

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

QARSHI MUHANDISLIK IQTISODIYOT INSTITUTI

Texnika fanlarni o'qitish metodikasi kafedrası

**«NAZARIY MEKANIKA» FANIDAN
MA'RUZALAR MATNI TO'PLAMI
(Nuqta dinamikasi)**

QARSHI - 2015

Muallif: dots. B.Donaev

Taqrizchilar: QDU «Kasb ta'limi»
dots. Yu.Tilovov
QMII «TFO'M» kafedrası katta o'qit. X.Rahimov.

Ma'ruzalar matni to'plami QMII « TFO'M » kafedrasining (_____2015 y Bayonnoma №_____) yig'ilishida, Kasb ta'lim fakultetining (_____2015 y. Bayonnoma №_____) uslubiy komissiyasi yig'ilishida ko'rib chiqilgan va o'quv jarayonida foydalanish uchun tavsiya qilingan.

Учинчи қисм.

XV бўлим.

Нуқта динамикаси.

Асосий тушунча ва қисмлар.

Кучлар таъсирида материал жисмларнинг ҳаракатини ўрганувчи механиканинг бир қисмига динамика дейилади.

Жисмларнинг ҳаракати соф геометрик нуқтаи-назардан кинематика қисмида ўрганилади. Динамикада эса кинематикадан фарқли ўларок, кучлар таъсиридаги жисмларнинг ҳаракати, шу билан бирга жисмларнинг инерция асосида бўладиган ҳаракатлари ҳам ўрганилади.

Куч ҳақидаги тушунчани статика қисмида ўрганган эдик. Жисмларнинг ўзаро таъсирининг миқдорий ўлчамига куч дейилади. Статикада биз жисмга таъсир этувчи барча кучларни ўзгармас деб қараган эдик. Жисмга ўзгармас кучлардан ташқари катталиги ва йўналиши ўзгарувчи кучлар ҳам таъсир қилади. Ўзгарувчан кучлар ҳам актив ҳам реакция кучлари бўлиши мумкин.

Тажрибалар кўрсатадики кучлар асосан вақтга, жисмнинг ҳолатига ва тезлигига боғлиқ равишда ўзгариши мумкин. Вақтга боғлиқ равишда ўзгарувчи кучларга реостатларни кетма-кет узиш ёки қўшиш натижасида ҳосил бўлувчи электровознинг тортишиш кучи мисол бўла олади; Жисмнинг ҳолатига қараб ўзгарувчи кучларга н्यूтоннинг тортишиш кучи ёки пружинанинг эластиклик кучи тўлиб ҳисобланади; жисмнинг тезлигига қараб ўзгарувчи кучлар муҳитнинг қаршилик кўрсатувчи кучига боғлиқ бўлади.

Механикада инертлик тушунчаси муҳим рол ўйнайди. Куч таъсир этмаганда жисмнинг ўз ҳолатини ёки ҳаракатини сақлашда, куч таъсир этганда эса ўз ҳаракатини бирданига эмас, балки аста-секин ўзгартиришда инертлик намоён бўлади.

Материал жисмлар инертлигининг миқдорий ўлчовига жисмларнинг массаси дейилади. Классик механикада масса скаляр, мусбат ишорада ва шу жисм учун ўзгармас катталик қаралади.

Жисмларнинг ҳаракати, жисмларнинг шакли (формаси) га жисмда масса тақсимотига ҳам боғлиқ бўлади.

Шу сабабли моддий нуқта абстракт тушунча киритилади. Шакли эътиборга олинмайдиган массага эга бўлган жисмга моддий нуқта дейилади.

Ўзаро таъсирда бўлган иккита жисмнинг ўлчамлари ораларидаги масофага нисбатан жуда кичик бўлса бу жисмларни «шартли» равишда моддий нуқталар деб қараш мумкин. Масалан, Ерни Қуёш атрофидаги ҳаракатини ўрганишда Ер, снарядининг учиш узоқлигини аниқлашда снаряд моддий нуқта деб олинади.

Биз динамикани моддий нуқта динамикасини ўрганишдан бошлаймиз. Чунки ҳар қандай жисм моддий нуқталар тўпламидан иборат.

§ Динамика қонунлари.

Динамиканинг асосида инсониятнинг жуда кўп тажрибалари ва кузатишлари натижасида аниқланаган қонунлар этади. Бу қонунлар систематик кўринишда 1687 йилда чоп этилган. И.Ньютоннинг «Натурал фалсафанинг математик асослари» асосида баён қилинган.

Биринчи қонун (инерция қонуни). Ташқи таъсирлардан танҳоланган моддий нукта бирор куч таъсир этмагунча ўзининг тинч ҳолатини ёки тўғри чизиqli текис ҳаракатини сақлашга интилади. Куч таъсирида нуктанинг ҳаракатига инерциал ҳаракат ёки инерция бўйича ҳаракат дейилади.

Инерция қонуни материянинг асосий хусусиятларидан бирини яъни материя доимо ҳаракатда эканлигини изоҳлайди. Шуни таъкидлаш керакки Г.Галилей томонидан (1638 й) инерция қонуни кашф қилингандан сўнг динамика фан сифатида ривожлана бошлади.

Инерция қонуни қандай санок системасига нисбатан ўринли бўлади. Ньютон қандайдир қўзғалмас (абсолют) фазо мавжуд, инерция қонуни шу фазога нисбатан бажарилади юеб тахмин қилади.

Ҳозирги пайтда фазо материянинг яшаш формаси эканлиги исботланган. Ҳеч қандай абсолют фазо мавжуд эмас. Шу сабабли механикада инерция қонунлари бажариладиган санок системаси киритилган. Бундай санок системаларга инерциал санок системаси дейилади.

Механиканинг у ёки бу масаласини ечишда мавжуд санок системасини инерциал санок системаси деб қараш мумкинми.

Тажрибаларнинг кўрсатишича координаталар боши Қуёшнинг марказида, ўқлари қўзғалмас юлдузлар томон йўналган санок системани инерциал санок система деб олиш мумкин. Жуда кўп техник масалаларни ечишда Ер билан чамбарчас боғлиқ санок системани инерциал санок система деб олиш мумкин.

Иккинчи қонун (динамиканинг асосий қонуни).

Моддий нуктанинг куч таъсирида олган тезланиши билан массасининг кўпайтмаси миқдор жиҳатдан шу кучга тенг тезланиш йўналиши куч йўналиши билан устма-уст тушади.

Унинг математик ифодаси вектор кўринишда қуйидагича бўлади.

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

Динамиканинг иккинчи қонуни ҳам худди биринчи қонундек фақат инерциал санок системаларига нисбатан бажарилади. Ҳақиқатан ҳам, бу қонундан кўринадики моддий нуктанинг массаси инертлигининг ўлчовидир. Яъни нуктанинг массаси қанча катта бўлса, олган тезланиши кичик бўлади, ёки аксинча.

Агар нуктага бир вақтнинг ўзида бир нечта куч таъсир этса, динамиканинг асосий қонуни қуйидаги кўринишни олади.

$$m \vec{a} = \vec{R} \text{ ёки } m \vec{a} = \sum i \vec{F}_k \quad (2)$$

бу ерда $\vec{R} = \sum i \vec{F}_k$ нукта таъсир этувчи кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси.

Учинчи қонун (таъсир ва акс таъсир қонуни). Иккита моддий нукта бир-бирига миқдорлари тенг ва шу нукталарни туташтирувчи тўғри чизик бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган кучлар билан таъсир этади.

Бу қонундан биз статика қисмида фойдаланганмиз. Масалан иккита А ва В моддий нукталар ўзаро таъсирлашаётган бўлсин (1-расм). А нукта В нуктага $\vec{F}_B$ куч билан, В нукта А нуктага $\vec{F}_A$ куч билан таъсир этади. У ҳолда учинчи қонунга кўра $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ кўринишда бўлади.

Эркин ва боғланган моддий нукталар учун динамика масалалари.

Эркин моддий нукталар учун динамика масалалари иккита: 1) Нуктанинг ҳаракат қонунини билган ҳолда унга таъсир этувчи кучларни аниқлаш (динамиканинг биринчи масаласи); 2) Нуктага таъсир этувчи кучларни билган ҳолда унинг ҳаракат қонунини аниқлаш (динамиканинг иккинчи ёки асосий масаласи).

Боғланган моддий нукталар учун ҳам динамика масалалари иккита: Нуктанинг ҳаракат қонунини ҳамда унга қўйилган актив кучларни билган ҳолда боғланиш реакция кучларини аниқлаш, бу биринчи масала. Нуктага таъсир этувчи актив кучларни билган ҳолда: 1) Нуктанинг ҳаракат қонуни, 2) Боғланиш реакция кучларини аниқлаш, бу иккинчи масала.

Кучларнинг асосий турлари.

Динамика масалаларини ечишда биз асосан қуйидаги кучларни аниқлашга тўғри келади.

Оғирлик кучи. Ер сиртига яқин бўлган барча жисмларга Ернинг торитиши туфайли катталиги ўзгармас бўлган $\vec{P}$ оғирлик кучи таъсир этади. Оғирлик кучи модули жисм оғирлигига тенг.

Тажрибалардан маълумки барча жисмлар $\vec{P}$ оғирлик кучи таъсирида Ерга эркин тушаётганида (унча катта бўлмаган баландлик ва ҳавосиз бўшлиқда) эркин тушиш тезланишига тенг тезланиш билан тушар экан. У ҳолда (1) га кўра қуйидагини ёзамиз.

$$P = mg \text{ ёки } m = \frac{P}{g} \quad (3)$$

(3) дан жисмнинг массасига кўра, унинг оғирлигини, ёки жисмнинг оғирлигига кўра массасини аниқлаш мумкин. Жисмнинг оғирлиги ёки оғирлик кучи ҳам худди эркин тушиш тезланиши g нинг қийматидан жойнинг географик кенглиги ҳамда денгиз сатҳига нисбатан баландликка боғлиқ равишда ўзгаради. Жисм массаси эса шу жисм учун ўзгармас миқдордир.

Ишқаланиш кучи. Бир жисм иккинчи жисм устида сирпаниб ҳаракатланганда ҳосил бўладиган ҳаракатга қарама-қарши йўналган кучга ишқаланиш кучи дейилади. Бу кучнинг модули қуйидаги формула ёрдамида аниқланади.

$$F = f N$$

Жисмларнинг эркин тушиш қонуни Галилей томонидан очилган. Эркин тушиш тезланиши g нинг қиймати жойнинг географик кенглиги ва денгиз сатҳига нисбатан баландликка боғлиқ.

Бу ерда: f – ишқаланиш коэффиценти.

N – нормал реакция кучи.

Тортишиш кучи. Ҳарқандай иккита моддий нукта бир-бири билан бутун олам тортишиш қонунига кўра ўзаро тортишиш кучига тенг куч билан тортишади. Тортишиш кучи моддий нукталар орасидаги масофага ва моддий нукталар массаларига боғлиқ бўлади. Тортишиш кучи қуйидаги формула ёрдамида аниқланади.

$$F = f \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (5)$$

бу ерда: f – гравитацион доимийлик $\left(f = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \right)$.

Эластиклик кучи. Бу куч жисмларнинг деформацияланиши натижасида пайдо бўлади. Эластиклик кучи ҳам масофага боғлиқ бўлади. Эластиклик кучи Гук қонунига кўра аниқланади. Пружинада ҳосил бўладиган эластиклик кучи қуйидаги формула ёрдамида аниқланади.

$$F = C\lambda \quad (6)$$

бу ерда: λ - пружинанинг чўзилиши (ёки қисиниши); C – пружинанинг бикрлик коэффиценти (ўлчов бирлиги $\frac{H}{m}$).

Қовушқоқлик ишқаланиш кучи. Бу куч жисм қовушқоқлиги катта бўлган муҳитда секин ҳаракатланганда унга таъсир этувчи куч. У қуйидаги формула ёрдамида аниқланади.

$$R = \mu \mathcal{G} \quad (7)$$

бу ерда: $\mathcal{G}$ - жисмнинг тезлиги; μ - муҳитнинг қаршилик коэффиценти.

Аэродинамик (гидродинамик) қаршилик кучи. Бу куч ҳам жисмнинг тезлигига боғлиқ бўлиб, жисм ҳавода ёки сувда ҳаракатланганида унга таъсир қилади, ва қуйидаги формула ёрдамида аниқланади.

$$R = 0,5 C_x \rho S \mathcal{G}^2 \quad (8)$$

бу ерда: ρ - муҳитнинг зичлиги; S – жисмнинг ҳаракати йўналишига ўтказилган перпендикуляр текисликдаги проекциясининг юзаси; C_x - тажриба йўли билан аниқланадиган ўлчамсиз қаршилик коэффиценти.

Инерт ва гравитацион масса. Динамиканинг иккинчи (асосий) қонунида қатнашадиган масса жисмларнинг инертлигини ҳарактерловчи катталик бўлгани учун, унга инерт масса дейилади.

Бутун олам тортишиш қонунида қатнашадиган m масса жисмларнинг гравитацион хусусиятларини ифодалагани учун унга гравитацион масса дейилади.

1971 йилда совет олимлари томонидан 10^{-12} аниқликда ўтказилган бир қатор тажрибаларда бу иккала массанинг қиймати бир-бирига жуда яқин бўлган. Бу фактга эквивалентлик принципи дейилади. Эквивалентлик принципини А.Эйнштейн ўзининг нисбийлик назариясига асос қилиб олган.

Лекин бу иккала: инерт ва гравитацион масса тушунчаларини бир-бири билан аралаштириб юбормаслик керак.

XVI БОБ.

Нукта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари.

Моддий нукта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари.

Массаси m бўлган моддий нукта $\vec{F}$ куч таъсирида эгри чизик бўйлаб ҳаракатланаётган бўлсин. (2-расм).

Бу кучнинг Охуз координаталар ўқларидаги проекцияси F_x, F_y, F_z билан белгилаймиз. Динамиканинг иккинчи (асосий) қонунига кўра қуйидагини ёзамиз. $m\vec{a} = \vec{F}$.

Тенгликнинг координаталар ўқларидаги проекциялари қуйидаги кўринишда бўлади.

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z$$

Бизга кинематикадан маълумки тезланишнинг координаталар ўқларидаги проекциялари қуйидаги кўринишда бўлар эди.

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Буларни юқоридаги тенгликларга қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \quad (9)$$

Бу тенгламаларга нукта ҳаракатининг тўғри бурчакли Декарт координаталар ўқларидаги дифференциал тенгламалари тенгламалари дейилади. Динамиканинг иккинчи (асосий) қонунини ифодаловчи тенгламани табиий координаталар ўқларига проекциялаймиз:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}, \quad ma_n = \sum F_{kn}, \quad ma_g = \sum F_{kg}$$

$$\text{бу ерда: } a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho}, \quad a_g = 0$$

У ҳолда юқоридаги тенгламалар қуйидаги кўринишни олади.

$$m \frac{d\vartheta}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m \frac{\vartheta^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kg} \quad (10)$$

Бу тенгламаларга табиий координаталар ўқларидаги нукта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари дейилади.

Динамиканинг иккинчи масаласини ечиш (нуктанинг ҳаракати тўғри чизикдан иборат).

М моддий нукта тўғри чизик бўйлаб ҳаракатланаётган бўлсин. Координата ўқи Ох ни нуктанинг ҳаракат йўналиши бўйлаб йўналтирамиз. У ҳолда нуктанинг ҳаракат тенгламаси (9) тенгликларнинг биринчиси орқали аниқланади:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx} \quad (11)$$

(11) тенглик нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади. Айрим ҳолларда бу тенгламани иккита биринчи тартибли дифференциал тенгламалар билан алмаштирилади.

$$m \frac{d\vartheta_x}{dt} = \sum F_{kx}, \quad \frac{dx}{dt} = \vartheta_x \quad (12)$$

Масалалар ечишда нуқтанинг тезлиги ϑ ни вақт t га боғлиқлиги эмас, балки тезлик ϑ ни унинг координатаси x га боғлиқлигини аниқлашга тўғри келади. У ҳолда (12) тенгликни қуйидаги кўринишга олиб келинади:

$$\frac{d\vartheta_x}{dt} = \frac{d\vartheta_x}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\vartheta_x}{dx} \cdot \vartheta_x;$$

Бу тенгликни (12) га келтириб қўямиз.

$$m \vartheta_x \frac{d\vartheta_x}{dx} = \sum F_{kx}, \quad \frac{dx}{dt} = \vartheta_x \quad (13)$$

Динамиканинг асосий масаласини ечишда нуқтага таъсир этувчи кучни билган ҳолда унинг ҳаракат тенгламаси, яъни $x=f(t)$ аниқлаб олинади. Бунинг учун мос дифференциал тенгламалар интегралланади.

Нуқтага таъсир этувчи $\bar{F}$ куч t вақтга нуқтанинг ҳолати, яъни x га ва нуқтанинг ϑ тезлигига боғлиқ бўлиши мумкин. Шунга кўра (11) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, \vartheta)$$

Берилган масала учун (11) дифференциал тенглама интегралланса, ечимга 2 та интеграл доимийси C_1 ва C_2 лар қўшиб олинади. У ҳолда (11) нинг умумий ечими қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$X = f(t, C_1, C_2) \quad (14)$$

(14) тенгликдаги интеграл доимийларининг қийматлари бошланғич шарт деб аталмиш шартдан топилади.

Ҳарқандай ҳаракат вақтнинг аниқ бир пайтидан яъни бошланғич пайтдан бошласа ўрганилади. Бошланғич пайтда $t=0$ деб олиниб, вақт шу пайтдан бошлаб ҳисоб бошланади. Бошланғич пайтда нуқтанинг эгаллаган ҳолатига бошланғич ҳолат, тезлигига бошланғич тезлик дейилади. Динамиканинг иккинчи масаласини ечиш учун, нуқтага таъсир этувчи кучлардан ташқари бошланғич шартни, яъни вақтнинг бошланғич пайтида нуқтанинг ҳолати ва тезлигини ҳам билишга тўғри келади.

Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати учун бошланғич шарт қуйидаги кўринишда бўлади:

$$t=0 \text{ да } x=x_0, \quad \vartheta_x = \vartheta_0 \quad (15)$$

Бошланғич шартлардан интеграл доимийлари C_1 ва C_2 ларнинг аниқ қийматларини аниқлаш мумкин. У ҳолда нуқтанинг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$X = f(t, X_0, \vartheta_0) \quad (16)$$

Масалалар ечишга мисоллар.

Нуқта динамикаси масалаларининг дифференциал тенгламаларини интеграллаш йўли билан ечиш учун қуйидаги босқичларни бажариш лозим.

1. Ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси тузилади. Тўғри чизиқли ҳаракат учун:

а) Нуқтанинг бошланғич ҳолати санок боши деб танланиб координата ўқлари ўтказилади. Координата ўқи нуқтанинг ҳаракат йўналиши билан бир хил йўналган бўлади. Агар нуқта кучлар таъсирида қандайдир мувозанат ҳолатида бўлса, санок бошини статик мувозанат ҳолати билан устма-уст туширилади;

б) Ҳаракатдаги нуқтани ихтиёрий ҳолатда тасвирлаб (бунда нуқтанинг ҳолати $X > 0$, тезлиги $\dot{X} > 0$) нуқтага таъсир этувчи барча кучлар расмда кўрсатилади;

в) Нуқтага таъсир этувчи барча кучларнинг ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ҳисобланиб, ҳаракат дифференциал тенгламасининг ўнг томонига қўйилади; бунда ўзгарувчан кучларнинг нимага боғлиқ ўзгариши (t , x ёки $\dot{X}$) кўрсатилади.

2. Ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини интеграллаш.

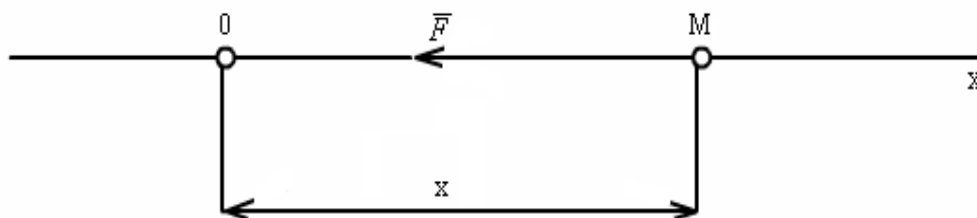
Ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси, тенгламанинг ўнг томонидаги ифодага қараб, шундай маълум олий математика курси усуллари асосида интегралланади. Агар нуқтага ўзгармас кучлардан ташқари битта ўзгарувчан куч t боғлиқ, x масофага боғлиқ, ўзгарувчан ёки бўлмаса $\dot{X}$ тезликка боғлиқ ўзгарувчан битта куч таъсир қилаётган бўлса у ҳолда тўғри чизиқли ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси ўзгарувчанларга бўлиш усулидан фойдаланган ҳолда интегралланади. Агар масалада фақат $\dot{X}$ тезликни аниқлаш керак бўлса (13) ёки (14) тенгламаларнинг биттасини интеграллаш билан чекланиш мумкин.

3. Интегралл доимийларининг қийматларини аниқлаш интеграл доимийларини аниқлаш учун масаланинг шартига кўра бошланғич шарт (15) кўринишда аниқлаб олинади. Бошланғич шартга қараб интегралл доимийларининг қийматлари топилади.

Моддий нуқтанинг тебранма ҳаракати. Қаршилик кучи бўлмагандаги эркин тебранишлар.

Тебранма ҳаракат ёки қисқача қилиб айтганда тебранишлар турли соҳаларда учрайди. Масалан, механик тебранишлар, акустик тебранишлар, ёруғлик тебранишлар, электромагнит тебранишлар ва бошқалар. Бу тебранишлар физик хусусияти билан фарқ қилсада, улар барчаси маълум бир қонуниятга бўйин сўнади.

Тебранишлар назарий механиканинг асосий бўлимларидан бири бўлиб ҳисобланади. Ҳозирги замон техникаси тараққиётида унинг роли кундан-кунга ўсиб бормоқда. Двигателлар, машина ва механизмлар, кўприклар ва бошқа хил иншоотларни лойиҳалашда уларнинг тебранишлари албатта ҳисобга олинади.



3-расм

Шунга кўра механик тебранишларни ўрганиш муҳим аҳамиятга эга, чунки бу тебранишлар техникада кўплаб юз беради. Механик тебранишларни ўрганишда олинган натижалар, бошқа соҳаларда содир бўладиган тебранишларни ўрганишда фойдаланиш мумкин.

Қаршилик кучи бўлмаганда эркин тебранишларни кўриб чиқамиз. Массаси m бўлган M моддий нуқта мувозанат вазияти томон қайтарувчи $\bar{F}$ куч таъсирида тўғри чизик бўйлаб ҳаракатланаётган бўлсин (3-расм). $\bar{F}$ куч M нуқтани доимо мувозанат вазияти O нуқта томон ҳаракатлантиришга интилади.

Шунга кўра $\bar{F}$ куч мувозанат вазияти томон қайтарувчи куч деб аталади. Бундай кучга мисол қилиб эластиклик кучни кўрсатиш мумкин. $\bar{F}$ кучнинг модули M нуқтадан мувозанат вазияти O нуқтагача бўлган масофага пропорционал, яъни

$$F = c \cdot OM$$

Бу ерда c – пропорционаллик коэффиценти. M нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз.

M нуқтанинг ҳаракат йўналиши бўйлаб x ўқини ўтказамиз. Координата боши қилиб O нуқтани оламиз. $\bar{F}$ кучнинг x ўқдаги проекцияси F_x десак, u ҳолда қуйидагини ёзамиз.

$$F_x = -cx \quad (17)$$

u ҳолда M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$$

$\frac{c}{m} = k^2$ деб белгиласак тенгликнинг ҳар иккала томонини m га бўлиб юқоридаги тенглик қуйидаги кўринишни олади.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \quad (18)$$

(18) тенглама қаршилик кучи бўлмаганда нуқтани эркин тебранишларнинг дифференциал тенгламаси. Бу тенглама иккинчи тартибли чизикли ўзгармас коэффицентли дифференциал тенглама бўлиб ҳисобланади.

Бу дифференциал тенгламани интеграллаш учун унинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$n^2 + k^2 = 0$$

Бу тенглама $n_{1,2} = \pm ik$ илдизларга эга бўлгани учун (2) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (19)$$

бу ерда C_1, C_2 – интеграл доимийлари (3) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt \quad (20)$$

(20) нуктанинг тезлигини аниқловчи формула.

Интеграл доимийлари C_1 , ва C_2 ларнинг қийматлари бошланғич шартдан фойдаланиб топилади. Бошланғич шарт қуйидагича бўлсин:

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \quad (21)$$

(21) ни (19) ва (20) га қўйиб,

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$$

Эканлигини аниқлаймиз.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$C_1 = a \sin \alpha \quad C_2 = a \cos \alpha$$

Белгилашларни эътиборга олсак (19) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$x = a \sin(kt + \alpha) \quad (22)$$

бу ерда a, α – ихтиёрий ўзгармас сонлар (22) тенглама нуктанинг гармоник тебранма ҳаракат тенгламаси.

Шундай қилиб, моддий нуктанинг мувозанат вазияти томон йўналган куч таъсиридаги эркин тебранма ҳаракати гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади (4-расм)

Нуктанинг тебранма ҳаракатдаги тезлигини аниқлаш учун (22) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = k a \cos(kt + \alpha) \quad (23)$$

a ва α нинг қийматларини бошланғич шарт (21) дан аниқланади:

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \dot{x}_0 = a k \cos \alpha$$

Бундан a ва α ларни аниқлаймиз:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \cdot k}{\dot{x}_0} \quad (24)$$

Моддий нуктанинг эркин тебранишларини графикаси 1–расмда келтирилган; бу ерда бошланғич силжиш x_0 , тебранишлар амплитудаси a , тебранишлар даври T билан белгиланган.

Энди тебранишлар даври T ни аниқлаймиз. Нуктанинг бир тўлик тебраниши учун кетган вақтга тебранишлар даври дейилади. Тебранишлар даври ва частотаси орасидаги боғланиш ҳаракатнинг даврийлиги шартидан аниқланади.

$$k(t + T) + \alpha = kt + \alpha + 2\pi$$

ёки

$$kt + kT + \alpha = kt + \alpha + 2\pi$$

$$\text{бундан} \quad T = \frac{2\pi}{k} \quad (25)$$

k ни қийматини қўйсак:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (25^1)$$

(25) ва (25¹) формулаларда x_0 ва ϑ_0 лар қатнашмаяпти, шунга қўра тебранишлар даври боғланғич шартларга боғлиқ эмас экан.

(25) дан $k = \frac{2\pi}{T}$, бундан шу нарсани билиш мумкинки, k – катталиқ моддий нуқтанинг 2π с ичида тўлиқ тебранишлар сони. k – катталиқка тебранишларнинг доиравий частотаси дейилади, ўлчов бирлиги $\frac{1}{с}$

Нуқтанинг эркин тебранишига ўзгармас кучнинг таъсири. М моддий нуқтага мувозанат вақти О нуқта томон қайтарувчи $\bar{F}$ кучдан ташқари, модули ва йўналиши ўзгармас бўлган $\bar{P}$ куч ҳам таъсир этаётган бўлсин (5-расм).

Бундай ҳолда М нуқтанинг мувозанат ҳолати О нуқтадан $OO_1 = \lambda_{CT}$ масофада O_1 нуқтага кўчади.

бу ерда λ_{CT} , $c\lambda_{CT} = P$ формулдан аниқланади
ёки

$$\lambda_{CT} = \frac{P}{c} \quad (26)$$

λ_{CT} -статик чўзилиш (оғиш) дейилади.

Координата боши қилиб O_1 нуқтани олиб, O_1X ўқни $\bar{P}$ куч йўналган томонга қаратиб йўналтирамыз. У ҳолда $F_x = -c(x + \lambda_{CT})$ ва $P_x = P$ деб олиб нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = +F_x + P_x$$

$$\text{ёки } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c(x + \lambda_{CT}) + P, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - c\lambda_{CT} + P$$

бу ерда $-c\lambda_{CT} + P = 0$ эканлигини эътиборга олиб тенгликни ҳар иккала томонини m га бўлиб $\frac{c}{m} = k^2$ эканлигини эътиборга олсак қуйидаги тенглама келиб чиқади:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$$

бу тенглама (2) тенгламанинг ўзгинаси. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади. Нуқтага таъсир этувчи ўзгармас $\bar{P}$ куч тебраниш характерини ўзгартирмайди, фақатгина мувозанат ҳолатини $\bar{P}$ куч йўналган томонга статик чўзилиш (оғиш) λ_{CT} масофага силжитар экан.

Тебранишлар даврини λ_{CT} орқали ифодалаймиз:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{P}} = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot \lambda_{CT}}{m g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{CT}}{g}}$$

Демак

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{CT}}{g}} \quad (27)$$

Қаршилик кучи мавжуд бўлгандаги эркин тебранишлар (Сўнар тебранишлар).

М моддий нуктага мувозанат вазияти томон қайтарувчи $\bar{F}$ кучдан ташқари тезликка пропорционал бўлган муҳитнинг қаршилик кўрсатувчи кучи $\bar{R}$ ҳам таъсир этаётган бўлсин (6-расм). У ҳолда нукта ҳаракати тенгламасининг x ўқдаги проекцияси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x + R_x$$

$$\text{бу ерда } F_x = -cx; \quad R_x = -\mu \dot{x} = -\mu \frac{dx}{dt}$$

F_x ва R_x ларнинг қийматларини ўрнига қўямиз:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}$$

тенгликнинг ҳар иккала томонини m га бўламиз:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{c}{m} x - \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt}$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\frac{c}{m} = k^2; \quad \frac{\mu}{m} = 2\epsilon$$

Белгилашларни ўрнига қўйиб тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0 \quad (28)$$

(12) қаршилик кучи мавжуд бўлгандаги эркин (сўнар) тебранишларнинг дифференциал тенгламаси. Бу дифференциал тенгламанинг ечимини $x = \bar{e}^{nt}$ кўринишда қидирамиз.

X нинг қийматини (28) га қўйиб унинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$n^2 + 2\epsilon n + k^2 = 0$$

Характеристик тенгламанинг илдизи.

$$n_{1,2} = -\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - k^2}$$

кўринишда бўлади. Нуктанинг ҳаракати характеристик тенглама илдизлари қабул қиладиган қийматларга боғлиқ бўлади.

I. $k > \epsilon$ нуктани мувозанат ҳолатига қайтарувчи куч, муҳитнинг қаршилик кўрсатувчи кучидан катта бўлсин. Бу ҳолда $k^2 - \epsilon^2 = k_1^2$ деб белгилаймиз. Характеристик тенгламанинг илдизлари $n_{1,2} = -\epsilon \pm ik$, бўлиб (28) тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x = \bar{e}^{\epsilon t} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) \quad (29)$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$C_1 = a \sin \alpha, \quad C_2 = a \cos \alpha$$

Натижада (29) тенглама қуйидаги кўринишни олади.

$$x = a \bar{e}^{\epsilon t} \sin(k_1 t + \alpha)$$

Бу тенглама гармоник тебранма ҳаракат тенгламасидан $\bar{e}^{\epsilon z}$ кўпайтувчи билан фарқ қилади. Бу кўпайтувчи вақт ўтиши билан нолга интилади, яъни $t \rightarrow \infty$ да $\bar{e}^{\epsilon z} \rightarrow 0$. Шу сабабли (30) тенгламага қаршилиқ кучи тавжуд бўлгандаги эркин (сўнар) тебранишлар ҳаракат тенгламаси интеграл ифодаси дейилади.

Сўнар тебранишлар графикаси 7-расмда кўрсатилган.

Агар (30) дан вақт бўйича ҳосил олсак, нуктанинг сўнар тебранишлардаги тезлигини аниқловчи формулани ҳосил қиламиз.

$$\mathcal{G} = \frac{dx}{dt} = ak_1 \bar{e}^{\epsilon z} \cos(k_1 t + \alpha) - a\epsilon \bar{e}^{\epsilon z} \sin(k_1 t + \alpha) \quad (31)$$

a ва α ларнинг қийматлари бошланғич шартлардан топилади. Бошланғич шарт

$$t = 0 \quad \partial a \quad x = x_0, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0$$

кўринишда бўлса уларни (30) ва (31) га қўйиб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \mathcal{G}_0 = ak_1 \cos \alpha - \epsilon x_0$$

Булардан a ва α ларни аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{x_0^2 - \frac{(\mathcal{G}_0 + \epsilon x_0)^2}{k_1^2}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{x_0 \cdot k_1}{\mathcal{G}_0 + \epsilon x_0} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Сўнар тебранишлар даври

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \epsilon^2}} \quad (33)$$

формула ёрдамида аниқланади. Бир тебраниш даври ичида нукта бир марта тўлиқ тебранади. (9) ни эътиборга олинса (17) формула қуйидаги кўринишни олади.

$$T_1 = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{k^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{k^2}}} \approx T \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{k^2} \right) \quad (33^1)$$

Ҳосил қилинган формуладан кўринадики сўнар тебранишлар даври T_1 , эркин тебранишлар даври T дан катта экан, яъни $T_1 > T$;

Тебранма ҳаракат қилаётган нуктанинг ўнгга (ёки чапга) иккита кетма-кет максимал оғишлари орасига ўтган вақт ҳам тебраниш даври T_1 га тенг бўлади. Демак, нуктанинг ўнгга томон биринчи максимал оғиши x_1 вақтнинг t_1 пайтида содир бўлган бўлса, иккинчи максимал оғиши x_2 вақтнинг

$t_2 = t_1 + \Delta t$ пайтида содир бўлади. У ҳолда $k_1 T_1 = 2\pi$ эканлигини ҳамда (30) ни эътиборга олсак, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x_1 = a\bar{e}^{\epsilon t} \sin(k_1 t + \alpha);$$

$$x_2 = a\bar{e}^{\epsilon(t_1+T_1)} \sin(k_1 t + k_1 T_1 + \alpha) = x_1 \bar{e}^{\epsilon T_1},$$

Худди шунингдек нуқтанинг исталган x_{n+1} оғиши учун $x_{n+1} = x_0 \bar{e}^{\epsilon T_1}$ га тенг. Демак нуқтанинг оғишлари геометрик прогрессия қонуни бўйича камайиши бирор бир бу прогрессиянинг махражи $\bar{e}^{\epsilon T_1}$ тебранишлар декременти, уни логорифмасининг модули, яъни ϵT_1 - логарифмик декременти дейилади.

II. Энди биз $\epsilon > k$ бўлган ҳолни, яъни қаршилиқ кучи нуқтани мувозанат вазияти томон йўналган кучдан катта бўлган ҳолни кўриб чиқамиз. $\epsilon^2 - k^2 = r^2$ деб белгилаб оламиз. У ҳолда характеристик тенгламанинг илдизи $x_{1,2} = -\epsilon \pm r$ кўринишда бўлади. У ҳолда (12) дифференциал тенгламанинг ечими $\epsilon > k$ бўлган ҳолда қуйидаги кўринишда бўлади:

$$X = C_1 \lambda^{-(\epsilon+r)t} + C_2 \lambda^{-(\epsilon-r)t} \quad (34)$$

Бундай ҳолда нуқтанинг ҳаракати тебранма ҳаракатдан иборат бўлмайди, нуқта мувозанат вазиятига келади.

$t = 0$, $x = x_0 > \epsilon a$ $\mathcal{Q}_x = \mathcal{Q}_{x_0} > 0$ бўлганда ҳаракатнинг графикаси (8-расмда) кўрсатилган.

Мажбурий тебранишлар.

М моддий нуқтага мувозанат вазияти томон қайтарувчи $\bar{F}$ кучдан ташқари, вақтга боғлиқ равишда даврий равишда ўзгарувчи $\bar{Q}$ куч ҳам таъсир этаётган ҳолни кўриб ўтамыз. $\bar{Q}$ кучнинг x ўқидаги проекцияси

$$Q_x = Q \cdot \sin(Pt) \quad (35)$$

кўринишда бўлсин.

Бу кучга уйғотувчи куч дейилади. Бу ерда Q - уйғотувчи кучнинг амплитудаси, P -уйғотувчи кучнинг частотаси. Уйғотувчи куч таъсирида бўладиган тебранишларга мажбурий тебранишлар дейилади.

1. Қаршилиқ кучи бўлмагандаги мажбурий тебранишлар. М моддий нуқтага мувозанат вазияти томон қайтарувчи $\bar{F}$ кучдан ташқари уйғотувчи $\bar{Q}$ куч ҳам таъсир этаётган бўлсин. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -CX + Q_0 \sin(\rho t)$$

тенгликни ҳар иккала томонини m га бўлиб $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{Q_0}{m} = h$ эканлигини эътиборга олсак юқоридаги тенглама қуйидаги кўринишни олади.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = h \sin(\rho t) \quad (36)$$

(36) тенгламага қаршилик кучи бўлмагандаги мажбурий тебранишларнинг дифференциал тенгламаси дейилади. Бу тенгламанинг умумий ечими дифференциал тенгламалар назариясидан $x = x_1 + x_2$ (37) кўринишда бўлади.

Бу ерда x_1 - (36) тенгламанинг ўнг томонисиз умумий ечими яъни $x_1 = a \sin(\omega t)$ (37¹) x_2 - (36) тенгламанинг қандайдир хусусий ечими. $\rho \neq k$ деб олиб x_2 нинг ечимини

$$x_2 = \beta \sin(\rho t) \quad (37)$$

кўринишда қидирамиз.

Бу ерда B – ўзгармас катталиқ бўлиб, у шундай қийматга эга бўлиши керакки, қийматни (36) га қўйганимизда тенглама айниятга айлансин. Бунинг учун (37) дан вақт бўйича икки марта ҳосила оламиз.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\beta \rho^2 \sin(\rho t) \quad (38)$$

(37) ва (38) ларни (36) га қўямиз.

$$\beta \rho^2 \sin(\rho t) + k^2 \beta \sin(\rho t) = h \sin(\rho t)$$

ёки

$$(k^2 - \rho^2) \beta \sin(\rho t) = h \sin(\rho t)$$

Математика курсидан маълумки бир хил тригонометрик функциялар олдидаги коэффициентлар ўзаро тенглигидан

$$\beta = \frac{h}{k^2 - \rho^2} \quad (39)$$

эканлигини аниқлаймиз.

Шундай қилиб хусусий ечим

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - \rho^2} \sin(\rho t) \quad (40)$$

ни ҳосил қиламиз.

(37¹) ва (40) ларни (31) га қўйиб (36) дифференциал тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - \rho^2} \sin(\rho t) \quad (41)$$

бу ердаги a ва α - интеграл доимийлари бўлиб, улар бошланғич шартлардан фойдаланиб топилади. (41) дан кўринадикки нуктага мувозанат вазияти томон қайтарувчи $\bar{F}$ ва уйғотувчи $\bar{Q}$ кучлар таъсир этса мазкур нукта k частота билан содир бўладиган эркин тебранма ҳаракат ҳамда уйғотувчи куч частотаси ρ билан содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракатлардан иборат тебранма ҳаракат қилар экан.

S_{2y} мажбурий тебранишлар амплитудаси

$$\beta = \frac{h}{|k^2 - \rho^2|} \quad (42)$$

Мажбурий тебранишлар амплитудаси частоталар нисбати $\frac{\rho}{k}$ га боғлиқлигини аниқлаймиз.

Бунинг учун соф мажбурий тебранишлар амплитудасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\beta = \frac{h}{|k^2 - \rho^2|} = \frac{h}{k^2 \left| 1 - \frac{\rho^2}{k^2} \right|} = \frac{\lambda_0}{\left| 1 - \frac{\rho^2}{k^2} \right|} \quad (43)$$

бу ерда $\lambda_0 = \frac{h}{k^2} = \frac{Q_0}{C}$ – нуктанинг Q_0 куч таъсиридаги статик оғиши.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$\eta = \frac{\beta}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 \left| 1 - \frac{\rho^2}{k^2} \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\rho^2}{k^2} \right|}; \quad Z = \frac{\rho}{k} \quad (44^1)$$

η – динамик коэффициент; бу коэффициент мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси статик оғишдан неча марта катта эканлигини кўрсатади.

Графикадан (9-расм) кўринадики $\frac{\rho}{k} \rightarrow 1$ да динамик коэффициент жуда катта қийматга эришади.

2. Қаршилик кучи мавжуд бўлгандаги мажбурий тебранишлар. М моддий нуктанинг мувозанат вазияти томон қайтарувчи $\bar{F}$, муҳитнинг қаршилик кўрсатувчи $\bar{R}$ ва уйғотувчи Q кучлар таъсиридаги ҳаракати кўриб чиқамиз. Бундай ҳолда нукта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -CX - \mu \frac{dx}{dt} + Q_0 \sin \rho t \quad (45)$$

тенгликнинг ҳар иккала томонини m га бўлиб ва қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$\frac{C}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2\epsilon, \quad \frac{Q_0}{m} = h$$

Белгилашларни эътиборга олсак нуктанинг ҳаракат тенгламаси

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dx}{dt} + k^2 x = h \sin(\rho t) \quad (46)$$

(46) тенглама қаршилик кучи мавжуд бўлгандаги мажбурий тебранишларнинг дифференциал тенгламаси. Унинг ечимини

$$x = x_1 + x_2 \quad (47)$$

кўринишда қидирамиз.

Бу ерда x_1 – (46) дифференциал тенгламанинг ўнг томонисиз умумий ечими, у $R > 0$ бўлганда (30) кўринишда бўлади.

x_2 – (46) дифференциал тенгламанинг қандайдир хусусий ечими. Хусусий ечимни қуйидаги кўринишда қидирамиз.

$$X_2 = B \sin(pt - \beta). \quad (48)$$

бу ерда B ва β -ўзгармас сонлар бўлиб, уларни шундай танлаш керакки (46) тенглама айниятга айлансин. (48) дан вақт бўйича икки марта ҳосила оламиз:

$$\frac{dx}{dt} = Bp \cos(pt - \beta), \quad \frac{d^1x}{dt^2} = -Bp^2 \sin(pt - \beta). \quad (49)$$

(48) ва (49) ларни (46) га қўйиб қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$-Bp^2 \sin(pt - \beta) + 2b Bp \cos(pt - \beta) + k^2 B \sin(pt - \beta) = h \sin(pt).$$

Тенгламани қуйидаги кўринишда ўзгартирамиз.

$$(k^2 - p^2)B \sin \chi + 2b Bp \cos \chi = h(\cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma).$$

$$\text{бу ерда: } \rho t - \beta = \chi, \quad \rho t = \chi + \beta$$

Тенглик вақтнинг исталган пайти учун ўринли бўлиши учун $\sin \chi$ ва $\cos \chi$ лар олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг бўлиши керак:

$$B(k^2 - \rho^2) = h \cos \beta, \quad 2b \beta \rho = p \sin \beta \quad (50)$$

B ва β катталикларнинг қийматлари (50) дан топилади.

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \rho^2) + 4b^2 \rho^2}}, \quad \tan \beta = \frac{2b \rho}{k^2 - \rho^2} \quad (51)$$

Топилган x_1 ва x_2 ларнинг қийматларини (47) га қўямиз:

$$x = a e^{\rho t} \sin(k, t + \alpha) + \beta \sin(\rho t - \beta) \quad (52)$$

бу ерда a ва α - ўзгармас сонлар бўлиб уларнинг қийматлари бошланғич шартлардан топилади, B ва β ларнинг қийматлари (51) формуладан топилади, улар бошланғич шартларга боғлиқ эмас.

Кўриб чиқиладиган тебраниш мураккаб тебранишдан иборат бўлиб, биринчи қўшилувчи ҳад бошланғич шартларга боғлиқ бўлган сшнувчи тебраниш ва иккинчи қўшилувчи ҳад соф мажбурий тебранишлардан иборат (52) тенгликдаги биринчи қўшилувчи ҳадда $e^{\rho t}$ кўпайтувчи катнашаётганлиги бундай тебраниш тезда сўнади ва нуқта

$$x = B \sin(\rho t - \beta) \quad (53)$$

қонуният бўйича тебранма ҳаракат қилади. Бундай тебранишларга мажбурий тебранишлар дейилади. Мажбурий тебранишларнинг фазаси уйғотувчи куч фазасидан фаза силжиши деб аталувчи β катталиққа орқада қолади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$Z = \frac{\rho}{k}, \quad h = \frac{b}{k}, \quad \lambda_0 = \frac{h}{k^2} = \frac{Q_0}{C} \quad (54)$$

бу ерда: Z – частоталар нисбати; h – қаршилиқни характерловчи катталиқ; λ_0 - нуқтанинг Q_0 куч таъсирида статик силжишини характерловчи катталиқ (51) тенгламанинг суръат ва махражини k^2 га бўлсак қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$B = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(1 - Z^2)^2 + 4h^2 Z^2}}; \quad \tan \beta = \frac{2hZ}{1 - Z^2} \quad (55)$$

(55) тенгламалардан B ва β иккита ўлчамсиз Z ва h катталикларга боғлиқ бўлар экан. h нинг турли қийматларида бу боғланиш графикаси 10-

расмда кўрсатилган. Биринчи графикда (10-расм) динамик коэффициент $\eta = \frac{B}{\lambda_0}$ нинг (амплитуда B нинг λ_0 га нисбатан неча марта катта эканлигини кўрсатувчи кўрсаткич) частоталар нисбати Z га боғлиқлиги кўрсатилган, иккинчисидо эса (11-расм) фаза силжиши β нинг Z га боғлиқлик графикаси кўрсатилган.

Резонанс. Агар $\rho = k$ шарт бажарилса, яъни уйғотувчи куч частотаси хусусий тебранишлар частотасига тенг бўлса резонанс ҳодисаси рўй беради. Бу ҳодисани (41), (43) формулалар ёрдамида изоҳлаб бўлмайди. Лекин шу нарсани қайд қилиш мумкинки резонанс ҳодисаси пайтида мажбурий тебранишлар амплитудаси вақтга боғлиқ равишда кескин ортиб кетади (12-расм).

Агар $Z=1$ деб олинса, резонанс пайтида мажбурий тебранишлар амплитудаси ва фаза силжиши (55) формуладан топилади.

$$B_p = \frac{\lambda_0}{2h}, \quad \beta_p = \frac{\bar{N}}{2}. \quad (56)$$

Бундан кўринадики h нинг жуда кичик қийматларида ҳам B_p жуда катта қийматларга эга бўлиши мумкин.

Қаршилик кучи бўлмаганда, яъни $b=h=0$ мажбурий тебранишлар графикаси 12-расмдагидек кўринишда бўлади. Шундай қилиб, қаршилик бўлмаганда резонанс ҳодисаси райтида системанинг тебраниши узок давом этади. Тебранишлар оғиши эса вақтга боғлиқ равишда узлуксиз ортиб боради.

Мажбурий тебранишлар хусусан резонанс физика ва техниканинг жуда кўп соҳаларида катта рол ўйнайди. Масалан, машина ва двигателлар ишлаётганида даврий равишда ўзгарувчи кучлар пайдо бўлиши мумкин. Бу кучлар таъсирида машина қисмлари ёки фундамент мажбурий тебраниши мумкин.

Бурчак тезлик W ортиши билан машина қисми (ёки фундамент) нинг мажбурий тебраниш амплитудаси B ортиб боради. $W=k$ бўлганда, мажбурий тебранишлар амплитудаси максимал қийматга етиб резонанс рўй беради. W нинг қийматини бундай кейинга ортиши. B нинг қийматини камайишига олиб келади, $W \gg k$ бўлганда B нинг қиймати нолга тенг. Жуда кўп

инженерлик иншоотларида резонанс ҳодисаси рўй бермаслиги учун p ва k частоталарнинг қийматлари танлаб олинади.

Резонанс ҳодисасидан фойдаланилган ҳолда тебранувчи жисмларнинг силжишини ўлчовчи (фундаментив машина қисмлари ва б.қ.) асбоб-виброграф, ер пўслоғи тебранишини ёзиб борувчи сейсмографлар ясалган. Шунингдек апустика ва радиотехникада ҳам резонанс ҳодиса алоҳида аҳамиятга эга.

Боғланишдаги моддий нуктанинг ҳаракати.

Ҳаракати чекланган нуктага боғланишдаги моддий нукта дейилади.

Ҳаракатни чекловчи тўсикқа боғланиш дейилади. Боғланишдаги моддий нукта боғланиш кучлари таъсирида сирт ёки эгри чизик бўйлаб ҳаракатланиши мумкин. Биз кейинги иккинчи ҳолни кўриб чиқамиз.

Нуктанинг берилган қўзғалмас эгри чизик бўйлаб ҳаракати.

13-расм

Нукта қўзғалмас эгри чизик бўйлаб ҳаракатланганда унинг ҳаракатини табиий координата ўқларига нисбатан ўрганиш қулай бўлади. М нуктанинг актив кучлар $\sum \bar{F}_k^f$ ва боғланиш реакция кучи $\bar{N}$ таъсирида берилган силлик эгри чизик бўйлаб ҳаракатлансин. Эгри чизик устидан ихтиёрий O' нукта танлаб уни санок боши деб атаймиз ва М нуктанинг санок бошига нисбатан ҳолати эгри чизикли координата $S=O'M$ орқали аниқланади. М нукта орқали $Mg \cdot n_b$ табиий координата ўқларини ўтказамиз. Mg ўқ нуктанинг ҳаракати йўналиши бўйича траекториясига уринма бўйлаб, бош нормал Mn ўқ Mg ўқига перпендикуляр траекториянинг боғлиқ томонига ва нормал ўқ Mv ларни ўтказамиз. Нуктанинг ҳаракати учун (10) формуладан фойдаланамиз. Эгри чизик синик ва $\bar{N}$ реакция кучи эгри чизикқа перпендикуляр йўналгани учун $N_{\approx} = 0$. Натижада нуктанинг берилган эгри чизик бўйлаб ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum F_{k \approx}^a, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}^a + W_n, \quad O = \sum F_{nb}^a + N_b. \quad (57)$$

(56) нинг биринчи тенгламасини интеграллаганда аввал М нуктанинг тезлиги $V = f'(t)$ ни кейин эса берилган траекториядаги ҳаракат қонуни $S=f(t)$ ни аниқланади. Тезлик $V = f'(t)$ (57) нинг иккинчисига қўйиб нормал реакция кучи N_n ни аниқлаш мумкин.

Агар М нукта силлик бўлмаган эгри чизик бўйлаб ҳаракатланса, (57) нинг биринчисида динамик ишқаланиш кучи ҳам қатнашади.

МАТЕМАТИК МАЯТНИК.

Чўзилмас, вазнсиз илга осилган нуқта вертикал текисликда оғирлик кучи таъсирида тебранадиغان моддий нуқтага математик маятник дейилади.

Массаси m ва узунлиги $OM=L$ бўлган математик маятникнинг ҳаракатини қараб чиқамиз. M нуқтага оғирлик кучи $\vec{P}$ ва ипнинг реакция кучи $\vec{N}$ таъсир этади. M нуқтанинг ҳаракат тенгламасини аниқлаймиз. (57) нинг биринчи ва иккинчи тенгламаларини

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} \sum F_{k \approx}^a = P_{\approx} = -mg \sin \varphi$$

$$\frac{mv^2}{S^o} = P_n + N_n = -mg \cos \varphi + N.$$

14-расм.

Ей координатаси S нинг санок боши қилиб, O нуқтани оламиз.

У ҳолда $S = OM = L\varphi$

У ҳолда

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Ўрнига қўямиз.

$$ml \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi \quad \text{ёки} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = 0 \quad (58)$$

Жуда кичик бурчакларда $\sin \varphi \approx \varphi$ деб аташ мумкин. У ҳолда математик маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишни олади

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (59)$$

Бу дифференциал тенглама гармоник тебранма ҳаракат тенгламасидир. Қуйидаги белгиларни киритамиз.

$$\frac{g}{l} = k^2 \quad \text{ёки} \quad k = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (60)$$

k нинг қийматини (59) га қўйсак тенглама қуйидаги кўринишни олади.

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k^2 \varphi = 0$$

Бу тенгламани ечим

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (61)$$

$$\text{ёки} \quad \varphi = \alpha \sin(kt + \beta) \quad (62)$$

Бу ерда α - маятникнинг жуда кичик тебранишларида φ бурчакнинг амплитудаси

Тебранишлар амплитудаси

$$T = \frac{2\pi}{k} \quad \text{ёки} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (63)$$

Ипнинг реакция кучи N иккинчи тенгламадан топилади, $\rho = l$ бўлгани учун

$$N = \frac{m\mathcal{G}^2}{l} + mg \cos \varphi \quad (64)$$

N нинг қийматини топиш учун M нуқтанинг тезлиги $\mathcal{G}$ нинг қиймати аниқ бўлиши керак.

Бунинг учун (57) ни қуйидаги кўринишда ўзгартирамиз.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

(58) тенглама қуйидаги кўринишни олади.

$$\omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

ёки

$$\omega \cdot d\omega = -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$$

интеграллаймиз:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \varphi + C \quad (65)$$

Интеграл доимийси C нинг қиймати бошланғич шартдан топилади, бошланғич шарт $t = 0$, $\omega = \omega_0$, $\varphi = \varphi_0$ буларни (65) га қўямиз:

$$\frac{\omega_0^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \varphi_0 + C$$

бундан

$$C = \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \varphi_0$$

C нинг қийматини (65) га қўямиз.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2g}{l} \cdot (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \quad (66)$$

Тенгламанинг ҳар иккала томонига l^2 ни кўпайтирамиз.

$$\mathcal{G}^2 = \mathcal{G}_0^2 + 2gl \cdot (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \quad (67)$$

(67) ни (64) га қўйиб ипнинг реакция кучи N нинг қийматини аниқлаймиз.

$$N = P \left(\frac{\mathcal{G}_0^2}{gl} + 3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0 \right) \quad (68)$$

(68) дан кўриндики ип реакция кучининг модули маятникнинг ҳар қандай ҳолатида ҳам бошланғич тезлик $\mathcal{J}_0$ ва маятникнинг бошланғич оғиш бурчаги φ_0 га боғлиқ экан.

МОДДИЙ НУҚТАНИНГ НИСБИЙ ҲАРАКАТИ.

Моддий нукта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламалари. Кўчирма ва Кориолис инерция кучлари.

Динамиканинг иккинчи қонуни ва ундан келиб чиққан тенглама ва теоремалар нуктанинг фақатгина абсолют ҳаракати учун аниқроғи инерциал (“қўзғалмас”) санок системасига нисбатан тўғри.

Энди биз нуктанинг ноинерциал чамбарчас боғлиқ санок системасига нисбатан ҳаракатини кўриб чиқамиз. Нуктанинг инерциал бўлмаган бундай системага нисбатан ҳаракати унинг нисбий ҳаракатини ифодалайди.

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ кучлар системаси таъсирида M моддий нукта $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатини кўриб чиқамиз. Ўз навбатида бу система M моддий нукта билан бирга инерциал (“қўзғалмас”) санок системасига нисбатан ҳаракатлансин.

Нуктанинг нисбий тезланиши билан унга таъсир этувчи кучлар орасидаги боғланишни аниқлаймиз.

Абсолют ҳаракат учун динамиканинг иккинчи қонуни қуйидаги кўринишда бўлади.

$$m\bar{a}_a = \sum \bar{F}_k \quad (69)$$

“Кинематика” бўлимидан бизга маълумки нуктанинг абсолют тезланиши

$$\bar{a}_a = \bar{a}_n + \bar{a}_k + \bar{a}_{kor}$$

кўринишда ифодаланар эди.

Бу ерда $\bar{a}_n, \bar{a}_k, \bar{a}_{kor}$ – нуктанинг нисбий ва Кориолис тезланишлари. Абсолют тезланишнинг бу қийматини (69) га қўйиб, $\bar{a}_n = \bar{a}$ деб белгиласак қуйидаги тенглама ҳосил бўлади.

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + (-m\bar{a}_k) + (-m\bar{a}_{kor}).$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\bar{F}_k^u = -m\bar{a}_k, \quad \bar{F}_{kor}^u = -m\bar{a}_{kor}$$

$\bar{F}_k^u$ ва $\bar{F}_{kor}^u$ – кучларни мос равишда кўчирма ва Кориолис инерция кучлари дейилади. У ҳолда юқоридаги тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_k^u + \bar{F}_{kor}^u \quad (70)$$

(70) тенглама нуктанинг нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (69) ва (71) солиштириб қуйидаги хулосага келамиз:

нуктанинг нисбий ҳаракат тенгламасини тузиш учун нуктага қўйилган актив кучлар қаторига кўчирма инерция кучлар $\bar{F}_k^u$ ва Кориолис инерция кучлари $\bar{F}_{кор}^u$ ни қўшиш керак.

Нуктанинг нисбий ҳаракат тенгламасидан қуйидаги хулосалар келиб чиқади.

1. Агар кўзғалувчан координаталар системаси илгариланма ҳаракатланаётган бўлса у ҳолда $\bar{F}_{кор}^u = 0$ бўлади, $\bar{W} = 0$ бўлгани учун (W-кўзғалувчан координата ўқларининг бурчак тезлиги) нисбий ҳаракат тенгламаси қуйидаги тенгламани олади:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_k^u$$

2. Агар кўзғалувчан координата ўқлари илгариланма, тўғри чизиқли текис ҳаракатланса, $\bar{F}_k^u = \bar{F}_{кор}^u = 0$ бўлади, яъни:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$$

Санок системаси инерциал санок системаси дан иборат.

Юқоридагилардан қуйидаги хулоса келиб чиқади. Бу санок система тинч ҳолатда-ми, ёки бўлмаса илгариланма тўғри чизиқли текис ҳаракатланаётганлигини аниқлаб бўлмайди. Бу Г.Галилей томонидан кашф этилган классик механиканинг нисбийлик принциpidир.

3. Агар нукта кўзғалувчан санок системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлади, $\bar{a} = 0$ ва $\bar{v}_A = \bar{v} = 0$ бўлади. Демак, $\bar{F}_{кор}^u = 0$, чунки Кориолис тезланиши $\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega} + v_n)$. У ҳолда (70) тенглама қуйидаги кўринишни олади.

$$\sum \bar{F}_k + \bar{F}_k^u = 0 \quad (71)$$

(71) тенглама нуктанинг нисбий мувозанат тенгламаси бўлиб ҳисобланади. Нуктанинг нисбий мувозанат тенгламасини тузиш учун, нуктанинг таъсир этувчи барча кучлар қаторига инерция кучини қўшиб олиш лозим.

ЕР АЙЛАНИШИНИНГ ЖИСМ МУВОЗАНАТИ ВА ҲАРАКАТИГА ТАЪСИРИ.

Жуда кўп механика масалаларини ечишда Ер билан боғлиқ бўлган санок система инерциал санок система деб қаралади. Ернинг юлдузларга нисбатан суткалик айланиши ҳисобга олинмайди. Ер ўз ўқи атрофида суткада бир марта

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 0,000073 \text{ } \bar{c}^{-1}$$

бурчак тезлик билан айланади.

Бундай секин айланиш Ер сиртига яқин бўлган жисмларнинг мувозанати ва ҳаракати таъсир қиладими?

1. Оғирлик кучи.

Ер сиртига яқин бўлган моддий нуктага $\bar{F}_n$ ва $\bar{P}$ ташкил этувчиларга F_r тортишиш кучи таъсир этади (61-расм). Ер ўқи томон йўналган $\bar{F}_n$ куч, моддий нуктага $\bar{a}_n$ нормал (марказга интилма) тезланиш беради.

Ернинг радиуси R , моддий нуктанинг массаси m бўлса $\bar{F}_n$ кучнинг модули қуйидаги формула ёрдамида топилади.

$$\bar{F}_n = m\bar{a}_n = m\omega^2 r$$

Тортишиш кучининг иккинчи ташкил этувчиси $\bar{P}$ куч – моддий нуктанинг оғирлик кучи дейилади.

16-расмдан қуйидагини ёзамиз:

$$\bar{P} = \bar{F}_r - \bar{F}_n$$

Шундай қилиб, Ер сиртига яқин бўлган нуктанинг оғирлик кучи Ернинг тортишиш кучидан марказга интилма кучни айирмасига тенг.

P кучнинг йўналиши Ер сиртининг шу нуктасига ўтказилган нормалнинг йўналишини ифодалайди (юк осилган ипнинг йўналиши шундай бўлади; ипнинг таранглик кучи $\bar{T}$, $\bar{P}$ га тенг бўлади). $\bar{P}$ кучга перпендикуляр йўналган текислик горизонтал текисликдан иборат бўлади. F_n ташкил этувчи $\bar{F}_n = m\omega^2 r$ га тенг эди. ω^2 нинг қиймати жуда кичик бўлгани учун F_n нинг қийматини тақрибан 0 га тенг деб олиш мумкин. У ҳолда, жисмнинг оғирлик кучи $\bar{P}$ ҳам сон жиҳатдан, ҳам йўналиш бўйича тортишиш кучи $\bar{F}_T$ дан жуда кам фарқ қилади. P кучга жисмнинг оғирлиги дейилади.

2. Нисбий тинчлик нисбий ҳаракат.

Агар нуктага таъсир этувчи кучлардан $\bar{F}_T$ тортишиш кучини ажратиб олсак, у ҳолда айланма ҳаракат қилаётган Ер сиртидаги нуктанинг нисбий мувозанат тенгламаси (71) га кўра қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\sum \bar{F}_k + \bar{F}_T + \bar{F}_k^4 = 0$$

бунда $\bar{a}_k = \bar{a}_n$ ва $\bar{F}_k^4 = -m\bar{a}_k = -m\bar{a}_n = -\bar{F}_n$.

У ҳолда $\bar{F}_T + \bar{F}_k^4 = \bar{F}_T - \bar{F}_n = \bar{P}$ бўлади. Буни эътиборга олсак тенглама қуйидаги кўринишни олади.

$$\sum \bar{F}_k + \bar{P} = 0$$

Бу тенглама Ерни кўзгалмас деб олинганда жисмларнинг мувозанат тенгламасининг ўзгинаси.

Демак, жисмларнинг мувозанат тенгламаларини тузишда Ер сиртидаги айланишнинг кўшимча тузатишлар киритишга зарурият қолмайди. (Чунки, тенгламага $\bar{P}$ катталиқда Ер айланиши эътиборга олинган).

Энди нуктанинг нисбий ҳаракат тенгламаси (70) дан ҳам $\bar{F}_T$ тортишиш кучини ажратиб оламиз.

У ҳолда

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_t + \bar{F}_k^u + \bar{F}_{kor}^u$$

тенглама ҳосил бўлади. Бизга маълумки

$$\bar{F}_t + \bar{F}_k^u = \bar{F}_t - \bar{F}_n = \bar{P}$$

буни эътиборга олсак тенглама куйидаги кўринишни олади.

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_n + \bar{P} + \bar{F}_{kor}^u$$

Бундан кўринадики нуқтанинг ҳаракат тенгламасини тузишда Ер билан боғлиқ бўлган ўқларни кўзғалмас деб олиб, Кориолис инерция кучини эътиборга олиш лозим.

Кориолис инерция кучининг модули

$$F_{kor}^u = 2m \omega \sigma \sin \alpha$$

га тенг.

Бу ерда α - V нисбий тезлик вектори билан Ернинг айланиш ўқи орасидаги бурчак.

Ернинг бурчак тезлиги W жуда кичик, V тезлик унга катта бўлмаганда оғирлик кучига нисбатан Кориолис инерция кучи F_{kor}^u ни эътиборга олмаса ҳам бўлади. Масалан, артиллерия снарядининг тезлиги $v=70\text{m/s}$ ва $\alpha = 90^\circ$ бўлганда F_{kor}^u Кориолис инерция кучи оғирлик кучи P нинг 1% ни ташкил этади. Шунга кўра инженерлик ҳисоблашларда жисмнинг ҳаракатини ўрганишда Ер билан боғлиқ бўлган санок системасини инерциал (кўзғалмас) санок системаси деб қараш мумкин.

Жуда катта тезликларда (учиб кетаётган баллистик ракетанинг тезлиги), ёки ҳаракат жуда узоқ давом этганда (дарё сувининг ҳаракати) Ер нинг айланиши эътиборга олинади.

Ер сирти бўйлаб ҳаракатланувчи жисмга Ер айланишининг таъсири

Ер сиртида меридиан чизиғи бўйлаб шимолий ярим шарда шимолдан жанубга ҳаракатланаётган нуқтага таъсир этувчи Кориолис тезланиши $\bar{a}_{kor}$ параллелга нуқтага ўтказилган уринма бўйлаб шарққа йўналган бўлади (15-расм). Кориолис инерция кучи эса, унга тескари, яъни ғарбга йўналади. Шу сабабли меридиан бўйлаб шимолдан жанубга оқаётган дарё, шимолий ярим шарда ўнг қирғоқни жанубий ярим шарда эса, чап қирғоқни Кориолис инерция кучи таъсирида ювиб кетади.

Эркин тушаётган жисмнинг вертикалдан оғиши.

Ер сиртига унга катта бўлмаган баландликдан оғирлик кучи таъсирида эркин тушаётган нуқтага таъсир этувчи F_{kor}^u Кориолис инерция кучининг йўналишини билиш учун, нуқтанинг $\bar{\sigma}$ нисбий тезлигини йўналишини билиш керак. F_{kor}^u инерция кучи $\bar{P}$ оғирлик кучига нисбатан жуда кичик бўлгани учун биринчи яқинлашишда V тезлик вектори вертикал яъни МО чизиқ бўйлаб йўналган деб олиш мумкин (16-расм).

У ҳолда $\bar{a}_{kor}$ Кориолис тезланиши ғарбга, F_{kor}^u Кориолис инерция кучи эса шарққа томон йўналган бўлади. Шундай қилиб биринчи яқинлашишда эркин тушаётган нукта (жисм) Ер айланишининг таъсирида вертикалдан шарққа томон оғади. Бу оғишлар жуда кичик қийматларни ташкил этади. Фақат жисм жуда катта меридиан танланганда ёки айтилганда бу оғишлар сезиларли даражада бўлади.

XXI боб

СИСТЕМА ДИНАМИКАСИ. ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ.

Механик система. Ташқи ва ички кучлар.

Механик система (ёки қисқача система) деб шундай моддий нукталар тўпламига айтиладики, унинг ҳар бир нуктасининг ҳаракати ва ҳолати қолган бошқа нукталарнинг ҳаракати ва ҳолатига боғлиқ бўлади. Механик системага классик мисол бўлиб қуёш системаси ҳисобланади, қайсики системани ташкил этувчи жисмлар бир-бири билан ўзаро тортишиш кучи билан боғланган. Механик системага бошқа мисол қилиб исталган машина ёки механизмни олиш мумкин, чунки унинг ҳамма қисмлари бир-бирлари билан геометрик турли боғланишлар: масалан, шарнирлар, стерженлар, арқонлар, тасмалар ёки тишли ғилдирақлар воситасида боғланган бўлади. Бу ҳолда система жисмларига боғланишлар орқали бериладиган таранглик ёки ўзаро босим кучлари таъсир этади. Бир-бири билан ҳеч қандай ўзаро таъсир кучига эга бўлмаган жисмлар тўплами механик система бўла олмайди, масалан ҳавода учиб кетаётган қушлар галаси.

Механик системага таъсир этувчи $\bar{F}_k^a$ актив ва $\bar{N}_k$ боғланиш реакция кучларини ташқи ва ички кучларга ажратиш мумкин. Система нуктасига бу системага кирмайдиган бошқа нукта (ёки жисм) ларнинг кўрсатадиган таъсир кучлари ташқи кучлар дейилади ва $\bar{F}_k^e$ билан белгиланади. Системани ташкил этувчи нукта (ёки жисм) ларнинг ўзаро таъсир кучлари ички кучлар дейилади ва $\bar{F}_k^i$ билан белгиланади.

(λ ва i индекслар латинча *exterior* – ташқи ва *interior* – ички сўзларнинг бош ҳарфлари). Бундай ажратиш шартли бўлиб, қандай механик система қаралаётганлигига боғлиқ бўлади. Масалан, агар бутун Қуёш системаси қаралаётган бўлса, Ер билан Қуёш орасида тортишиш кучи ички кучдан иборат бўлади; агар Ер ва Ой ҳаракати қаралаётган бўлса, бу система учун аввалги куч ташқи кучдан иборат бўлади.

Ички кучлар қуйидаги хоссаларга эга:

1. Система барча ички кучларнинг геометрик йиғиндиси (бош вектори) нолга тенг:

Динамиканинг учинчи қонунига кўра системанинг ҳар қандай икки нуктаси миқдор жиҳатдан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган $\bar{F}_{12}^i$ ва $\bar{F}_{21}^i$ кучлар билан бир-бирига таъсир этади. Система n та нукталардан ташкил топган бўлса улар орасидаги ўзаро таъсир кучлари жуфт – жуфт равишда миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қаршидир. Система нукталари орасидаги ўзаро таъсир кучларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг.

$$\sum \bar{F}_k^i = 0. \quad (1)$$

2. Система барча ички кучларининг исталган бирор нуқта (ёки ўқ) га нисбатан моментларининг йиғиндиси (бош моменти) нолга тенг; Ҳақиқатан ҳам системани A_1 ва A_2 нуқталари бир-бири билан $\bar{F}_{12}^i$ ва $\bar{F}_{21}^i$ ички кучлар билан ўзаро таъсирлашади. Ихтиёрий O нуқта олиб шу нуқтага нисбатан кучларнинг моментларини аниқлаб қўшамиз:

$$m_0(\bar{F}_{12}^i) + m_0(\bar{F}_{21}^i) = 0$$

ёки

$$-\bar{F}_{12}^i \cdot h + \bar{F}_{21}^i \cdot h = 0$$

У ҳолда система учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади.

$$\sum m_0(\bar{F}_k^i) = 0 \quad (2)$$

Келтирилган хоссалардан ички кучлар ўзаро мувозанатлашган бўлади ва система ҳаракатига ҳеч қандай таъсири бўлмайди деган хулоса чиқмаслиги керак. Ички кучлар механик системанинг турли нуқта (ёки жисм) ларига қўйилган бўлади, бу нуқта (ёки жисм) лар ички кучлар таъсирида бир-бирларига нисбатан ҳаракатлана олиши мумкин.

СИСТЕМА МАССАСИ. МАССА МАРКАЗИ.

Системанинг ҳаракати унга таъсир этувчи кучлардан ташқари, ҳаракатланаётган система (ёки жисм) нинг массалар йиғиндисига ва массаларнинг тақсимланишига ҳам боғлиқ бўлади. Система массаси деб системани ташкил этган барча нуқта (ёки жисм) лар массаларининг арифметик йиғиндисига айтилади.

$$M = \sum m_k \quad (3)$$

Механик система n та моддий нуқтадан ташкил топган бўлиб, уларнинг массалари тегишлича $m_1, m_2, \dots, m_n$ га тенг бўлсин. Система нуқталарининг қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан радиус – векторларини $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$, координаталарини $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ билан белгилаймиз.

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_k \cdot \bar{r}_k}{M} \quad (4)$$

(4) формулага система масса маркази радиус – векторини аниқлаш формуласи дейилади. (4) ни Декарт координата ўқларидаги проекцияси система масалалар маркази координаталарининг аниқлаш формуласини ифодалайди.

$$X_c = \frac{1}{M} \sum m_k \cdot x_k, \quad Y_c = \frac{1}{M} \sum m_k y_k, \quad Z_c = \frac{1}{M} \sum m_k z_k \quad (5)$$

Система массалар маркази бир жинсли оғирлик майдонади ($g = \text{const}$) қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази билан устма-уст тушсада улар бир-бирларидан фарқ қилади. Жисмнинг оғирлик маркази тушунчасидан исталган куч майдонида ўз мазмунини сақлайди. Шу билан биргаликда

массалар тақсимоти нафақат қаттиқ жисм учун, исталган механик системаларнинг характеристикаси бўлиб ҳисобланади.

Жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти. Инерция радиуси.

Система массалар марказининг ҳолати система массаларнинг тақсимланишини тўлиқ характерлай олмайди. Масалан, стерженга маҳкамланган бир хил А ва В шарлар h масофада вертикал О z ўқи атрофида айланма ҳаракат қилаётган бўлсин.

18-расм

Агар шарларни ўқидан бир хил масофада узоқлаштириб борсак, А ва В шарлардан ташкил топган системанинг массалар маркази ўзгармайди, лекин системанинг массалар тақсимланиши ўзгаради (бошқа шарлар ўзгармаганда айланиш секинлашади).

Шу сабабли механикада система массаларининг тақсимланишини характерлаш учун системанинг инерция моменти тушунчаси киритилади.

Жисм (система) нинг берилган О z ўққа нисбатан инерция моменти деб, жисм (система) барча нуқтада массаларини улардан ўққача бўлган масофалар квадратларига бўлган кўпайтмага тенг скаляр катталиққа айтилади:

$$J_z = \sum m_k \cdot h_k^2 \quad (6)$$

Бу ерда h_k – берилган ўқдан m_k массали нуқтагача бўлган масофа. Шунингдек жисм (система) нинг нуқта (кутб) га ва текисликка нисбатан инерция моментлари тушунчалари ҳам мавжуд.

Жисм (система) нинг илгариланма ҳаракатида инертлигини характерловчи катталиқ учун массаси бўлиб ҳисобланса, айланма ҳаракатда унинг инертлигини ўққа нисбатан инерция моменти бўлиб ҳисобланади. Инерция моментининг ўлчами.

$$[J] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Ўққа нисбатан инерция моментини ўқдан нуқтагача бўлган масофани нуқтанинг X_k , Y_k , Z_k , координаталари орқали ифодалаб ҳисоблаш мумкин. Ўқларга нисбатан инерция моментларини тегишлича J_x , J_y , J_z деб белгиласак у ҳолда қуйидагини ҳосил қилади.

$$\begin{aligned} J_x &= \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) \\ J_y &= \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) \\ J_z &= \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{aligned} \quad (7)$$

Кўпгина ҳисоблашларда жисмнинг радиуси тушунчасидан фойдаланилади. Жисмнинг О z ўққа нисбатан инерция радиуси деб R_4 чизиқли катталиққа айтилади ва қуйидаги формула орқали аниқланади.

$$Z_z = M\rho_u^2 \quad (8)$$

Бу ерда М- жисм (система) массаси таъсиридан кўринадики, инерция радиуси жисмнинг мўлжалланган нуқтасидан Z ўқкача бўлган шундай масофа, мазкур нуқтанинг Z ўққа нисбатан инерция моменти шу ўққа нисбатан инерция моменти маълум бўлса, инерция радиуси

$$\rho_4 = \sqrt{\frac{J_z}{M}} \quad (9)$$

(6) ва (7) формулалар қаттиқ жисмлар учун ҳам исталган механик система учун ҳам ўринли.

Қаттиқ жисмнинг бирор Z ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаш учун уни жуда кичик бўлакчаларга бўлсак (6) тенгликдаги йиғиндидан олинган лимит интегралга айланади.

$dm = \rho dv$ эканлигини эътиборга олсак

$$J_z = \int_{(v)} h^2 dm \quad \text{ёки} \quad J_z = \int_{(v)} \rho h^2 dv \quad (10)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда интеграл жисмнинг V бутун ҳажмига тегишли. Қаттиқ жисмлар учун (7) қуйидаги кўринишни олади.

$$J_x = \int_{(v)} \rho (y^2 + z^2) dv \quad \text{ва бошқалар} \quad (10^1)$$

БАЪЗИ БИР ЖИНСЛИ ЖИСМЛАРНИНГ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ.

1. Бир жинсли стерженнинг инерция моменти. Массаси M ва узунлиги λ бўлган стержен берилган бўлсин. А нуқтасидан ўтувчи стерженга перпендикуляр йўналган Az ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаймиз (19-расм). AB бўйлаб Ax ўқини ўтказамиз. Стерженнинг Az ўқидан $h=x$ масофада жойлашган элементлар бўлаги узунлигини dx , массасини dm билан белгилаймиз. Стерженнинг узунлик бирлигига тўғри келадиган массасини ρ , деб белгиласак, $dm = \rho dx$ бўлади.

Бу ерда $\rho_1 = \frac{M}{\lambda}$. (10) формулага кўра қуйидагини ёзамиз.

$$J_A = \int_0^{\lambda} x^2 dm = \rho_1 \int_0^{\lambda} x^2 dx = \rho_1 \lambda^2 / 3$$

ρ_1 нинг қийматини ўрнига қўйсак тенглама қуйидаги кўринишни олади.

$$J_A = \frac{M\lambda^3}{3} \quad (11)$$

2. Ингичка доиравий халқанинг инерция моменти.

Массаси M ва радиуси R га тенг бўлган ингичка доиравий халқанинг марказидан ўтувчи ва халқа текислигига перпендикуляр бўлган C_z ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаймиз (20-расм). Халқанинг ҳамма нуқталари C_z ўқдан $h_k = R$ масофада жойлашганлиги учун (6) формулага кўра

$$J_{cz} = \sum m_k R^2 = (\sum m_k) \cdot R^2 = MR^2 \quad (12)$$

келиб чиқади.

3. Бир жинсли доиравий пластинка ёки цилиндрнинг инерция моменти. Массаси M ва R га тенг доиравий пластинканинг пластинка текислигига перпендикуляр ва массалар марказидан ўтувчи C_z ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз (20-расмга қаранг).

Бунинг учун ундан радиуси r ва эни dr бўлган элементар халқа ажратамиз (21-расм,а). Унинг юзаси $2\pi \cdot dr$, массаси $dm = \rho_2 2\pi \cdot dr \left(\text{бу ерда } \rho_2 = \frac{M}{\pi R^2} \right)$ га тенг. У ҳолда (12) формулага кўра ажратилган элементар халқанинг инерция моментини $dJ_c = r^2 dm = 2\pi \rho_2 r^2 dr$ га тенг.

Бутун пластинка учун

$$J_c = 2\pi \rho_2 \int_0^R r^2 dr = \pi \rho_2 R^4 / 2$$

ρ_2 нинг қийматини эътиборга олсак

$$J_c = \frac{1}{2} MR^2 \quad (13)$$

Массаси M ва радиуси R бўлган бир жисм доиравий цилиндрнинг ўқиға нисбатан инерция моменти ҳудди шундай формула (21-расм, б) билан аниқланади.

59 бет

(24) тенгламани эътиборга олсак, қуйидагини ёзамиз:

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e$$

бу (26) тенгламанинг ўзгинаси. Демак системанинг ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема ва система массалар маркази ҳаракати ҳақидаги теорема битта теореманинг икки хил кўриниши экан. Қаттиқ жисм (ёки система) нинг ҳаракатини ўрганилаётганда (29) тенгламадан фойдаланиш қулайроқ бўлади. Суюқлик ёки газларнинг ҳаракатини ўрганишда (26) тенгламадан фойдаланиш лозим. Шунингдек зарба назариясини ҳамда реактив ҳаракатларни ҳам система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема ёрдамида ўрганилади.

Система массалар маркази ҳақидаги теоремадан қуйидаги хусусий ҳоллар келиб чиқади.

1. Системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлади:

$$\sum \bar{F}_k^t = 0$$

У ҳолда (29) дан $\bar{a}_c = 0$ ёки $\bar{g}_c = const$

бўлади. Бу массалар ҳаракатининг сақланиш қонунини ифодалайди: системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлади, у ҳолда система массалар маркази катталиги яъни тўғри чизиқни ва йўналишини ўзгармас тезлик билан, ҳаракат қилади. Бошланғич пайтда массалар маркази текис тинч ҳолатда бўлса, система тинч ҳолатда бўлади.

2. Агар системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлмай, унинг бирор (Ох) ўқидаги проекцияси нолга тенг бўлсин.

$$\sum F_{kx}^e = 0$$

У ҳолда (29¹) тенгламаларнинг биринчисидан қуйидагини ёзамиз:

$$a_{cx} = \frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0 \quad \text{ёки} \quad g_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = const$$

Шундай қилиб, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг геометрик йиғиндиси бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система массалар маркази тезлигининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармас миқдордан иборат бўлади. Хусусан, вақтнинг бошланғич пайтида $g_{cx} = 0$, бундан кейинги пайтларда ҳам $g_{cx} = 0$, яъни система массалар маркази бу ҳолда бу ўқ бўйлаб қўчмайди ($x_c = const$).

СИСТЕМА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМАНИ СУЮҚЛИКНИНГ СТАЦИОНАР ОҚИМИГА ТАТБИҚИ. ЭЙЛЕР ТЕНГЛАМАСИ.

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан туташ муҳитлар динамикасида ҳам қўллаш мумкинлигини кўриб чиқамиз.

Берилган онда қувур деворларига перпендикуляр олинган иккита τ_1 ва τ_2 кесимлар ҳамда кесимлари ўзгарувчан қувур ён сиртлари билан чегараланган ҳажмдаги сиқилмаган суюқлик ҳаракатини текширамиз (27-расм).

Суюқликнинг бу кесимлардаги зичликлари ρ_1 ва ρ_2 , ана шу кесимларга перпендикуляр ўрта тезликлари $\bar{g}_1$ ва $\bar{g}_2$ бўлсин. Суюқлик стационар ҳаракатланганда қувурнинг ихтиёрий кесими орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтувчи суюқлик массаси ўзгармайди:

$$m = \rho_1 g_1 \sigma_1 = \rho_2 g_2 \sigma_2$$

Бу масса бир сониядаги масса софуги деб аталади.

Аналитик t вақтда σ_1 ва σ_2 юзалар орасидаги суюқлик ҳажми z га тенг бўлсин.; $t+dt$ вақт ичида худди массага эга бўлган суюқлик σ_1^1 б σ_2^1 массалар билан чегараланган ҳажмини ишғол этади. (27-расм) шундан келиб чиқиб, курилатган масса ҳаракат миқдорининг ўзгариши σ_1 ва σ_1^1 кучлар орасидаги суюқлик ҳаракат миқдорининг камайиши ҳамда σ_2 ва σ_2^1 юзалар орасидаги суюқлик ҳаракат миқдорининг ортиши ҳисобига содир бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Суюқликнинг оқими стоционор бўлганда σ_1 ва σ_2 кесимлар оқими dt вақт ичида mdt суюқлик массаси ўтади ҳамда ҳаракат миқдорининг $m d t v_1$ ва $mdt v_2$ га тенг бўлади. dt вақт ичида ҳаракат миқдорининг ўзгаришини dQ билан белгиласак,

$$d\bar{Q} = mdt\bar{v}_2 - mdt\bar{v}_1$$

бўлади. Бундан

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1$$

муносабатни оламиз. Бу тенгламадаги $m\bar{v}_1$ ва $m\bar{v}_2$ кўпайтмалар вақт бирлиги ичидаги σ_1 ва σ_2 кесимлардаги ҳаракат миқдорларини ифодалайди.

Туташ муҳитлар механикасида бирор ҳажмни ишғол қилган суюқликка таъсир этувчи кучларни суюқликнинг ҳар бир заррасига таъсир этувчи ҳажм кучларига $\bar{R}_x$ (масалан, оғирлик кучлари) ва берилган ҳажмнинг сиртидаги суюқлик зарраларига таъсир этувчи сирт кучлари $\bar{R}_c$ (масалан, суюқлик ҳаракатланганда қувур деворида ҳосил бўладиган ишқаланиш кучи) бўлинади. У ҳолда қуйидаги куринишда ёзилади:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}_x + \bar{R}_c \quad (30^1)$$

(30) ва (30¹) тенгламаларни солиштириб

$$m\bar{Q}_2 - m\bar{Q}_1 = \bar{R}_x + \bar{R}_c$$

тенгламани ҳосил қиламиз

ёки

$$m\bar{Q}_1 - m\bar{Q}_2 + \bar{R}_x + \bar{R}_c = 0 \quad (31)$$

Демак, қувурнинг иккита ихтиёрий кесими орқали оқиб ўтувчи суюқликнинг шу кесимлар орасидаги вақт бирлигидаги ҳажмнинг икки томонига йўналган ҳаракат миқдорлари ҳамда ҳажм ва сирт кучлари бош векторларининг геметрик йиғиндиси нолга тенг бўлади (27-расм, б). Бу Эйлер теоремаси.

Ўзгарувчан массали жисм. Ракеталар ҳаракати.

Ўрганилаётган назарий механика курси Галилей- Ньютон қонунларига асосланган бўлиб классик механика деб юритилади.

Классик механикада ҳаракатланаётган жисм массаси доимо ўзгармас, скаляр ва мусбат катталиқ деб қаралади. Лекин жисмлар ҳаракатланаётганда унга моддий зарраларнинг қўшилиши ёки ажралиши натижасида жисмларнинг массаси сезиларли даражада ўзгаришига кўплаб мисоллар

келтириш мумкин. Масалан, косик ракета­ларнинг учи­шида ёқил­ги ёниб, ундан аж­рали­ши нати­жа­си­да ра­кетанинг мас­са­си ка­мая бора­ди; ба­ра­бан (ғал­так) га қо­ғоз, ип ёки сим­нинг ўра­ли­ши нати­жа­си­да унинг мас­са­си ор­та­ди ва ҳо­ко­зо.

Вақт ўти­ши билан мод­дий зар­ра­лар­нинг қў­ши­ли­ши ёки аж­ра­ли­ши нати­жа­си­да мас­са­си уз­лик­сиз ра­виш­да ўз­га­ра­ди­ган жи­см ўз­га­рув­чан мас­са­ли жи­см дей­и­ла­ди. Ҳа­ра­ка­ти да­во­ми­да ўт­ган масо­фа­си­га нис­ба­тан унинг ўл­ча­ми­ни эъ­ти­бор­га ол­мас­лик мум­кин бўл­са, ёки у ил­га­ри­лан­ма ҳа­ра­кат­лан­са, мас­са­си ўз­га­рув­чан мод­дий нуқ­та деб қа­ра­ла­ди.

Ўз­га­рув­чан мас­са­ли нуқ­та учун ўз­гар­мас мас­са­ли нуқ­та ди­на­ми­ка­си­нинг асо­сий қо­ну­ни бе­во­си­та қўл­лаш мум­кин э­мас.

Ра­кеталар ҳа­ра­ка­ти. Ёқил­ги сар­ф бў­ли­ши нати­жа­си­да мас­са­си уз­лик­сиз ра­виш­да ка­май­иб бо­рув­чи ра­кетанинг мод­дий нуқ­та деб қа­раб, унинг ак­тив уча­ст­ка­да­ги ҳа­ра­кат диф­фе­рен­ци­ал тенг­ла­ма­си­ни ту­за­ми­з. Ра­кета мас­са­си $M(t)$ ни вақт­нинг уз­лик­сиз диф­фе­рен­ци­ал­ланув­чи функ­ция­си­дан и­бо­рат деб қа­рай­ми­з. Аж­ра­лув­чи би­ро­р t пайт­да ра­кетанинг мас­са­си $M=M(t)$ ва тез­ли­ги $\bar{g}$ га тенг бўл­син. Шу пайт­да ра­кетанинг ҳа­ра­кат миқ­до­ри

$$\bar{Q}_x = M\bar{g}$$

бў­ла­ди. dt вақт и­чи­да ра­кетанинг аб­со­лют тез­ли­ги $\bar{N}$ га тенг dM мас­са­ли зар­ра­лар аж­рал­син. Ра­кетанинг мас­са­си M ка­ма­юв­чи функ­ция­дан и­бо­рат бўл­гани учун $dm < 0$ ва $|dm| = -dm \cdot t + \Delta t$ вақт­дан кейин си­сте­ма (ра­кета ва ундан аж­рал­ган зар­ра­лар) нинг ҳа­ра­кат миқ­до­ри қуйи­да­ги аниқ­ла­на­ди.

$$\bar{Q} = [M - (-dm)] \cdot (\bar{g} + d\bar{g}) - dM \cdot \bar{H}$$

dt вақт и­чи­да ҳа­ра­кат миқ­до­рининг ўз­га­ри­ши­ни dQ билан бел­ги­ла­сак,

$$d\bar{Q} = \bar{Q} - \bar{Q}_0$$

ёки

$$d\bar{Q} = (M + dM)(\bar{g} + d\bar{g}) - dm \cdot \bar{H} - M\bar{g} = Md\bar{g} + dm(\bar{g} - \bar{u}) + dM \cdot d\bar{g} \quad (32)$$

Агар ра­ке­та­га таъ­сир этув­чи таш­қи куч­лар­нинг бош век­то­ри $\bar{F}$ билан бел­ги­лан­са, си­сте­ма ҳа­ра­кат миқ­до­рининг ўз­га­ри­ши ҳақи­да­ги (26) тенг­ла­ма­га қў­ра,

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F} \quad (33)$$

(32) ни (33) га қўй­иб, $dm \cdot d\bar{g}$ ик­кин­чи тар­тиб­ли ки­чик миқ­дор­ни эъ­ти­бор­га ол­масак,

$$M \frac{d\bar{g}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\bar{g} - \bar{U}) = \bar{F} \quad (34)$$

$\bar{U} - \bar{g} = \bar{U}_r$ – аж­ра­лув­чи зар­ра­лар­нинг нис­бий тез­ли­ги экан­ли­ги­ни эъ­ти­бор­га ол­сак,

$$M \frac{d\bar{g}}{dt} = \bar{F} + \bar{U}_r \frac{dm}{dt} \quad (35)$$

тенг­ла­ма­ни ҳо­сил қи­ла­ми­з.

(34) ёки (36) тенг­ла­ма­лар ўз­га­рув­чан мас­са­ли нуқ­та­нинг ҳа­ра­кат диф­фе­рен­ци­ал тенг­ла­ма­си­ни ифо­да­лай­ди. Бу тенг­ла­ма И.В. Меш­че­р­ский тенг­ла­ма­си дей­и­ла­ди.

(35) да

$$\bar{U}_r \frac{dm}{dt} = \bar{\varphi} \quad (36)$$

катталиқ куч ўлчамига эга; $\frac{dm}{dt}$ катталиқ вақт бирлиги ичида ёқилғи массасининг ўзгаришини ифодалайди. $\bar{\varphi}$ куч зарраларнинг ракетадан $\bar{U}_r$ нисбий тезлик билан ажралиши натижасида ҳосил бўлади ва реактив куч дейилади. (36) ни эътиборга олсак (38) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M \frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = \bar{F} + \bar{\varphi} \quad (37)$$

Демак, ҳар онда ўзгарувчан массали нуқта массасини унинг тезланишига кўпайтмаси мазкур нуқтага таъсир этувчи ташқи кучлар ва реактив кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

$\frac{dm}{dt}$ - сон жиҳатидан вақт бирлиги ичида сарфланаётган ёқилғи массасига тенг, уни сониядаги ёқилғи дейилади ва G_c билан белгиланади, у ҳолда

$$\frac{dm}{dt} = -G_c$$

деб ёзамиз.

Ёки

$$\bar{\varphi} = -\bar{U}_r \bar{G}_c \quad (38)$$

Реактив куч сониядаги ёқилғи софлиги ажралувчи зарралар нисбий тезлигига бўлган кўпайтмага тенг ва тезлик йўналишига қарама-қарши йўналган бўлади.

Циолковский формуласи

Ернинг тортишиш кучи ва ҳавонинг қаршилиқ кучини эътиборга олмай, ракетанинг фақат реактив куч таъсиридаги ҳаракатини текшираемиз.

28-расм.

Ёқилғи ёниши натижасида ракетадан ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги $\bar{U}_r$ миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлиб, ракетанинг тезлиги $\bar{\vartheta}$ га қарама-қарши йўналган деб қараймиз ва ёқилғи ёниб бўлган пайтдаги ракетанинг тезлигини аниқлаймиз, x ўқини ракета ҳаракати бўйича йўналтириб $\bar{F} = 0$ эканлигини эътиборга олиб (35) нинг x ўқидаги проекцияси

$$M \frac{d\vartheta}{dt} = -4 \frac{dM}{dt} \quad \text{ёки} \quad d\vartheta = -4 \frac{dM}{M}$$

Ракетанинг бошланғич пайтдаги массаси ва тезлиги $M = M_0$ ва $\vartheta = \vartheta_0$ деб олиб тенгламани ҳар иккала томонини интеграллаймиз.

Агар ракета корпусининг массасини M_c ёқилғи массасини M_e билан белгиласак, ракетанинг бошланғич пайтдаги массаси $M_0=M_k+M_e$ га тенг бўлади. Ёқилғи ёниб бўлгандан кейин массаси $M=M_k$ бўлади. Ёқилғи ёниб бўлган пайтда, яъни актив участка бирида ракета энг катта тезликка эришади. Буларни (39) га қўямиз:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + 4lm \left(1 + \frac{M_e}{M_k} \right) \quad (40)$$

Ракетанинг бундай поғонаси ўзидан ёқилғи ёниб тугаши билан ракетадан автоматик равишда ажралади. Бундан ажралиб чиқиш натижасида ракета яна қўшимча тезлик олади. Шундан кўп поғонали ракеталар ёрдамида дунёда биринчи бўлиб собиқ Совет Иттифоқида Ернинг Сунъий йўлдоши (4 октябрь ва 3 ноябрь 1957 йил) учирилди.

Моддий нукта ва механик системанинг ҳаракат миқдори моменти.

Айрим масалаларни ечишда нукта ҳаракатининг динамик характеристикаси сифатида нукта ҳаракат миқдори вектори $m\mathcal{G}$ марка зёки нукта ҳаракат миқдорининг моменти тушунчасидан фойдаланилади. Бу моментлар ҳам куч моменти каби аниқланади.

Шундай қилиб, бирор O марказга нисбатан нукта ҳаракат миқдори моменти деб нукта радиус векторини, нукта ҳаракат миқдори векторига векторли кўпайтмасига айтилади.

$$\overline{m}_0(m\overline{\mathcal{G}}) = \overline{r} \cdot m\overline{\mathcal{G}} \quad (41)$$

Бу ерда $\overline{r}$ - ҳаракатланаётган нуктанинг O марказга нисбатан радиус-вектори. $\overline{m}_0(m\overline{\mathcal{G}})$ вектор момент маркази ва $(m\overline{\mathcal{G}})$ вектор орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр йўналади ҳамда O марказга қўйилган бўлади. (29) расм.

29- расм.

O марказга нисбатан нукта ҳаракат миқдори моментининг модули ҳаракат миқдори mv ни ҳаракат миқдори векторидан O марказга тушурилган h елкага бўлган кўпайтмасига тенг.

$$|\overline{m}_0(m\overline{\mathcal{G}})| = m\mathcal{G} \cdot h$$

O нуктага ўтувчи бирор oz ўққа нисбатан нукта ҳаракат миқдори моменти, нукта ҳаракат миқдори момент векторининг $[\overline{m}_0(m\overline{\mathcal{G}})]$ шу ўқдаги проекциясига тенг.

