuddi shu masalani yangi ideologiyani qo'llagan holda yechamiz. Tenglamani

$$\begin{aligned} x-1-t &= 0 \\ y-1-t^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

ko'rinishda yozib olamiz. t ni yo'qotish maqsadida birinchi tenglamani $x-1+t$ ga, ikkinchisini -1 ga ko'paytiramiz

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - t^2 &= 0 \\ -y^2 + 1 + t^2 &= 0 \end{aligned}$$

va keyin ularni qo'shamiz.

$$(x-1)^2 - y + 1 = x^2 - 2x + 2 - y = 0$$

endi agar (1) sistemaning chap tomonlari yordamida hosil qilingan idealni qarasak, olingan natijani quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$x^2 - 2x + 2 - y = (x-1+t)(x-1-t) + (-1)(y-1-t^2) \in \langle x-1-t, y-1-t^2 \rangle$$

Xuddi shu kabi (1) sistemaning boshqa "ko'phad natijalari" bu idealning elementlari bo'ladi.

I ideal chekli hosil qilingan deyiladi, agarda shunday $f_1, \dots, f_s = k[x_1, \dots, x_n]$ mavjud bo'lsaki, $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ bo'lsa. Bu holda $f_1, \dots, f_s$ ko'phadlar to'plami idealning bazisi deyiladi. 2-bobda biz $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi har bir ideal chekli hosil qilingan ekanligini, ya'ni chekli hosil qiluvchi sistemaga ega ekanligi to'g'risidagi ajoyib fakti isbot qilamiz. (bu tasdiq bazis to'g'risidagi Gilbert teoremasi deyiladi). Shuni ta'kidlash kerakki, ideal juda ko'p har xil bazislarga ega bo'lishi mumkin.

Ideal ta'rifi chiziqli algebradagi qism fazo ta'rifiga o'xshash: bu ikki to'plam yig'indi va ko'paytma amallarga nisbatan yopiq, faqat qism fazo holida ko'paytirish skalyarga, ideallarda bo'lsa, ko'paytirish ko'phadlarga bo'ladi. Ikkinchidan, $f_1, \dots, f_s$ ko'phadlar yordamida hosil qilingan ideal $v_1, \dots, v_s$ vektorlarning chiziqli qobig'i ta'rifiga o'xshashdir. Ikki holda ham chiziqli kombinatsiyalar tuziladi, faqat chiziqli qobiq holida sonli koeffitsientlar bilan, ideal holida bo'lsa ko'phadli koeffitsientlar bilan tuziladi.

Ideallarning rolini quyidagi lemmada ko'rish mumkin bo'lib, unda ko'pxillikni aniqlovchi tenglamalar orqali hosil qilingan idealga bog'liq ekanligi isbot qilinadi.

4-lemma [?]. $f_1, \dots, f_s$ va $g_1, \dots, g_t$ lar aniq bir idealning $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi bazislari bo'lsin, demak $\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$. U holda $V(f_1, \dots, f_s) = V(g_1, \dots, g_t)$.

Misol tarzida $V(2x^2+3y^2-11, x^2-y^2-3)$ ko'pxillikni qaraymiz. $(2x^2+3y^2-11, x^2-y^2-3) = (x^2-4, y^2-1)$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas, shu sababli 4-lemmaga ko'ra

$$V(2x^2+3y^2-11, x^2-y^2-3) = V(x^2-4, y^2-1) = \{(\pm 2, \pm 1)\}$$

ega bo'lamiz. Shunday qilib, idealning bazisini o'zgartirib ko'pxillikni o'rganishni soddalashtiramiz.

Ko'pxillikni o'zgartirmay turib bazisni o'zgartirish mumkinligi juda muhim va foydali. Keyinroq ko'pxilliklar tenglamalar orqali emas, balki ideallar orqali aniqlanishini ko'ramiz. Hisoblashlar amaliyoti nuqtai nazaridan 4 – lemma va yuqorida aytib o'tilgan Gryobner bazislari affin ko'pxilliklarini o'rganish uchun kuchli usul hisoblanadi

Affin ko'pxilliklar ideallarning qiziqarli bir sinfi bilan qanday bog'lanishda ekanligini muhokama qilamiz. $V = V(f_1, \dots, f_s) \subset k^n - f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ ko'phadlar orqali ifodalanadigan affin ko'pxillik bo'lsin. $f_1, \dots, f_n$ larning V da nolga aylanishini bilamiz. V da nolga aylanuvchi yana boshqa bir ko'phadlar bormi? 2-§dagi buralgan kubikni misol sifatida qaraymiz. Bu kubika $y-x^2$ va $z-x^3$ ko'phadlar nolga teng bo'lgan to'plam sifatida aniqlangan. Lekin 3-§dagi (t, t^2, t^3) parametrlashtirish shuni ko'rsatadiki, $z-xy$ va y^2-xz ko'phadlar kubikada nolga aylanadi. Xuddi shu xossaliga boshqa ko'phadlar bormi? Bunday ko'phadlarning hammasini qanday topish kerak?

Bunday savollarga javob berish uchun berilgan ko'pxillikda nolga aylanuvchi barcha ko'phadlar to'plamini qarash kerak.

5-ta'rif. $V \subset k^n$ affin ko'pxilligi bo'lsin.

$$I(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in V\}$$

deb belgilaymiz. $I(V)$ – ideal bo'ladi.

6-lemma. $V \subset k^n$ – affin ko'pxillik bo'lsin. U holda $I(V)$ ideal bo'lib, uni V ko'pxillikning ideali deb ataymiz.

Isbot. $0 \in I(V)$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Chunki nol ko'phad k^n da ham, xususiyl holda V da ham nolga aylanadi. $f, g \in I(V)$ va $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. $(a_1, \dots, a_n) - V$ dagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin.

U holda

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_n) + g(a_1, \dots, a_n) &= 0 + 0 = 0 \\ h(a_1, \dots, a_n) f(a_1, \dots, a_n) &= h(a_1, \dots, a_n) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

bundan $I(V)$ ning ideal ekanligi kelib chiqadi.

Misol sifatida $\{(0, 0)\}$ ko'pxillikni qaraymiz, u faqat bitta nuqtadan k^2 dagi koordinata boshidan iborat. Uning $I(\{(0, 0)\})$ ideali elementlari $(0, 0)$ nuqtada nolga teng bo'lgan ko'phadlardir.

$$I(\{(0, 0)\}) = (x, y)$$

ekanligini tasdiqlaymiz.

Bir tomondan isbot trivial – chunki $A(x, y)x + B(x, y)y$ ko'rinishdagi har qanday ko'phad koordinata boshida nolga aylanadi. $f = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ ko'phad $(0, 0)$ nuqtada nolga aylansin. U holda $a_{00} = f(0, 0) = 0$ bo'ladi va, demak

$$\begin{aligned} f &= a_{00} + \sum_{i,j \neq 0} a_{ij} x^i y^j \\ &= 0 + \left(\sum_{\substack{i,j \\ i > 0}} a_{ij} x^{i-1} y^j \right) x + \left(\sum_{j > 0} a_{0j} y^{j-1} \right) y \in \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

isbot tugadi.

Endi V butun k^n fazo bilan ustma-ust tushsin. Demak, 1-§ dagi 5-lemmaga ko'ra k cheksiz bo'lganda

$$I(k^n) = \{0\}.$$

(Bu yerda $0 - k[x_1, \dots, x_n]$ dagi nol ko'phadni aniqlaydi). Shuni tasdiqlaymizki, 1-§ dagi 5-lemma yuqorida keltirilgan tasdiqqa ekvivalentdir.

Buralgan $V = V(y - x^2, z - x^3) \subset R^3$ kubika eng muhim misol hisoblanadi.

$$I(V) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$$

ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun avvalo ixtiyoriy $f \in R[x, y, z]$ ko'phadni

$$f = h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) + r \quad (2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkinligini ko'rsatamiz, bunda $h_1, h_2 \in R[x, y, z]$, r esa faqat x dan bog'liq. $f - x^\alpha y^\beta z^\gamma$ monom bo'lsin. U holda binom formulasiga ko'ra

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = x^\alpha (x^2 + (y - x^2))^\beta (x^3 + (z - x^3))^\gamma$$

$= x^\alpha (x^{2\beta} + y - x^2$ ni saqllovchi hadlar) $\times (x^{3\gamma} + z - x^3$ ni saqllovchi hadlar) va o'xshash hadlarni ixchamlab, ba'zi bir $h_1, h_2 \in R[x, y, z]$ ko'phadlar uchun

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) + x^{\alpha+2\beta+3\gamma}$$

ga ega bo'lamiz. boshqacha aytganda (2) tasdiq bu holda o'rinli. Har qanday $f \in R[x, y, z]$ ko'phad monomlarning R -chiziqli kombinatsiyasi bo'lganligi sababli, (2) doim to'g'ri bo'ladi.

Endi $I(V) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ ni isbot qilishimiz mumkin. Avvalo, buralma V kubika ta'rifiga ko'ra $y - x^2, z - x^3 \in I(V)$ ekanligiga e'tibor beramiz, $I(V)$ ideal sababli $h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) \in I(V)$ bo'lishini ko'ramiz. Demak, $\langle y - x^2, z - x^3 \rangle \subset I(V)$. Endi teskari munosabatni ko'rsatamiz

$$f \in I(V) \text{ va } f = h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) + r$$

(2) formulada ko'rsatilgan yoyilma bo'lsin. $r = 0$ tenglikni isbotlash uchun (t, t^2, t^3) kubikaning parametrizatsiyasidan foydalanamiz. f ko'phad V da nolga teng bo'lgani uchun

$$0 = f(t, t^2, t^3) = 0 + 0 + r(t)$$

(r faqat x dan bog'liq ekanligini eslatamiz) t ixtiyoriy haqiqiy son bo'lishi mumkin bo'lganligi sababli, $r \in R[x]$ - 1-§dagi 5-lemmaga ko'ra nol ko'phad bo'ladi. Lekin agar $r = 0$ bo'lsa, u holda f talab qilingan ko'rinishga ega bo'ladi va

$$I(V) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$$

(2) da bajargan ishimiz ko'phadlarni bo'lishni eslatadi, lekin biz bitta ko'phadga emas, birdan ikkita ko'phadga bo'lamiz.

Biz mulohazalarimizning ajoyib bir natijasini aytib o'tamiz: *agar* $f \in R[x, y, z]$ *bo'lsa, u holda* $f \in \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ *bo'lishining zaruriy va yetarli sharti* $f(t, t^2, t^3)$ *ko'phad aynan nolga teng bo'lishidir.* Bu ko'phadni idealga tegishli bo'lish masalasini yechishning effektiv algoritmini beradi. Lekin bu usul parametrizatsiya bilan bog'liq. (t, t^2, t^3) ni parametrizatsiyasiga suyanmasdan bu savolga javob berish mumkinmi? Gryobner bazisi va bo'linish haqidagi umumlashgan algoritmdan foydalanib buni qanday qilish kerakligini bilib olamiz.

Buralgan kubika haqidagi misol-masalani umumiy ko'rinishda qanday ifodalash kerakligini o'rgatadi. Avvalo biz $y - x^2$ va $z - x^3$ ko'phadlarni oldik, ularning yordamida affin ko'pxilligini aniqladik va so'ngra bu ko'pxillikda nolga aylanuvchi funksiyalar idealini qaradik va natijada shu ikki ko'phadlar yordamida hosil qilingan idealni hosil qiladi. Bular har vaqt ham to'g'rimi, degan savolni berish tabiiydir. $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. Quyidagiga ega bo'lamiz.

Ko'phadlar $\rightarrow$ ko'pxillik $\rightarrow$ ideal

$$f_1, \dots, f_s \quad V(f_1, \dots, f_s) \quad I(V(f_1, \dots, f_s))$$

$I(V(f_1, \dots, f_s)) = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ degan tabiiy savol tug'iladi. Lekin bu savolga javob har doim ham ijobiy emas. Bizning eng yaxshi javob berishimiz mumkin bo'lgani:

7-lemma. $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. *U holda* $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset I(V(f_1, \dots, f_s))$ *bo'lib, lekin bu ikki ideal har doim usma-ust tushmaydi.*

Isbot. $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ bo'lsin. U holda $f = \sum_{i=1}^s h_i f_i$, $h_1, \dots, h_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ lar $V(f_1, \dots, f_s)$ da nolga aylanganligi sababli, $f = \sum_{i=1}^s h_i f_i$ ham $V(f_1, \dots, f_s)$ da nolga aylanadi, demak, $f \in I(V(f_1, \dots, f_s))$

$I(V(f_1, \dots, f_s))$ ideal $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealdan qat'iy katta bo'lganga misol keltiramiz.

$$\langle x^2, y^2 \rangle \subset I(V(x^2, y^2))$$

munosabat tenglik emasligini isbot qilamiz. Avvalo $I(V(x^2, y^2))$ idealni qarab chiqamiz. $x^2 = y^2 = 0$ tenglamalar sistemasi faqat bitta $V(x^2, y^2) = \{(0, 0)\}$ nuqtadan

iborat bo'lgan ko'pxillikni aniqlaydi. Bundan oldin $\{(0,0)\}$ ko'pxillikning ideali $\langle x, y \rangle$ ligi, ya'ni $I(V(x^2, y^2)) = \langle x, y \rangle$ ekanligini ko'rgan edik. Bu ideal $\langle x^2, y^2 \rangle$ idealdan qat'iy katta ekanligiga ishonch hosil qilish uchun $x \notin \langle x^2, y^2 \rangle$ ekanligiga ishonch hosil qilish yetarli, chunki $h_1 x, y x^2 + h_2 x, y y^2$ ko'phadning barcha hadlari ikkidan kam bo'lmagan darajaga ega.

Ixtiyoriy maydonlar holida $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ va $I(V(f_1, \dots, f_s))$ ideallar orasidagi bog'lanish ancha murakkab bo'lishi mumkin. Lekin agar maydon algebraik yopiq bo'lsa, xuddi $\mathbb{C}$ kabi, u holda bu ideallar orasidagi bog'lanish yetarlicha sodda bo'ladi. Umumiy holda $I(V(f_1, \dots, f_s))$ ideal $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ga teng bo'lmasada, ko'pxillikning ideali ko'pxillikni bir qiymatli aniqlaydi.

8-lemma. V va W lar k^n dagi affin ko'pxilliklari bo'lsin. U holda

(i) $V \subset W$ munosabat faqat va faqat $I(V) \supset I(W)$ munosabat bajarilgandagina o'rinli;

(ii) $V = W$ faqat va faqat $I(V) = I(W)$ bo'lgandagina bajariladi

Isbot. Avvalo $V \subset W$ bo'lsin. U holda W da nolga teng bo'lgan har qanday ko'phad, V da ham nolga aylanadi, demak $I(W) \subset I(V)$ bo'ladi.

Endi $I(W) \subset I(V)$ bo'lsin. W ko'pxillik $g_1, \dots, g_t \in k[x_1, \dots, x_n]$ ko'phadlar orqali aniqlangan bo'lsin. U holda $g_1, \dots, g_t \in I(W) \subset I(V)$; demak, g_i lar V da nolga aylanadi. Lekin $W - g_i$ ko'phadlarning umumiy nollari to'plami bo'ladi, demak $V \subset W$ bo'ladi.

Affin ko'pxilliklari va ideallar orasidagi bog'lanish murakkab va har xil ko'rinishdadir. Biz bu yerda uning bir tomoninigina ko'rsatdik. Xususiyl holda ideallar haqidagi teoremlar har xil geometrik natijalarga egaligini ko'ramiz. Endi $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ideallarga taaluqli uchta teoremani aytib o'tamiz:

- (Idealni tasvirlash). $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ideallardan biri chekli hosil qilinuvchimi? Ya'ni ba'zi bir $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ lar uchun $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ bo'ladimi?

- (Idealga tegishlilik). $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ko'phadning $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealga tegishlilik masalasini yechuvchi algoritmi mavjudmi?

- (Nollar haqidagi teorema) $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ va $I(V(f_1, \dots, f_s))$ lar orasidagi aniq bog'lanish qanday ko'rinishga ega.

5-§. Bir o'zgaruvchili ko'phadlar

Biz bu paragrafda bir o'zgaruvchili ko'phadlarni bo'lish algoritmini qaraymiz. Bu oddiy algoritmi qo'llash kuchli natijalar beradi. Masalan uning yordamida $k[x]$ dagi ideallar strukturasi aniqlaymiz va eng katta umumiy bo'luvchi tushunchasini tadqiq etamiz. Bu yerda qarayotgan usullar yuqoridagi paragraflarda bayon etilgan ko'pgina masalalarni yechishga yordam beradi.

Avvalo algoritim-simvolli yoki sonli ma'lumotlar bilan ishlash uchun ko'rsatmalar majmuasi ekanligini ta'kidlaymiz. Misol uchun differensiallash formulalari yoki matritsalarini pog'onali ko'rinishga keltirish usuli shular jumlasidandir. Har bir algoritim uchun kirish ma'lumotlari to'plami- ya'ni algoritmlar bilan qayta ishlanadigan obektlar to'plami va chiqish ma'lumotlar to'plami-algoritim ishi natijasi aniqlangan. Har bir qadamda algoritim keyingi qadamda nima ish qilishini "biladi".

Algoritmlar bilan ishlashda "psevdokod"dan foydalanish, formal strukturalarni tushunishga imkon beradi. Psevdokod Paskal dasturlash tiliga o'xshash va unda yozilgan algoritmlar oson kompyuterga o'tkaziladi. Bu yerda qarayotgan ko'plab algoritmlar kompyuter algebrasining Maple, AXIOM, Macsyma, Mathematica, REDUCE va sistemalarda amalgam oshirilgan.

Biz $k[x]$ da bo'linish algoritmini qarashdan boshalaymiz. Algoritimning muhim qismi bir o'zgaruvchili ko'phadning "bosh hadi" tushunchasi hisoblanadi.

1-Ta'rif. $f \in k[x]$ - nol bo'lmagan ko'phad bo'lsin,

$$f = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$$

bu yerda $a_i \in K$ va $a_0 \neq 0$ (ya'ni $\deg(f) = m$). U holda $a_0 x^m - f$ ko'phadning bosh hadi deyiladi va $LT(f) = a_0 x^m$ deb ataladi. ("LT"- "leading term" inglizcha atama bosh hadlari.)

Masalan, agar $f = 2x^3 - 4x + 3$ bo'lsa, $LT(f) = 2x^3$. Agar f va g - nol bo'lmagan ko'phadlar bo'lsa, u holda

$$\deg(f) \leq \deg(g) \Leftrightarrow LT \quad (1)$$

$LT(g)$ ni bo'ladi.

2-Teorema. (bo'linish algoritmlari) $g \in k[x]$ -nol bo'lmagan ko'phad bo'lsin,

u holda ixtiyoriy $f \in k[x]$ ko'phadni

$$f = qg + r$$

ko'rinishda yozilish mumkin, bu yerda $q, r \in k[x]$ va yo $r = 0$ yoki $\deg(r) < \deg(g)$.

Bundan tashqari q va r bir qiymatli aniqlangan va ularni hisoblash uchun algoritm mavjud.

Isbot. q va r larni hisoblash uchun psevdokadda yozilgan algoritm:

Kirish: g, f

Chiqish: q, r

$q := 0; r := f$

WHILE $r \neq 0$ AND $LT(g) \nmid LT(r)$ DO ni bo'ladi

$q := q + LT(r) / LT(g)$

$r := r - (LT(r) / LT(g))g$

WHILE...DO sikl operatoriga bo'ysunuvchi amallar WHILE va DO orasiga yozilgan shart bajarilguncha bajariladi; $q := \dots$ va $r := \dots$ - bu q va r qiymatlarini aniqlash yoki ta'riflash operatorlari. q va r lar bu algoritmda o'zgaruvchilar hisoblanadi. Har bir qadamda ularning qiymatlari o'zgaradi. Biz qandaydir momentda algoritm o'z ishini yakunlashini va q va r ning oxirgi qiymatlari 2-tasdiq shartlarini qanoatlantirishini isbotlashimiz lozim.

Algoritmning korrektligini isbotlashga kirishamiz. $f = qg + r$ tenglik q va r boshlang'ich qiymatlarida bajarilishini ta'kidlaymiz. Keyin har bir qadamda q va r lar ortiqcha ta'riflangandan so'ng bu tenglik bajarilishida davom etadi. Chunki,

$$f = qg + r = (q + LT(r) / LT(g))g + (r - (LT(r) / LT(g))g)$$

WHILE...DO sikl operator “ $r \neq 0$ va $LT(g) \nmid LT(r)$ ” tasdig'i yolg'on bo'lganda, ya'ni yoki $r = 0$ yoki $LT(g) \mid LT(r)$ ni bo'lmasa, bajarilishdan to'xtaydi. (1) ga ko'ra oxirgi shart $\deg(r) < \deg(g)$ shartga teng kuchli. Boshqacha aytganda, agar algoritm ishini to'xtatsa, u holda u talab etilgan q va r larni beradi.

Endi algoritm albatta to'xtashini, ya'ni WHILE va DO orasidagi tasdiq qandaydir momentda aylanishini (aks holda sikl cheksiz ko'p marta bajariladi) isbotlash qoldi. Bu yerda eng muhimi, $r - (LT(r) / LT(g))g$ yoki nolga teng, yoki r ko'phad darajasiga qaraganda kichik darajaga ega. Buni isbotlaymiz.

$$\begin{aligned} r &= a_0 x^m + \dots + a_m, & LT(r) &= a_0 x^m, \\ g &= b_0 x^k + \dots + b_k, & LT(g) &= b_0 x^k \end{aligned}$$

bo'lsin va $m \geq k$ bo'lsin. U holda

$$r - (LT(r) / LT(g))g = (a_0 x^m + \dots) - (a_0 / b_0) x^{m-k} (b_0 x^k + \dots)$$

va r ko'phad darajasi albatta kamayadi (yoki nolga aylanadi). Bu daraja chekli bo'lgani uchun, albatta chekli sondagi qadamalardan so'ng to'xtaydi.

Bu algoritm ishini maktabda o'rganiladigan ko'phadlar bo'linish protsedurasi bilan taqqoslaymiz. Mana oxiriga yetkazilmagan bo'linish misoli

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x^2 \\ 2x+1 \overline{) x^3 + 2x^2 + x + 1} \\ \underline{x^3 + \frac{1}{2}x^2} \\ \frac{3}{2}x^2 + x + 1 \end{array}$$

bu yerda $f = x^3 + 2x^2 + x + 1, g = 2x + 1$ q va r ning joriy qiymatlari $q = \frac{1}{2}x^2$ va $r = \frac{3}{2}x^2 + x + 1$. Endi

$$\begin{aligned} q &:= q + LT(r) / LT(g), \\ r &:= r - (LT(r) / LT(g))g \end{aligned}$$

operatorlar WHILE...DO siklda bo'linishning keyingi qadamini tavsiflaydi. Endi q va r lar bir qiymatli aniqlanganini isbotlash qoldi. Faraz qilaylik, $f = qg + r = q'g + r'$ va r va r' ko'phadlar darajalari g ko'phad darajasidan kichik (yoki ikkalasi yoki ulardan biri nolga teng) bo'lsin. Agar $r \neq r'$ bo'lsa, u holda $\deg(r' - r) < \deg(g)$. Ikkinchi tomondan

$$(q - q')g = r' - r \quad (2)$$

bo'lgani uchun $q' - q \neq 0$ va demak,

$$\deg(r' - r) = \deg((q' - q)g) = \deg(q' - q) + \deg(g) \geq \deg(g)$$

Demak $r = r'$ va u holda (2) dan $q = q'$ ekanligi kelib chiqadi. Isbot tugadi.

Kompyuter algebrasining ko'pgina sistemalarida bu algoritmi ba'zi o'zgartirishlar bilan amalga oshiriladi (Davenport, Tournier (1993))

Bo'linish algoritmi mavjudligining natijasi bo'lib bir o'zgaruvchili ko'phad ildizlari soni haqidagi tasdiq hisoblanadi.

3-natija. [3] $f \in k[x]$ nol bo'lmagan ko'phad bo'lsin. U holda $u \in k$ da $\deg(f)$ dan ko'p bo'lmagan ildizlarga ega.

Isbot. $m = \deg(f)$ bo'yicha induksiya qo'llaymiz. Agar $m = 0$ bo'lsa, f -nol konstanta va tasdiq o'rinli. Tasdiq $m - 1$ darajali barcha ko'phadlar uchun bajarilgan bo'lsin va f m darajaga ega bo'lsin. Agar f k da ildizlarga ega bo'lmasa tasdiq isbotlandi. Endi $a \in k$ f ko'phadning ildizi bo'lsin. f ni $x - a$ ga bo'lamiz. U holda 2-tasdiqqa ko'ra $f = q(x - a) + r$ bu yerda $r \in k$, $x - a$ bir darajaga ega bo'lganligi uchun bu tenglikda $x = a$ deb olsa, $0 = f(a) = q(a)(a - a) + r = r$ ya'ni $f = q(x - a)$ va demak q ko'phad darajasi $m - 1$ ga teng.

Biz f ko'phadning a dan farqli har qanday ildiz q ko'phadning idiz bo'lishini tasdiqlaymiz. Agar $b \neq a$ -ko'phad ildizi bo'lsa, u holda $0 = f(b) = q(b)(b-a)$, bunda $q(b) = 0$ (chunki k maydon). Induksiya farazga ko'ra q $m-1$ dan ko'p ildizlarga ega emas; demak, f k da m dan ko'p bo'lmagan ildizlarga ega.

4-teorema. k -maydon bo'lsin. U holda $k[x]$ dagi har bir ideal biror $f \in k[x]$ ko'phad uchun $\langle f \rangle$ ko'rinishda ifodalanishi mumkin. Bundan tashqari, f k dagi nol bo'lmagan konstantaga ko'paytirishgacha aniqligida bir qiymatli aniqlangan.

Isbot. $I \subset k[x]$ - biror ideal bo'lsin, agar $I = \{0\}$ bo'lsa, u holda $I = \langle 0 \rangle$ va tasdiq isbotlandi. Endi $I \neq \{0\}$ bo'lsin va $f \in I$ - minimal darajadan nol bo'lmagan ko'phad (I dagi ko'phadlar to'plamida). Biz $I = \langle 1 \rangle$ ekanligini tasdiqlaymiz. $\langle f \rangle \subset I$ munosabat ravshan, chunki I ideal. Endi $g \in I$ ko'phadni qaraymiz. bo'linish algoritmiga ko'ra (2-tasdiq) $g = qf + r$, bu yerda yoki $r = 0$, yoki $\deg(r) < \deg(f)$. I ideal bo'lgani uchun u holda $qf \in I$ va, demak $r = g - qf$. Agar $r \neq 0$ bo'lsa, u holda $\deg(r) < \deg(f)$, bu esa f ko'phad tanlanishiga ziddir. Demak, $r = 0$ ya'ni $g = qf \in \langle f \rangle$ bu esa $I = \langle f \rangle$ tenglikni isbotlaydi.

Endi yagonalikni isbotlaymiz. $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ bo'lsin. $f \in \langle g \rangle$ bo'lgani uchun, $f = hg$ biror h ko'phad uchun

$$\deg(f) = \deg(h) + \deg(g) \quad (3)$$

ga, ya'ni $\deg(f) \geq \deg(g)$ ga ega bo'lamiz. Shunga o'xshash f va g lar o'rinlarini almashtirib, $\deg(g) \geq \deg(f)$ ni ya'ni $\deg(f) = \deg(g)$ ni olamiz. (3) dan $\deg(h) = 0$ kelib chiqadi. Demak, h - nol bo'lmagan konstanta.

Bitta elementdan hosil bo'lgan ideal *bosh ideal* deb ataladi. Shunday qilib, 4-natijaga ko'ra biz $k[x]$ ni bosh ideallar sohasidan iborat yoki qisqacha B.I.S deb aytamiz.

4-natija isbotida hosil qiluvchi element sifatida biz idealdagi ko'phadlardan minimal darajalisini oldik. Bu usulni amaliyotda qo'llab bo'lmaydi, chunki idealdan barcha ko'phadlar (ular cheksiz ko'p) darajalarini tekshirishni talab etadi. Hosil qiluvchi elementni topishning oddiy usuli bormi? Masalan,

$$\langle x^4 - 1, x^6 - 1 \rangle \subset k[x]?$$

idealni hosil qiluvchi elementini qanday topish mumkin. Bunday masalalarni yaxshigina vositasi bo'lib EKUB hisoblanadi.

5-ta'rif. $f, g \in k[x]$ ko'phadlarning EKUBi deb shunday h ko'phadga aytiladiki,

(i) $h \mid f$ ni ham $h \mid g$ ni ham bo'ladi.

(ii) agar $p \mid f$ ni ham, $p \mid g$ ni ham bo'ladigan biror ko'phad bo'lsa, $p \mid h$ ni ham bo'ladi.

EKUB $\text{GCD}(f, g)$ (GCD - greatest common divisor inglizcha atama bosh harflari) deb belgilanadi.

EKUBlarning asosiy xossalari quyidagi tasdiqda bayon etilgan.

6-teorema. $f, g \in k[x]$ bo'lsin. U holda

(i) $\text{GCD}(f, g)$ mavjud va k dagi nol bo'lmagan konstantaga ko'paytirishgacha aniqlikda yagona;

(ii) $\text{GCD}(f, g) = \langle f, g \rangle$ idealning yasovchisi hisoblanadi.

(iii) $\text{GCD}(f, g)$ ni hisoblash uchun algoritim mavjud

Isbot. $\langle f, g \rangle$ idealni qaraymiz. $k[x]$ dagi har bir ideal bosh ideal bo'lganligi uchun (4-natija), shunday $h \in k[x]$ ko'phad mavjudki, $\langle f, g \rangle = \langle h \rangle$ $h = \text{GCD}(f, g)$ ekanini tasdiqlaymiz. Dastlab, $h \mid f$ va $h \mid g$ ni bo'lishini tasdiqlaymiz, chunki, $f, g \in \langle h \rangle$. Shunday qilib 5-ta'rif birinchi bandi bajariladi. Endi $p \in k[x]$ f va g ni bo'lsin. Bu $f = Cp$ va $g = Dp$ biror $C, D \in k[x]$ lar uchun $h \in \langle f, g \rangle$ bo'lgani uchun shunday A va B ko'phadlar mavjudki, $Af + Bg = h$, bundan

$$h = Af + Bg = ACp + BDp = (AC + BD)p$$

ya'ni $p \mid h$ ni bo'ladi. Demak, $h = \text{GCD}(f, g)$.

GCD ning mavjudligi isboti tugadi. Yagonaligi isbotiga o'tamiz. $h' = f$ va g ko'phadlarning boshqa EKUBi, u holda 5-ta'rif 2-bandiga asosan h va h' ko'phadlar bir-birini bo'ladi. Bunda h nol konstantaga ko'paytirishgacha aniqlikda h' ga teng. (i) va (ii) bandlar isbotlandi.

Hozir ko'rilgan GCD ning mavjudligi isboti amaliy jihatdan foydali. GCD ni hisoblash jarayoni $\langle f, g \rangle$ idealning hosil qiluvchi elementini hisoblashga olib kelinadi. Bu esa yuqorida ta'kidlanganidan cheksiz sondagi ko'phadlar darajalarini topishni talab etadi. Buning uchun klassik algoritmi, Evklid algoritmi mavjud, u $k \times$ dagi ikkita ko'phad EKUBini hisoblashga imkon beradi. Bu algoritmi tavsifi 6-tasdiq isbotini yakunlaydi.

Dastlab zarur ta'riflarni beramiz. $f, g \in k \times$ $g \neq 0$ bo'lsin. f ni $f = qg + r$ ko'rinishda yozamiz, bu yerda q va r ikkinchi tasdiqdagi kabi aniqlangan. U holda $r = f - qg$ ni g ga bo'lgandagi qoldiq deb ataladi ($r = \text{qoldiq}(f, g)$ deb yozamiz). Endi Evklid algoritmi tavsifini beramiz.

Kirish: f, g

Chiqish: h

$h := f$

$s := g$

WHILE $s \neq 0$ DO

$rem := \text{qoldiq}(h, s)$

$h := s$

$s := rem$

Endi nima uchun bu algoritmi haqiqatdan GCD ni aniqlashini tushuntirishimiz zarur. $f = qg + r$ 2-teoremadagi kabi.

$$\text{GCD}(f, g) = \text{GCD}(f - qg, g) = \text{GCD}(r, g)$$

ekanligini tasdiqlaymiz. Bu tasdiqlash (ii) bandga ko'ra $\langle f, g \rangle$ va $\langle f - qg, g \rangle$ ideallar ustma-ust tushishini isbotlash yetarli.

(4) ni

$$GCD(f, g) = GCD(g, r)$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda $\deg(g) > \deg(r)$ yoki $r = 0$ ekanligini ta'kidlaymiz. Agar $r \neq 0$ bo'lsa, biz bu protsedurani davom ettirib darajani pasaytirishimiz mumkin, ya'ni g ni $g = q'r + r'$ ko'rinishda yozib

$$GCD(g, r) = GCD(r, r')$$

ni olamiz, bu yerda $\deg(r) > \deg(r')$ yoki $r' = 0$. Shunday qilib,

$$GCD(f, g) = GCD(g, r) = GCD(r, r') = GCD(r', r'') = \dots,$$

tengliklar zanjirini olamiz, bunda yo

$$\deg(g) > \deg(r) > \deg(r') > \deg(r'') \dots,$$

darajalar kamayadi yoki $r, r', r'', \dots$ lardan biri nolga aylanganda jarayon to'xtaydi.

Endi biz Evklid algoritmi qanday ishlashini tushuntira olamiz. Algoritm o'zgaruvchilari bo'lib h va s hisoblanadi, bu o'zgaruvchilar (5) munosabat tarkibiga kiradi: h qiymati har bir GCD dagi birinchi ko'phad, s qiymati esa-ikkinchi ko'phad hisoblanadi. Oson ishonch hosil qilish mumkinki, (5) da navbatdagi GCD dan keyingisigacha o'tish WHILE ... DO siklida algoritmnining mos o'tishi kabi kechadi. Shunday qilib, algoritmnining har bir qiymatida $GCD(h, s) = GCD(f, g)$.

Algoritm ishi to'xtashi lozim, chunki s ko'phad darajasi kamayib boradi va biror momentda s nolga aylanadi. Bu momentda $GCD(h, 0) = GCD(f, g)$ ga ega bo'lamiz, chunki $\langle h, 0 \rangle = \langle h \rangle$ u holda $GCD(h, 0) = h$ emas. Shunday qilib, $h = GCD(f, g)$ s nolga aylanganda, ya'ni algoritm to'xtaganda $h - f$ va g ko'phadlarning EKUBiga teng bo'ladi. 6-teorema isboti tugadi.

Ikkita butun EKUBini hisoblovchi Evklid algoritmi varianti mavjud. Kompyuter algebrasining ko'pgina sistemalarida ikkita ko'phad yoki butun son EKUBini hisoblash uchun takomillashgan Evklid algoritmi qo'llanilgan. (Davenport, Siret, Tourier (1993)).

Evklid algoritmi ishiga misol sifatida $GCD(x^4 - 1, x^6 - 1)$ ni hisoblash jarayonini qaraymiz. dastlab bo'linish algoritmini qo'llaymiz

$$\begin{aligned}
x^4 - 1 &= 0(x^6 - 1) + x^4 - 1 \\
x^6 - 1 &= x^2(x^4 - 1) + x^2 - 1 \\
x^4 - 1 &= (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 0
\end{aligned}$$

Endi (5) ga ko'ra

$$GCD(x^4 - 1, x^6 - 1) = GCD(x^6 - 1, x^4 - 1) = GCD(x^4 - 1, x^2 - 1) = GCD(x^2 - 1, 0) = x^2 - 1$$

ga ega bo'lamiz. GCD ni hisoblash $\langle x^4 - 1, x^6 - 1 \rangle$ hosil qiluvchi elementini topish masalasiga javob beradi, ya'ni 6-tasdiqdan va $GCD(x^4 - 1, x^6 - 1) = x^2 - 1$ ekanligidan $\langle x^4 - 1, x^6 - 1 \rangle = \langle x^2 - 1 \rangle$ ekanligi kelib chiqadi.

Lekin tabiiy savol tug'iladiki: ideal uchta yoki undan ortiq ko'phadlar bilan hosil qilinsa, qanday yo'l tutish lozim. Buning uchun bir necha ko'phadlar EKUBini topish zarur.

7-ta'rif. $f_1, \dots, f_s \in k[x]$ ko'phadlarning EKUBi deb shunday h ko'phadga aytiladiki

(i) $h \mid f_1, \dots, f_s$ larni bo'ladi.

(ii) agar $p \mid f_1, \dots, f_s$ larni bo'luvchi biror ko'phad bo'lsa, u holda $p \mid h$ ni ham bo'ladi.

Bunday ko'phad $GCD(f_1, \dots, f_s)$ deb belgilanadi. EKUBning asosiy xossalari quyidagi tasdiqda keltirilgan.

8-teorema. $f_1, \dots, f_s \in k[x]$, $s \geq 2$ bo'lsin, u holda

(i) $GCD(f_1, \dots, f_s)$ mavjud va k dan nol bo'lmagan konstantaga ko'paytirish bir qiymatli aniqlikda

(ii) $GCD(f_1, \dots, f_s) = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealni hosil qiladi.

(iii) agar $s \geq 3$ bo'lsa, u holda $GCD(f_1, \dots, f_s) = GCD(f_1, GCD(f_2, \dots, f_s))$

(iv) $GCD(f_1, \dots, f_s)$ ni hisoblash uchun algoritm mavjud.

Isbot. (i) va (ii) larni isbotlash 6-tasdiqning o'sha bndlari isbotiga o'xshash (iii) ni isbotlaymiz. $h = GCD(f_1, \dots, f_s)$ bo'lsin, u holda

$$\langle f_1, h \rangle = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$$

(ii) dan

$$\langle GCD(f_1, h) \rangle = \langle GCD(f_1, \dots, f_s) \rangle$$

kelib chiqadi.

Endi $GCD(f_1, h) = GCD(f_1, \dots, f_s)$ tenglik 4-natija 2- tasdig'idan(yagonalikdan) kelib chiqadi.

Nihoyat, $GCD(f_1, \dots, f_s)$ ni hisoblash algoritmi mavjudligini isbotlash qoldi. Buning uchun (iii) bandni va Evklid algoritmini birga qo'shish lozim. Masalan f_1, f_2, f_3, f_4 ko'phadlar EKUBini topmoqchi bo'laylik.

$$GCD(f_1, f_2, f_3, f_4) = GCD(f_1, GCD(f_2, f_3, f_4)) = GCD(f_1, GCD(f_2, GCD(f_3, f_4))) \quad (6)$$

ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, f_1, f_2, f_3, f_4 ko'phadlar EKUBini topish uchun Evklid algoritmini uch marta qo'llash zarur. 8-tasdiq isbotlandi.

GCD ni hisoblash protsedurasi ko'pgina ko'mpyuter algebrlik sistemalarida faqat 2 ta ko'phad EKUBini topish mumkin. Shuning uchun uchta va undan ortiq ko'phadlar qoladi. 8-tasdiq usulidan foydalanish zarur. Masalan,

$$\langle x^3 - 3x + 2, x^4 - 1, x^6 - 1 \rangle \subset k[x]$$

Idealni qaraymiz. $GCD(x^3 - 3x + 2, x^4 - 1, x^6 - 1)$ bu idealni hosil qilishni bilamiz. Oson tekshirish mumkinki

$$GCD(x^3 - 3x + 2, x^4 - 1, x^6 - 1) = GCD(x^3 - 3x + 2, GCD(x^4 - 1, x^6 - 1)) = GCD(x^3 - 3x + 2, x^2 - 1) = x - 1$$

ya'ni

$$\langle x^3 - 3x + 2, x^4 - 1, x^6 - 1 \rangle = \langle x - 1 \rangle$$

Endi tushunarliki, $\langle f_1, \dots, f_s \rangle, f_1, \dots, f_s \in k[x]$ idealni hosil qiluvchi elementni hisoblash algoritmi qanday tuzilish lozim.

Bo'linish va GCD ni hisoblash algoritmlarining navbatdagi tadbiqi sifatida 4-§. da aytib o'tilgan. Idealga tegishlilik masalasini qaraymiz. ixtiyoriy $f \in k[x]$ ko'phad va berilgan $f_1, \dots, f_s \in k[x]$ ko'phadlar uchun $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealda yotish yoki yotmasligini aniqlovchi algoritm mavjudmi? Javob ijobiy va bunday algoritmi tavsiflash qiyin emas. Birinchi qadam $GCD(f_1, \dots, f_s)$ ni hisoblash, ya'ni

$\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealning h hosil qiluvchi elementini aniqlash $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ tegishlilik munosabat $f \in \langle h \rangle$ tegishlilikka teng kuchli bo'lgani uchun bizga f ni h ga qoldiq bilan bo'lish qoladi: $f = qh + r, \deg(r) < \deg(h)$. Shunday qilib, f idealga faqat va faqat $r = 0$ bo'lganda tegishli bo'ladi. Masalan,

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 7 \in \langle x^3 - 3x + 2, x^4 - 1, x^6 - 1 \rangle$$

o'rinlimas ekanini bilmoqchimiz: $x-1$ bu idealning hosil qiluvchi element ekanini bilamiz, shuning uchun

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 7 \in \langle x-1 \rangle$$

o'rinlimi degan savolga javob berish lozim. Lekin

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 7 = x^2 + 5x + 8 \cdot x - 1 + 1$$

Demak, $x^3 + 4x^2 + 3x - 7$ idealga tegishli emas.

1. 3-natija oddiy bo'lsada undan bir nechta qiziqarli natijalar kelib chiqadi.

Masalan, n -tartibli Vandermond determinantini qaraymiz, bu yerda $a_1, \dots, a_n \in k$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Agar a_i juft-juft turlicha bo'lsa, bu determinant nolga teng emas. Ko'rsatma: agar determinant nolga teng bo'lsa, ustunlar chiziqli bog'langan. U holda ustunlar orasidagi chiziqli munosabat koeffitsientlari $\leq n-1$ darajali ko'phadni aniqlaydi va u n ta ildizga ega.

2. $k[x]$ dagi har bir ideal bosh (ya'ni bir element bilan hosil qilingan) bo'lishi haqidagi tasdiq faqat bir o'zgaruvchi ko'phadlar uchun o'rinli. Bu nima ekanligini ko'ramiz. Ya'ni $I = \langle x, y \rangle \subset k[x, y]$ idealni qaraymiz. I bosh ideal bo'lmaydi chunki, $x = fg$ $f, g \in k[x, y]$ bo'lsa, f yoki g - konstantadan iborat bo'ladi. Bundan faqat bir o'zgaruvchili xolida qo'llaniladigan bu paragrafda qaralgan GCD ni hisoblash va u bilan ishlash usullari kelib chiqadi. EKUBni $n \geq 2$ o'zgaruvchili ko'phadlar uchun topilishi mumkin, lekin nazariyasi va usullari ancha murakkab.

3. $h = \text{GCD}(f, g)$, $f, g \in k[x]$ bo'lsin. Shunday $A, B \in k[x]$ ko'phadlar mavjudligini isbotlanki, $Af + Bg = h$ tenglik o'rinli bo'ladi.

4. $f, g \in k[x]$ bo'lsin; u holda ixtiyoriy $q \in k[x]$ dan $\langle f - qg, g \rangle = \langle f, g \rangle$. Bu (4) tenglikni isbotlaydi.

5. $f_1, \dots, f_s \in k[x]$ va $h = \text{GCD}(f_2, \dots, f_s)$ (ya'ni $\langle h \rangle = \langle f_2, \dots, f_s \rangle$) bo'lsin. U holda $\langle f_1, h \rangle = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$. Bu 8- tasdiq (iii) bandini isbotlaydi.

6. 4-§.dagi nollar haqidagi teoremani bir o'zgaruvchili holda qaraymiz. Bu teoremda $f_1, \dots, f_s \in C[x]$ bo'lganda $I(V(f_1, \dots, f_s))$ va $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ orasidagi bog'lanish o'rganiladi. GCD dan foydalanish masalasi bitta hosil qiluvchi elementga redutsirashga imkon beradi. Endi masala quyidagicha bayon qilinadi. $I(V(f))$ idealni, $f \in C[x]$ bo'lmaganda oshkora tavsiflash. Asosiy maydon- bu C maydon bo'lgani uchun 1-mashqqa ko'ra f ko'paytuvchilarga ajraladi. Ya'ni:

$$f = c(x - a_1)^{r_1} \dots (x - a_l)^{r_l}$$

Bu yerda $a_1, \dots, a_l \in C$ juft-juft turlicha va $c \in C - \{0\}$. Endi

$$f_{red} = c \cdot x - a_1 \dots (x - a_l)$$

ko'phadni aniqlaymiz. f va f_{red} ko'phadlar ustma-ust tushadi., lekin ularning karraliligi turlicha. Xususan, f_{red} ko'phad barcha ildizlari oddiy (bir karralilikda) f_{red} polinom f polinomning redutsirlangan yoki kvadratlardan holi qismi deb ataladi. f_{red} maksimal darajadagi f polinomning bo'luvchisi kvadratlardan holi hisoblanadi. Bu yerda quyidagi tengliklar o'rinli:

(a) $V(f) = \{a_1, \dots, a_l\}$.

(b) $I(V(f)) = \langle f_{red} \rangle$.

I BOBNING XULOSASI

Bu bobda $V(f_1, \dots, f_s)$ affin ko'pxillik nuqtalarini tavsiflash masalasini qaralgan. Bu masalani $f_1 = \dots = f_s = 0$ polinomial tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini tavsiflash masalasi deb qayta bayon etish mumkin. Agar yechimlar chekli bo'lsa, u holda bizning maqsadimiz-ularni sanab o'tishdan iborat. Agar ular cheksiz ko'p bo'lsa, nima qilish kerak? Bu bobda biz affin ko'pxillikni parametrlash tushunchasini kiritildi va parametrlashga doir ko'plab misollar qarab chiqildi.

Bu bobning maqsadi ideal tushunchasining tabiiy tushuncha ekanligini, ideallarning affin ko'pxilliklar bilan qanday bog'liq ekanligi, ideallar tilida affin geometriyasining hisoblash masalalarini qanday ifodalanishini ko'rsatildi.

Biz bu bobda bir o'zgaruvchili ko'phadlarni bo'lish algoritmini qaradik. Bu oddiy algoritmnini qo'llash kuchli natijalar beradi. Masalan, uning yordamida $k[x]$ dagi ideallar strukturasi aniqlaymiz va eng katta umumiy bo'luvchi tushunchasini tadqiq etamiz. Bu yerda qaralayotgan usullar yuqoridagi paragraflarda bayon etilgan ko'pgina masalalarni yechishga yordam beradi.

II-BOB

KO'PXILLIKLARDA BERILGAN POLINOMIAL VA RATSIONAL FUNKSIYALAR

Bu bobda biz ko'pxilliklarning akslantirishlarini qaraymiz. ko'pxilliklarda berilgan polinomial va ratsional funksiyalarning algebraik xossalarini o'rganish shu ko'pxilliklarning geometrik xossalarini o'rganishda yordam beradi.

1.§. Polinomial akslantirishlar

Ko'pxilliklarni akslantirishlarini o'rganishni bundan oldin qarab chiqilgan ikkita misolni qarash bilan boshlaymiz. R^3 dagi buralgan kubikaning urinma sirti quyidagi parametrik shaklda berilishini eslatamiz:

$$\begin{aligned}x &= t + u \\y &= t^2 + 2tu \\z &= t^3 + 3t^2u\end{aligned}\tag{1}$$

Funksiyalar tilida (1) parametrik ifodalarni quyidagi formulalar orqali berish mumkin.

$$\begin{aligned}\phi: R^2 &\rightarrow R^3 \\ \phi(t, u) &= (t + u, t^2 + 3t^2u)\end{aligned}\tag{2}$$

Bu akslantirishning aniqlanish sohasi - $V = R^2$ affin ko'pxilligi, obrazi bo'lsa - urinma sirt S dan iborat.

S - $W = V(x^3z - (3/4)x^2y^2 - (3/2)xyz + y^3 + (1/4)z^2)$ affin ko'pxillikdan iborat. Shunday qilib, bizning parametrlashtirishimiz V ko'pxillikni W ga "polinomial akslantirishi" deb ataluvchi akslantirishni aniqlaydi. "Polinomial" degan so'z ϕ akslantirishning komponentalari t va u ning ko'phadlaridan (polinomlaridan) iboratligini ko'rsatadi.

Tenglamalar sistemasidan o'zgaruvchilarni yo'qotishni o'rganganimizda,

$$\pi_l(a_1, \dots, a_n) = (a_{l+1}, \dots, a_n)$$

formula bilan bilan aniqlanuvchi

$$\pi_l : C^n \rightarrow C^{n-1}$$

proeksiyalash akslantirishini qaragan edik.

Agarda biz $V = V(I) \subset C^n$ ko'pxillik bilan ishlasak, u holda π_l ni V da chegaralaymiz. U holda bizga ma'lumki, $\pi_l(V)$ affin ko'pxilligi $W(I_l)$ da saqlanadi, bunda $I_l = I \cap C[x_{l+1}, \dots, x_n]$ I idealni l -chi inkor etuvchi ideali bo'ladi. Shunday qilib, biz π_l ni ko'pxilliklarning akslantirishlari deb qarashimiz mumkin. Bu holda π_l akslantirish tarifiga ko'ra, uning komponentalarini aniqlanish, sohasining koordinatalarining ko'phadi deb qarash mumkin.

1-ta'rif [5]. $V \subset k^m$ va $W \subset k^n$ ko'pxilliklar bo'lsin. $\phi: V \rightarrow W$ funksiya polinomial yoki regulyar akslantirish deyiladi, agarda shunday $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ polinomlar topilsaki,

$$\phi(a_1, \dots, a_m) = (f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m))$$

shart barcha $(a_1, \dots, a_m) \in V$ larda bajarilsa. Bunda biz

$$(f_1, \dots, f_n) \in (k[x_1, \dots, x_m])^n$$

ko'phadlarning n -to'plami ϕ ni tasvirlaydi deymiz.

$\phi: V \subset k^m$ ko'pxillikni $W \subset k^n$ ko'pxillikka $(f_1, \dots, f_n)$ orqali ifodalangan polinomial akslantirishi shuni ko'rsatadiki, W ni aniqlovchi polinomlar $(f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m))$ nuqtalarda barcha $(a_1, \dots, a_m) \in V$ da nolga tengligini ko'rsatadi. $\pi_l: k^3 \rightarrow k^2$, $\pi_l(x, y, z) = (yz)$ proeksiyalar $\pi_l: V \rightarrow W$ polinomial akslantirishlarni aniqlaydi. Darhaqiqat, $\pi_1(V) = \{(x^2, x^3): x \in k\}$ dagi har bir nuqta W ni aniqlovchi tenglamani qanoatlantiradi.

$W = k$ hol nihoyatda qiziqdir. Bunda $\phi: V$ ko'pxillikda aniqlangan skalyar polinomial funksiyalar. V ni k ga akslantiruvchi polinomial funksiyalarni alohida o'rganish shu sababdan ham kerakki, $\phi: V \rightarrow k^n$ umumiy polinomial akslantirishlar ϕ ning n ta $\phi_i: V \rightarrow k$ komponentalaridan tuzilgandir. Boshqacha aytganda, agarda biz $\phi: V \rightarrow k$ ni o'rgansak, $\phi: V \rightarrow k^n$ akslantirishni qanday tuzish kerakligini bilgan bo'lamiz.

Polinomial funksiyalarni quyidagi tasdiqdan boshlaymiz: agar $V \subset k^m$ bo'lsa, u holda $\phi: V \rightarrow k$ akslantirishni ifodalovchi $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ko'phad mavjud bo'lsa, 1-ta'rifga ko'ra $\phi: V \rightarrow k$ akslantirish polinomial funksiya bo'ladi. Odatda polinomial funksiyalarni uning polinomial ko'rinishini oshkor ko'rsatgan holda beramiz. Demak, uning vakilini ko'rinishini izlash qiyinchilik tug'dirmaydi. Lekin faqat juda kam hollarda polinomial tasvirlash bir qiymatli aniqlangan bo'ladi. Masalan, $V = (y - x^2) \subset R^2$ ko'pxillikni qaraylik. $f = x^3 + y^3$ polinom V dan R ga polinomial funksiyaning aniqlaydi. Lekin $f = x^3 + y^3 + (y - x^2)$, $h = x^3 + y^3 + (x^4 y - x^6)$ va $F = x^3 + y^3 + A(x, y)(y - x^2)$ lar istalgan $A(x, y)$ da V da aynan o'sha polinomial funksiyaning aniqlaydi. Darhaqiqat, agar f ga $I(V)$ dagi ixtiyoriy ko'phadni qo'shsak, u holda bu f ni V ning nuqtalardagi qiymatlarini o'zgartirmaydi. Umumiy holda ham xuddi shunday bo'ladi.

2-teorema. $V \subset k^m$ affin ko'pxilligi bo'lsin. U holda

- (i) f va $g \in k[x_1, \dots, x_m]$ lar V da aynan bitta polinomial funksiyaning ifodalashi faqat va faqat $f - g \in I(V)$ bo'lgandagina mumkin bo'ladi.
- (ii) $(f_1, \dots, f_n)$ va $(g_1, \dots, g_n)$ lar V ni k^n ga aynan bitta polinomial akslantirishni aniqlashi faqat va faqat barcha $1 \leq i \leq n$ lar uchun $f_i - g_i \in I(V)$ bo'lgandagina mumkin.

Isbot. (i) Agar $f - g = h \in I(V)$ bo'lsa, u holda har bir $p = (a_1, \dots, a_m) \in V$ nuqta uchun $f(p) - g(p) = h(p) = 0$. Demak, f va g lar V da aynan bitta funksiyaning ifodalaydi. Aksincha, agar f va g lar V da bitta funksiyaning ifodalasa, u holda $f(p) - g(p) = 0 \quad \forall p \in V$ bo'ladi. Shunday qilib, $f - g \in I(V)$. (ii) punkt (i) punktning bevosita natijasidir.

Boshqacha aytganda $k[x_1, \dots, x_m]$ da polinomlar va polinomial funksiyalar orasida o'zaro bir qiymatli moslik $I(V) = \{0\}$ bo'lgandagina bajariladi. 7-mashqda agar k cheksiz bo'lsa, $I(V) = \{0\}$ faqat va faqat $V = k^m$ bo'lgandagina bo'lishligi isbotlanadi.

Ko'pxilliklardagi polinomial funksiyalarning tasvirlash bir qiymatli bo'lmagan

holda, uni tuzatishning ikki usuli mavjud.

- Qo'pol qilib aytganda V dagi aynan bitta funksiyani ifodalovchi barcha larni "birgalikda olib" ularni "yangi obekt" deb e'lon qilish mumkin. U

holda biz bunday polinomlar to'plamini V dagi funksiyaning berilishi deb qarashimiz mumkin.

- Ikkinchi tomondan, V dagi qandaydir funksiyani ifodalovchi polinomlar ichida eng sodda ko'rinishdagi tanlashimiz mumkin.

Bu ikki yo'lning har birining ustun tomonlari bor, biz ularni keyingi paragraflarda qarab chiqamiz. Hozir biz ko'pxilliklarning qanday xossalari polinomial funksiyalarda o'z aksini topishini ifodalovchi ikkita misolni qarab chiqamiz.

3-ta'rif. $k[V]$ bilan $\phi: V \rightarrow k$ polinomial funksiyalar to'plamini belgilaymiz.

k – maydon bo'lganligi uchun sababli, $\phi, \psi \in k[V]$ ixtiyoriy funksiyalarning yig'indisi va ko'paytmasini ularning qiymatlarini qo'shish va ko'paytirish orqali kiritamiz. Ixtiyoriy $p \in V$

$$(\phi + \psi)(p) = \phi(p) + \psi(p)$$

$$(\phi \cdot \psi)(p) = \phi(p) \cdot \psi(p)$$

Agar ϕ, ψ uchun mos ravishda $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ vakillarni tanlasak, u holda $f + g$ polinomlar $\phi + \psi$ ni, $f \cdot g$ ko'paytma $\phi \cdot \psi$ ni ifodalaydi. Demak, $\phi + \psi$ va $\phi \cdot \psi$ lar V

dagi polinomial funksiyalar bo'ladi.

Shunday qilib, $k[V]$ da $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi amallardan foydalanib yig'indi va ko'paytirish amallarini aniqlash mumkin. Bu amallarning barcha asosiy xossalari $k[V]$ da o'rinli. Demak, $k[V]$ komutativ xalqa ekan.

Endi biz $k[V]$ xalqa V ko'pxillikning geometriyasi haqida nima deyishi mumkinligini aniqlashga tayyormiz. $V \subset k^m$ ko'pxillikni keltiriladigan degan edik, agarda uni ikkita bo'sh bo'lmagan xos ko'pxilliklarning yig'indisi ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa: $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \neq V$, $V_2 \neq V$. Masalan, $V = V(x^3 + xy^2 - xz, yx^2 - y^3 - yz) \subset k^3$ keltiriladigan, chunki tenglamalarni ko'paytuvchilarga ajratib, biz $V = V(x^2 + y^2 - z) \cup V(x, y)$ yoyilmani hosil qilamiz. Biz shuni ko'rsatmoqchimizki, keltirilganlik kabi geometrik xossalari $k[V]$ xalqaning yetarlicha yaxshi algebraik tasvirlanishdan "ayirib" tashlash mumkin.

Faraz qilaylik, masalan

$$f = x^2 + y^2 - x, \quad g = 2x^2 - 3y^4z \in k[x, y, z] \quad (3)$$

bo'lib, ϕ va ψ lar $k[V]$ dagi mos elementlar bo'lsin.

Shuni qayd qilamizki, na ϕ va na ψ V da nolga aynan aylanmaydi:

$$V : (0, 0, 5) \in V, \quad \phi(0, 0, 5) = f(0, 0, 5) - 5 \neq 0$$

Xuddi shunday $(1, 1, 2) \in V$, $\phi(1, 1, 2) = g(1, 1, 2) - 4 \neq 0$. Lekin bu funksiyalarning ko'paytmasi $\phi \cdot \psi$ V dagi har bir nuqtada nolga teng. Sababi shundaki

$$\begin{aligned} f \cdot g &= (x^2 + y^2 - z)(2x^2 - 3y^4z) = 2x(x^3 + xy^2 - xy) - 3y^3z(x^2y + y^3 - yz) \in \\ &\in \langle x^3 + xy^2 - xz, x^2y + y^3 - yz \rangle \end{aligned}$$

Demak, $f \cdot g \in I(V)$, shu sababli mos polinomial $\phi \cdot \psi$ funksiya V da aynan nolga teng bo'ladi.

Maydonning ikkita nolmas elementlari ko'paytmasi yoki $k[x_1, \dots, x_n]$ ning ikkita nolmas polinamlari ko'paytmasi nolga teng bo'lmaydi [3]. Umuman, komutativ R halqaga *butunlik soxasi* deyiladi, agarda R da $a \cdot b = 0$ ligidan yoki $a = 0$ yoki $b = 0$ kelib chiqsa. Shunday qilib bizning V ko'pxillik uchun $k[V]$ halqa butunlik soxasi bo'lmaydi. Undan tashqari $k[V]$ da $\phi \neq 0$, $\psi \neq 0$, lekin $\phi \cdot \psi = 0$ funksiyalarning mavjudligi V ko'pxillikning keltirilganligining to'g'ridan - to'g'ri natijasi: (3) da f ko'phad (polinom) $V_1 = V(x^2 + y^2 - z)$ da nolga teng, lekin $V_2 = V(x, y)$ da emas; xuddi shunday g V_2 da nolga teng, lekin V_1 da emas. Aynan

shu sababli $V = V_1 \cup V_2$ ning har bir nuqtasida $f \cdot g = 0$. Biz V ko'pxillikning geometrik xossalari va $k[V]$ halqaning algebraik xossalari orasida bog'lanish borligini ko'rsatdik.

Umumiy holda quyidagi tasdiq o'rinli:

4- teorema. $V \subset k^n$ – *affin ko'pxilligi bo'lsin. Quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:*

- (i) V keltirilmaydigan;
- (ii) $I(V)$ ideal sodda;
- (iii) $k[V]$ – butunlik sohasi bo'ladi;

Isbot. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) bu 3-teoremadan iborat. (iii) $\Rightarrow$ (i) ekanligini isbotlaymiz. Faraz etaylik $k[V]$ butunlik soxasi, lekin V keltiriladigan bo'lsin. 1-ta'rifga ko'ra $V = V_1 \cup V_2$ bo'lib, V_1 va V_2 lar V ko'pxillikning bo'shmas xos qism ko'pxilligidir. $f_1, f_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$ shunday polinomlarni qaraymizki, $f_1 - V_1$ da nolga teng bo'lib, V_2 da nolga aylanmasin, f_2 bo'lsa, V_2 da nolga teng bo'lib, V_1 da nolga aynan teng bo'lmasin. (Bunday polinomlar mavjud, chunki V_1 o'zida V_2 ni, V_2 bo'lsa V_1 ni saqlamaydi). Shunday qilib, f_1 ham, f_2 ham $k[V]$ da nolni ifodalamaydi. Lekin $f_1 \cdot f_2$ ko'paytma $V_1 \cup V_2 = V$ ning barcha nuqtalarida nolga aylanadi. Demak, bu ko'paytma $k[V]$ da nolga teng, bu bo'lsa $k[V]$ halqaning butunligiga ziddir. Demak, V keltirilmas ekan.

Endi (i) $\Rightarrow$ (iii) ni isbotlaymiz. Faraz etaylik $k[V]$ butunlik soxasi bo'lmasin. U holda shunday ikkita $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ polinomlar topiladiki, na f va na g V da nolga aylanmaydi, lekin ularning ko'paytmasi V dagi har bir nuqtada nolga teng bo'ladi. V ko'pxillikni qism ko'pxilliklar yig'indisi ko'rinishida ifodalanishi

$$V = (V \cap V(f)) \cup (V \cap V(g))$$

mumkin. Berilgan shartlarda $V \cap V(f) \neq V$, $V \cap V(g) \neq V$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Bu V ko'pxillikning keltirilmasligiga ziddir.

Polinomial akslantirishlarni o'rganib turib, ko'pxillik haqida qanday ma'lumotlarni olish mumkinligi ko'rsatiladi. $V \subset C^3$ ko'pxillik quyidagi uchta kvadratiklarning kelishmasi sifatida aniqlangan bo'lsin:

$$x^2 + 2xz + 2y^2 + 3y = 0$$

$$xy + 2x + z = 0$$

$$xz + y^2 + 2y = 0$$

(4)

V ko'pxillikni o'rganish maqsadida $y > z > x$ bo'yicha tartiblangan lex – tartib (4) ko'phadlar orqali hosil qilingan idealning Gryobner bazisini topamiz. Bu bazis quyidagi ikki polinomdan tuzilgan

$$\begin{aligned} g_1 &= y - x^2 \\ g_2 &= z + x^3 + 2x \end{aligned} \quad (5).$$

Geometrik nuqtai nazardan bu V ko'pxillikni x o'qqa proeksiyasi “ustiga” akslantirishdan iboratligini bildiradi, chunki (5) polinomlar o'zgarma yuqori koeffitsientlarga ega. Bundan tashqari, $\forall x \in C$ uchun shunday yagona y va yagona z topiladiki, $(x, y, z) \in V$ bo'ladi.

Boshqacha aytganda, quyidagi akslantirishlar mavjud

$$\begin{aligned} \pi : V &\rightarrow C & (x, y, z) &\rightarrow x \\ \phi : C &\rightarrow V & x &\rightarrow (x, x^2, -x^3 - 2x) \end{aligned}$$

Shuni ta'kidlaymizki, (5) ga ko'ra ϕ akslantirishning obrazi V ga tegishli bo'ladi. π va ϕ polynomial akslantirishlar ekanligi ko'rinib turibdi.

Biz bu akslantirishlar V ko'pxillikning nuqtalari bilan C ko'pxilliklar orasida o'zaro bir qiymatli moslikni aniqlaydi deb tasdiqlaymiz. Bu tasdiq isbotlangan bo'ladi, agarda biz π va ϕ larning o'zaro teskari ekanligini ko'rsata olsak. Avvalo $\pi \circ \phi = id_C$ ekanligini ko'rsatamiz. Buni ko'rsatish qiyin emas, chunki

$$(\pi \circ \phi)(x) = \pi(x, x^2, -x^3 - 2x) = x$$

Ikkinchi tomondan, agar $(x, y, z) \in V$ bo'lsa, u holda

$$(\phi \circ \pi)(x, y, z) = (x, x^2, -x^3 - 2x)$$

(5) ga ko'ra, $y - x^2, z + x^3 + 2x \in I(V)$. Demak, $\phi \circ \pi$ V da $id_V(x, y, z) = (x, y, z)$ akslantirishni aniqlaydi.

Bu munosabatlardan $V \subset C^3$ va C lar “izomorf” ko'pxilliklar ekanligiga shu ma'nodaki, V ko'pxillikni C ning ustiga polynomial biyeksiyasi mavjud, jumladan, teskari akslantirish ham polynomial bo'lishligiga ishonch hosil qilamiz. Bu ikkita ko'pxillik har xil tenglamalar orqali berilgan bo'lsa, va har xil fazolarda joylahsgan bo'lsada, ular qandaydir ma'noda “bir xildir”. Bundan tashqari, (5) Gryobner bazisini hisoblash shuni ko'rsatadiki, $C[V] = C[x]$ shu ma'noda o'rinliki, har bir $\psi \in C[V]$ element (5) dagi y va z larning ifodasida almashtirish orqali x ning polinomiga bir qiymatli ravishda keltirilgan bo'ladi. Agar x $W = C$ ko'pxillikda koordinata sifatida ishlatilsa, $C[W] = C[x]$ bo'ladi. Demak, izomorf ko'pxilliklardagi polynomial funksiyalar to'plami ustma-ust tushadi.

Shunday qilib, affin ko'pxilliklarda polynomial funksiyalarni o'rganish natijasida uni keltirilganlik va keltirilmaganlik haqida xulosa chiqarish mumkin ekan. Bundan tashqari $k[V]$ halqaning strukturasi ko'pxilliklarni klassifikatsiya qilish bo'yicha ma'lumotni o'zida saqlaydi.

2.§ Polinomial halqalar faktor halqasi

1-ta'rif. $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ – biro ideal bo'lsin. $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ ko'phadlar I modul bo'yicha taqqoslanuvchi deyiladi, $f \equiv g \pmod{I}$, agar $f - g \in I$ bo'lsa.

Misol. $I = \langle x^2 - y^2, x + y^3 + 1 \rangle \subset k[x, y]$ bo'lsin, u holda $f = x^4 - y^4 + x$ va $g = x + x^5 + x^4 y^3 + x^4$ ko'phadlar I modul bo'yicha taqqoslanuvchi, chunki

$$f - g = x^4 - y^4 - x^5 - x^4 y^3 - x^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) - (x^4)(x + y^3 + 1) \in I$$

2-teorema. $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ – ideal bo'lsin. U holda I bo'yicha taqqoslanish $k[x_1, \dots, x_n]$ to'plamda to'plamda teng kuchlilik munosabati bo'ladi.

Isbot. I modul bo'yicha taqqoslama refleksiv, chunki barcha $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ lar uchun $f - f = 0 \in I$ simmetrikligini isbotlaymiz. $f \equiv g \pmod{I}$ bo'lsin. U holda $f - g \in I$, demak, $g - f = (-1)(f - g) \in I$ ya'ni $g \equiv f \pmod{I}$. Endi tranzitivlikni isbotlaymiz. $f \equiv g \pmod{I}$ va $g \equiv h \pmod{I}$ bo'lsin. U holda $f - g \in I$ va $g - h \in I$. Lekin I qo'shishga nisbatan yopiq. $f - g + g - h = f - h \in I$, demak, $f \equiv h \pmod{I}$.

Teng kuchlilik munosabati S to'plamda uni teng kuchlilik sinflari deb ataladigan kesishmaydigan qism to'plamlarga ajratadi. Ixtiyoriy $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ uchun uning teng kuchlilik sinfi bu

$$[f] = \{g \in k[x_1, \dots, x_n] : g \equiv f \pmod{I}\}$$

to'plam.

I modul bo'yicha taqqoslama ta'rifi va 2-tasdiq ixtiyoriy $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ideal uchun o'rinli.

3-teorema. *O'zaro turli juft-juft $\phi: V \rightarrow k$ polinomial funksiyalar sinfi $I(V)$ modul bo'yicha taqqoslanuvchi polinomlar teng kuchlilik sinflari to'plami bilan o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi.*

4-ta'rif. $k[x_1, \dots, x_n]$ halqaning I ideal bo'yicha $k[x_1, \dots, x_n]/I$ faktor halqasi deb, I bo'yicha taqqoslanuvchi teng kuchli sinflariga aytiladi.

$$k[x_1, \dots, x_n]/I = \{[f] : f \in k[x_1, \dots, x_n]\}.$$

$k[x_1, \dots, x_n]$ - bu halqa bo'lgani uchun $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]/I$ sinflar uchun ko'phadlar uchun mos amallardan foydalanib qo'shish va ko'paytirish amallarini aniqlash mumkin. Sinflarda amallar

$$\begin{aligned} f + g &= f + g & (\text{yig'indi } k[x_1, \dots, x_n]/I) \\ f \cdot g &= f \cdot g & (\text{ko'paytma } k[x_1, \dots, x_n]/I) \end{aligned} \tag{1}$$

ko'rinishda bo'lishini xoxlaymiz.

5-teorema. *Sinflar ko'paytiruv va qo'shish amallari (1) tenglamalar bilan korrekt aniqlangan, ya'ni $[f' + g']$ sinf $f' \in f$ va $g' \in g$ ko'phadlar tanlashiga bog'liq emas.*

Isbot. $f' \in f$ va $g' \in [g]$ bo'lsin. U holda $f' = f + a$ va $g' = g + b$, bu yerda $a, b \in I$.

$$f' + g' = (f + a) + (g + b) = (f + g) + (a + b)$$

ga ega bo'lamiz.

$a + b \in I$ bo'lgani uchun $f' + g' \equiv f + g \pmod{I}$; demak, $f' + g' = f + g$

Shunga o'xshash

$$f' \cdot g' = (f + a) \cdot (g + b) = fg + ag + fb + ab$$

$ag + fb + ab \in I$ bo'lgani uchun $f' \cdot g' \equiv f \cdot g \pmod{I}$, demak $f' \cdot g' = f \cdot g$

(1) amallar korrekt aniqlangani uchun kommutativ halqa aksiomalari $k[x_1, \dots, x_n]/I$ da bajariladi. Chunki bu aksiomalar bajarilgan $k[x_1, \dots, x_n]$ halqada mos amallar atamalarida aniqlangan sinflarda aniqlangan.

Masalan, $k[x_1, \dots, x_n]/I$ da assotsativligini isbotlash uchun quyidagicha fikr yuritildi.

$(f + g) + h = f + g + h = (f + g) + h$ ((1)ga ko'ra) $= f + (g + h)$ ($k[x_1, \dots, x_n]$ halqa assotsativligiga ko'ra) $= f + g + h = f + (g + h)$

Shunga o'xshash qo'shish va ko'paytirish kommutativligi, ko'paytirishning assotsativligi va distributivlik qonunlari isbotlandi. $k[x_1, \dots, x_n]/I$ da additiv bo'lgan 0 , multiplikativ bo'lgan [1].

Shunday qilib biz quyidagi teoremani isbotladik.

6-teorema. $I - k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ideal bo'lsin. U holda $k[x_1, \dots, x_n]/I$ faktor halqa (1) tengliklar bilan berilgan amallarga nisbatan kommutativ halqa bo'ladi.

7-teorema. $k[V]$ halqa va $k[x_1, \dots, x_n]/I(V)$ halqa elementlar halqasida 3-tasdiqda aniqlangan o'zaro bir qiymatli moslik qo'shish va ko'paytirishni saqlaydi.

Isbot. $\phi: k[x_1, \dots, x_n]/I(V) \rightarrow k[V]$ almashtirishni quyidagicha aniqlaymiz:
 $\Phi f = \phi$, bu yerda $\phi - f$ ko'phad bilan ifodalangan polinomial funksiya. $k[V]$ dagi har bir element biror ko'phad bilan ifodlangani uchun $\Phi -$ "ustiga akslantirish" uning iyektivligini isbotlaymiz. $\Phi f = \Phi g$ bo'lsin. 3-tasdiqqa ko'ra $f \equiv g \pmod{I(V) \cdot [x_1, \dots, x_n]/I(V)}$ da $f = g$

Endi qo'shish va ko'paytirishni qaraymiz. $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]/I(V)$, u holda $\Phi f + g = \Phi f + g$ faktor halqada yig'indi ta'rifiga ko'ra. Agar $f - \phi$ polinomial funksiya, $g - \psi$ polinomial funksiya ifodalasa, u holda $f + g - \phi + \psi$ ni ifodalaydi. Demak,

$$\Phi f + g = \phi + \psi = \Phi f + \Phi g$$

Shunday qilib Φ yig'indini saqlaydi. Shunga o'xshash

$$\Phi f \cdot g = \Phi f \cdot g = \phi \cdot \psi = \Phi f \cdot \Phi g$$

Ya'ni Φ ko'paytmani ham saqlaydi. Teskari ψ moslik ham qo'shish va ko'paytirishni saqlaydi. Teorema isbotlandi.

7-teorema umumiy algebraning asosiy tushunchalaridan birini ifodalaydi.

8-ta'rif [3]. R, S – kommutativ halqa bo'lsin.

(i) $\phi: R \rightarrow S$ akslantirish halqa izomorfizmi deb ataladi, agar

(a) ϕ yig'indini qo'shishni saqlasa, $\phi(r + r') = \phi(r) + \phi(r')$ barcha $r, r' \in R$ lar uchun

(b) ϕ ko'paytmani saqlasa $\phi(r \cdot r') = \phi(r) \cdot \phi(r')$ barcha $r, r' \in R$ lar uchun

(c) ϕ inyektiv akslantirish

(ii) halqalar izomorfizmi deyiladi, agar shunday $\phi: R \rightarrow S$ mavjud bo'lsa, $R \cong S$.

(iii) $\phi: R \rightarrow S$ akslantirish halqa gomomorfizmi deyiladi, agar (a), (b) shartlarni qanoatlantirsa $1 \in R$ ni $1 \in S$ ga o'tkazganda.

9-ta'rif. R kommutativ halqa I qism to'plami ideal deyiladi, agar

(i) $0 \in I$, bu yerda $0 - R$ halqa nol elementi.

(ii) agar $a, b \in I$ bo'lsa, $a + b \in I$

(iii) agar $a \in I$ bolsa, $r \in R$ bo'lsa, u holda $r \cdot a \in I$

$k[x_1, \dots, x_n]/I$ faktor halqada ideallar bo'lsin $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ideallar bilan mustahkam aloqa bor.

10-teorema. $I - k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ideal bo'lsin. U holda $k[x_1, \dots, x_n]/I$ faktor halqada ideallar I ni o'z ichiga oluvchi $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ideallar bilan o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi.

11-natija. $k[x_1, \dots, x_n]/I$ faktor halqadagi har bir ideal chekli hosil bo'ladi.

II bob xulosasi

Ushbu bobds polinomial akslantirishlarni o'rganib turib, ko'pxillik haqida qanday ma'lumotlarni olish mumkinligi ko'rsatiladi. Masalan $V \subset C^3$ ko'pxillik quyidagi uchta kvadratiklarning kelishmasi sifatida aniqlangan:

$$x^2 + 2xz + 2y^2 + 3y = 0$$

$$xy + 2x + z = 0$$

$$xz + y^2 + 2y = 0$$

(4)

Ushbu bobda V ko'pxillikni o'rganish maqsadida $y > z > x$ bo'yicha tartiblangan lex – tartib (4) ko'phadlar orqali hosil qilingan idealning Gryobner bazisi topilgan. Bu bazis quyidagi ikki polinomdan iborat ekanligi ko'rsatilgan

$$g_1 = y - x^2$$

$$g_2 = z + x^3 + 2x$$

Shunday qilib, affin ko'pxilliklarda polinomial funksiyalarni o'rganish natijasida uni keltirilganlik va keltirilmaganlik haqida xulosa chiqarish mumkin ekan. Bundan tashqari $k[V]$ halqaning strukturasi ko'pxilliklarni klassifikatsiya qilish bo'yicha ma'lumotni o'zida saqlaydi.

III-BOB

MAPLE TIZIMINING IDEALLARGA OID MASALALARGA QO'LLANILISHI

1-§. Maple tizimi to'grisida umumiy ma'lumotlar

Bu yerda biz Maple tizimining 3-talqinini qaraymiz [7-8]. Bizga eng muhimi bu Gryobner bazislari bilan ishlash uchun Maple dagi paket hisoblanadi. Bu paket

> **with(grobner);**

buyruq bilan chaqiriladi (>-bu Maplega taklif va Mapledagi har bir operator nuqta vergul bilan tugaydi). Paket yuklangandan keyin ko'phadlarni bo'lish mumkin, keyin tavsiflangan boshqa hisoblashlarni bajarish mumkin.

Mapledagi monomial tartiblash “**termorder**” deb ataladi. Monomial tartiblashlardan Maple **lex** va **grevlex** bilan ishlay oladi. Lex – tartiblash **plex** (ya'ni pure leksiografik tartiblash), **grevlex** esa **tdeg** (“total degree”-to'liq daraja) deb ataladi. Monomial tartiblash o'zgaruvchilar tartibiga bog'liq bo'lgani uchun, Maple **termorder**ni (**plex** yoki **tdeg**ni) va o'zgaruvchilar ro'yxatini bilish lozim. Masalan , agar siz $x > y > z$ li lexdan foydalanmoqchi bo'lsangiz, u holda **plex**ni va $[x, y, z]$ kiritishingiz zarur. Agar termorder kiritilmasa, u holda sukut holatida **tdeg** ishlatiladi. O'zgaruvchilar ro'yxati albatta kiritilishi lozim. (buni aytmasdan jimlik bilan qilib bo'lmaydi)

Gryobner paketidagi eng ko'p foydalaniladigan buyruqlar- **normalf** (bo'lish algoritmi) va **gbasis** (Gryobner bazisini hisoblash) lardir. normalf nomi “normal shakl”ni bildiradi. Bu buyruq quyidagi sintaksisga ega:

> **normalf(f, polylist, varlist, termorder);**

Natijasi **f** ko'phadini berilgan **termorder** va **varlist** monomial tartiblashdan foydalaniladi polylist ro'yxatdagi ko'phadga bo'lishdagi qoldiqdan iborat.

Masalan,

> **with(Groebner) :**

```
> F := [x^2-2*x*z+5, x*y^2+y*z^3, 3*y^2-8*z^3];
```

$$F := [x^2 - 2xz + 5, xy^2 + yz^3, 3y^2 - 8z^3]$$

```
> G := Basis(F, tdeg(x,y,z));
```

$$G := [x^2 - 2xz + 5, 8z^3 - 3y^2, 8xy^2 + 3y^3, 9y^4 + 48y^3z + 320y^2z^2]$$

```
> p := 320*x*y^2+9*x*y^4-96*z^2*y^4*x+1600*y^3-18*y^5*x*z-
592*x*z*y^3+45*y^5+240*z*y^4;
```

$$p := 320xy^2 + 9xy^4 - 96z^2y^4x + 1600y^3 - 18y^5xz - 592xyz^3 + 45y^5 + 240zy^4$$

```
> NormalForm(p, G, tdeg(x,y,z), 'Q');
```

$$0$$

```
> Q;
```

$$\left[0, 0, -\frac{9}{4}y^3z - 12z^2y^2 + \frac{9}{8}y^2 - 74zy + 40, \frac{3}{4}zy^2 + \frac{37}{8}y \right]$$

```
> r := p - add(Q[i]*G[i], i=1..nops(G));
```

$$\begin{aligned} r := & 320xy^2 + 9xy^4 - 96z^2y^4x + 1600y^3 - 18y^5xz - 592xyz^3 + 45y^5 + 240zy^4 \\ & - \left(-\frac{9}{4}y^3z - 12z^2y^2 + \frac{9}{8}y^2 - 74zy + 40 \right) (8xy^2 + 3y^3) \\ & - \left(\frac{3}{4}zy^2 + \frac{37}{8}y \right) (9y^4 + 48y^3z + 320y^2z^2) \end{aligned}$$

```
> expand(r);
```

$$0$$

```
> q := 3*x^3*y*z^2-x*z^2+y^3+y*z;
```

$$q := 3x^3yz^2 - xz^2 + y^3 + zy$$

```
> NormalForm(q, G, tdeg(x,y,z));
```

$$-\frac{41}{4}y^3 + 60zy^2 + zy - xz^2 - 15yz^2x + 9y^3z^2$$

```
> Reduce(q, G, tdeg(x,y,z), 's');
```

$$4zy - 4xz^2 + 240zy^2 - 41y^3 - 60yz^2x + 36y^3z^2$$

> **s;**

4

buyruq bilan amalgam oshiriladi.

Biz **termorder** ko'rsatmasini tashladik, chunki tdeg aytilmagan holda foydalaniladi. Bu yerda asosiy maydon Q hisoblanadi. E'tibor bering, normalf bo'linish algoritmidan qoldiqlarni beradi.

gbasis buyrug'i tabiiyki "grobner bazisini" bildiradi. U quyidagi sintaksisga ega:

> **gbasis(polylist,varlist,termorder);**

va berilgan termorder va varlist monomial tartiblashga nisbatan polylost ro'yxatdagi ko'phadlar bilan hosil qilingan idealning Gryobner bazisini hisoblaydi.

Natijasi butun koeffitsentli redutsirlangan gryobner bazis hisoblanadi. Masalan,

>**gb:=gbasis([x^2+y,2*x*y+y^2],[x,y],plex);**

buyruq bajarilishi natijasida ko'phadlar ro'yxatini (gb nomida) chiqaradi, ular

$x > y$ li lex-tartiblash uchun $(x^2 + y, 2xy + y^2) \subset Q[x, y]$ idealning Gryobner bazisini hosil qiladi.

Agar butun yoki ratsional koeffitsentli ko'phadlar va normalf va gbasis buyruqlar bilan ishlasangiz, u holda Maple Q maydonni asosiy maydon deb belgilaydi. E'tibor bering, Mapleda koeffitsentlar o'lchovlarga cheklashlar yo'q. Bu sistema ratsional funksiyalar maydonidagi koeffitsentlar bilanishlash mumkin. Agar siz o'zgaruvchi "parametr" deb e'lon qilishni hoxlasangiz, u holda uni o'zgaruvchilar ro'yxatida eslatib o'tmaslik yetarli. Masalan,

>**gbasis([v*x^2+y,u*x*y+y^2],[x,y],plex);**

buyruq $x > y$ li lex-tartiblash uchun $(vx^2 + y, uxy + y^2) \subset Q(u, v)[x, y]$ idealning gryobner bazisini hisoblaydi. Natijasi elementlari katta koeffitsentlari u, v larga bog'liq ko'phadlardan iborat redutsirlangan bazis hisoblanadi.

$Q(i) = \{a + bi : a, b \in Q\}$, bu yerda $i = \sqrt{-1}$ ratsional gauss sonlar maydoni ustidagi Gryobner bazisini hisoblashda qiyinchiliklar paydo bo'ladi. Bu holda unga j o'zgaruvchini va yana bitta $j+1$ yasovchi ko'phadni kiritish lozim. Agar dastlabki o'zgaruvchilar $x_1, \dots, x_n$ dan iborat bo'lsa, u holda har bir x_i o'zgaruvchi j ning ixtiyoriy darajasidan katta bo'lganda monomial tartiblash uchun Gryobner bazisini hisoblash lozim javobda j ni i ga almashtirib talab qilingan Gryobner bazisini olish mumkinligini isbotlash mumkin.

Gryobner bazisini hisoblash uchun paket boshqa buyruqlarni o'z ichiga oladi:

- f ko'phad uchun $LC(f)$ va $LM(f)$ ni hisoblash uchun **leadmon**
- $S(f, g)$ S -ko'phadini hisoblash uchun **spoly**
- muvofiqlik algoritmidan foydalanib algebraic yopiq maydon uchun berilgan polynomial sistemaning yechimi mavjudligini aniqlash uchun **solvable**
- cheklilik algoritmidan foydalanib algebraic yopiq maydon ustidan berilgan polynomial sistema yechimlarining chekli yoki cheksizligini aniqlash uchun **finite**

Tenglamalar sistemasini yechish uchun (yechimlarning to'liq ro'yxatini topish) mo'ljallangan **solve** buyrug'i mavjud. Maple buyruqlarni oson o'zlashtirishga imkon beruvchi a'lo dialog sistemani o'z ichiga oladi.

Kutubxona yana 2 ta foydali paketni o'z ichiga oladi. Bu "GB" paketi tub sonlar moduli bo'yicha bo'linish qoldiqlarini, Gryobner bazislarini hisoblaydi. Bu paketni yuklash uchun

>with(share);

>readshare("mod/GB");

buyruqlarini kiritish lozim. Bu paketda asosiy buyruqlar **Normalform** va **GB** lar hisoblanadi, ular p elementli (p – tub son) chekli maydonlar ustida qoldiqlarni va Gryobner bazislarini hisoblash uchun ishlatiladi. Bu buyruqlar haqida axborotni **help** sistemasidan olish mumkin. Masalan,

>help(GB);

buyruq GB buyruqdan qanday foydalanish mumkinligini tushuntiradi. Bu buyruqning qiziq funksiyasi **infolevel[GB]** hisoblanadi. Uning qiymatini berib Gryobner bazisini hisoblashning borishi haqida ma'lumot olish mumkin. (qaralgan qoldiqlar soni haqida, masalan va h.k)

Boshqa foydali paket "charsets" hisoblanadi. Bu paket By-pitta qaralgan algoritmini amalgam oshiradi. Agar **with(share)** buyruq kiritilsa, u holda **charsets >readshare(charsets,algebra);**

buyruq bilan yuklanadi. Bu buyruq haqida axborotni **help** yordamida yoki degishli drektrisa charsets.tex fayli yordamida olish mumkin. Bu fayl WANG (1994a) ishning LATEX talqini hisoblanadi [9].

Nihoyat, Albert Lin va Flipp Lustanu tomonidan yozilgan Maple dagi paketni eslatib o'tamiz, u Gryobner bazisi uchun paket kengaytmasidan iborat. Bu paket ko'phadlarni bo'lishda qoldiqlarni va ideal yasovchilari atamalarida Gryobner bazisini tavsiflashga imkon beruvchi matritsani topishga imkon beradi. bu paket buyruqlari sekin bajariladi lekin ko'pgina masalalarni yechishda foydali. Bu paket David A. Cox, Department of Mathematics and Computer Science, Amherst College, Amherst MA 01002 dan olinadi [10]. Elektron nusxalarni dac@cs.amherst.edu manzildan olish mumkin.

2-§. Maple tizimida polynomial ideallarga oid masalalar yechish

Bu paragrafda Maple 12 dasturida [7-8] ideallarga oid masalalarni yechish uchun paketlar, parametrlar va buyruqlarni keltiramiz. Ularning har biriga misollar ham keltiramiz.

PolynomialIdeals[PolynomialIdeal] - polynomial idealni qurish.

convert/PolynomialIdeal - polynomial idealga aylantirish.

type/PolynomialIdeal - polynomial idealga tekshirish.

mod – idealni boshqa xarakteristikaga o'tkazish.

Buyruqlar:

PolynomialIdeal(**generators**, **options**)

PolynomialIdeal(**J**, **options**)

<**generators**, (**options**)>

convert(**a**, PolynomialIdeal)

type(**a**, PolynomialIdeal)

J mod p

Parametlar:

generators - idealni tashkil etuvchi ketma-ketliklar, to'plam, yoki polinomlar ruyxati

options - (optional) ideal yoki polinomlar xalqasining xossalari

J - polynomial ideal

a - ixtiyoriy ob'ekt

p - tub son

Misollar

Quyidagi misolda $\mathbb{Q}[x, y, z]$ xalqada **J** ideal ikki yo'l bilan hosil qilingan.

```
> with(PolynomialIdeals):
```

```
PolynomialIdeal({x^2+y^2-1, x+y, z^2-2});
```

$\langle x + y, z^2 - 2, x^2 + y^2 - 1 \rangle$

```
> J := <x^2+y^2-1, x+y, z^2-2>;
```

$J := \langle x + y, z^2 - 2, x^2 + y^2 - 1 \rangle$

```
> type(J, PolynomialIdeal);
```

true

```
> lprint(J);
```

```
POLYNOMIALIDEAL(x+y,z^2-2,x^2+y^2-1,characteristic = 0,
variables = {x, y, z},known_groebner_bases = (table([])))
```

Quyidagi uchta qatorda $\mathbb{Z}[3][x, y]$ xalqada J ideal hosil qilingan. F polinom J idealga tegishli yoki yo'qligi tekshirilgan. Bu J ning Groebner bazisi orqali amalga oshirilgan.

```
> J := PolynomialIdeal(x^2+y^2-x+1, y^2-1, characteristic=3);
```

$$J := \langle y^2 + 2, x^2 + y^2 + 2x + 1 \rangle$$

```
> K := <x^2+y^2-x+1, y^2-1, (characteristic=3)>;
```

$$K := \langle y^2 + 2, x^2 + y^2 + 2x + 1 \rangle$$

```
> L := <x^2+y^2-x+1, y^2-1> mod 3;
```

$$L := \langle y^2 + 2, x^2 + y^2 + 2x + 1 \rangle$$

```
> evalb(J=K and J=L);
```

true

```
> f := x^2-y^2;
```

$$f := x^2 - y^2$$

```
> f in J;
```

false

```
> lprint(J);
```

```
POLYNOMIALIDEAL(y^2+2,x^2+y^2+2*x+1,characteristic = 3,
variables = {x, y},known_groebner_bases = (table([(tdeg(x,y
))=[1, y^2, y^2+2], [1, x^2, x^2+2+2*x]])))
```

characteristic=3 va **variables=x, y** bo'lgan J idealdan yangi K idealni hosil qilish va yangi z o'zgaruvchini qo'shish quyidagicha amalga oshiriladi.

```
> K := <J, x*z-1>;
```

$$K := \langle y^2 + 2, xz + 2, x^2 + y^2 + 2x + 1 \rangle$$

```
> IdealInfo[Characteristic](K);
```

3

```
> IdealInfo[Variables] (K) ;
```

$\{x, y\}$

```
> L := <J, x*z-1, (parameters={})>;
```

$L := \langle y^2 + 2, xz + 2, x^2 + y^2 + 2x + 1 \rangle$

```
> IdealInfo[Variables] (L) ;
```

$\{x, y, z\}$

PolynomialIdeals[IsRadical] – idealni radikalga tekshirish

PolynomialIdeals[Radical] - idealning radikalini hisoblash

PolynomialIdeals[RadicalMembership] - radikalga tegishlilikni tekshirish

Buyruqlar:

IsRadical(J)

Radical(J)

RadicalMembership(f, J)

Parametrlar:

J - polynomial ideal

f - polynomial

Misollar:

```
> with(PolynomialIdeals) :
```

```
J := <(x^3-y)^2, y^3-1>;
```

$J := \langle (x^3 - y)^2, y^3 - 1 \rangle$

```
> IsRadical(J) ;
```

false

```
> IdealMembership(x^3-y, J) ;
```

false

> RadicalMembership(x^3-y, J);

true

> R := Simplify(Radical(J));

$$R := \langle -1 + x^9, -x^3 + y \rangle$$

> Simplify(PrimeDecomposition(J));

$$\langle -1 + y, x - 1 \rangle, \langle -1 + y, x^2 + x + 1 \rangle, \langle -x^3 + y, x^6 + x^3 + 1 \rangle$$

> Intersect(%);

$$\langle x^3 - y, y^3 - 1 \rangle$$

> IdealContainment(%, R, %);

true

> K := <x^3-y^2, y^3-z*x^2, z^2-2*x*y*z+x^2*y^2>;

$$K := \langle x^3 - y^2, y^3 - z x^2, z^2 - 2 x y z + x^2 y^2 \rangle$$

> IsRadical(K);

false

> IsPrimary(K);

false

> R := Radical(K);

$$R := \langle x^3 - y^2, y^3 - z x^2, x y - z \rangle$$

> IsPrime(R);

true

> P := PrimeDecomposition(K);

$$P := \langle x, y, z \rangle, \langle x^3 - y^2, y^3 - z x^2, x y - z \rangle$$

> IdealContainment(P[1], P[2]);

false

> IdealContainment(P[2], P[1]);

true

> map(HilbertDimension, [P]);

[0, 1]

PolynomialIdeals[IdealMembership] – idealga tegishlilikni tekshirish

PolynomialIdeals[IdealContainment] – idealni tashkil etuvchilarini tekshirish

Buyruqlar:

`IdealMembership(f, J)`

`IdealContainment(J, K, ...)`

$f \in J$

$J \subset K$

Parametrlar:

f – polynom, yoki polynomlar ruyxati, to'plami

J, K – polynomial ideallar

Misollar:

```
> with(PolynomialIdeals):
```

```
J := <x^2-y, y^2-x>;
```

$$J := \langle x^2 - y, y^2 - x \rangle$$

```
> K := <x^4-y^2, y^3-x^3>;
```

$$K := \langle x^4 - y^2, y^3 - x^3 \rangle$$

```
> f := expand((x^2-1)*(x^2-y) - (x*y-1)*(y^2+x));
```

$$f := x^4 - 2x^2y - x^2 + y - xy^3 + y^2 + x$$

```
> IdealMembership(f, J);
```

true

```
> f in J;
```

true

```
> IdealMembership(f, K);
```

false

```
> IdealContainment(K, J);
```

true

```
> K subset J;
```

true

```
> L := <-y^2+y^8, x*y^2-y^7, -y^3+x^3>;
```

$L := \langle -y^2 + y^8, -y^3 + x^3, x y^2 - y^7 \rangle$

```
> IdealContainment(K, L, K);
```

true

PolynomialIdeals[VanishingIdeal] - compute the vanishing ideal for finite
a set of points

Calling Sequence

VanishingIdeal(S, X)

VanishingIdeal(S, X, T, p)

Parameters

S - majmualar yoki nuqtalar ro'yxati

X - o'zgaruvchilar ismlari ro'yxati

T - (optional) monomlar tartibi

p - (optional) xarakteristika, manfiy bo'lmagan butun son.

Misollar:

```
> with(PolynomialIdeals):
```

```
L := [[5, 4, 4], [4, 0, 2], [6, 4, 1], [3, 0, 5], [3, 1, 3]];
```

$L := [[5, 4, 4], [4, 0, 2], [6, 4, 1], [3, 0, 5], [3, 1, 3]]$

```
> J := VanishingIdeal(L, [x, y, z]);
```

$$J := \langle 24x + 48 + 351z^2 - 454z - 98z^3 + 9z^4, 4y + 18z - 40 \\ + 13z^2 - 8z^3 + z^4, z^5 - 15z^4 + 85z^3 - 225z^2 + 274z - 120 \rangle$$

> Simplify(PrimeDecomposition(J)) ;

$$\langle y, x - 3, z - 5 \rangle, \langle -5 + x, -4 + y, z - 4 \rangle, \langle -1 + y, x - 3, z - 3 \rangle, \langle y, \\ -4 + x, z - 2 \rangle, \langle -6 + x, -4 + y, z - 1 \rangle$$

> VanishingIdeal(L, [x, y, z], tdeg(x, y, z)) ;

$$\langle -37y + 13y^2 - 36x + 168 - 12z, -204 + 308z + 18y - 12x \\ - 117z^2 + 13z^3, -92 - 36x - 193y + 170z + 39yx \\ - 26z^2, 124 - 255x - 40y + 188z + 39x^2 - 26z^2, 2302 \\ - 354x + 50y - 937z + 78xz + 91z^2, -19y + 13yz - 48x \\ + 484 - 198z + 26z^2 \rangle$$

> alias(alpha=RootOf(z^3+z+1)) ;

$$\alpha$$

> M := [[1, alpha], [alpha^2/(alpha-1), 0], [1, 1/alpha]] ;

$$M := \left[\begin{bmatrix} 1, \alpha \end{bmatrix}, \left[\frac{\alpha^2}{\alpha - 1}, 0 \right], \left[1, \frac{1}{\alpha} \right] \right]$$

> K := VanishingIdeal(M, [x, y], 2) ;

$$K := \langle x + 1 + \alpha^2 + y + y^2 \alpha^2, y + y^2 \alpha^2 + y^2 \alpha + y^2 + y^3 \rangle$$

> IdealInfo[Characteristic](K) ;

$$2$$

> Simplify(PrimeDecomposition(K)) ;

$$\langle y, 1 + \alpha^2 + x \rangle, \langle x + 1, y + \alpha \rangle, \langle x + 1, \alpha^2 + 1 + y \rangle$$

PolynomialIdeals[IsPrime] – idealning tub ekanligini tekshirish

PolynomialIdeals[IsPrimary] - idealning primar ekanligini tekshirish

PolynomialIdeals[IsMaximal] - idealning maxsimalligini tekshirish

PolynomialIdeals[IsProper] – idealning xos ekanligini tekshirish

Buyruqlar

`IsPrime(J, k)`

`IsPrimary(J, k)`

`IsMaximal(J, k)`

`IsProper(J, X)`

Parametrlar:

`J` - polynomial ideal

`k` - (optional) maydon kengaytmasi

`x` - (optional) xalqa o'zgaruvchisi

Misollar:

```
> with(PolynomialIdeals):
```

```
J := <x^2+1, y^2-2, z^2+2>;
```

$J := \langle x^2 + 1, y^2 - 2, z^2 + 2 \rangle$

```
> f := z - x*y;
```

$f := z - x y$

```
> g := z + x*y;
```

$g := z + x y$

```
> (f in J) or (g in J);
```

false

```
> f*g in J;
```

true

```
> IsPrime(J);
```

false

```
> PrimaryDecomposition(J);
```

$\langle z - xy, x^2 + 1, y^2 - 2, z^2 + 2 \rangle, \langle z + xy, x^2 + 1, y^2 - 2, z^2 + 2 \rangle$

```
> K := <(x-y*z)^2, y^2+z^3+1>;
```

$K := \langle (x - zy)^2, y^2 + z^3 + 1 \rangle$

```
> x-y*z in K;
```

false

```
> IsPrime(K);
```

false

```
> IsPrimary(K);
```

true

```
> L := <x^4-2, y^2+z>;
```

$L := \langle x^4 - 2, y^2 + z \rangle$

```
> IsPrime(L);
```

true

```
> IsMaximal(L);
```

false

```
> HilbertDimension(L);
```

1

```
> alias(alpha=RootOf(z^2-2));
```

α

```
> IsPrime(L, alpha);
```

false

```
> PrimaryDecomposition(L, {alpha});
```

$$\langle x^2 - \alpha, y^2 + z \rangle, \langle x^2 + \alpha, y^2 + z \rangle$$

```
> J := <x, x+1>;
```

$$J := \langle x, x + 1 \rangle$$

```
> IsProper(J);
```

false

```
> Simplify(J);
```

$$\langle 1 \rangle$$

Query[Ideal] - Li algebrasida qism algebraning idealga tekshirish

Buyruqlar

```
Query(S, "Ideal")
```

```
Query(S, parm, "Ideal")
```

Parametrlar

S - g Li algebrasida qism algebraning chiziqli erkli vektorlari ruyxati

parm - (optional) parametrlar majmuasi

Misollar

```
> with(DifferentialGeometry): with(LieAlgebras):
```

Misol 1.

Dastlab Li algebrasini tayinlab olamiz; so'ngra S1, S2, S3 qism algebaralarni aniqlab olamiz, undan keyin ularni idealga tekshiramiz.

```
Alg > L := _DG(["LieAlgebra", Alg, [4]], [[1, 4, 1], 0], [[2, 3, 1], 1], [[2, 4, 2], 1], [[3, 4, 3], -1]]);
```

$$L := [[e2, e3] = e1, [e2, e4] = e2, [e3, e4] = -e3]$$

```
Alg > DGsetup(L):
```

```
Alg > S1 := [e1, e2]:
```

```
Alg > Query(S1, "Ideal");
```

true

```
Alg > S2 := [e3, e4]:
```

```
Alg > Query(S2, "Ideal");
```

false

S3 qism algebra $a1$ parametrdan bog'liq. S3 ni qaysi parametrlarning qiymati idealga aylantirishini aniqlaymiz.

```
Alg > S3 := evalDG([e2, e1 + a1*e4]):
```

```
Alg > TF, EQ, SOLN, IdealList := Query(S3, {a1, a2}, "Ideal");
```

*TF, EQ, SOLN, IdealList := true, {0, -a1, a1}, [{a1 = 0, a2 = a2}],
[[e2, e1]]*

The following equations must hold for S3 to be an ideal (each expression must vanish).

```
Alg > EQ;
```

{0, -a1, a1}

```
Alg > S4 := IdealList[1];
```

S4 := [e2, e1]

```
Alg > Query(S4, "Ideal");
```

true

```
Alg >
```

PolynomialIdeals[Operators] – ideallar uchun binary operator

Buyruqlar

$J + K$

$J * K$

J / K

$J \wedge n$

$f \text{ in } J$

$J \text{ subset } K$

Simplify(J)

Parameters

J, K - polynomial ideals

n - musbat butun son

f - polynom

Misollar:

```
> with(PolynomialIdeals):
```

```
with(Operators);
```

```
[`*`,`+`,`Simplify`,`^`]
```

```
> J := <x^2-1>;
```

$$J := \langle x^2 - 1 \rangle$$

```
> K := <y^2-y>;
```

$$K := \langle y^2 - y \rangle$$

```
> L := <x+1, y-1>;
```

$$L := \langle x + 1, y - 1 \rangle$$

```
> J + L;
```

$$\langle x + 1, y - 1 \rangle$$

```
> J + K / L;
```

$$\langle x^2 - 1, y^2 - y \rangle$$

```
> (J + K) / L;
```

$$\langle x^2 - 1, y^2 - y, xy - y \rangle$$

```
> L2 := L^2;
```

$$L2 := \langle x^2 + 2x + 1, y^2 - 2y + 1, xy + y - x - 1 \rangle$$

```
> f := x^2 + 2*x + 1;
```

$$f := x^2 + 2x + 1$$

```
> g := y-1;
```

$$g := y - 1$$

```
> f in L2;
```

true

```

> g in L2;
false

> L2 subset <f, g>;
true

> H := <y^2-1, (characteristic=3)>;
 $H := \langle y^2 + 2 \rangle$ 

> H / g;
 $\langle 1 + y \rangle$ 

> IdealInfo[Characteristic] (%);
3

> g / H;
 $\langle 1 \rangle$ 

> IdealInfo[Characteristic] (%);
3

```

PolynomialIdeals[IdealInfo] – ideal to'g'risida ma'lumotlar olish

Buyruqlar

Generators(**J**)

IdealInfo[Generators](**J**)

IdealInfo[Characteristic](**J**)

IdealInfo[Variables](**J**)

IdealInfo[Parameters](**J**)

IdealInfo[NonVariables](**J**)

IdealInfo[KnownGroebnerBases](**J**, **X**)

IdealInfo[DefaultMonomialOrder](**J**, **T**, **X**)

Parametrlar

$\mathbb{J}$ - polynomial ideal

$\mathbb{T}$ - (optional) monom tartibi tipi

$\mathbb{x}$ - (optional) monom tartibi o'zgaruvchilari

Misollar

```
> with(PolynomialIdeals):
```

```
J := <x^2-z, y^2+2*sqrt(3-w), {characteristic=5, variables={x,
y}}>;
```

$$J := \langle x^2 + 4z, y^2 + 2\sqrt{3 + 4w} \rangle$$

```
> lprint(J);
```

```
POLYNOMIALIDEAL(x^2+4*z,y^2+2*(3+4*w)^(1/2),variables = {x,
y},characteristic = 5,known_groebner_bases = (table([])))
```

```
> Generators(J) = IdealInfo[Generators](J);
```

$$\{x^2 + 4z, y^2 + 2\sqrt{3 + 4w}\} = \{x^2 + 4z, y^2 + 2\sqrt{3 + 4w}\}$$

```
> IdealInfo[Characteristic](J);
```

5

```
> IdealInfo[Variables](J);
```

{x,y}

```
> IdealInfo[Parameters](J);
```

{w,z}

```
> IdealInfo[NonVariables](J);
```

{w}

```
> IdealInfo[DefaultMonomialOrder](J);
```

tdeg(y,x)

```
> Groebner[Basis](J, plex(x, y));
```

$$[3y^2 + \sqrt{3 + 4w}, x^2 + 4z]$$

```
> Groebner[Basis](J, tdeg(x, y));
```

$$[y^2 + 2\sqrt{3 + 4w}, x^2 + 4z]$$

```
> IdealInfo[KnownGroebnerBases](J);
```

```
{plex(x,y), tdeg(x,y), tdeg(y,x)}
```

```
> lprint(J);
```

```
POLYNOMIALIDEAL(x^2+4*z,y^2+2*(3+4*w)^(1/2),variables = {x,  
y},characteristic = 5,known_groebner_bases = (table([(tdeg(  
x,y))=[1, y^2, y^2+2*(3+4*w)^(1/2)], [1, x^2, x^2+4*z]],(  
plex(x,y))=[3, y^2, 3*y^2+(3+4*w)^(1/2)], [1, x^2, x^2+4*z  
]],(tdeg(y,x))=[1, x^2, x^2+4*z], [1, y^2, y^2+2*(3+4*w)^(  
1/2)]]]))))
```

XULOSA

Ushbu magistrlik dissertatsiya ishi affin ko'pxilliklarida ideallarni tavsiflash masalasiga bag'ishlangan.

Ishning I bobida $V(f_1, \dots, f_s)$ affin ko'pxillik nuqtalarini tavsiflash masalasini qaralgan. Bu masalani $f_1 = \dots = f_s = 0$ polinomial tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini tavsiflash masalasi deb qayta bayon etish mumkin. Agar yechimlar chekli bo'lsa, u holda bizning maqsadimiz-ularni sanab o'tishdan iborat. Agar ular cheksiz ko'p bo'lsa, nima qilish kerak? Bu bobda biz affin ko'pxillikni parametrlash tushunchasini kiritildi va parametrlashga doir ko'plab misollar qarab chiqildi.

Shu bobning maqsadi ideal tushunchasining tabiiy tushuncha ekanligini, ideallarning affin ko'pxilliklar bilan qanday bog'liq ekanligidan iborat bo'ldi. Ideallar tilida affin geometriyasining hisoblash masalalarini qanday ifodalanishi ko'rsatildi.

Shu bilan birga biz bu bobda bir o'zgaruvchili ko'phadlarni bo'lish algoritmini qaradik. Bu oddiy algoritmnini qo'llash kuchli natijalar beradi. Masalan, uning yordamida $k[x]$ dagi ideallar strukturasi aniqlandi va eng katta umumiy bo'luvchi tushunchasini tadqiq etildi. Bu yerda qaralayotgan usullar ishda keltirilgan ko'pgina masalalarni yechishga qo'llanildi.

Ishning ikkinchi bobida polinomial akslantirishlarni o'rganib turib, ko'pxillik haqida qanday ma'lumotlarni olish mumkinligi ko'rsatiladi. Masalan, $V \subset C^3$ ko'pxillik quyidagi uchta kvadratiklarning kelishmasi sifatida aniqlangan:

$$\begin{aligned}x^2 + 2xz + 2y^2 + 3y &= 0 \\xy + 2x + z &= 0 \\xz + y^2 + 2y &= 0\end{aligned}$$

(4)

V ko'pxillikni o'rganish maqsadida $y > z > x$ bo'yicha tartiblangan lex – tartib (4) ko'phadlar orqali hosil qilingan idealning Gryobner bazisi topilgan. Bu bazis quyidagi ikki polinomdan iborat ekanligi ko'rsatilgan

$$g_1 = y - x^2$$

$$g_2 = z + x^3 + 2x$$

Shunday qilib, affin ko'pxilliklarda polinomial funksiyalarni o'rganish natijasida uni keltirilganlik va keltirilmaganlik haqida xulosa chiqarish mumkin ekan. Bundan tashqari $k[V]$ halqaning strukturasi ko'pxilliklarni klassifikatsiya qilish bo'yicha ma'lumotni o'zida saqlaydi.

Ishning uchinchi bobida kompyuter algebrasi tizimlarining ideallarga oid masalalarga tatbiqlari qaralgan.

Bu bobda Maple 12 dasturida ideallarga oid masalalarni yechish uchun paketlar, parametrlar va buyruqlarni keltirilgan. Ularning har biriga ko'plab misollar ham keltirilgan. Qarab chiqilgan masala va misollarning to'liq yechimlari ishlab chiqilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Атья М., Макдональд И. Введение в кооммутативную алгебра. – М.: Мир, 1972.
2. Ленг С. Алгебра. – М.: Мир, 1968.
3. Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия. Комплексные многообразия. – М.: Мир, 1979.
4. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра.- М.: Наука, 1976.