

**ALISHER NAVOIY NOMLI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

Mexanika-matematika fakulteti

5A130101- ALGEBRA VA GEOMETRIYA KAFEDRASI

XUDOYAROV AKMAL

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

**Mavzu: “BA’ZI BIR CHIZIQLI BO’LMAGAN ALGEBRAIK VA
DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHGA DARAJALI
GEOMETRIYA USULLARINI QO’LLASH”**

Ilmiy rahbar: dotsent NOSIROVA H.

Ilmiy maslahatchi: prof. SOLEEV A.

Samarqand - 2014

MUNDARIJA

Kirish	3
I Bob. Asosiy tushunchalar, ta'rif va teoremlar	6
§ 1.1 .Lokal masalalar to'g'risida.....	6
§ 1.2 . Algebraik chiziqlarning shohalarini toppish.....	7
§ 1.3 . Ko'phad qisqartmalari.....	8
§ 1.4. Darajali almashtirishlar.....	13
§ 1.5. “Nyuton ko'pyoqlari” usulini differensial tenglamalarga tadbig'i.....	21
§ 1.6. Qisqartmalar konuslari.....	27
Xulosa	33
II Bob. Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalar va ularning sistemalarini yechishda “Nyuton ko'pyoqlari” usulini qo'llash.....	34
§ 2.1 . Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalarga doir misollar.....	34
§ 2.2 . Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalar sistemalariga doir misollar.....	44
Xulosa	52
III Bob. Differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechishda Nyuton ko'pyoqlari” usulini qo'llash.....	53
§ 3.1 . Differensial tenglamalarni yechishga doir misollar.....	53
§ 3.2 . Differensial tenglamalar sistemalari yechishga doir misollar.....	57
Xulosa	60
Foydalanilgan adabiyotlar.....	62

Kirish

Bir o'zgaruvchili kophadlarning asosiy xarakteristikalaridan biri uning darajasidir. Darajani bilgan holda, hatto uning koeffisientlarini bilmaganda ham ko'phad haqida ko'p ma'lumotlarni berish mumkin. Masalan, uning ildizlarining soni uning darajasidan oshmasligi, agar ko'phad toq darajali bo'lsa, haqiqiy ildizlarini borligi va boshqalar. Ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar uchun ham to'la daraja deb ataluvchi son kiritilgan, lekin bu son berilgan k'phad haqida keng

ma'lumot bera olmaydi, chunki o'zgaruvchilar har xil darajalarda kirgani sababli, ularning rolio ham har xil bo'lishi mumkin. Ko'phad haqida ko'proq ma'lumotlarni beruvchi darajadan ko'ra nozikroq tushuncha bor, u son emas, balki tekislikda ko'pburchak, fazoda esa ko'pyoqdir. Bunday ko'pburchakni birinchi bor qo'llagan olim ingliz matematigi va fizigi Isaak Nyuton hisoblanadi, shu sababli bunday ko'pburchak "Nyuton ko'pburchagi" deb, ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar holida "Nyuton ko'pyoqi" deb yuritila boshlandi. "Nyuton ko'pyoqi" algebra va geometriya fanlarining tutashmasidagi tushunchalardan biri bo'lib, uning yordamida ko'p masalalar yechilgan.

Keyingi yillarda chiziqli bo'lmagan masalalarni, xususan lokal masalalarni yechishning umumiy konsepsiyasi ishlab chiqildi. Chiziqli bo'lmagan masalalar kvazichiziqli va qat'iy nochiziqli masalalarga bo'linadi. Kvazichiziqli masalalarni yechishda asosan koordinatalarni almashtirish orqali yechishga harakat qilinadi. Qat'iy chiziqli bo'lmagan masalalarda bo'lsa asosan tenglamaning birinchi yaqinlashishlari – qisqartmalari ajratib olinadi.

Bu tenglamalarning regulyar nuqta atrofida yechimlarini topish mumkin. Maxsus nuqta atrofidagi yechimi o'zini qanday olib borishi to'g'risida umumiy metodika bo'lmagan. Darajali geometriya deb ataluvchi matematikaning bo'limi tenglamalarning yechimlari xususiyatlarini tenglamaga kiruvchi hadlarning daraja ko'rsatkichlar vektorlari orqali o'rganadi. Ko'rsatkichlar vektorlari to'plamining qavariq qobig'i berilgan ko'phadning "Nyuton ko'pyoqi" deyiladi. Har bir yoqqa mos ravishta ko'phadning qisqartmasi tuziladi. Bu qisqartmalar berilgan ko'phadning ma'lum sohadagi birinchi yaqinlashishlarini beradi. Darajali geometriya asosida quyidagi uch tushuncha yotadi: Nyuton kopyoqlari, darajali almashtirishlar va logarifmik almashtirishlar.

Masalaning qo'yilishi.

Algebraik egri chiziqlarning va differensial tenglamalar sistemalarining maxsus nuqtalari atrofida tadqiq qilishni o'rganish, singulyar yechimlarga yaqin nuqtalarda

yechimlarni tahlil qilish usullaridan biri bo'lgan "Nyuton kopyoqlari" usuli bilan tanishish va bu usulni qo'llagan holda misollar yechishga, ularni tahlil qilishga o'rganishdan iborat.

Mavzuning dolzarbligi.

Oxirgi vaqtlarda, ayniqsa o'tgan asrning oxirlarida darajali geometriyaning usullari matematika, biologiya, fizika, mexanikada paydo bo'ladigan tenglama va tenglamalar sistemalarni yechishda keng tadbiquga ega bo'lib, bu usulning asosida "Nyuton kopyoqlari" yotadi. Chiziqli bo'lmagan algebraik va differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechish, ularni tahlil qilish bugungi kunning dolzarb masalalaridan biri bo'lib, ularni yechishda "Nyuton kopyoqlari" usuli yaxshi natijalar bermoqda.

Ishning mqasad va vazifalari.

Mazkur dissertasiya ishida nochiziqli algebraik tenglamalar va ularning sistemalarini, differensial tenglamalar yechimlarining xossalarini ularning hadlaridagi daraja ko'rsatkichlari orqali o'rganishdan iborat bo'lgan darajali geometriyaning usullari bilan tanishish, uni qo'llashga o'rganish.

Ilmiy-tadqiqot usullari

Mazkur magistrlik dissertasiyasida algebra, matematik analiz darajali geometriyaning Nyuton kopyoqlari usulidan, differensial tenglamalarni yechish usullaridan foydalanilgan.

Ishning ilmiy va amaliy ahamiyati.

Hayotda uchraydigan ko'p masalalarni matematika tiliga ko'chirilganda ularning ko'pchiligini tenglamalar ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lib, bu masalalarni yechish tenglamalarni yechishga keltiriladi.

Tenglamalarning asosiy qismi nochiziqli va differensial tenglamalar bo'lganligi sababli, ularni yechish yoki ularning maxsusliklarni o'rganish ham ilmiy va ham amaliy ahamiyatga ega.

Ishning tuzilishi.

Mazkur magistrlik dissertasiya ishi ikkita bob, o'nta paragraf, titul varaqasi, mundarija, kirish, xulosa qismi va adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni.

Ishning birinchi bobida asosan nochiziqli algebraik tenglamalarning lokal xossalari haqida ma'lumotlar berilib, ularni yechish usullari ikki o'zgaruvchili holda keltiriladi. Keltirilgan ma'lumotlar asosida bir nechta misollar yechib ko'rsatiladi va tahlil qilinadi.

Ikkinchi bob differensial tenglamalarni yechishda Nyuton kopyoqlari usulini tadbiriga bag'ishlangan bo'lib, unda asosiy ma'lumotlar bilan bir qatorda bir nechta differensial tenglamalar yechib, tahlil qilinadi.

I. Bob. Asosiy tushunchalar, ta'rif va teoremlar.

§ 1.1 .Lokal masalalar to'g'risida.

Tabiiy fanlarning ko'pgina masalalari

$$f_j = \sum f_{q_1 q_2 \dots q_n} \cdot x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \cdot \dots \cdot x_n^{q_n} = 0, \quad j = \overline{1, m} \quad (1.1.1)$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. x_i o'zgaruvchilarga va $f_{q_1 q_2 \dots q_n}$ koefitsientlarga bog'liq ravishda har xil turdagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi va masalaning qo'yilishiga bog'liq ravishda uni yechish bilan matematikaning har xil bo'limlari shug'ullanadi. Bunda asosan (1.1.1) ni qanoatlantiruvchi funksiyalar izlanadi.

(1.1.1) ko'rinishdagi masalalar chiziqli va chiziqli bo'lmagan masalalarga ajraladi. Bundan tashqari masalalar lokal va global masalalarga ajraladi. Lokal masalalarda (1.1.1) sistemaning yechimlari biror ma'lum yechimning yetarlicha kichik atrofida o'rganiladi. Hozirda chiziqli bo'lmagan masalalar ichida lokal masalalarni yechishning umumiy yechish yo'li ishlab chiqilgan bo'lib, bunda asosan (1.1.1) sistemaning birinchi yaqinlashishlari ajratib olishga harakat qilinadi va daraja ko'rsatkichlariga nisbatan chiziqli tengsizliklarni yechishga keltiriladi. Bunday masalalarni yechish geometrik masalalardan bo'lgan "Nyuton ko'pyoqlari" usuli orqali yechiladi.

"Nyuton ko'pyoqlari" usuli birinchi marta algebraik egri chiziqlarning tashqi formalarini o'rganishga tadbqiq qilingan edi. Sterling 1717yili bu usulni uchinchi tartibli chiziqlarni tadqiq qilishga qo'llagan edi. Keyinroq yuqori tartibli egri chiziqlarga 1740 yilda D. Gua, 1750 yilda Kramer qo'lladi.

Isaak Nyutonning matematika rivojlanishida xizmati beqiyos bo'lib, matematikaga oid ishlarining ba'zilarigina uning nomi bilan yuritiladi. Ularning ko'pchiligi keyingi davrlarda o'z qadr qiymatiga ega bo'ldiki, "Nyuton ko'pyoqlari" shular jumlasiga kiradi.

Bir o'zgaruvchili kophadlarning asosiy xarakteristikalaridan biri uning darajasidir. Darajani bilgan holda, hatto uning koefitsientlarini bilmaganda ham ko'phad haqida ko'p ma'lumotlarni berish mumkin. Masalan, uning ildizlarining soni uning darajasidan oshmasligi, agar ko'phad toq darajali bo'lsa, haqiqiy

ildizlarini borligi va boshqalar. Ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar uchun ham to'la daraja deb ataluvchi son kiritilgan, lekin bu son berilgan ko'phad haqida keng ma'lumot bera olmaydi, chunki o'zgaruvchilar har xil darajalarda kirgani sababli, ularning roli ham har xil bo'lishi mumkin. Bu tenglamalarning regulyar nuqta atrofida yechimlarini topish mumkin. Maxsus nuqta atrofidagi yechimi o'zini qanday olib borishi to'g'risida umumiy metodika bo'lmagan. Darajali geometriya deb ataluvchi matematikaning bo'limi tenglamalarning yechimlari xususiyatlarini tenglamaga kiruvchi hadlarning daraja ko'rsatkichlar vektorlari orqali o'rganadi. Ko'rsatkichlar vektorlari to'plamining qavariq qobig'i berilgan ko'phadning "Nyuton ko'pyoqi" deyiladi. Har bir yoqqa mos ravishta ko'phadning qisqartmasi tuziladi. Bu qisqartmalar berilgan ko'phadning ma'lum sohadagi birichi yaqinlashishlarini beradi. Darajali geometriya asosida quyidagi uch tushuncha yotadi: Nyuton kopyoqlari, darajali almashtirishlar va logarifmik almashtirishlar.

§ 1.2 . Algebraik chiziqlarning shohalarini topish

Quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{i=1}^m a_{Q_i^1} x^{Q_i^1} = 0 \\ F_2 &= \sum_{i=1}^n a_{Q_i^2} x^{Q_i^2} = 0, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

bunda,

$$x = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle, Q_i^l = \langle q_{i_1}^l, q_{i_2}^l, q_{i_3}^l \rangle, x^{Q_i^l} = x_1^{q_{i_1}^l} x_2^{q_{i_2}^l} x_3^{q_{i_3}^l},$$

bo'lib, $q_{ij} \geq 0$ ko'rsatkichlar butun, λ_i – koeffitsiyentlar haqiqiy yoki kompleks sonlar.

(1.2.1) tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi qandaydir $x^0 = \langle x_1^0, x_2^0, x_3^0 \rangle$ nuqtaning kichik atrofida, (1.2.1) tenglamalar sistemasining yechimlarini izlanadi.

Agar x^0 nuqta- (1.2.1) sistema uchun oddiy nuqta bo'lsa, ya'ni bu nuqtada

$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$ matritsaning rangi ikkiga teng bo'lsa, oshkormas funksiya haqidagi teorema

o'rinli bo'ladi. Bundan, (1.2.1) sistemaning, x^0 nuqtaning kichik atrofidagi

yechimi, x^0 nuqtadan o'tuvchi bitta chiziqdan iborat ekanligi kelib chiqadi. Shu teoremaning o'zidan, keltirilgan chiziqning ixtiyoriy yaqinlikdagi parametrik ko'rinishini topish mumkin. Agar x^0 nuqta- maxsus nuqta bo'lsa (ya'ni $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ matritsaning rangi ikkidan kichik), bu nuqtadan, (1.2.1) sistemaning yechimlarini tashkil etuvchi chiziq shohalari o'tadi.

Bu ishda maxsus nuqta bo'lgan holat qaraladi va quyidagi masala yechiladi: x^0 nuqta atrofida keltirilgan chiziqning barcha shohalarini aniqlash algoritmini tuzish va ularning yetarli aniqlikdagi parametrik yoyilmalarini topish.

(1.2.1) chiziqning har bir shohasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \tau^{P_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad P_j > P_{j+1} > \dots$$

Bu ishda bunday yoyilmalarni topishning nisbatan yengilroq usuli taklif etiladi (Kronokerning ajratish usuliga nisbatan). Bu usulda Nyuton ko'pyoqligi va darajali almashtirishlardan foydalaniladi.

Nyuton ko'pyoqlari matematikaning turli sohalarida tadbiq qilinadi. Oxirgi vaqtlarda, Nyuton ko'pyoqlari topilgandan keyin, matematikaning turli masalalarini yechishda keng qo'llanila boshlandi, xususan, n noma'lumli n ta tenglamalar sistemasini yechishda.

§ 1.3 . Ko'phad qisqartmalari.

Quyidagi ko'phadni ko'rib chiqamiz

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m a_{Q_j} x^{Q_j} \quad (1.3.1)$$

bunda,

$$Q_j = (q_{j_1}, q_{j_2}, q_{j_3}) \quad \text{va} \quad q_{j_1}, q_{j_2}, q_{j_3}$$

butun sonlar, a_{Q_j} esa kompleks sonlar. Agar (1.3.1) da

$$x_i = \tau^{P_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

deb olsak, u holda

$$F(\mathbf{P}, \tau^{P_1}, \tau^{P_2}, \tau^{P_3}) = \sum_{j=1}^m a_{Q_j} \tau^{P_1 q_{j1} + P_2 q_{j2} + P_3 q_{j3}} = \sum_{j=1}^m a_{Q_j} \tau^{\mathbf{P}, Q_j}$$

bunda $P = (\mathbf{P}, p_1, p_2, p_3)$. $\tau \rightarrow \infty$ da bu yig'indida τ bo'yicha eng katta darajalilarini ajratamiz. Sodda uchun bular dastlabki l ta yig'indilar ($1 \leq l \leq m$) bo'lsin, ya'ni

$$\begin{aligned} \mathbf{P}, Q_1 &\succ \dots = \mathbf{P}, Q_l \\ \mathbf{P}, Q_j &\prec \mathbf{P}, Q_l \quad l < j < m+1 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

U holda

$$F(\mathbf{P}) \succ \sum_{j=1}^l a_{Q_j} x^{Q_j} \quad (1.3.3)$$

yig'indiga F funksiyaning $P = (\mathbf{P}, p_1, p_2, p_3)$ tartibli qisqartmasi deyiladi.

F yig'indi F funksiyaning qisqartmasi bo'ladigan P tartiblar to'plami $\mathcal{K}$, qisqartmaning tartiblar konusi yoki shunchaki konusi (ba'zida normal konusi) deyiladi:

$$F \mathcal{K} = \mathcal{K} F$$

$\mathcal{K}$ konusga (1.3.2) munosabatlar sistemasini qanoatlantiradigan P vektorlar tegishli bo'ladi. Qisqartma va konuslarning geometrik talqinini ko'rib chiqamiz. Har bir $a_{Q_j} x^{Q_j}$ ko'phadga uch o'lchovli R^3 fazoda mos ravishda Q_j nuqtani belgilaymiz. Bunday nuqtalarning to'plamiga F ko'phadning tashuvchisi deyiladi va V kabi belgilanadi. $D(F)$ ning barcha nuqtalarini saqlovchi, R^3 fazodagi eng kichik qavariq to'plami ko'pyoq bo'ladi. Uni quyidagicha belgilaymiz

$$M(F) = \left\{ Q : Q = \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j, \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0; \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1 \right\}.$$

$M(F)$ - $D(F)$ tashuvchining qavariq qobig'idir. Ko'pyoqning sirti yoq, qirra va uchlardan tashkil topgan. Sodda uchun, ularni $\Gamma_j(F)$ kabi belgilaymiz, bunda j - yoqning tartibi, d - yoqning o'lchovi.

P tartibli qisqartmaga kirgan $a_{Q_j} x^{Q_j}$ yig'indilar uchun,

$$\mathbf{P}, Q_j \succ r, \quad (1.3.4)$$

qisqartmaga kirmagan yig'indilar uchun esa,

$$\mathbf{P}, Q_j \prec r$$

munosabat o'rinli. Γ_j° yoqga mos $\notin$ qisqartma d o'lchovga ega bo'ladi.

R^3 fazoga qoshma $\bar{R}^3$ fazoda joylashgan $\mathcal{K}$ tartiqlar konusi ham geometrik talqinga ega. Agar (1.3.3) qisqartmaga yoq mos kelsa, konus- yoqga perpendikulyar va ko'pyoqdan tashqariga yo'nalgan nurdan iborat bo'ladi. Agar (1.3.3) qisqartmaga qirra mos kelsa, konus- shunday P tartiblardan iborat bo'ladiki, ularning tayanch tekisligi qirradan o'tadi va ko'pyoq bilan qirradan boshqa umumiy nuqtaga ega emas. Boshqacha qilib aytganda konus- shu qirrada kesishuvchi yoqlarning konuslaridan iborat nurlardan tashkil topgan tekis burchakdir. Uchning tartiblar konusi- shu uchda kesishuvchi qirralarning konuslari bilan chegaralangan fazoviy qavariq konusdan iborat bo'ladi. $\notin$ qisqartmaning Γ_j° yoqiga mos tartiblar konusini K_j° kabi belgilaymiz, ya'ni $K_j^{\circ} \subset \notin$.

Yuqoridagi munosabatlarni aniqroq tushunish uchun, qisqartmaning konusi bilan qandaydir tekislik yoki tekisliklar bilan kesishmasini chizish qulay bo'ladi, aytaylik $p_1 = -1$ va $p_1 + p_2 + p_3 = -1$ tekisliklar bilan.

Faraz etaylik bir nechta Q_j , $j = 1, \dots, m$ vektorlar berilgan bo'lsin. Har bir $P > 0$ vektor uchun shunday $j_1, j_2, \dots, j_s$ indekslarni ajratish kerakki, bunda

$$(Q_{j_k}, P) = (Q_{j_s}, P) \quad k = 1, \dots, s$$

$$(Q_j, P) > (Q_{j_j}, P) \quad j \neq j_1, j_2, \dots, j_s$$

bo'lsin.

Agar f funksiyaning $\tilde{f}$ qisqartmasini faqat bitta P tartib bo'yicha topish kerak bo'lsa, (Q_j, P) skalyar ko'paytmalarni bir qator qarab chiqib, ular ichidan eng kichigini olish lozim. Lekin biz P tartiblarning cheksiz to'plamidan barcha qisqartmalarni topishimiz kerak. bu masalani yechishda geometrik talqin etishdan foydalanamiz. Masalani ikkita geometrik usulda yechish yo'llari ma'lum: N'yuton ko'pburchagi va Frommer ko'pburchagi.

Cheksiz yig'indining qisqartmasi.

f - cheksiz sondagi hadlar yig'indisidan iborat bo'lgan holni qaraymiz

$$f = \sum_{q_1, q_2} f_{q_1, q_2} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \quad (1.3.5)$$

bunda q_1, q_2 butun sonlar va $q_1, q_2 \geq 0$. U holda

$$D = \{Q : f_{q_1, q_2} \neq 0\}$$

butun sonli panjaraning cheksiz qism to'plamidan iborat bo'lib, bunda D to'plamning barcha nuqtalari q_1, q_2 tekislikning I – kvadrantida joylashgan bo'ladi. (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3), minimumlar bu yerda chekli bo'lgani uchun, Q_* , Q^* nuqtalar bor bo'lib, yuqorida ko'rsatilgan yo'l bilan qavariq siniq chiziq $\tilde{f}$ ni xuddi chekli D holdagidek qurish mumkin. Nyuton siniq chizig'i va chetli uchlar orasida joylashgan bo'ladi. U chekli sondagi uchlar va qirralardan iborat. Uning har bir qirrasini yoki uchi D to'plamning chekli sondagi nuqtalarini saqlaydi va unga chekli hadlardan tuzilgan qisqartma mos keladi

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi

1 – teorema. (1.3.5) cheksiz summaning musbat tartiblar, ya'ni $p > 0$ bo'yicha tuzilgan $\tilde{f}_j^{(d)}$ qisqartmalari soni cheklidir. $\tilde{f}_j^{(d)}$ qisqartmalar va Nyuton siniq chizig'i $\tilde{f}$ ning qirralari va uchlari orasida o'zaro bir qiymatli muvofiqlik mavjuddir.

Nyuton siniq chizig'i $f(x_1, x_2) = 0$ tenglamaning nol nuqta atrofida barcha yechimlarini topish uchun qo'llaniladi. Nyutonning o'zi bu siniq chiziqning faqat yuqori chap qirrasini qurdi (Q^* nuqtaga taqaladigan).

Qisqartmalarni topishning yana bir geometrik usuli mavjud.

Frommer usuli. Bu usul differensial tenglamalarga qo'llash uchun ishlab chiqilgan edi. Faraz etaylik $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ chekli sondagi vektorlar to'plami D berilgan bo'lsin. Har bir $p > 0$ uchun shunday D_p to'plamni ajratishi lozimki,

$$\mathbb{K}(Q_i, P) = \mathbb{K}(Q_j, P) \quad Q_i \in D_p, Q_j \in D_p$$

$$\mathbb{K}(Q_k, P) > \mathbb{K}(Q_j, P) \quad Q_k \in D \setminus D_p$$

bo'lsin. Buning uchun s_1, s_2 o'zgaruvchilar tekisligida har bir Q_j ga $\mathbb{K}(Q_j, S) = 1$ tenglama bilan aniqlanuvchi L_j to'g'ri chiziqni mos qo'yamiz. Faraz etaylik $p > 0$ fiksirlangan bo'lib, u orqali $\mathcal{P} = \{cP\}, c > 0$ nur o'tkazilgan bo'lsin. S_j bilan L_j to'g'ri chiziqda yotuvchi $\mathcal{P}$ nurning nuqtasini belgilaymiz, ya'ni

$$S_j = c_j P, \quad \mathbb{K}(Q_j, S_j) = 1$$

Shu sababli $\mathbb{K}(Q_j, P) = \frac{1}{c_j}$ va

$$\min_j \mathbb{K}(Q, P) = \frac{1}{\max_j c_j}$$

$\max_j c_j \cdot s_1 = s_2 = 0$ koordinata boshidan eng chetlashgan $\mathcal{P}$ nurdagi nuqtada erishadi. Shuning uchun, har bir P vektor uchun D_p to'plam: L_j to'g'ri chiziqlar $\mathcal{P}$ nur bilan nol nuqtadan eng chetlashgan nuqtada kesishgan Q_j vektorlardan tuzilgan. L_j to'g'ri chiziqlarning eng chetlashgan nuqtalari Frommerning qavariq siniq chizig'i Φ ni tashkil etadi. Bu siniq chiziqning qirrasiga birhadli $\hat{f}_j^{(d)} = a_j x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ qisqartmalar ϕ ning uchlariga bo'lsa, ko'phadli $\hat{f}_j^{(d)} = \sum a_j x_1^{q_{1j}} x_2^{q_{2j}}$ mos keladi, bunda summa uchdan o'tuvchi L_j to'g'ri chiziqlar bo'yicha olinadi.

Nyuton egri chiziqlari va Frommer egri chiziqlari bir-biriga o'zaro ikkilik munosabatini qanoatlantiradi, ular R^2 va $\bar{R}^2$ qo'shma tekisliklarda joylashgandir. S_1 va S_2 o'zgaruvchilarning tekisligi $\bar{R}^2$ dan iborat. Avval bu tekislikda o'zgaruvchilar p_1, p_2 bilan. $\tilde{r}$ va ϕ siniq chiziqlarning uchlari va qirralari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan: Nyuton siniq chizig'ining qirrasiga Frommer siniq chizig'larining uchi, Nyuton siniq chizig'ining uchiga Frommer siniq chizig'ining qirrasini belgilanar edi. S_1 va S_2 orqali o'zgaruvchilarni belgilash yozuvlarning qulayligi uchun kiritilgan mos keladi.

§ 1.4. Darajali almashtirishlar.

Quyidagi matritsa berilgan bo'lsin,

$$\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j=1,2,3},$$

bunda α_{ij} – haqiqiy va $|\alpha| \neq 0$. quyidagi

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{13}} \\ y_2 &= x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{22}} x_3^{\alpha_{23}} \\ y_3 &= x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}} x_3^{\alpha_{33}} \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

almashtirish, α matritsali darajali almashtirish deyiladi. $|\alpha| \neq 0$ deb olganligimiz uchun (1.4.1) almashtirish, $\beta = (\beta_{ij})_{i,j=1,2,3}$ matritsali teskari almashtirishga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1^{\beta_{11}} y_2^{\beta_{12}} y_3^{\beta_{13}} \\ x_2 &= y_1^{\beta_{21}} y_2^{\beta_{22}} y_3^{\beta_{23}} \\ x_3 &= y_1^{\beta_{31}} y_2^{\beta_{32}} y_3^{\beta_{33}} \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Haqiqatdan ham, (1.4.1) va (1.4.2) almashtirishlar koordinatalarning logarifmiga nisbatan chiziqli va bir- biriga teskari bo'ladi.

(1.4.1) darajali almashtirishning ba'zi xossalari:

1. (1.4.1) almashtirish R_0^3 haqiqiy fazoning I oktantasida, x_1, x_2, x_3 yoki y_1, y_2, y_3 koordinatalari bilan o'zaro bir qiymatli aniqlangan. Boshqa oktantalarda, faqatgina α_{ij} sonlarga ma'lum shartlarni qo'ygandagina (1.4.1) almashtirish haqiqiy bo'ladi.

2. (1.4.2) ga ko'ra, (1.4.1) almashtirishdagi $x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}$ birhad

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} = y_1^{\beta_{11}q_1 + \beta_{21}q_2 + \beta_{31}q_3} y_2^{\beta_{12}q_1 + \beta_{22}q_2 + \beta_{32}q_3} y_3^{\beta_{13}q_1 + \beta_{23}q_2 + \beta_{33}q_3} \quad (1.4.3)$$

ga o'tadi. Ya'ni $X = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ ning ko'rsatkichi Q , $Y = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$ ning ko'rsatkichi

$$Q^C = \beta^* Q \quad (1.4.4)$$

ga o'tadi, bunda $\beta^* - \beta$ matritsaning transponirlangani. Demak, (1.4.1) darajali almashtirishda, daraja ko'rsatkichlari chiziqli almashadi (bu yig'indi uchun ham o'rinli), bunda

$$F \langle x \rangle \stackrel{def}{=} \sum_{Q \in D \langle x \rangle} a_Q x^Q \quad (1.4.5)$$

yig'indi quyidagi

$$F \langle y \rangle \stackrel{def}{=} \sum_{Q' \in D' \langle y \rangle} a_{Q'} y^{Q'}$$

yig'indiga o'tadi, bunda $Q' = \beta^* Q$; $D' \langle y \rangle \stackrel{def}{=} \beta^* D \langle x \rangle$.

3. Agar $p = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ vektor tartibli

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \tau^{p_1} \langle + 0 \rangle \\ x_2 &= b_2 \tau^{p_2} \langle + 0 \rangle \\ x_3 &= b_3 \tau^{p_3} \langle + 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

chiziq berilgan bo'lsa, bunda b_1, b_2, b_3 lar musbat sonlar, (1.4.1) almashtirish natijasida bu chiziq

$$P' = \alpha P \quad (1.4.7)$$

vektor tartibli

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1^{\alpha_{11}} b_2^{\alpha_{12}} b_3^{\alpha_{13}} \tau^{\alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2 + \alpha_{13}p_3} \langle + o \rangle \\ y_2 &= b_2^{\alpha_{21}} b_2^{\alpha_{22}} b_3^{\alpha_{23}} \tau^{\alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \alpha_{23}p_3} \langle + o \rangle \\ y_3 &= b_1^{\alpha_{31}} b_2^{\alpha_{32}} b_3^{\alpha_{33}} \tau^{\alpha_{31}p_1 + \alpha_{32}p_2 + \alpha_{33}p_3} \langle + o \rangle \end{aligned}$$

chiziqga o'tadi.

Demak, P tartiblar fazosi $\bar{R}^3$ da (1.4.1) darajali almashtirish (1.4.7) chiziqli almashtirishni o'zida saqlaydi. Bu almashtirish (1.4.7) almashtirishninig qo'shmasidir. Shuning uchun R^3 va $\bar{R}^3$ fazolar qo'shma bo'ladi va $\langle Q, P \rangle$ skalyar ko'paytma (1.4.1) darajali almashtirishda saqlanadi. Xususan, (1.4.5) yig'indining $K_j \langle x \rangle$ qisqartma konusi, (1.4.6) yig'indining $K_j \langle y \rangle$ qisqartma konusiga o'tadi.

Umuman olganda, R^3 va $\bar{R}^3$ fazolarning barcha geometric obyektlari (1.4.4) va (1.4.7) chiziqli almashtirishni oladi va o'zlarining xossalarini saqlaydi.

Darajali almashtirishlar ikki o'lmli bo'lgan hol uchun.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad |\alpha| \neq 0$$

matritsa berilgan bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \\ y_2 = x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{22}} \end{cases} \quad (1.4.8)$$

darajali almashtirish deyiladi va

$$\begin{cases} x_1 = y_1^{\beta_{11}} y_2^{\beta_{12}} \\ x_2 = y_1^{\beta_{21}} y_2^{\beta_{22}} \end{cases} \quad (1.4.9)$$

teskari almashtirishga ega bo'lib,

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

matritsa α matritsaga teskari matritsa bo'ladi, ya'ni

$$\beta = \alpha^{-1}$$

Haqiqatan ham (1.4.8) va (1.4.9) almashtirishlar o'zgaruvchilarning logarifmlariga nisbatan chiziqli

$$\begin{cases} \ln y_1 = \alpha_{11} \ln x_1 + \alpha_{12} \ln x_2 \\ \ln y_2 = \alpha_{21} \ln x_1 + \alpha_{22} \ln x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln x_1 = \beta_{11} \ln y_1 + \beta_{12} \ln y_2 \\ \ln x_2 = \beta_{21} \ln y_1 + \beta_{22} \ln y_2 \end{cases}$$

va bir – biriga teskaridir. (1.4.8) almashtirishda $x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ birhadli (1.4.9) ga ko'ra

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} = \left(y_1^{\beta_{11}} y_2^{\beta_{12}} \right)^{q_1} \left(y_1^{\beta_{21}} y_2^{\beta_{22}} \right)^{q_2} = y_1^{\beta_{11}q_1 + \beta_{21}q_2} y_2^{\beta_{12}q_1 + \beta_{22}q_2} \quad (1.4.10)$$

ga o'tadi. Demak, X bo'yicha Q darajaning vektor ko'rsatkichi Y bo'yicha $Q' = \beta^* Q$ vektor ko'rsatkichga o'tib, bunda β^* - β matritsaga transponirlangan

matritsadir. Boshqacha aytganda o'zgaruvchilarning chiziqli bo'lmagan (1.4.8) almashtirishida darajaning vektor ko'rsatkichi chiziqli almashtirish olgan bo'ladi. Yuqorida aytilganlar birhadlar yig'indisi

$$f = \sum_{Q \in D} f_Q x_1^{q_1} x_2^{q_2} \quad (1.4.10')$$

uchun ham o'rinli bo'lib, unda (1.4.8) almashtirishni qo'llasak, u

$$f = \sum_{Q' \in D'} f_{Q'} y_1^{q'_1} y_2^{q'_2}$$

yig'indiga o'tadi: bunda $Q' = \beta * Q$, $D' = \beta * D$. Demak, D' to'plam uchun qavariq siniq chiziq $\tilde{\Gamma}'$ D to'plamning $\tilde{\Gamma}$ siniq chizig'idan xuddi o'sha chiziqli almashtirish bajarilgandan hosil bo'ladi.

Kelgusida faqat shunday (1.4.8) ko'rinishdagi darajali almashtirishlarni qaraymizki, uning determinanti $|\alpha| = 1$ bo'lib, α matritsaning α_{ij} elementlari butun sonlardan iborat. Bunday matritsalar unimodulyar deyiladi. Unimodulyar α matritsaga teskari $\beta = \alpha^{-1}$ matritsa ham unimodulyar va

$$\beta = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \quad (1.4.11)$$

Endi (1.4.8) tenglamaning $\Gamma_j^{(1)}$ qirraga mos keluvchi (1.4.10) to'plamni tadqiqiga qaytamiz. Quyidagi o'zgaruvchilarni almashtirishni qaraymiz:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \\ y_2 = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \end{cases} \quad (1.4.12)$$

Bunda s_1 va s_2 butun sonlarni

$$s_1 r_2 - s_2 r_1 = 1 \quad (1.4.13)$$

shartni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. O'zaro tub bo'lgan ixtiyoriy r_1 va r_2 butun sonlar uchun (1.4.13) ni qanoatlantiruvchi bunday s_1 va s_2 juftliklar cheksiz ko'p topiladi.

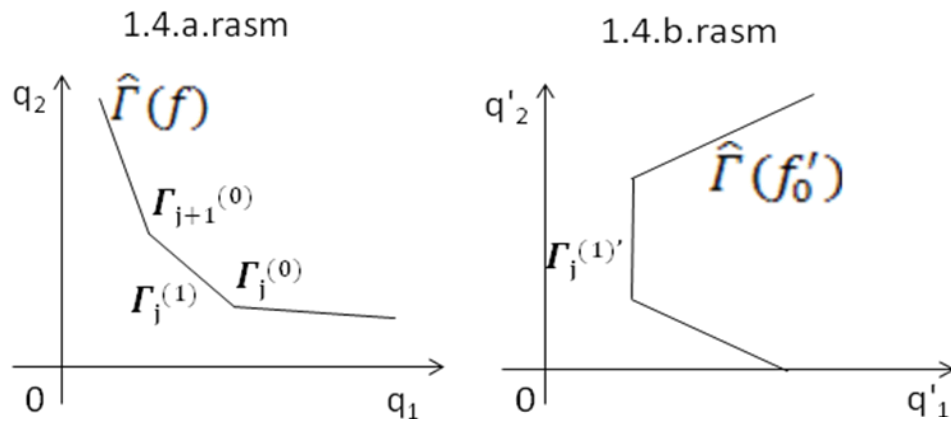
(1.4.10) va (1.4.11) formulalarga asosan $x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ birhad (1.4.12) almashtirishdan keyin

$$y_1^{\alpha_{22}q_1 - \alpha_{21}q_2} y_2^{-\alpha_{12}q_1 + \alpha_{11}q_2} = y_1^{r_2q_1 - r_1q_2} y_2^{-s_2q_1 + s_1q_2}$$

bo'ladi, ya'ni y_1 ning daraja ko'rsatkichi $q'_1 = (Q, P_j)$ bo'lib, bunda $P_j = (r_2, -r_1)$ vektor $\Gamma_1^{(1)}$ qirraga ortogonal bo'ladi. Shuning uchun barcha $Q' \in D'$ lar uchun $q'_1 = r = \min(Q, P_j)$ bo'ladi. Jumladan $\hat{f}_j^{(1)}(x_1, x_2)$ qisqartmadagi $f_Q x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ hadlar uchun $q'_1 = r$ bo'ladi, ya'ni

$$\hat{f}_j^{(1)}(x_1, x_2) = f_j^{(1)}(y_1, y_2) = y_1^r \hat{g}(y_2) \quad (1.4.13')$$

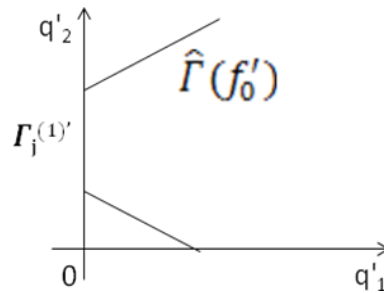
(1.4.10) yoyilmaning boshqa hadlari uchun $q'_1 > r$. Geometrik nuqtai nazardan bu (1.4.12) almashtirish bajargandan so'ng $\Gamma_j^{(1)}$ qirra vertikal $\Gamma_j^{(1)'} qirraga o'tishini $\hat{f}$ siniq chiziqning qolgan barcha nuqtalari $\Gamma_j^{(1)'}$ qirradan o'ng tomonda joylashishini ko'rsatadi.$



Shuning uchun $\hat{f}(y_1, y_2)$ funksiyani

$$g(y_1, y_2) - y_1^{-r} f'(y_1, y_2)$$

ga qisqartirish mumkin. $f'(y_1, y_2)$ ni y_1^r ga qisqartirishga $q_1' q_2'$ tekislikda ko'pburchakni shunday chapga siljitishi mos keladiki, bunda $\Gamma_j^{(1)}$ qirra q_2' o'qning ustiga tushadi.



(1.4.12) almashtirish bajargandan keyin (1.4.8) to'plam

$$\sum'(\varepsilon) = \mathbb{R}^1: \quad \varepsilon \leq |y_2| \leq \varepsilon^{-1}, \quad |y_1| \leq \varepsilon \quad (1.4.14)$$

to'plamga o'tadi.

Demak, (1.4.12) darajali almashtirish natijasida quyidagi masalaga kelimiz: (1.4.14) to'plamda

$$f'(y_1, y_2) = 0 \quad (1.4.15)$$

tenglamaning yechimlarini topish kerak. (1.4.14) to'plam y_2 o'qning shunday qismining atrofiki, u nolning va cheksiz uzoqlashgan nuqtalarni saqlamaydi. Lekin bunda y_2 o'qning o'zi (1.4.15) tenglamaning yechimi sifatida bizni qiziqitirmaydi, chunki (1.4.12) almashtirishda u $x_1 = x_2 = 0$ nuqtaga o'tadi. Demak, (1.4.15) tenglamada f' ni y_1^r ga qisqartirish mumkin va (1.4.14) to'plamda

$$g(y_1, y_2) = 0 \quad (1.4.16)$$

tenglamani qarash mumkin. Agar $y_1 = 0$ o'qdagi $y_2 = y_2^0$ nuqta (1.4.16) tenglamaning yechimi bo'lmasa, u holda uning biror atrofida (1.4.16) tenglama

yechimga ega bo'lmaydi. Shuning uchun (1.4.15) tenglamaning (1.4.14) to'plamdagi barcha yechimlarini topish uchun (1.4.16) tenglamaning $y_1 = 0$, $y_2 = y_2^0 \neq 0, \infty$ bo'lgan barcha yechimlarini $y_1 = 0$ o'qda topamiz. (1.4.13') ga ko'ra

$$g(0, y_1) = \mathcal{G}(y_2) = y_1^{-r} \mathcal{F}_j^{(1)}(x_1, x_2)$$

Demak,

$$\mathcal{G}(y_2) = 0 \quad (1.4.17)$$

tenglamaning barcha $y_2 = y_2^0 \neq 0, \infty$ yechimlarini topish kerak va har bir bunday yechim uchun (1.4.16) tenglamani $y_1 = 0$, $y_2 = y_2^0$ nuqta atrofida taxlil qilish kerak. g funksiya y_1 va y_2 ni butun darajalarda saqlagani uchun biz xuddi avvalgi masalaga o'xshash masalaga kelamiz. Demak, analitik tenglamaning barcha yechimlarini ma'lum yechimning biror atrofida topish kerak.

Agar (1.4.17) tenglamaning $y_2 = y_2^0$ ildizi sodda bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial g(0, y_2^0)}{\partial y_2} = \frac{\partial \mathcal{G}(y_2^0)}{\partial y_2} \neq 0$$

va 1 – teoremaga ko'ra $y_1 = 0$, $y_2 = y_2^0$ nuqta atrofida (1.4.17) tenglamaning barcha yechimlari bitta sodda egri chiziqda joylashgan bo'ladi, uning uchun

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_1^k$$

yaqinlashuvchi yoyilmani hosil qilamiz. (1.4.16) tenglamaning yechimlari tarmog'I boshqa tarmoqlardan ajralgandir. y_1 , y_2 dan x_1 , x_2 larga (1.4.11) ga teskari bo'lgan darajali almashtirishlar yordamida qaytib kelib x_1 va x_2 larning y_1 ning darajalari bo'yicha qator ko'rinishida ifodalarini topamiz, ya'ni (1.4.10) tenglamaning yechimi y_1 parametrlil parametrik ko'rinishda ifodalanadi.

Agar (1.4.17) tenglamaning $y_2 = y_2^0$ ildizi karrali bo'lsa, u holda (1.4.16) tenglamaning yechimini $y_1 = 0$, $y_2 = y_2^0$ nuqta atrofida taxlil qilganda $y_2 = y_2^0 + Z$ parallel ko'chirishni bajarish kerak bo'lib, bunda

$$g(y_1, y_2) = g(y_1, y_2^0 + Z) = h(y_1, z)$$

Endi $h(y_1, z)$ funksiya uchun N'yuton ko'pburchagini qurish, qirralarini ajratish, darajali almashtirishlarni bajarish kerak. boshqacha aytganda, $h(y_1, z)$ funksiyaning ma'ruzada $f(x_1, x_2)$ ga qo'llanilgan usulda taxlil qilish kerak ekan.

Endi chekli qadamlardan keyin (1.4.10) tenglama yechimlarining barcha tarmoqlari bir – biridan ajratilgan bo'ladi.

$\Gamma_j^{(1)}$ qirrada yotgan butun nuqtalar sonidan birini ayirganda hosil bo'lgan son $\Gamma_j^{(1)}$ qirraning balandligi deyiladi va δ_j bilan belgilanadi.

Nyuton ko'pburchagi $\mathfrak{F}$ ning barcha qirralarining balandliklarining yig'indisiga ko'pburchakning balandligi deyiladi va $\delta = \delta(\mathfrak{F})$ bilan belgilanadi. δ soni noldagi maxsuslikning murakkablik darajasini xarakterlaydi. Agar nol nuqtada $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} \neq 0$ bo'lsa, u holda δ balandlik 1 ga teng bo'ladi va nol sodda nuqta bo'ladi. Umuman Nyuton ko'pburchagining chetki uchlari Q_* va Q^* dan foydalanib,

$$\delta \leq q_2^* - q_{2*}, \quad \delta \leq q_{1*} - q_1^* \quad (1.4.18)$$

ekanligini ko'rish qiyin emas. Qirraning δ_1 balandlik butun sinig chiziqning δ balandligiga faqat $\mathfrak{F}$ chiziq bitta qirradan iborat bo'lgandagina teng bo'lishini ko'rish qiyin emas. Boshqa hollarda $\delta_1 < \delta$ bo'ladi. α unimodulyar matritsali darajali almashtirishda $q_1 q_2$ va $q_1' q_2'$ tekisliklarning nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Shuning uchun bunday almashtirishlarda qirraning balandligi invariant bo'ladi.

Agar $\mathcal{G}(y_2)$ ko'phadda maksimal darajali y_2^s ko'paytuvchi ajratilsa, ya'ni $\mathcal{G}(y_2) = y_2^s \mathcal{G}_0(y_2)$ va $\mathcal{G}_0(0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\Gamma_1^{(1)}$ qirraning balandligi $\mathcal{G}_0(y_2)$ ko'phadning darajasiga teng bo'ladi. (1.4.b va 1.4.c rasmlar)

$y_1 = 0$, $y_2 = y_2^0$ nuqtaning atrofini o'rganish uchun Nyuton ko'pburchagi $\mathcal{F}(h(y_1, z))$ ni ko'ramiz. (1.4.18) ga ko'ra uning balandligi q_2^* koordinatadan oshmaydi. O'z navbatida q_1^* son (1.4.17) tenglamaning $y_2 = y_2^0$ ildizi karrasiga teng bo'ladi. Lekin $y_2^0 \neq 0$ ildizning karrasi $\mathcal{G}_0(y_2)$ ko'phad darajasidan oshmaydi, bu daraja esa $\Gamma_j^{(1)}$ qirraning balandligi δ_j ga tengdir. Shunday qilib, $\mathcal{F}(h(y_1, z))$ chiziqning balandligi boshlang'ich $\mathcal{F}(f(x_1, x_2))$ chiziqning balandligidan oshmaydi. Bunda tenglik faqat $\mathcal{F}(f)$ chiziq bitta qirradan iborat bo'lgan holda va $\mathcal{G}_0(y_2)$ ko'phad karrasi $\mathcal{G}_0(y_2)$ ko'phadning darajasiga teng bo'lgan faqat bitta y_2^0 ildizga ega bo'lgan holda mumkin bo'ladi. Qolgan barcha hollarda yuqorida jarayon tadqiq etilayotgan maxsuslikda balandlikning kamayishini ko'rsatadi va u birga teng balandlikka ega maxsus nuqta holiga olib keladi. Bu ajratilgan shoxaga mos keluvchi oddiy nuqta. Xuddi yuqoridagi kabi birlik balandlikka chekli sondagi qadamdan so'ng erishib bo'lmaydi, (1.4.10) tenglama karrali shoxalarga bo'lsagina bunga erishish mumkin. Masalan, agar

$$f = \left(x_2 - \sum_{k=1}^{\infty} x_1^k \right)^3 g(x_1, x_2)$$

bo'lsa, u holda $x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_1^k$ shoxa (1.4.10) tenglamaning uchkarali yechimi bo'ladi va agar, bizning usul bilan shoxa ajratilgan bo'lsa, balandlik doimo uchga teng bo'ladi.

(1.4.10) tenglamaning noldagi yechimlari shoxalarining soni Nyuton ko'pburchagi $\mathcal{F}(f)$ ning balandligidan oshmaydi. (1.4.17) tipdagi tenglamalarning faqat haqiqiy $y_2 = y_2^0$ ildizlarga mos keluvchi haqiqiy shoxalariga kelsak, ular bundan ham kam bo'lishi mumkin.

§ 1.5. “Nyuton ko’pyoqlari” usulini differensial tenglamalarga tadbig’i

Lagranj bu usulni analitik usulda asoslab, uni differensial tenglamalar integrallarini darajali qatorga yoyish mumkinligini aytib o’tgan. Lakua ham bu mavzuga doir aytib o’tgan. “Nyuton ko’pburchagi” chiziqli differensial tenglamalarning ratsional integrallarini topishda xizmat qildi. Bu masalaga Luivilning tadqiqotlari bag’ishlangan. Bu ishlarida u Abel integrallarining algebraik qismini topishga doir masalada ham qaragan.

$$P_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n(x)y = V(x) \quad (1.5.1)$$

chiziqli differensial tenglamani qaraymiz, bunda $P_i(x), V(x)$ lar ko’phadlar. Bu tenglamaning butun ratsional integrallarini topish uchun birinchi navbatda izlanayotgan V integralning darajasini aniqlab olish lozim.

Barcha ko’phadlarni x ning darajalarini kamayishi tartibida yozamiz

$$P_i(x) = a_i x^{p_i} + \dots,$$

$$V(x) = vx^{\vartheta} + \dots,$$

$$y = ax^{\alpha} + \dots$$

$$p_0 + \alpha - n, \quad p_1 + \alpha - n + 1, \dots, p_n + \alpha, \quad \vartheta$$

daraja ko’rsatkichlari ichida kamida ikkitasi teng bo’lishi kerak. Agar

$$p_0 - n, \quad p_1 - n + 1, \dots, p_n$$

sonlar sistemasi yagona eng katta hadga ega bo’lsa, u holda izlanayotgan α

$$\alpha = \vartheta - p_k + n - k \quad (1.5.2)$$

ga teng bo’ladi, agar ular bir nechta bo’lsa, masalan

$$p_{t_1} - n + t_1, p_{t_2} - n + t_2, \dots, p_{t_k} - n + t_k,$$

ta bo'lsa, u holda α quyidagi algebraik tenglamalardan

$$at_1 \frac{\alpha!}{(\alpha - n + t_1)!} + at_2 \frac{\alpha!}{(\alpha - n + t_2)!} + \dots + at_k \frac{\alpha!}{(\alpha - n + t_k)!}$$

yoki (1.5.2) dan topiladi. Keyin u ko'phadning koeffisientlarini aniqmas

koeffisientlar usuli orqali topiladi. $y = \frac{X}{Y}$ (X, Y – ko'phadlar) tipdagi kasr ratsional integrallarni topishda Liuvill avvalo shuni isbot qiladiki, Y kupxadning chiziqli $x - a$ bo'luvchisi $P_0(x)$ ni ham bo'ladi. Endi α ning Y ga kiruvchi darajasini aniqlash qoladi. $x = a$ da Z nolga ham cheksizlikka ham aylanmaydigan

$y = \frac{Z}{(x - a)^\alpha}$ deb qabul qilib, Liuvill bu ifodani (1.5.1) ga qo'yadi va $(x - a)$ ifoda maxrajda eng yuqori β daraja (ularning barchasi Z ko'paytiruvchini saqlaydi) va ularni $(x - a)^\alpha$ ga ko'paytirib va Z ga bo'lib, $x = a$ ni qo'yamiz. Natijada α ga nisbatan tenglama va agar butun bo'lganda uning eng katta ildizi xosil bo'ladiki, shu izlanayotgan daraja ko'rsatkichi bo'ladi. $y(x)$ ning maxrajidagi barcha chiziqli ko'paytuvchilarni yo'qotib, natijada shunday tenglamaga kelamizki, ulardan integrallarni ko'pxadlar ko'rinishida izlash kerak bo'ladi. Bunday usul “Nyuton kupyoyqlisi” usulini tashkil etadi. Juda sodda shaklda ifodalanadi chunki barcha ko'rsatkichlar ikki qatorda joylashadi. Agar tenglama chiziqli bo'lmasa, u xolda “Nyuton kupyoyqlisi” o'zini to'liq xolda ko'rsatadi. Berilgan nuqta atrofida integrallarini yaqinlashuvchi qatarga yoyish mumkin bo'lgan va yoyilmasida logarifmik hadlar qatnashadigan chiziqli differensial tenglamalarni Fuks qarab chiqdi. Natijada quyidagi ko'rinishdagi differensial tenglamalar

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = 0$$

hosil bo'ldiki, bunda $p_k(x)$ ratsional funksiya bo'lib, $x = a$ nuqtaning atrofida $(x - a)^k p_k(x)$ ko'paytma chekli bo'lib qoladi. Bunday yoyilmalarni har

tomonlama tadqiq qilgan olim Frobeniusdir . Bunda kursatkichlarni tanlab olish ma'lum bir algebraik tenglamani yechishga keltiriladi.

Ikki o'lchamli differensial tenglamalar.

Bunda

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &\equiv \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &\equiv \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{1.5.3}$$

oddiy differensial tenglamalar sistemasining yechimlarini biror $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$ nuqta atrofida qarab chiqamiz. Bunda φ_i funksiyalar bu nuqta atrofida analitik deb faraz etiladi. Quyidagi masalani qaraymiz: yechimni topish (1.5.3) sistemaning x_1^0, x_2^0 nuqta atrofidagi $x_1(\tau), x_2(\tau)$ yechimlarini ixtiyoriy τ parametrlarning funksiyalari ko'rinishida topish.

Bizni x_1, x_2 koordinatalarning t vaqtdan bog'liqligi tavsifi masalasi qiziqirmaydi. Aniqroq aytganda bitta

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\tag{1.5.4}$$

tenglamaning yechimlari (integral egri chiziqlari) izlanadi. (1.5.4) ga ko'ra (1.5.3) ko'rinishdagi yozuv qulay. Shu sababli biz (1.5.3) ko'rinishdagi yozuvdan foydalanamiz. Agar (1.5.4) tenglama uchun $x_1 = a_1(\tau), x_2 = a_2(\tau)$ yechimlar topilgan bo'lsa, u holda (1.5.4) sistema tenglamalarining (1.5.3) dan

$$t = \int \frac{a_1'(\tau)d\tau}{\varphi_1(a_1(\tau), a_2(\tau))}$$

ni topamiz, ya'ni ma'lum integral egri chiziqlar uchun koordinatalarning t vaqtdan bog'liq emasligi bitta kvadratura yordamida topiladi.

$$x_1 = x_1^0 + x_1^*, \quad x_2 = x_2^0 + x_2^*$$

parallel ko'chirishni bajaramiz. U holda (1) sistema

$$\dot{x}_i^* = \varphi_i^*(x_1^*, x_2^*) = \varphi_i(x_1^0 + x_1^*, x_2^0 + x_2^*) \quad i = 1, 2,$$

sistemaga o'tadi va uni $x_1^* = x_2^* = 0$ nolning atrofida o'rganishga olib kelinadi. Kelgusida bunday ko'chirish bajarilgan deb faraz qilamiz va (1.5.3) sistemani $x_1 = x_2 = 0$ nuqta atrofida o'rganamiz.

Agar nolda $|\varphi_1| + |\varphi_2| \neq 0$ bo'lsa, nol nuqta – (1.5.3) sistemaning maxsus nuqtasidir. U (1.5.3) sistemaning statsionar (qo'zg'almas) yechimidir.

Maxsus nuqtada φ_i funksiyalarning yoyilmalari x_1, x_2 lar bo'yicha chiziqli hadlardan boshlanadi. Agar bu chiziqli hadlarni ajratsak, u holda (1.5.3) sistemani

$$\dot{X} = AX + \dots \quad (1.5.4')$$

vektorli ko'rinishda yozish mumkin bo'lib, bunda A kvadrat matritsa. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vektordir. Faraz etaylik λ_1, λ_2 A matritsaning xos qiymatlari (ya'ni $|A - \lambda E| = 0$ tenglama ildizlari bo'lsin). Agar $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$ bo'lsa, nolni elementar maxsus nuqta deymiz. Agarda $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ bo'lsa, nolni elementar bo'lmagan maxsus nuqta deymiz. (1.5.3) sistemaning elementar maxsus nuqtasi qaysidir ma'noda analitik egri chiziqlarning oddiy nuqtasiga o'xshash, elementar bo'lmagan maxsus nuqta esa analitik egri chiziqlarning oddiymas nuqtalariga o'xshashdir.

x – erkli o'zgaruvchi, y – erksiz o'zgaruvchi, $x, y \in \mathbb{C}$ bo'lsin. $X = (x, y)$ deb olamiz. $\alpha(x, y)$ ga differensial monom deyiladi, agarda u oddiy

$$cx^{r_1}y^{r_2} = cX^R \quad (1.5.5)$$

monom (bunda $c = konst \in \mathbb{C}, R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$) bilan chekli sondagi

$$\frac{d^l y}{dx^l}, \quad l \in \mathbb{N} \in \quad (1.5.6)$$

differensial monomlarning ko'paytmasidan iborat bo'lsa.

Differensial monomlarning summasi

$$f(x) = \sum \alpha_i(x) \quad (1.5.7)$$

ga differensial summa deyiladi.

$$f(x) = 0 \quad (1.5.8)$$

Oddiy differensial tenglamani qaraymiz, bunda $f(x) - y$ lari butu nomanfiy darajalari bilan kirgan differensial summa bo'lsin. $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ da (1.5.8) tenglamaning yechimlari $y = \varphi(x)$ lar uchun uning

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s \quad (1.5.9)$$

ko'rinishdagi barcha yoyilmalarini toppish masalasini qaraymizki, bunda $c_r, c_s = \text{const} \in C$, $c_r \neq 0$, daraja ko'rsatkichlari $r, s \in R$ bo'lib, ular R da quyuglanish nuqtasiga ega bo'lmasin. $x \rightarrow 0$ da $r < s$ bo'lsin va $x \rightarrow \infty$ da $r > s$ bo'lsin

$$w = \begin{cases} -1, & \text{agar } x \rightarrow 0 \\ 1, & \text{agar } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

deb olamiz.

Yuqorida qo'yilgan masalani darajali geometriya usullari yordamida yechish mumkin.(1.5.9) yoyilmani topish ikki qadamdan iborat bo'ladi:

1)birinchi yaqinlashishlar

$$y = c_r x^r, \quad c_r \neq 0 \quad (1.5.10)$$

ni hisoblash va

2) (1.5.10) ning qolgan hadlarini hisoblash.

Har bir $Q(x)$ differensial monomga uning daraja ko'rsatkichi vektori

$$Q(a) = (q_1, q_2) \in R^2$$

quyidagi qoida asosida mos qo'yiladi. (1.5.5) monom uchun

$$Q(cx^{r_1}y^{r_2}) = (r_1, r_2),$$

(1.5.6) hosila uchun

$$Q\left(\frac{d^l y}{dx^l}\right) = (-l, 1)$$

mos qo'yiladi.

Differensial monomlar ko'paytirilgan vaqtda ularning daraja ko'rsatkichlari xuddi vektorlar kabi qo'shiladi, ya'ni

$$Q(a_1, a_2) = Q(a_1) + Q(a_2)$$

(1.5.7) differensial summaga kiruvchi barcha differensial monomlarning daraja ko'rsatkichlari $Q(a_i)$ lar to'plami $S(f)$ ga $f(x)$ summaning tashuvchisi deyiladi.

§ 1.6. Qisqartmalar konuslari.

Teskari masalani qaraymiz. Faraz etaylik, $\Gamma_j^{(d)}$ - Γ ko'pburchakning qandaydir qirrasi yoki uchi bo'lsin. Barcha shunday P vektorlar to'plamini topish kerakki, ular uchun $\Gamma_j^{(d)} = L_P \cap \Gamma$ bo'lsin, ya'ni L_P tayanch to'g'ri chiziq Γ ko'pburchak bilan faqat $\Gamma_j^{(d)}$ lar bo'yichagina kesishsin.

Bunday P vektorlar to'plamini $\Gamma_j^{(d)}$ uchning yoki qirraning konusi deyimiz va $K_j^{(d)}$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$K_j^{(d)} = \{P: L_P \cap \Gamma = \Gamma_j^{(d)}\}$$

$\tilde{Q} \in \Gamma_j^{(d)}$ bo'lsin. $K_j^{(d)}$ konusning P vektorlari quyidagi tengliklar va tengsizliklar sistemalari orqali aniqlanishi ravshan:

$$\text{barcha, } Q \in \Gamma_j^{(d)} \text{ larda } (Q, P) = (\tilde{Q}, P)$$

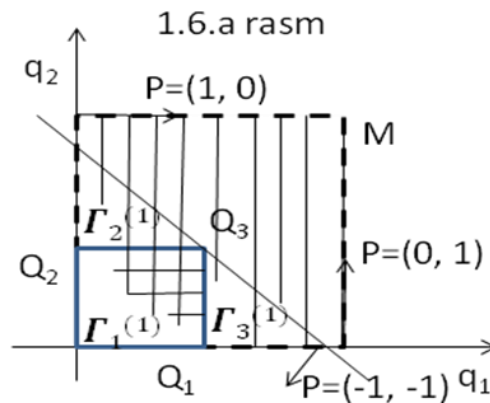
$$\text{barcha, } Q \in \Gamma \setminus \Gamma_j^{(d)} \text{ larda } (Q, P) > (\tilde{Q}, P).$$

Bu shartlardan birinchisi shuni ko'rsatadiki, $(Q, P) = (\tilde{Q}, P)$ to'g'ri chiziq $\Gamma_j^{(d)}$ to'plamni o'zida saqlaydi: ikkinchi shart bo'lsa, bu to'g'ri chiziq Γ ko'pburchak uchun tayanch to'g'ri chiziq ekanligini ko'rsatadi. Γ ko'pburchak D to'plam nuqtalarining qavariq qobig'i, $\Gamma_j^{(d)}$ bo'lsa $D_j^{(d)}$ to'plamning qavariq qobig'i bo'lganligi sababli, $K_j^{(d)}$ konusni berishda faqatgina D ning nuqtalarini berish yetarli ya'ni biror $\tilde{Q} \in D_j^{(d)}$ uchun

$$K_j^{(d)} = \left\{ P : \begin{array}{ll} (Q, P) = (\tilde{Q}, P) & \text{barcha } Q \in D_j^{(d)} \text{ da} \\ (Q, P) > (\tilde{Q}, P) & \text{barcha } Q \in D \setminus D_j^{(d)} \end{array} \right\}$$

Masalan: $f = x_1 + x_2 + x_1 x_2$

$\Gamma_1^{(1)}$ qirra uchun



$$K_j^{(d)} = \mathbb{R} : \begin{array}{l} (Q_1, P) = (Q_2, P) \\ (Q_3, P) > (Q_1, P) \end{array}$$

ga ega bo'lamiz.

Q_j nuqtalarning sonli qiymatlarni hisobga olsak,

$$K_1^{(1)} = \{P : p_1 = p_2 \quad p_1 + p_2 > p_1\}$$

yoki

$$K_1^{(1)} = \{P : p_1 = p_2 > 0\}$$

p_1, p_2 tekislikda $K_1^{(1)}$ konus birinchi kvadrantning bissektrisasi bo'lgan nurdan iborat bo'ladi. (1.6.b rasm). Bu nur $\Gamma_1^{(1)}$ qirraga perpendikulyar bo'lib, $\Gamma_1^{(1)}$ qirrada yotmaydigan Q_3 nuqtaga tomon yo'nalgan. Xuddi shunday

$$K_2^{(1)} = \left\{ P : \begin{array}{l} (Q_2, P) = (Q_1, P) \\ (Q_1, P) = (Q_2, P) \end{array} \right\} = \{P : p_1 = 0, \quad p_2 < 0\}$$

ni topamiz.

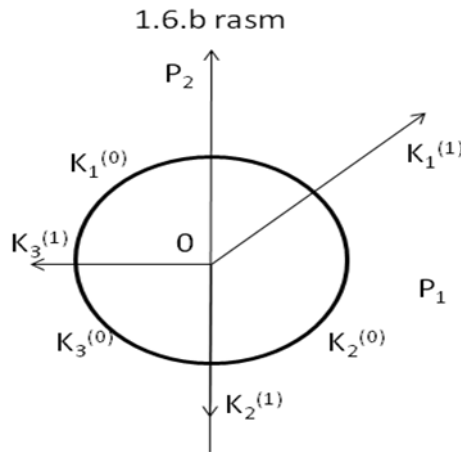
p_1, p_2 tekislikda $K_2^{(1)}$ konus $\Gamma_2^{(1)}$ qirraga ortogonal bo'lgan nurdan iborat.

(1.6.a, 1.6.b rasmlar)

Nihoyat

$$K_3^{(1)} = \left\{ P : \begin{array}{l} (Q_2, P) = (Q_1, P) \\ (Q_2, P) > (Q_1, P) \end{array} \right\} = \{P : p_1 < 0, \quad p_2 = 0\}$$

ham nur bo'ladi. (1.6.b rasmni qarang)



Endi uchlarning konuslarini topamiz. $\Gamma_j^{(0)}$ uch D to'plamning yagona nuqtasini saqlaganligi uchun konus ta'rifidagi tengliklar ma'nosini yo'qotadi, faqat tengsizliklar qoladi. Shunday qilib

$$K_1^{(0)} = \{P : (Q_2, P) > (Q_1, P) \quad (Q_3, P) > (Q_1, P)\}$$

Q_j nuqtalarning sonli qiymatlarini hisobga olsak

$$K_1^{(0)} = \{P : p_2 > p_1 \quad p_1 + p_2 > p_1\} = \{P : p_2 > p_1 \quad p_2 > 0\}$$

p_1, p_2 tekislikda $K_1^{(0)}$ - $K_1^{(1)}$ va $K_2^{(1)}$ (1.6.b rasm) nurlar bilan chegaralangan burchak. Xuddi shunday

$$K_2^{(0)} = \{P : (Q_1, P) > (Q_2, P) \quad (Q_3, P) > (Q_2, P)\} = \{P : p_1 > p_2 \quad p_1 > 0\}$$

ni topamiz, u $K_1^{(1)}$ va $K_2^{(1)}$ nurlar bilan chegaralangan burchakdir.

$$K_3^{(0)} = \{P : (Q_1, P) > (Q_3, P) \quad (Q_2, P) > (Q_3, P)\} = \{P < 0\}$$

esa $K_2^{(1)}$ va $K_3^{(1)}$ nurlar bilan chegaralangan burchakdir. (1.6.b rasm)

Taxlil qilgan misolda konus: $K_j^{(d)}$ ancha sodda berildi, bu D to'plamning sodda tuzilishidan bog'liqdir (u faqat uchta nuqtadan iborat). Umumiy holda konusning berilishidagi tenglik va tengsizliklar sonini qisqartirish mumkin, bunda D ning barcha nuqtalari o'rniga Γ ko'pburchakning faqat $\Gamma_j^{(0)}$ uchlarini qarash yetarli. U holda

$$K_j^{(1)} = \left\{ P : \begin{array}{ll} (\Gamma_k^{(0)}, P) = (\Gamma_j^{(0)}, P) & \Gamma_j^{(0)} u \Gamma_k^{(0)} \in \Gamma_j^{(1)} \\ (\Gamma_i^{(0)}, P) > (\Gamma_j^{(0)}, P) & \Gamma_i^{(0)} u \Gamma_j^{(1)} \end{array} \right\}$$

$$K_j^{(0)} = \{P : (\Gamma_i^{(0)}, P) > (\Gamma_j^{(0)}, P) \quad \Gamma_i^{(0)} \neq \Gamma_j^{(1)}\}$$

Bundan tashqari $K_j^{(1)}$ ning ta'rifida faqat bitta tengsizlikni qoldirish yetarli, chunki tenglik $\Gamma_j^{(1)}$ qirraga ortogonal bo'lgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi, har bir tengsizlik bo'lsa, bu to'g'ri chiziqdan Γ ko'pburchakning ichi tomon yo'nalgan yarim to'g'ri chiziqni ajratadi.

$K_j^{(0)}$ uchning konusi ta'rifida faqat ikkita tengsizlikni qoldirish yetarli:

$$K_j^{(0)} = \{P : (\Gamma_{j-1}^{(0)}, P) > (\Gamma_j^{(0)}, P) \quad (\Gamma_{j+1}^{(0)}, P) > (\Gamma_j^{(0)}, P)\}$$

ya'ni $\Gamma_j^{(0)}$ uchning konusi $\Gamma_j^{(0)}$ uchga yopishgan $\Gamma_{j-1}^{(0)}$ va $\Gamma_j^{(1)}$ tomonlarning normallari bilan chegaralangan. Bu $K_j^{(0)}$ konusning berilishidagi tengsizlikni

$$(\Gamma_i^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}, P) > 0$$

ko'rinishda yozish mumkinligidan kelib chiqadi. Bularning hammasi

$$(\Gamma_1^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}, P) > 0 \quad (\Gamma_{j+1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}, P) > 0$$

tengsizliklardan kelib chiqadi, chunki $\Gamma_{j-1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}$ vektorlar ikkita $\Gamma_{j-1}^{(0)} - \Gamma_i^{(0)}$ va $\Gamma_{j+1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}$ vektorlar hosil qilgan burchakning ichida yotadi, ya'ni

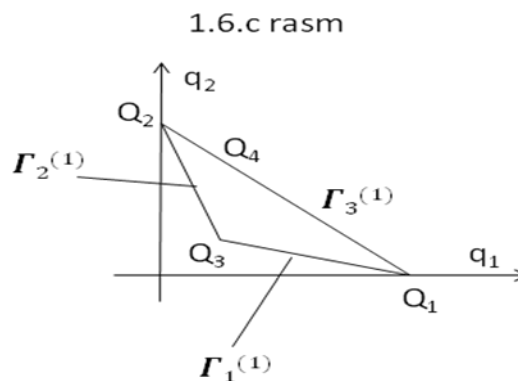
$$\Gamma_i^{(0)} - \Gamma_j^{(0)} = c_1(\Gamma_{j-1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}) + c_2(\Gamma_{j+1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)})$$

bunda $c_1, c_2 > 0$

Shuni ta'kidlash kerakki, Q va P vektorlar mos ravishda R^2 va $\bar{R}^2$ qo'shma tekisliklarga tegishli.

$$b) f = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 + x_1x_2^2$$

Bunda $Q_1 = (3,0)$ $Q_2 = (0,3)$ $Q_3 = (1,1)$ $Q_4 = (1,2)$ (1.6.c rasm)



Q_1, Q_2, Q_3 nuqtalar uchlardan iborat.

$$\Gamma_1^{(0)} = Q_1, \quad \Gamma_2^{(0)} = Q_2, \quad \Gamma_3^{(0)} = Q_3$$

belgilaymiz. U holda $\Gamma_1^{(1)}$ - Q_1 va Q_3 uchli qirra. $\Gamma_2^{(1)}$ - Q_3 va Q_2 uchli qirra; $\Gamma_3^{(1)}$ - Q_2 va Q_1 uchli qirra.

$D_j^{(d)}$ to'plam

$$D_1^{(0)} = Q_1, \quad D_2^{(0)} = Q_2, \quad D_3^{(0)} = Q_3$$

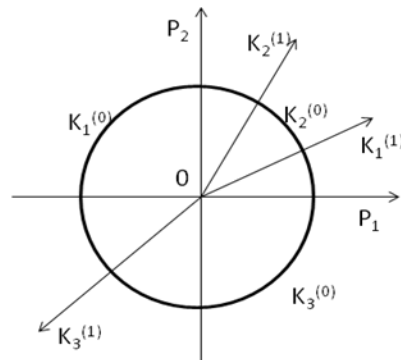
$$D_1^{(1)} = Q_1 \cup Q_3, \quad D_2^{(1)} = Q_3 \cup Q_2, \quad D_3^{(1)} = Q_2 \cup Q_1 \cup Q_3$$

Bularga f funksiyaning oltita qisqartmasi mos keladi:

$$f_1^{(0)} = x_1^3, \quad f_2^{(0)} = -3x_1x_2, \quad f_3^{(0)} = x_2^3,$$

$$f_1^{(1)} = x_1^3 - 3x_1x_2, \quad f_2^{(1)} = x_2^3 - 3x_1x_2, \quad f_3^{(1)} = x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2^2$$

Endi $K_j^{(1)}$ konuslarni topamiz. (ularni biz $f_j^{(d)}$ qisqartmalarning konuslari deb ataymiz) u holda



$$K_1^{(0)} = \{P: (\Gamma_1^{(0)}, P) = (\Gamma_2^{(0)}, P) < (\Gamma_3^{(0)}, P)\} = \{P: p_2 = 2p_1 > 0\}$$

$$K_2^{(0)} = \{P: (\Gamma_2^{(0)}, P) = (\Gamma_3^{(0)}, P) < (\Gamma_1^{(0)}, P)\} = \{P: 2p_2 = p_1 > 0\}$$

$$K_3^{(0)} = \{P: (\Gamma_3^{(0)}, P) = (\Gamma_1^{(0)}, P) < (\Gamma_2^{(0)}, P)\} = \{P: p_1 = p_2 < 0\}$$

$$K_1^{(1)} = \{P: (\Gamma_3^{(0)}, P) > (\Gamma_1^{(0)}, P), (\Gamma_2^{(0)}, P) > (\Gamma_1^{(0)}, P)\} = \{P: p_2 > p_1, p_2 > 2p_1\}$$

$$K_2^{(1)} = \{P: (\Gamma_1^{(0)}, P) > (\Gamma_2^{(0)}, P), (\Gamma_3^{(0)}, P) > (\Gamma_2^{(0)}, P)\} = \{P: 2p_1 > p_2, 2p_2 > p_1\}$$

$$K_3^{(1)} = \{P: (\Gamma_2^{(0)}, P) > (\Gamma_3^{(0)}, P), (\Gamma_1^{(0)}, P) > (\Gamma_3^{(0)}, P)\} = \{P: p_1 > 2p_2, p_2 < p_1\}$$

XULOSA

1-bob asosiy tushunchalar, ta'rif va teoremlardan iborat.

1-§. Lokal masalalar to'g'risida. Bir o'zgaruvchili kophadlarning asosiy xarakteristikalaridan biri uning darajasidir. Darajani bilgan holda, hatto uning koeffisientlarini bilmaganda ham ko'phad haqida ko'p ma'lumotlarni berish mumkin. Ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar uchun ham to'la daraja deb ataluvchi son kiritilgan, lekin bu son berilgan ko'phad haqida keng ma'lumot bera olmaydi. Bu tenglamalarning regulyar nuqta atrofida yechimlarini topish mumkin. Maxsus nuqta atrofidagi yechimi o'zini qanday olib borishi to'g'risida umumiy metodika bo'lmagan. Darajali geometriya deb ataluvchi matematikaning bo'limi tenglamalarning yechimlari xususiyatlarini tenglamaga kiruvchi hadlarning daraja ko'rsatkichlar vektorlari orqali o'rganadi.

§ 1.2 . Algebraik chiziqlarning shohalarini topish.

Bu ishda maxsus nuqta bo'lgan holat qaraladi va quyidagi masala yechiladi: x^0 nuqta atrofida keltirilgan chiziqning barcha shohalarini aniqlash algoritmini tuzish va ularning yetarli aniqlikdagi parametrik yoyilmalarini topish.

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \tau^{P_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad P_j > P_{j+1} > \dots$$

Bu ishda bunday yoyilmalarni topishning nisbatan yengilroq usuli taklif etiladi. Bu usulda Nyuton ko'pyoqligi va darajali almashtirishlardan foydalaniladi.

§ 1.3 . Ko'phad qisqartmalari.

Bu paragrafda ko'phadkardan qisqartmalarni alohida qilib o'rganiladi. Cheksiz yig'indining qisqartmalari va qisqartmalar ajratish usullari qaralgan

§ 1.4. Darajali almashtirishlar. Agar $\mathcal{G}(y_2)$ ko'phadda maksimal darajali y_2^s ko'paytuvchi ajratilsa, ya'ni $\mathcal{G}(y_2) = y_2^s \mathcal{G}_0(y_2)$ va $\mathcal{G}_0(0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\Gamma_1^{(1)}$ qirraning balandligi $\mathcal{G}_0(y_2)$ ko'phadning darajasiga teng bo'ladi.

§ 1.5. “Nyuton ko'pyoqlari” usulini differensial tenglamalarga tadbig'i.

§ 1.6. Qisqartmalar konuslari paragraflaridan iborat.

2. Bob. Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalar va ularning sistemalarini yechishda “Nyuton ko'pyoqlari” usulini qo'llash.

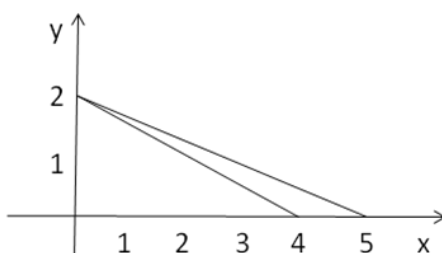
§ 2.1 . Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalarga doir misollar.

Quyidagi algebraik tenglamalarni $x = y = 0$ nuqta atrofidagi ildizlarining haqiqiy shoxalarini topamiz.

2.2.1 – misol. $y^2 - 2yx^2 + x^4 - x^5 = 0$ egri chiziqni qarab chiqamiz va $(0,0)$ nuqta atrofida Nyuton ko'pburchagini tuzamiz, ya'ni berilgan tenglikdagi ko'phadning daraja ko'rsatkichlaridan tuzilgan

$$Q_1 = (0, 2), Q_2 = (2, 1), Q_3 = (4, 0), Q_4 = (5, 0)$$

nuqtalar to'plamini xy koordinatalar tekisligida joylashtirib, uning qavariq qobig'idan iborat ko'pburchakni tuzamiz. U quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



Ko'pburchakni tuzilishiga ko'ra $\left(\varepsilon = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \right) \varepsilon = 2$ ni topamiz. Shunga ko'ra

y ni $y = cx^2 + z$ ko'rinishda izlaymiz va ma'lum hisoblashlarni bajarib $c = 1$ ni topamiz. $y = x^2 + z$ ni egri chiziq tenglamasiga qo'yib

$$z^2 - x^5 = 0$$

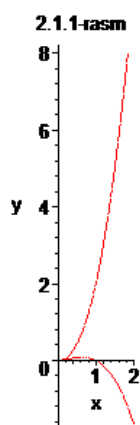
ni hosil qilamiz. Bundan egri chiziqlarning shoxalari $y = x^2 + x^{5/2}$ va $y = x^2 - x^{5/2}$ ekanligiga ega bo'lamiz. Bu shoxalarni koordinata tekisligida tasvirlaymiz. Buning uchun kompyuter algebra tizimi bo'lgan MAPLE dasturidagi PLOT funksiyasidan foydalanib, 1 –rasmdagi egri chiziqni hosil qilamiz. Egri chiziq y o'qidan o'ng tomonda yotishini, $(0,0)$ nuqtada x o'qiga urinib o'tishini va bu nuqta atrofida ikkala shoxasi ham x o'qining musbat qismida joylashishini ko'ramiz. Shunday qilib $(0,0)$ nuqta 2-turdagi qaytish nuqtasi ekanligini ko'rishimiz mumkin. Natijada, biz berilgan egri chiziqlarning $(0,0)$ nuqtasidagi shoxalarini hosil qildik.

>> **with(plots):**

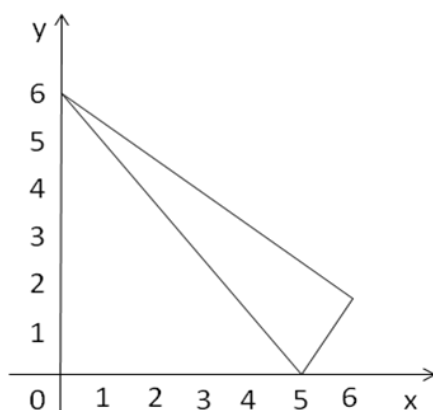
F:=implicitplot(x^2 - x^(5/2) = y,x=0..2,y=-2..8,style=line):

G:=implicitplot(x^2 + x^(5/2) = y,x=0..2,y=-2..8,style=line):

display({F,G},axes=boxed,scaling=constrained,title='2.1.1-rasm');



2.1.2 – misol. $y^6 - x^6 y^2 - x^5 = 0$ tenglamani $x = y = 0$ nuqta atrofida (1-misoldagi kabi) “Nyuton ko'pburchagi” ni tuzamiz.



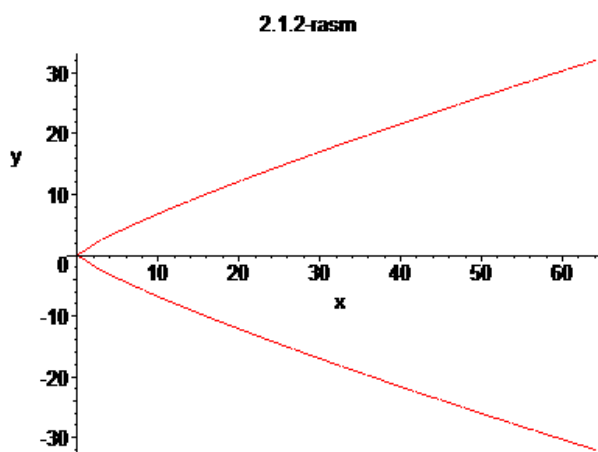
Bundan $\varepsilon = 5/6$ ga teng, y ni $y = cx^{5/6} + z$ ko'rinishda izlaymiz. Natijada $c = \pm 1$ ekanligini aniqlab, berilgan egri chiziqlarning shoxalari $y = x^{5/6} + z$ va $y = -x^{5/6} + z$ ni hosil qilamiz. Bu shoxalarni koordinata tekisligida tasvirlaymiz (1-misoldagi kabi).

> **with(plots):**

F:=implicitplot(x^(5/6)=y,x=0..64,y=-100..100,style=line):

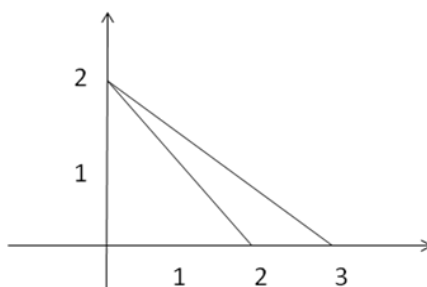
G:=implicitplot(-x^(5/6)=y,x=0..64,y=-100..100,style=line):

display({F,G},title='2.1.2-rasm');



2.1.3 – misol. $x^3 - x^2 + y^2 = 0$ bunda

$Q_1 = (3, 0)$, $Q_2 = (2, 0)$, $Q_3 = (0, 2)$ bo'lib, Nyuton ko'pburchagi quyidagicha bo'ladi.



Bunga asosan, $\varepsilon = 1$ bo'ladi va $y = cx + z_1$ ko'rinishda izlanadi. Ma'lum hisoblashlardan keyin $a = \pm 1$ aniqlanib, $y_{1,2} = \pm x + z_1$ bo'ladi. Ikkinchi yaqinlashishni topish uchun berilgan tenglamadagi y ni o'rniga $y_{1,2} = \pm x + z_1$ qiymatlarni qo'yib $x^3 - x^2 + (\pm x + z_1)^2 = 0$ tenglamalarni hosil qilamiz va bunda yuqoridagi kabi hisoblashlarni z_1 ga nisbatan amalga oshirib $z_1 = \pm \frac{1}{2}x^2 + z_2$ ni hosil qilamiz. Natijada, berilgan tenglamaning $(0, 0)$ nuqta atrofidagi ildizlarining haqiqiy shoxalarini hosil qildik

$$y = \pm x \pm \frac{1}{2}x^2 + z_2.$$

Bu shoxalarni koordinata tekisligidagi tasvirini hosil qilishda kompyuter algebra tizimi bo'lgan MAPLE dasturidan foydalanamiz:

with(plots):

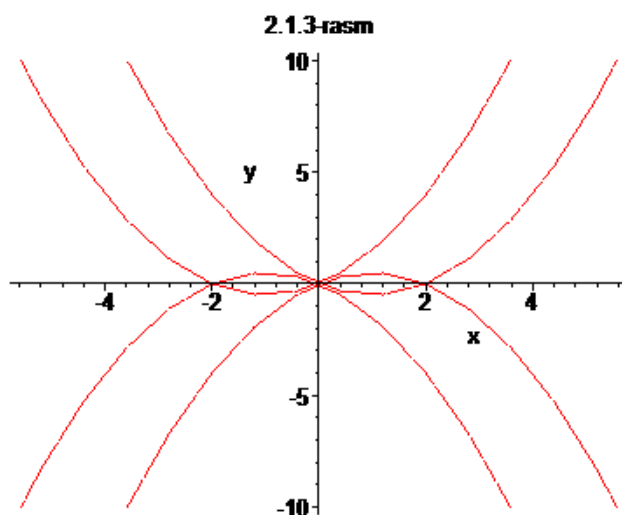
F:=implicitplot(x+(1/2)*x^2=y,x=-10..10,y=-10..10,style=line):

G:=implicitplot(x-(1/2)*x^2=y,x=-10..10,y=-10..10,style=line):

H:=implicitplot(-x+(1/2)*x^2=y,x=-10..10,y=-10..10,style=line):

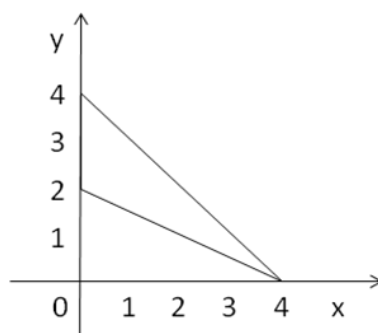
J:=implicitplot(-x-(1/2)*x^2=y,x=-10..10,y=-10..10,style=line):

display({F,G,H,J},title='2.1.3-rasm');



2.1.4- misol. tenglama uchun,

$Q_1 = (4, 0), Q_2 = (2, 1), Q_3 = (0, 2), Q_4 = (0, 3), Q_5 = (0, 4)$ bo'lib,
Nyuton ko'pburchagi quyidagicha bo'ladi:

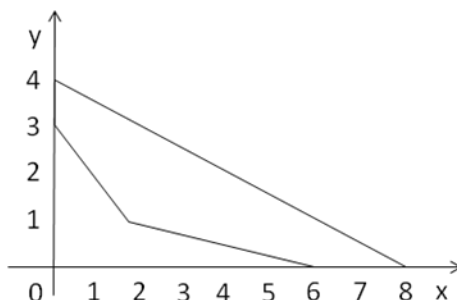


Bunda qisqartma tenglama bo'ladi. $\varepsilon = 2$ bo'lib y ni $y = c_1 x^2 + z_1$ ko'rinishda izlaymiz. Ma'lum hisoblashlardan so'ng $a_1 = 1, a_2 = 2$ ni topamiz. $a_1 = 1$ uchun $y = x^2 + z_1$ ko'rinishda bo'ladi. Uni berilgan tenglamaga qo'yib, x va z_1 o'zgaruvchiga ega bo'lgan

$x^8 - 2x^6 + 4x^6 z_1 - 6x^4 z_1 + 6x^4 z_1^2 - x^2 z_1 - 6x^2 z_1^2 + 4x^4 z_1^3 - 2z_1^3 + z_1^4 = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama daraja ko'rsatkichlaridan tuzilgan nuqtalar to'plami ya'ni, tenglamaning tashuvchisi

$Q_1 = (8, 0), Q_2 = (6, 0), Q_3 = (6, 1), Q_4 = (4, 1), Q_5 = (4, 2), Q_6 = (2, 1), Q_7 = (2, 2), Q_8 = (2, 3)$

lardan tashkil topgan bo'lib, buning uchun Nyuton ko'pburchagi quyidagi ko'rinishda bo'ldi:



Qisqartma tenglama esa

$$-2x^6 - x^2 z_1 = 0$$

dan iborat bo'lib, uning yechimi $z_1 = -2x^4 + z_2$ ga teng bo'ladi.

Natijada bizga berilgan tenglamaning $(0, 0)$ nuqta atrofidagi yechimlari uchun ikkinchi yaqinlashish

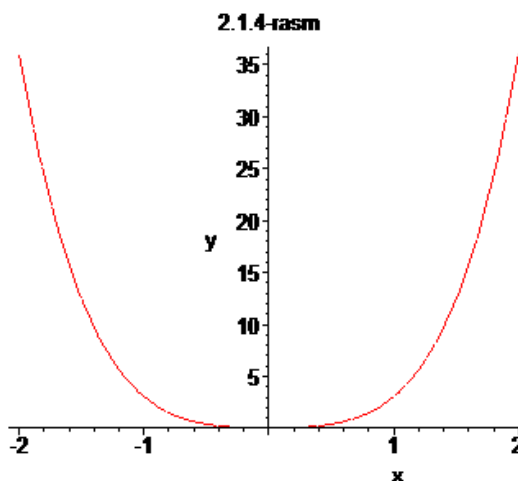
$$y = x^2 - 2x^4 + z_2$$

ga ega bo'ldik. Bu yechimni koordinata tekisligidagi tasvirini hosil qilamiz:

with(plots):

F:=implicitplot(x^2+2*x^4=y,x=-2..2,y=0..64,style=line):

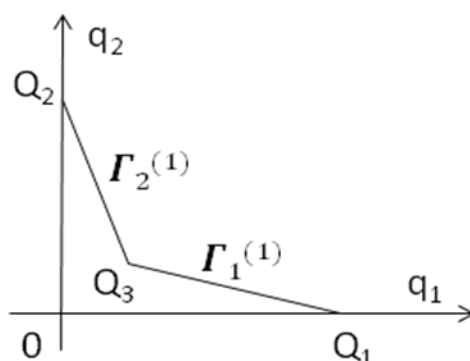
display(F,title='2.1.4-rasm');



2.1.5 – misol. $f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 0$

Bu tenglama bilan aniqlanuvchi egri chiziq Dekart yaprog'idir. $x_1 = x_2 = 0$ da $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Shuning uchun bu nuqta maxsusdir. Bizning tenglamani maxsus nuqta atrofida o'rganamiz. Bunda $Q_1 = (3,0)$, $Q_2 = (0,3)$, $Q_3 = (1,1)$. Nyuton siniq chizig'i $\tilde{f}$ (2.1.5a- rasm) ikkita va qirraga ega.

2.1.5. a-rasm



qirradan boshlaymiz. Bu yerda

$$Q_3 - Q_1 = (-2, 1) = R_1$$

shuning uchun

$$P_1 = (1, 2), \quad \gamma_1 = 2$$

Bu yerda $\tilde{f} = x_1^2 - 2x_1x_2$. $b^{(1)}$ koeffitsient uchun yuqoridagi tenglamani hosil qildik.

$$\tilde{f}(1, b) = 1 - 2b = 0$$

bundan $b^{(1)} = 1/2$ ni topamiz. Bu tenglama b ga nisbatan chiziqli, $b^{(1)}$ oddiy ildiz. Shuning uchun bunday ... ildizga, umuman $\Gamma_1^{(n)}$ qirraga bitta oddiy shoxasi to'g'ri keladi:

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 \left(1 + o(1)\right)$$

Bu shoxa x_2 ning x_1 bo'yicha yoyilmasidagi qolgan xadlarini toppish uchun o'zgaruvchini almashtirishni bajaramiz.

$$x_2 = x_1^2 \left(\frac{1}{2} + y \right)$$

va natijada quyidagiga ega bo'lamiz.

$$f(x_1, x_2) = g(x_1, y) = x_1^3 + x_1^6 \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}y + \frac{3}{2}y^2 + y^3 \right) - 2x_1^3 \left(\frac{1}{2} + y \right) =$$

$$= -2x_1^3y + \frac{1}{8}x_1^6 + \frac{3}{4}x_1^6y + \frac{3}{2}x_1^6y^2 + x_1^6y^3$$

x_1^3 ga qisqartirsak, $g(x, y) = -2y + \frac{1}{8}x_1^3 + \frac{3}{4}x_1^3y + \frac{3}{2}x_1^3y^2 + x_1^3y^3$ bo'ladi. Bunda

$x_1 = y = 0$ oddiy nuqta, chunki unda $\frac{\partial g_0}{\partial y} = -2 \neq 0$. (bu nuqtaning oddiyligi

$b^{(1)} = \frac{1}{2}$ ildizning oddiyligidan ham kelib chiqadi). $g_0(x, y) = 0$ tenglamaning yechmini $y = y(x_1)$ qator ko'rinishida topish mumkin. Xususiyl holda, bu

~

$\hat{g}_0 = -2y + \frac{1}{8}x_1^3$ qisqartmadan topiladi.

$\hat{g}_0 = 0$ qisqartma tenglamadan $y = \frac{1}{16}x_1^3$ ni topamiz, demak, to'liq tenglama uchun

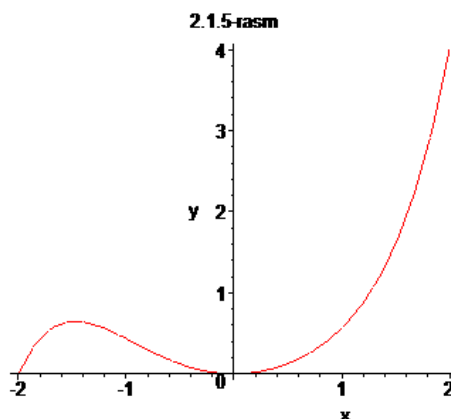
$$y = \frac{1}{16}x_1^3(1 + 0(1))$$

ga ega bo'lamiz.

Bu ifodani byrilgan tenglama yechimining shoxasi (uni c_1 bilan belgilaymiz) uchun quyidagi yoyilmani hosil qilamiz:

$$y = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{16}x_1^5 + \dots$$

```
> with(plots):
F:=implicitplot((1/2)*x^2+(1/16)*x^5=y,x=-
2..2,y=0..64,style=line):
display(F,title='2.1.5-rasm');
```



$\Gamma_1^{(0)}$ qirraga faqat bitta shu shoxa mos keladi. Endi $\Gamma_2^{(0)} \supset Q_2, Q_3$ qirrani qaraymiz. Uning uchun

$$R_2 = Q_2 - Q_3 = (-1, 2), P_2(2, 1), \gamma_2 = \frac{1}{2}$$

$b^{(1)}$ koeffetsent uchun

$$\hat{f}_2^{(0)}(1, b) = b^3 - 2b = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

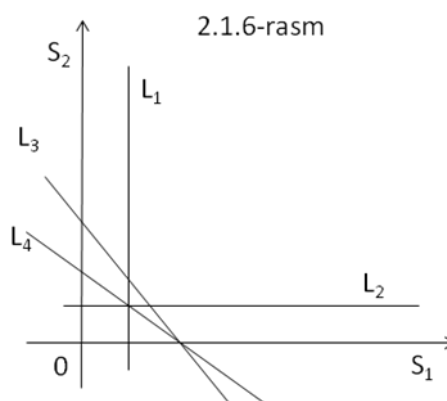
Bu tenglamaning ildizlari $b = 0$, $b^{(1)} = \pm\sqrt{2}$. Bizni faqat $b \neq 0$ qiziqtiradi. Shuning uchun $b^{(1)} = \pm\sqrt{2}$. Bu ikki ildiz ham oddiy ildizlar. Shuning uchun yana ikkita shoxaga ega bo`lamiz:

$$C_2: x_2 = \sqrt{2x_1} + \dots$$

$$C_3: x_2 = -\sqrt{2x_1} + \dots$$

Haqiqiy x_1x_2 lar uchun bu shoxalar faqat $x_1 \geq 0$ da bor. 5-6 rasmda (14) tenglamaning yechimlarini x_1x_2 tekislikda joylashishi tasvirlangan.

2.1.6 – misol. $f = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 + x_1x_2^4$ funksiya berilgan bo`lsin. U holda



$$L_1: s_1 = \frac{1}{3}$$

$$L_2: s_2 = \frac{1}{3}$$

$$L_3: s_1 + s_2 = 1$$

$$L_4: s_1 + 2s_2 = 1$$

Frommer siniq chizig`i 2.1.6- rasmda chizilgan bo`lib, u uchta tomon va ikkita uchga ega.

Nyuton ko'pburchagi. Har bir $Q_j = (q_{1j_1}, q_{2j_2})$ vektorga $q_1 q_2$ tekislikdagi (q_{1j_1}, q_{2j_2}) nuqtani mos qo'yamiz. Bunday nuqtalar to'plamini $D = D(f)$ bilan belgilaymiz.

Fiksirlangan P vektorda

$$(Q, P) = r = \text{const}$$

tenglama $q_1 q_2$ tekislikdagi P vektorga ortogonal to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Agar $p > 0$ bo'lsa, u holda τ ning oshishi bilan to'g'ri chiziq chapga siljiydi. Agar D to'plamning har bir Q_j nuqtasi orqali $(Q, P) = (Q_j, P)$ to'g'ri chiziq o'tkazilsa, u holda (Q, P) skalyar ko'paytmaning eng kichik qiymati bu to'g'ri chiziqlarning eng chapdakisida bo'ladi.

2.1.7 – misol. $f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3^2$

$f = 0$ tenglamani $(0, 0, 0)$ maxsus nuqta atrofidagi yechimini topish talab qilinsin.

f ning tashuvchisini topamiz.

$$Q_1 = (2, 0, 0), \quad Q_2 = (0, 2, 0), \quad Q_3 = (0, 0, 2), \quad Q_4 = (3, 1, 0), \quad Q_5 = (2, 0, 2)$$

Q_4 va Q_5 lar uchun $q_1 + q_2 + q_3 = 4 > 3$. $N = -(1, 1, 1)$

$\Gamma(f)$ ko'pyoqning Q_1, Q_2 va Q_3 da qurilgan yoqi Γ_1^2 $(0, 0, 0)$ ga yaqin turgan yoq bo'lganligi sababli o'sha yoqqa mos qisqartma qaraladi

$$\tilde{f}_1^2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Quyidagi darajali almashtirish bajaramiz

$$y_1 = x_1 x_3^{-1}, \quad y_2 = x_2 x_3^{-1}, \quad y_3 = x_3$$

Unga mos daraja ko'rsatkichlari matrisasi

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unimodulyar bo'lib, unga teskari bo'lgan matrisa

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Demak, teskari almashtirishning ko'rinishi

$$x_1 = y_1 y_3, \quad x_2 = y_2 y_3, \quad x_3 = y_3$$

bo'ladi va u $\tilde{f}_1$ ni quyidagi ko'rinishga keltiradi:

$$f = y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_3^2 - y_3^2 + \sum g(y_1, y_2, y_3) = y_3^2 (y_1^2 + y_2^2 - 1) + \sum g(y_1, y_2) y_3^k.$$

$$\tilde{g} = y_1^2 + y_2^2 - 1$$

Tenglama kritik nuqtalari bo'lmagan aylanani ifodalaydi. Bu tenglama

$$y_1 = \pm \sqrt{1 - y_2^2}$$

Ikkita yechimga ega.

deb ulardan birini olamiz. Unda $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_1} = 2y_1 = 2\mathfrak{y}_1$ bo'ladi. $y_1 = \mathfrak{y}_1 + z_1$ deb olamiz va uni ga qo'yib, hosil bo'lgan ifodani nolga tenglashtirib, z_1 ni topamiz, natijada berilgan tenglamani yechimini topiladi.

§ 2.2 . Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalar sistemalariga doir misollar.

2.2 .1 misol

Algebraik chiziq quyidagi sistema yordamida berilgan bo'lsin

$$F_1(x) = x_1^4 + 3x_2^4 - 6x_2^2 x_3^2 - 9x_1 x_3^3 - 6x_3^4 + 7x_1 x_2^2 x_3^2 = 0$$

$$F_2 = 2x_1^2 - 4x_2^3 + 3x_3^4 + 2x_1 x_2 x_3^2 = 0$$

Barcha shohalarni $x = 0$ maxsus nuqta atrofida izlaymiz, ya'ni masala konusi $\mathcal{K} = \{x \mid x < 0\}$ bo'ladi.

$\mathcal{D}(F_1)$ va $\mathcal{D}(F_2)$ tashuvchilarni topamiz:

$$D(F_1) = \mathbb{E}_1^1 = (4;0;0); Q_2^1 = (0;4;0); Q_3^1 = (0;2;2); Q_4^1 = (0;1;3); Q_5^1 = (0;0;4); Q_6^1 = (1;1;2)$$

$$D(F_2) = \mathbb{E}_1^2 = (2;0;0); Q_2^2 = \mathbb{E}_2; Q_3^2 = \mathbb{E}_3; Q_4^2 = \mathbb{E}_4$$

R^3 fazoda, $M\mathbb{E}_1^-$ va $M\mathbb{E}_2^-$ ko'pyoqlarni, $\mathcal{D}(F_1)$ va $\mathcal{D}(F_2)$ to'plamlarning qavariq qobig'I sifatida, alohida- alohida, yasaymiz.

$M\mathbb{E}_1^-$ va $M\mathbb{E}_2^-$ ko'pyoqlarning barcha uch, qirra va yoqlarini belgilaymiz. $M\mathbb{E}_1^-$ ko'pyoq uchun, $p \leq 0$ tayanch tekislik, uchlari Q_1^1, Q_2^1, Q_5^1 nuqtalarda bo'lgan $\Gamma_{11}^{\mathbb{E}_1}$ uchburchakdan, $M\mathbb{E}_2^-$ ko'pyoq uchun esa, uchlari Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2 nuqtalarda bo'lgan $\Gamma_{21}^{\mathbb{E}_2}$ uchburchakdan o'tadi.

Bu esa, $M\mathbb{E}_1^-$ ko'pyoq uchun, masala konusiga Γ_{11}^2 yoqning va

$$\Gamma_{11}^{\mathbb{E}_1} \supset \mathbb{E}_1^1, Q_2^1, \Gamma_{12}^{\mathbb{E}_1} \supset \mathbb{E}_2^1, Q_3^1, \Gamma_{13}^{\mathbb{E}_1} \supset \mathbb{E}_3^1, Q_1^1$$

qirralarning konusi tegishli bo'lishi, $M\mathbb{E}_2^-$ ko'pyoq uchun esa, $\Gamma_{21}^{\mathbb{E}_2}$ yoqning va

$$\Gamma_{21}^{\mathbb{E}_2} \supset \mathbb{E}_1^2, Q_2^2, \Gamma_{22}^{\mathbb{E}_2} \supset \mathbb{E}_2^2, Q_3^2, \Gamma_{23}^{\mathbb{E}_2} \supset \mathbb{E}_3^2, Q_1^2$$

qirralarning konusi tegishli bo'lishi kelib chiqadi.

$S = \mathbb{E}_1 + p_2 + p_3 = -1$ tekislikda, konusi, masala konusiga tegishli bo'lgan qirra va yoqlar uchun chiziqli munosabatlarni yozamiz. Bu tekislikda $\Gamma_{11}^{\mathbb{E}_1}$ va $\Gamma_{21}^{\mathbb{E}_2}$ yoqlar uchun, mos ravishda

$$S \cap K_{11}^{\mathbb{E}_1} = \left\{ p_2 = p_3 = -\frac{1}{3} \right\}$$

va

$$S \cap K_{21}^{\mathbb{E}_2} = \left\{ p_2 = -\frac{4}{13}, p_3 = -\frac{5}{13} \right\}$$

nuqtalarni hosil qiladi. S tekislikda $\Gamma_{21}^{\mathbb{E}_2}, \Gamma_{22}^{\mathbb{E}_2}, \Gamma_{23}^{\mathbb{E}_2}$ qirralar uchun chiziqli munosabatlar quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} S \cap K_{21}^{\mathbb{E}_2} &= \{ 5p_2 + 2p_3 = -2, 3p_2 > 4p_3 \}; \\ S \cap K_{23}^{\mathbb{E}_2} &= \{ 3p_3 + 2p_2 = -1, 4p_3 > 3p_2 \}; \\ S \cap K_{22}^{\mathbb{E}_2} &= \{ 3p_2 = 4p_3, 3p_3 + p_2 > -1 \}; \end{aligned}$$

S tekislikda, bu chiziqlarni chizib, barcha kisishishlarni kor'rishimiz mumkin.

Masala konusida faqatgina bitta kesishuv mavjud, ya'ni

$$S \cap \Pi_1 = S \cap K_{21}^{\circ} \cap K_{12}^{\circ} = \left\{ p_2 = p_3 = -\frac{2}{7} \right\}$$

U quyidagi qisqartma sistemaning qisqartma konusi bo'ladi

$$\begin{cases} F_1 = 3x_2^4 - 6x_2^2 x_3^2 - 9x_2 x_3^5 - 6x_3^4 = 0; \\ F_2 = 2x_1^2 - 4x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Bunda } \bar{Q}'_1 = \bar{Q}'_2 - \bar{Q}'_5 = (1, -1); \bar{Q}_2^2 = \bar{Q}_1^2 - \bar{Q}_2^2 = (-3, 0).$$

Shuning uchun, α unimodulyar matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

teskarisi esa,

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

α matritsaga mos darajali almashtirish quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} y_1 = x_2 x_3^{-1} \\ y_2 = x_1^2 x_3^{-1}, \\ y_3 = x_1 x_2^{-1} \end{cases}$$

teskari darajali almashtirish esa:

$$\begin{cases} x_1 = y_2^{-1} y_3^3 \\ x_2 = y_2^{-1} y_3^2 \\ x_3 = y_1^{-1} y_2^{-1} y_3^2 \end{cases}$$

Qisqartma sistema, darajali almashtirish va ba'zi soddalashtirishlardan so'ng quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} y_1^4 - 2y_1^2 - 3y_1 - 1 = 0 \\ y_2 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Bu sistema ikkita oddiy, haqiqiy:

$$y_{11}^0 = -1, y_2^0 = 2 \quad \text{и} \quad y_{12}^0 = 2, y_2^0 = 2$$

va ikkita oddiy, kompleks:

$$y_{13}^0 = \frac{1}{3} \left(1 + i\sqrt{3} \right) y_2^0 = 2 \quad \text{и} \quad y_{14}^0 = \frac{1}{2} \left(1 - i\sqrt{3} \right) y_2^0 = 2$$

ildizlarga ega. Dastlab haqiqiy shohalarni topamiz. Quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$y_1 = -1 + z_1, \quad y_2 = 2 + z_2$$

Sistemadan quyidagi siztemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} M_1 \left(z_1, z_2, z_3 \right) = G_1 \left(1 + z_1, 2 + z_2, y_3 \right) = 0 \\ M_2 \left(z_1, z_2, z_3 \right) = G_2 \left(1 + z_2, 2 + z_3, y_3 \right) = 0 \end{cases}$$

Bu sistema uchun oshkormas funksiya haqidagi teorema o'rinli, hisoblashlar natijasida yoyilmaning birinchi yaqinlashishlarini topamiz

$$z_1 = \frac{7}{18} y_3^5 + o \left(y_3^4 \right)$$

$$z_2 = -\frac{3}{4} y_3^2 + o \left(y_3^3 \right)$$

Dastlabki koordinatalarga qaytib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$F_1 : \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} y_3^3 + \frac{3}{16} y_3^5 + o \left(y_3^6 \right) \\ x_2 = \frac{1}{2} y_3^2 + \frac{3}{16} y_3^4 + o \left(y_3^5 \right) \\ x_3 = -\frac{1}{5} y_3^2 - \frac{3}{16} y_3^4 + o \left(y_3^5 \right) \end{cases}$$

Xuddi shu kabi, quyidagi almashtirishlarni bajarib,

$$y_1 = 2 + z, \quad y_2 = 2 + z_2$$

boshqa haqiqiy shohani topamiz:

$$F_2 : \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} y_3^3 + \frac{3}{128} y_3^5 + o \left(y_3^6 \right) \\ x_2 = \frac{1}{2} y_3^2 + \frac{3}{128} y_3^4 + o \left(y_3^5 \right) \\ x_3 = \frac{1}{4} y_3^2 + \frac{3}{156} y_3^4 + o \left(y_3^5 \right) \end{cases}$$

Kompleks ildizlar quyidagi kompleks shohalarni hosil qiladi:

$$F_3, F_4 : \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_3^3 + \frac{3}{128}y_3^5 + o(\mathfrak{Y}^6) \\ x_2 = \frac{1}{2}y_3^2 + \frac{3}{128}y_3^4 + o(\mathfrak{Y}^5) \\ x_3 = -\frac{1}{4}(\pm i\sqrt{3})y_3^2 - \frac{3}{32}(\pm i\sqrt{3})y_3^4 + o(\mathfrak{Y}^5) \end{cases}$$

Topilgan barcha shohlarda τ parameter vazifasini y_3^{-1} bajaradi.

2.2.2.misol

Quyidagi (2.2.2.a) tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin

$$\begin{cases} f_1 \curvearrowright_{\mathbf{e}_1, x_2, x_3} a_1 x_1 x_2 x_3 + a_2 x_1^4 + a_3 x_2^4 + a_4 x_3^4 + a_5 x_1^2 x_3^2 = 0 \\ f_2 \curvearrowright_{\mathbf{e}_1, x_2, x_3} a_{21} x_2 x_3 + a_{22} x_1^2 + a_{23} x_1^3 + a_{24} x_1^3 x_2 + a_{24} x_1^2 x_2 x_3 = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{D}(F_1)$ va $\mathcal{D}(F_1)$ tashuvchilarni topamiz:

$$\begin{aligned} D\mathbf{F}_1 &= \mathbf{E}^1 = \langle 1, 1, \rangle Q_2^1 = \langle 0, 0, \rangle Q_3^1 = \langle 4, 0, \rangle Q_4^1 = \langle 0, 4, \rangle Q_5^1 = \langle 0, 2, \rangle \\ D\mathbf{F}_2 &= \mathbf{E}^2 = \langle 1, 1, \rangle Q_2^2 = \langle 0, 1, \rangle Q_3^2 = \langle 1, 0, \rangle Q_4^2 = \langle 1, 0, \rangle \end{aligned}$$

$M \in \mathcal{F}_1$ va $M \in \mathcal{F}_2$ ko'pyoqlarning barcha uch, qirra va yoqlarini belgilaymiz

$$\begin{array}{l} M \mathbb{F}_1 \supseteq \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \\ M \mathbb{F}_2 \supseteq \Gamma_{21}^2: Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2 \end{array}$$

Konuslari, K masala konusi bilan kesishadigan, $K_{ij}^{\mathbb{C}}$ yoq va $K_{ij}^{\mathbb{C}}$ qirralar uchun

$$S = \{p_1 + p_2 + p_3 = -1\}$$

tekislikda, p_2, p_3 koordinatali chiziqli munosabatlarni yozamiz.

$\Gamma_1^{\mathbf{e}}, \Gamma_2^{\mathbf{e}}, \Gamma_3^{\mathbf{e}}, \Gamma_{21}^{\mathbf{e}}$ qirralar uchun quyidagi nuqtalarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} S \cap K_1^{\circ} &= 4p_2 = 2p_3 = -1 \\ S \cap K_2^{\circ} &= 2p_2 = 4p_3 = -1 \\ S \cap K_3^{\circ} &= 4p_2 = 4p_3 = -1 \\ S \cap K_{21}^{\circ} &= 3p_2 = 2p_3 = -1 \end{aligned}$$

$\Gamma_1^{\mathbb{C}}, \Gamma_2^{\mathbb{C}}, \Gamma_3^{\mathbb{C}}, \Gamma_4^{\mathbb{C}}, \Gamma_5^{\mathbb{C}}, \Gamma_6^{\mathbb{C}}$ qirralar uchun esa:

$$\Gamma_{21}^{\mathbf{C}} \supset \mathfrak{d}_{11}^2, Q_2^2, \Gamma_{22}^{\mathbf{C}} \supset \mathfrak{d}_{11}^2, Q_3^2, \Gamma_{23}^{\mathbf{C}} \supset \mathfrak{d}_{22}^2, Q_3^2$$

quyidagi yarim to'g'ri chiziqlarni hosil qilamiz

$$\begin{aligned} S \cap K_1^C &= 3p_2 + 2p_3 = -2 < 4p_3 \\ S \cap K_2^C &= 3p_2 + 4p_3 = -3 > 6p_3 \\ S \cap K_3^C &= 2p_3 = -1 > 3p_2 \end{aligned}$$

$K \cap S$ da faqatgina ikkita qirra va yoq konuslarining kesishuvlari mavjud

$$\begin{aligned} S \cap \Pi_1 &\stackrel{\det}{=} S \cap K_2^{(2)} \cap K_{21}^{(1)} = 2p_2 = 4p_3 = -1 \\ S \cap \Pi_2 &\stackrel{\det}{=} S \cap K_4^{(1)} \cap K_{22}^{(1)} = 5p_2 = 3p_3 = -1 \end{aligned}$$

Π_1 konus uchun quyidagi qisqartma sistema mos keladi

$$\begin{cases} f_1 \llbracket x_1, x_2, x_3 \rrbracket \stackrel{\det}{=} a_1 x_1 x_2 x_3 + a_2 x_1^4 + a_3 x_2^4 + a_4 x_3^4 + a_5 x_1^2 x_3^2 = 0 \\ f_2 \llbracket x_1, x_2, x_3 \rrbracket \stackrel{\det}{=} a_{21} x_1 x_3 + a_{22} x_1^2 x_3 = 0 \end{cases} \quad (2.2.2.b)$$

Π_2 konus uchun esa:

$$\begin{cases} f_1 \llbracket x_1, x_2, x_3 \rrbracket \stackrel{\det}{=} a_2 x_1^4 + a_3 x_2^4 = 0 \\ f_2 \llbracket x_1, x_2, x_3 \rrbracket \stackrel{\det}{=} a_{21} x_2 x_3 + a_{23} x_1^3 x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.2.2.c)$$

(2.2.2.b) qisqartma sistema uchun quyidagiga ega bo'lamiz

$$\tilde{Q}_1^1 = Q_1 - Q_2 = (-3; 1; 1) : \tilde{Q}_2^2 = Q_1^2 = (2; -1; 0)$$

Shuning uchun unimodulyar matritsa va uning teskarisi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Darajali almashtirish va uning teskarisi esa quyidagicha:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{-3} x_2 x_3 \\ y_2 = x_1^2 x_2^{-1} \\ y_3 = x_1^{-1} x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_2 y_3 \\ x_2 = y_2 y_3^2 \\ x_3 = y_1 y_2^2 y_3 \end{cases}$$

Darajali almashtirishdan so'ng quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} g_1 \llbracket y_1, y_2 \rrbracket \stackrel{\det}{=} a_1 y_1 + a_2 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_5 y_1^2 y_2^2 = 0 \\ g_2 \llbracket y_1, y_2 \rrbracket \stackrel{\det}{=} a_{21} + a_{22} y_2 = 0 \end{cases} \quad (2.2.2.d)$$

Bunda (2.2.2.a) sistemaning o'zi quyidagi sistemaga o'tadi

$$\begin{cases} g_1 \llbracket y_1, y_2, y_3 \rrbracket \stackrel{\det}{=} a_1 y_1 + a_2 + a_3 y_3^4 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_5 y_1^2 y_2^2 = 0 \\ g_2 \llbracket y_1, y_2, y_3 \rrbracket \stackrel{\det}{=} a_{21} y_1 + a_{22} y_1 y_2 + a_{23} y_2 y_3^2 + a_{24} y_1 y_3^2 = 0 \end{cases} \quad (2.2.2.e)$$

(2.2.2.c) qisqartma sistema mos darajali almashtirishdan so'ng, quyidagi sistemaga o'tadi:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_1 \rightrightarrows a_2 + a_3 y_1^4 = 0 \\ \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_2 \rightrightarrows a_{21} y_2 + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (2.2.2.f)$$

Quyidagi qiymatlarda

$$\begin{aligned} a_1 &= 40, a_2 = -a_3 = 25, a_4 = -1, \\ a_5 &= 16, a_{2i} = -1, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

berilgan sistemani ko'rib chiqamiz. U holda (2.2.2.b) va (2.2.2.c) qisqartma sistemalar ikkitadan haqiqiy va ikkitadan kompleks yechimlarga ega bo'ladi.

Demak (2.2.2.d) sistema quyidagi haqiqiy yechimga ega

$$y_{11}^0 = -1, y_2^0 = -1 \quad \text{va} \quad y_{12}^0 = 5, y_2^0 = -1$$

va ikkita kompleks

$$y_{124}^0 = -2 \pm i, y_2^0 = -1$$

Barcha ildizlar oddiy va $d = n - 1$ bo'lganligi uchun, shohalar ajralgan, quyidagi almashtirishni bajaramiz

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 + z_1 & \text{va} & & y_1 &= 5 + z_1 \\ y_2 &= -1 + z_2 & & & y_2 &= -1 + z_2 \end{aligned}$$

va $F_{1,2}$ - haqiqiy shohalarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} x_1 &= -y_3 + b'_j y_3^3 + o(\mathcal{G}_3^3) \\ x_2 &= -y_3^2 + b'_j y_3^4 + o(\mathcal{G}_3^4) \\ x_3 &= b_i y_3 + c_j y_3^3 + o(\mathcal{G}_3^3), \end{aligned} \quad j = 1, 2$$

bunda

$$\begin{aligned} b_1^1 &= -2, b_1 = -1, c_1 = -\frac{26}{3}, \\ b_2^1 &= -\frac{4}{5}, b_2 = 5, c_2 = \frac{52}{15} \end{aligned}$$

(2.2.2.d) sistemaning kompleks yechimlari, $F_{5,6}$ - kompleks shohalarini beradi

$$x_1 = -y_3 - \frac{1}{5} \left(\pm i \overline{y_3^3} + o \left(\overline{y_3^3} \right) \right)$$

$$x_2 = -y_3^2 - \frac{1}{5} \left(\pm i \overline{y_3^4} + o \left(\overline{y_3^4} \right) \right)$$

$$x_3 = \left(2 \pm i \overline{y_3} + \frac{6}{53} \left(\pm 16i \overline{y_3^3} + o \left(\overline{y_3^2} \right) \right) \right)$$

(2.2.2.f) qisqartma sistema ikkita oddiy haqiqiy va ikkita oddiy kompleks ildizlarga ega bo'ladi:

$$y_{1,2}^0 = \pm 1, y_2^0 = -1 \quad \text{и} \quad y_{3,4}^0 = \pm i, y_2^0 = -1$$

Bu yechimlar uchun mos ravishda $F_{3,4}$ - haqiqiy shohalarni:

$$x_2 = \pm x_1 - \frac{7}{5} x_1^2 + o \left(\overline{x_1^2} \right)$$

$$x_3 = -x_1^3 \pm x_1^4 + o \left(\overline{x_1^4} \right)$$

va $F_{7,8}$ - kompleks shohalarni hosil qilamiz:

$$x_2 = \pm i x_1 - \frac{7}{5} x_1^2 + o \left(\overline{x_1^2} \right)$$

$$x_3 = -x_1^3 \pm i x_1^4 + o \left(\overline{x_1^4} \right)$$

Topilgan shohalar uchun parameter vazifasini mos ravishda y_3^{-1} va x_1^{-1} lar bajaradi.

XULOSA

2. Bob. Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalar va ularning sistemalarini yechishda “Nyuton ko'pyoqlari” usulini qo'llash.

§ 2.1 . Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalarga doir misollar.

Bunda algebraik tenglamalarni $x = y = 0$ nuqta atrofidagi ildizlarining haqiqiy shoxalari qaralgan bo'lib, ularni hosil qilishda kompyuter algebrasi dasturi bo'lgan meple dasturidan foydalanilgan. Bunda yettita misol qaralgan.

§ 2.2 . Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalar sistemalariga doir misollar. Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalar sistemalariga doir ham ikkita misol uch o'lchovli hol uchun qaralgan

3. Bob. Differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechishda Nyuton ko'pyoqlari" usulini qo'llash.

§ 3.1 . Differensial tenglamalarni yechishga doir misollar.

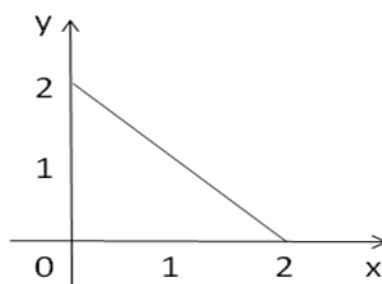
3.1.1 – misol. $f(X) \cong y''yx^2 - y'^2x^2 + y'yx - cyx - 2dx^2$

uning daraja ko'rsatkichlaridan tuzilgan nuqtalar to'plami

$$(-2,1) + (0,1) + (2,0) = (0,2), \quad (-1,1) + (-1,1) + (2,0) = (0,2)$$

$$(-1,1) + (0,1) + (1,0) = (0,2), \quad (2,0), \quad (0,1) + (1,0) = (1,1),$$

lardan iborat bo'lib, bular asosida Nyuton ko'pburchagini tuzamiz.



Bunda $\varepsilon = 1$ bo'lib, $y = c_1x$ ko'rinishga ega bo'ladi.

y ni qiymatini berilgan tenglamaga qo'yib c_1 ni qiymatini $c_1 = -\frac{2d}{c}$ topamiz.

Bunga asosan birinchi yaqinlashish

$$y = -\frac{2d}{c}x$$

ga teng bo'ladi.

Ma'lum hisoblashlardan so'ng berilgan tenglamanni yechimi uchun

$$y = -\frac{2d}{c}x + c_2x^2$$

ko'rinishdagi ikkinchi yaqinlashish topiladi.

$$3.1.2\text{-misol. } f(x) = w' w^2 z^2 + w' w z^2 + a w^5 + b w^4 - c w + d w^2 z^2$$

differensialn summaning tashuvchisi quyidagi nuqtalar to'plamidan iborat:

$$Q_1 = (0,3), Q_2 = (0,2), Q_3 = (0,5), Q_4 = (0,4), Q_5 = (0,1), Q_6 = (2,2),$$

$S(f) \in R^2$ ekanligini ko'rish mumkin. $f_Q(x)$ bilan $Q(a_i) = Q$ bo'lgan monomlar summasini belgilaymiz. U holda differensial summani

$$f(x) = \sum f_Q(x), \quad Q \in S(f) \quad (3.1.2.a)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

$S(f)$ tashuvchining qavariq qobig'i $\Gamma(f)$ bilan belgilanadi va $f(x)$ ning N'yuton ko'pburchagi deyiladi.

$\Gamma(f)$ ning chegarasini $\partial\Gamma(f)$ bilan belgilaymiz. $\partial\Gamma(f)$ chegara $\Gamma_j^{(0)}$ uchlardan va $\Gamma_j^{(1)}$ qirralardan iborat bo'ladi. Ularni umumiy holda yoqlar deb ataydilar va $\Gamma_j^{(d)}$ bilab belgilaydilar. Bunda yuqoridagi indeks d yoqning o'lchamini, pastki indeks uning tartib raqamini ifodalaydi. Har bir $\Gamma_j^{(d)}$ ga mos ravishda S ning chegaraviy to'plami

$$S_j^{(d)} = S(f) \cap \Gamma_j^{(d)}$$

va unga mos qisqartma summa

$$\tilde{f}_j^{(d)}(x) = \sum a_i(x), \text{ bunda } Q(a_i) \in S_j^{(d)} \quad (3.1.2.b)$$

tuziladi R^2 fazoga qo'shma fazoni R^2 bilan belgilaymiz. Demak, $P = (p_1, p_2) \in R^2$ va $Q = (q_1, q_2) \in R^2$ lar uchun skalyar ko'paytmani

$$(P, Q) = p_1 q_1 + p_2 q_2 \quad (3.1.2.c)$$

ko'rinishda aniqlash mumkin R^2 dagi har bir $\Gamma_j^{(d)}$ qirraga o'zining

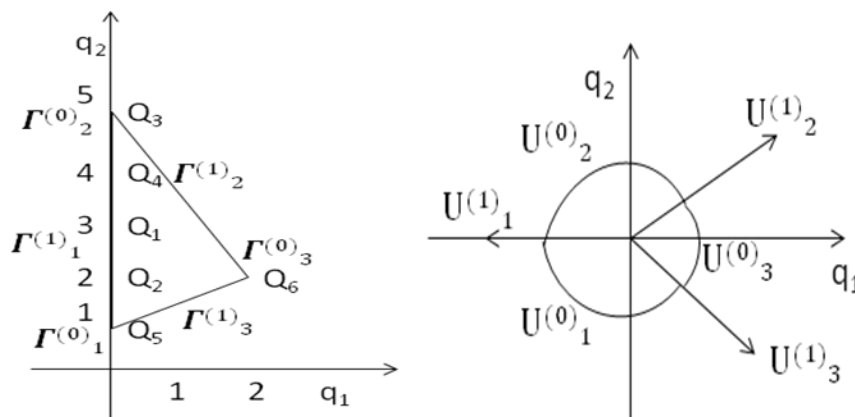
$$N_j^{(d)} = \left\{ P: (P, Q) = (P, Q'), \quad Q, Q' \in S_j^{(d)} \right\}$$

to'plamini aniqlash mumkin bo'lib, unga $\Gamma_j^{(d)}$ ning normal qismfazosi deyiladi. Bundan tashqari $\Gamma_j^{(d)}$ ga mos ravishda uning normal konusi deb ataluvchi

$$U_j^{(d)} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{P}: (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}'), & \mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in S_j^{(d)} \\ (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) > (\mathbf{P}, \mathbf{Q}''), & \mathbf{Q}'' \in S(f) \setminus S_j^{(d)} \end{array} \right\}$$

to'plam aniqlanadi.

$\Gamma_j^{(1)}$ qirra uchun $N_j^{(1)}$ normal qism fazo $\Gamma_j^{(1)}$ qirraga artogonal va koordinata boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi, normal konusi esa $N_j^{(1)}$ to'g'ri chiziqning $\Gamma_j^{(1)}$ qirradan $\Gamma(f)$ ko'pburchakning tashqariga qarab yo'nalgan nurdan iborat bo'ladi $\Gamma_j^{(0)}$ uch uchun normal qism fazo $N_j^{(0)} = R^2$ dan, $U_j^{(0)}$ normal konus esa R^2 da uchi $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ nol nuqtada tomonlari $\Gamma_j^{(0)}$ uchga taqalgan qirralarning normal konuslaridan iborat ochiq sektordan iborat bo'ladi.



3.1.3-misol. $f(z, w) = w'' - 6w^2 - z = 0$ (3.1.3.a)

tenglama Penlevening birinchi tenglamasi deyiladi. Uning yechimining yoyilmasini topamiz va darajali geometriya algoritmlari yordamida uning xossalarini o'rganamiz. Aniqrog'i, bu tenglama uchun a) uning yechimlarining barcha darajali asimptotikalarini; b) uning yechimlarining darajali – logarifmik yoyilmalarini; c) uning yechimlarining har bir darajali – logarifmik yoyilmalariga barcha eksponensial qo'shimchalarni; d) uning yechimlarining barcha darajali bo'lmagan asimptotikalarini topamiz.

(1) tenglamaning tashuvchilari

$$Q_1 = (-2, 1), Q_2 = (0, 2), Q_3 = (1, 0). \quad (3.1.3.b)$$

Bularning qavariq qobig'i uchlari $\Gamma_j^{(1)} = Q_j$ ($j = 1, 2, 3$) nuqtalarda bo'lgan burchak. U uchta Q_j uchlardan, uchta qirralardan: $\Gamma_1^{(1)} = [Q_3, Q_1]$, $\Gamma_2^{(1)} = [Q_1, Q_2]$, $\Gamma_3^{(1)} = [Q_2, Q_3]$ iborat. $\Gamma_j^{(1)}$ qirralarga tashqi normallari N_j lar quyidagilar:

$$N_1 = -(1, 3), \quad N_2 = (-1, 2), \quad N_3 = (2, 1) \quad (3.1.3.c)$$

$\Gamma_j^{(1)}$ qirralarning normal konuslari $U_j^{(1)}$

$$U_j^{(1)} = mN_j, \quad m > 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.1.3.d)$$

$$U_1^{(0)} = \{P = (p_1, p_2): Q_1 - Q_3c = -3p_1 + p_2 > 0, Q_1 - Q_2c = -2p_1 - p_2 > 0\}.$$

Agar (3.1.3.b) tashuvchini Q_3 vektorga siljitsak, u holda u

$$Q_1 - Q_3 = (-3, 1) \quad \text{va} \quad Q_2 - Q_1 = (-1, 2) \quad \text{vektorlar hosil qilgan yoki}$$

$Q_2 - Q_1 = (2, 1) \quad \text{va} \quad Q_3 - Q_1 = (1, -2) \quad \text{vektor hosil qilgan } Z \text{ panjarada}$ joylashgan bo'lib, bu panjara butunsonli Z^2 panjaraning panjaraosti bo'ladi.

Endi har bir $\Gamma_j^{(d)}$ $d = 0, 1, j = 1, 2, 3$ qirraga mos keluvchi yechimlarni alohida o'rganamiz. Lekin avvalo shunga e'tibor beramizki,

$$\tilde{f}_2^{(0)} = w^2 \quad \text{va} \quad \tilde{f}_3^{(0)} = -z$$

qisqatmalar algebraikdir. Demak ularga mos qisqartma tenglamalar notrivial darajali yechimlarga ega bo'lmaydi (va demak (3.1.3.a) tenglamaning darajali logarifmik yoyilmalari ularga mos kelmaydi) va darajali bo'lmagan yechimlari bo'lmaydi.

2. Q_1 uchga mos keluvchi yechimlar. 2·1 Darajali asimptotikalar.

$$Q = (-2, 1) \text{ uchga}$$

$$\tilde{f}_1^{(0)} = w^r = 0 \quad (3.1.3.e)$$

qisqartma tenglama mos keladi. Uning xarakteristik tenglamasi

$$c(r) = r(r - 1).$$

U ikkita $r_1 = 0$ va $r_2 = 1$ ildizlarga ega. (1.5) ga ko'ra $(1, r_i) \ i = 1, 2$ $U_1^{(0)}$ normal konusda yotadi. Demak, $w = -1$, ya'ni $z \rightarrow 0$. shuning uchun Q_1 uchga ikkita darajali asimptotikalar mos keladi

$$F_1^{(0)} 1: w = c_0 \quad (3.1.3.f)$$

$$F_1^{(0)} 2: w = c_1 z$$

$$(3.1.3.g)$$

bunda c_0, c_1 - ixtiyoriy o'zgarmaslar.

(3.1.3.f) qisqartma tenglamaning kritik sonlarini topamiz. Birinchi variatsiya

$$\frac{d\tilde{f}_1^{(0)}}{dw} = \frac{d^2}{dz^2}$$

2 operatoridan iborat bo'lib, u

$$n(k) = k(k - 1) = 0 \quad (3.1.3.g')$$

xarakteristik tenglamaga ega, uning $k_1 = 0$ va $k_2 = 1$ ikkita ildizi bor. $w = -1$ va $r = 0$ bo'lganligidan masalaning konusi $K = \{k > 0\}$ k_1 va k_2 lardan unga faqat $k_2 = 1$ kiradi, u yagona kritik nuqta bo'ladi. (3.1.3.g) yechim uchun kritik nuqtalar yo'qligi ma'lum.

§ 3.2 . Differensial tenglamalar sistemalari yechishga doir misollar.

3.2.1-misol.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_2^2 + x_1x_2 - 2x_1^2 = x_1(4x_1^{-1}x_2^2 + x_2 - 2x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1^3 = x_2(x_2 + 2x_1 + 2x_1^3x_2^{-1})\end{aligned}$$

Nyuton sinig' chizig'i uchta uchdan va ikkita qirrdan iborat:

$$\Gamma_1^{(1)} \supset Q_1, Q_3, \quad \Gamma_2^{(1)} \supset Q_3, Q_2, Q_1. \quad \text{Bunda } R_1 = (-2, 1), R_2 = (-1, 1). \quad Q_1, Q_2$$

uchlar birinchi tipga tegishli bo'lib, integral egri chiziqlarni ularning $\sum_1^{(0)}$ va $\sum_4^{(0)}$

to'plamlarida trivial, lekin uning Q uchi ikkinchi tipga tegishli bo'lib, uning $\sum_3^{(0)}$

to'plami $\sum_3$ to'plamni o'zida saqlaydi. Q_3 uch uchun

$$R_* = (1, 0), R^* = R_2, \Lambda = F_{Q_3} = (-2, 2).$$

Skalyar ko'paytmalar har xil ishorali bo'lganligi sababli M to'g'ri chizig'i V sektorni ichki nuqtalari bo'yicha kesib o'tadi.

Noldan o'tuvchi yagona integral egri chiziqni joylanishini aniqlash uchun $\Gamma_1^{(1)}$ qirradan foydalanamiz. Bu yerda darajali almashtirishdan foydalanamiz va vertikal o'qda qo'zg'almas nuqta topamiz. Buning o'rniga yechimning x_1 ning darajalari bo'yicha yoyilmani qaraymiz. $R_1 = (-R, 1)$ bo'lganligi uchun $\gamma_1 = R$ va qisqartma sistema uchun ($\Gamma_1^{(1)}$ qirraga mos)

$$\dot{x}_1 = -2x_1^2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1x_2 + x_1^3$$

bo'ladi. Endi $x_2 = bx_1^2$ ko'rinishda yechim topish kerak. Sistemani bitta tenglama ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2 + x_1^2}{x_1}$$

$x_2 = bx_1^2$ ni qo'yib, b uchun

$$2b = -b + 1$$

Tenglamani hosil qilamiz. Demak $b = -\frac{1}{5}$ ekan.

Demak noldan o'tuvchi yagona integral egri chiziq $\sum_a^{(0)} da$ quyidagi yoyilmaga ega bo'ladi:

$$x_2 = -\frac{1}{3}x_1^2 + \dots (c_1)$$

$\Gamma_2^{(1)}$ qirra uchun

$$y_1 = x_1, y_2 = x_1^{-1}x_2$$

almashtirish olamiz.

U holda

$$\dot{y}_1 = y_1(4y_1y_2^2 + y_1y_2 - 2y_1) = y_1^2(4y_2^2 + y_2 - 2)$$

$$\dot{y}_2 = y_2(-4y_1y_2^2 + 4y_1 + 2y_1^2y_2^{-1}) = y_1y_2(-4y_2^2 + 4 + 2y_1y_2^{-1})$$

$y_1 = 0, y_2 = y_1^{(0)}$ qo'zg'almas nuqtalar uchun $y_1^2 = 1$ ni hosil qilamiz. Bundan $y_1^0 = \pm 1$. Bu nuqtalarda xos qiymatlar $\lambda_1 = 2 \pm 1, \lambda_2 = \pm 6$ ya'ni $y_2^0 = -1$ nuqta egar nuqta bo'lib, undan yagona integral egri chiziq o'tadi: $y_2 = 1 + \dots$

$y_2^0 = -1$ nuqtasi tugun nuqta bo'ladi va undan cheksiz ko'p integral chiziqlar o'tadi. Demak, bitta

$x_2 = x_1 + \dots (c_2)$ egri chiziq va cheksiz ko'p $x_2 = -x_1 + \dots (c_2)$ egri chiziqlar bor.

XULOSA

1-bob asosiy tushunchalar, ta'rif va teoremlardan iborat.

§1.1. Lokal masalalar to'g'risida. Bir o'zgaruvchili kopadlarning asosiy xarakteristikalaridan biri uning darajasidir. Darajani bilgan holda, hatto uning koeffisientlarini bilmaganda ham ko'phad haqida ko'p ma'lumotlarni berish mumkin. Ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar uchun ham to'la daraja deb ataluvchi son kiritilgan, lekin bu son berilgan k'phad haqida keng ma'lumot bera olmaydi. Bu tenglamalarning regulyar nuqta atrofida yechimlarini topish mumkin. Maxsus nuqta atrofidagi yechimi o'zini qanday olib borishi to'g'risida umumiy metodika bo'lmagan. Darajali geometriya deb ataluvchi matematikaning bo'limi tenglamalarning yechimlari xususiyatlarini tenglamaga kiruvchi hadlarning daraja ko'rsatkichlar vektorlari orqali o'rganadi.

§ 1.2 . Algebraik chiziqlarning shohalarini topish.

Bu ishda maxsus nuqta bo'lgan holat qaraladi va quyidagi masala yechiladi: x^0 nuqta atrofida keltirilgan chiziqning barcha shohalarini aniqlash algoritmini tuzish va ularning yetarli aniqlikdagi parametrik yoyilmalarini topish.

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \tau^{P_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad P_j > P_{j+1} > \dots$$

Bu ishda bunday yoyilmalarni topishning nisbatan yengilroq usuli taklif etiladi. Bu usulda Nyuton ko'pyoqligi va darajali almashtirishlardan foydalaniladi.

§ 1.3 . Ko'phad qisqartmalari.

Bu paragrafda ko'phadkardan qisqartmalarni alohida qilib o'rganiladi. Cheksiz yig'indining qisqartmalari va qisqartmalar ajratish usullari qaralgan

§ 1.4. Darajali almashtirishlar. Agar $\mathcal{G}(y_2)$ ko'phadda maksimal darajali y_2^s ko'paytuvchi ajratilsa, ya'ni $\mathcal{G}(y_2) = y_2^s \mathcal{G}_0(y_2)$ va $\mathcal{G}_0(0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\Gamma_1^{(1)}$ qirraning balandligi $\mathcal{G}_0(y_2)$ ko'phadning darajasiga teng bo'ladi.

§ 1.5. “Nyuton ko'pyoqlari” usulini differensial tenglamalarga tadbig'i.

§ 1.6. Qisqartmalar konuslari paragraflaridan iborat.

2. Bob. Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalar va ularning sistemalarini yechishda “Nyuton ko'pyoqlari” usulini qo'llash.

§ 2.1 . Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalarga doir misollar.

Bunda algebraik tenglamalarni $x = y = 0$ nuqta atrofidagi ildizlarining haqiqiy shoxalari qaralgan bo'lib, ularni hosil qilishda kompyuter algebrasi dasturi bo'lgan meple dasturidan foydalanilgan. Bunda yettita misol qaralgan.

§ 2.2 . Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalar sistemalariga doir misollar. Chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalar sistemalariga doir ham ikkita misol uch o'lchovli hol uchun qaralgan

3. Bob. Differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechishda Nyuton ko'pyoqlari” usulini qo'llash.

§ 3.1 . Differensial tenglamalarni yechishga doir misollar. Bunda mavzuga doir uchta misol qaralgan

§ 3.2 . Differensial tenglamalar sistemalari yechishga doir misollar. Bu mavzuga doir bitta misol tahlil qilingan

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях -М.: Наука .Физматлит,1998-288 с.-ISBN 5-02-015168-8.
2. Солеев А.Выделение ветвей аналитической кривой и многогранники Ньютон//ДАН СССР.1983.Т.268,№6 .С.1305-1307.
3. Чебатареv Н.Г. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики // Исаак Ньютон. М.-Л.:СССР, 1943. С. 99-126.
4. Бернштейн И.А, Кушнеренко А.Г., Хованский А.Г. Многогранники Ньютона. УМН,31, вып.3 (1976), с.201-202.
5. Сеттарова Э.С., Абдугафаров А.М., Оркин А.В. Нахождение элементов множества точек n –мерного пространства. Доклады республиканской научно-технической конференции «Современное состояние и перспективы развития информационных технологий», Ташкент, 2011.
6. Солеев А. ,Арнсон Аю Вычисление многогранника и нормальных конусов его граней. Препринт /ИПМ РАН. М., 1994 №36, 25с
7. Солеев А. Алгоритм вычисления многогранников Ньютона//ДАН. УзССР 1982№5. С14-16.