

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
QARSHI MUHANDISLIK-IQTISODIYOT INSTITUTI**

“OLIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

Mavzu: Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.

REFERAT

**Bajardi:
Qabul qildi:**

**“QXM-145” guruh talabasi Ahatov O'tkir
Egamov.M.**

Qarshi 2015

Reja:

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha.
2. Aylana va uning kanonik tenglamasi.
3. Ellips va uning kanonik tenglamasi.
4. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.
5. Parabola va uning kanonik tenglamasi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha.

1-ta‘rif. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1) ko‘rinishdagi tenglama **ikkinchi darajali algebraik tenglama** deb ataladi.

Bu yerdagi A, B, C, D, E, F ma‘lum sonlar bo‘lib ulardan A, B, C bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda, ya‘ni $A=B=C=0$ bo‘lganda (1) tenglama

$$Dx + Ey + F = 0$$

ko‘rinishdagi chiziqli (birinchi darajali) tenglamaga aylanadi va bu to‘g‘ri chiziq tenglamasi ekanligini bilamiz.

2-ta‘rif. Dekart koordinatalari x va y ra nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama yordamida aniqlanadigan egri chiziqlar **ikkinchi tartibli egri chiziqlar** deb ataladi. (1) ikkinchi tartibli egri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarga **aylana, ellips, giperbola** va **parabolalar** kiradi.

Aylana va uning kanonik tenglamasi.

3-ta‘rif. Tekislikning berilgan nuqtasidan bir xil masofada joylashgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga **aylana** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtasini aylananing **markazi**, undan aylanagacha masofani **aylananing radiusi** deb ataymiz.

Markazi $O_1(a;b)$ nuqtada bo‘lib radiusi R ga teng aylananing tenglamasini tuzamiz (1^a-chizma). Aylananing ixtiyoriy nuqtasini $M(x;y)$ desak aylananing ta‘rifiga binoan:

$$MO_1 = R.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (2) dan foydalansak.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

yoki bu tenglikni har ikkala tomonini kvadratga ko‘tarsak

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (2)$$

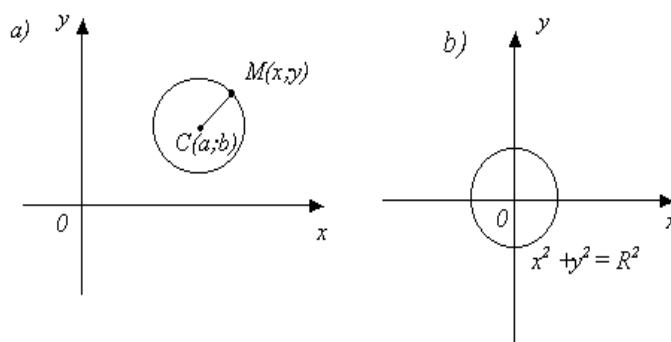
kelib chiqadi. Shunday qilib aylananing istalgan $M(x;y)$ nuqtasining kooordinatalari (2) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek aylanaga tegishli bo‘magan hech bir nuqtaning koordinatalari (2) tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (2) aylana tenglamasi. U aylananing **kanonik** (eng sodda) tenglamasi deb ataladi.

Xususiyl holda aylananing markazi $O_1(a,b)$ koordinatalar boshida bo‘lsa $a=b=0$ bo‘lib uning tenglamasi

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi (1^b-chizma).

Endi aylananing kanonik tenglamasini ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1) bilan taqqoslaymiz. (2) da qavslarni ochib ma‘lum almashtirishlarni bajarsak u



1-chizma.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni (1) bilan taqqoslab unda x^2 bilan y^2 oldidagi koeffitsientlarni tengligini va koordinatalarni ko'paytmasi xy ni yo'qligini ko'ramiz, ya'ni

$$A=C \text{ va } B=0.$$

(1) tenglamada $A=C$ va $B=0$ bo'lsa u aylanani tenglamasi bo'ladimi degan savolga javob izlaymiz.

Soddalik uchun $A=C=1$ deb olamiz. Aks holda tenglamani A ga bo'lib shuncha erishish mumkin.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (5)$$

tenglamaga ega bo'laylik. Bu tenglamani hadlarini o'zimizga qulay shaklda o'rinlarini almashtirib to'la kvadrat uchun zarur bo'lgan $\frac{D^2}{4}$ va $\frac{E^2}{4}$ ni ham qo'shamiz ham ayirimiz. U holda

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} + F = 0$$

yoki

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F \quad (6)$$

hosil bo'ladi. Mumkin bo'lgan uch holni qaraymiz:

$$1) \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0 \text{ (yoki } D^2 + E^2 > 4F \text{)}. \text{ Bu holda (6) tenglamani (2) bilan}$$

taqqoslab u va unga teng kuchli (5) tenglama ham markazi $O_1\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ nuqtada,

radiusi $R = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$ bo'lgan aylanani ifodalashiga ishonch hosil qilamiz.

$$2) \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F = 0. \text{ Bu holda (6) tenglama}$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamani yagona $O_1\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi xolos.

3) $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F < 0$. Bu holda (6) tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamaydi. Chunki tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni ega manfiy emas.

Xulosa. (11.1) tenglama $A=C, B=0, \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F \neq 0$ bo'lgandagina aylanani tenglamasini ifodalar ekan.

1-misol. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ tenglama aylananing tenglamasi ekanligi ko'rsatilsin va aylananing markazi hamda radiusi topilsin.

Yechish. $A=C=1, B=0, \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F = 1^2 + 2^2 - (-4) = 9 > 0$,
demak berilgan tenglama aylanani umumiy tenglamasi ekan. Tenglamani
 $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 1 - 4 - 4 = 0$
ko'rinishda yozib undan

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

aylananing kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib aylananing markazi $O_1(-1;2)$ nuqta va radiusi $R=3$ ekan.

2-misol. $x^2 - 2x + y^2 + 2y + 4 = 0$ tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamasligi ko'rsatilsin.

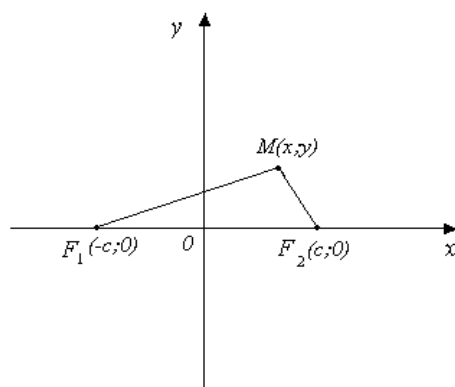
Yechish. Tenglamani $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 1 + 4 = 0$
ko'rinishda yozsak undan $(x-1)^2 + (y+1)^2 = -2$
tenglikka ega bo'lamiz. Koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta mavjud emas. Demak berilgan tenglama hech qanday egri chiziqni tenglamasi emas.

Ellips va uning kanonik tenglamasi.

4-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **ellips** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni ellipsning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va ellipsning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning yig'indisini $2a$ orqali belgilaymiz. Oxy dekart koordinatalar sistemasini Ox o'qni ellipsning fokuslari F_1 va F_2 orqali o'tkazib F_1 dan F_2 tomonga yo'naltiramiz, koordinatalar boshini esa F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz. U holda fokuslar $F_1(-c;0)$, $F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo'ladi (2-chizma).

Endi shu ellipsning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra M nuqtadan ellipsning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas son $2a$ ga teng, ya'ni



2-chizma

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (2) ga ko'ra

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

bo'lgani uchun

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ yoki $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ kelib chiqadi. Oxirgi tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlaymiz:

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$

$$4cx = 4a^2 - 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad cx = a^2 - a \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$a^2 - cx = a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Buni yana ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2] \quad a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2];$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2; \quad a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2;$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (7)$$

hosil bo'ladi.

Uchburchak ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta ekanini nazarda tutsak ΔF_1MF_2 dan $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$; $2a > 2c$; $a > c$; $a^2 - c^2 > 0$ ($a > 0$, $c > 0$) bo'ladi.

$a^2 - c^2 = b^2$ deb belgilab uni (7) ga qo'yamiz. U holda

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

yoki buni a^2b^2 ga bo'lsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (8) tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha ellipsga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtani koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (8) ellipsning tenglamasi. U ellipsning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. Koordinatalar boshi **ellipsning markazi** deyiladi. Koordinata o'qlari esa ellipsning **simmetriya o'qlari** bo'lib xizmat qiladi. Ellipsning fokuslari joylashgan o'q uning **fokal o'qi** deyiladi.

Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishish nuqtalari uni **uchlari** deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B(0;b)$ nuqtalar ellipsning uchlari.

a va b sonlar mos ravishda ellipsning **katta** va **kichik yarim o'qlari** deyiladi. $\frac{c}{a}$ nisbat ellipsning **ekssentrisiteti** deyiladi va ε orqali belgilanadi. Ellips uchun $0 < \varepsilon < 1$ bo'ladi, chunki $c < a$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini izohlaydi.

Haqiqatan, $a^2 - c^2 = b^2$ tenglikni a^2 ga bo'lsak $1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2$ bo'ladi. Bundan ekssentrisitet qanchalik kichik bo'lsa ellipsning kichik yarim o'qi uning katta yarim o'qidan shunchalik kam farq qilishini ko'ramiz.

$b=a$ bo'lganda ellips tenglamasi $x^2 + y^2 = a^2$ ko'rinishiga ega bo'lib ellips aylanaga aylanadi. Bu holda $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$, bo'lgani uchun $\varepsilon = \frac{0}{a} = 0$ bo'ladi.

Demak aylana ekssentrisiteti nolga teng va fokuslari uning markaziga joylashgan ellips ekan.

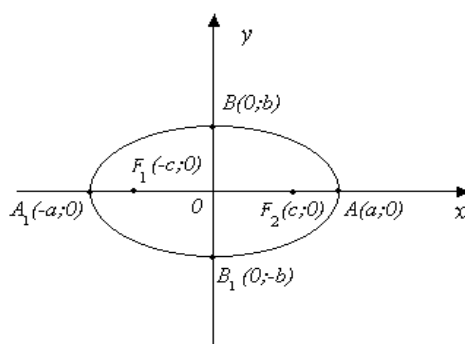
Endi ellipsni shaklini aniqlaymiz. Uning shaklini avval I-chorakda aniqlaymiz. Ellipsning kanonik tenglamasi (8)ni y ga nisbatan yechsak

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}; \quad y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2); \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

bo'ladi, bunda $0 < x < a$, chunki $x > a$ bo'lganda ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lib u ma'noga ega bo'lmaydi. x 0 dan a gacha o'sganda y b dan 0 gacha kamayadi.

Ellipsning I-chorakdagi bo'lagi koordinatalar o'qlarida joylashgan $B(0;b)$ va $A(a;0)$ nuqtalar bilan chegaralangan yoydan iborat bo'ladi (3-chizma). Ellipsning kanonik tenglamasida x ni $-x$ ga va y ni $-y$ ga o'zgartirilsa tenglama o'zgarmaydi.

Bu ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi. Ellipsning ana shu xususiyatiga asosanib uning shakli 45-chizmada ko'rsatilgandek ekanligiga iqrar bo'lamiz.



3-chizma

3-misol. Kichik yarim o'qi $b=4$ va ekssentrisiteti $\varepsilon=0,6$ bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi yezilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,6$; $c = 0,6a$, $a^2 - c^2 = b^2$

tenglikka c va b ning qiymatlarini qo'yib a ni aniqlaymiz.

$$a^2 - (0,6a)^2 = 4^2; a^2(1 - 0,36) = 16; 0,64a^2 = 16; a^2 = \frac{16}{0,64} = 25.$$

Shunday qilib ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

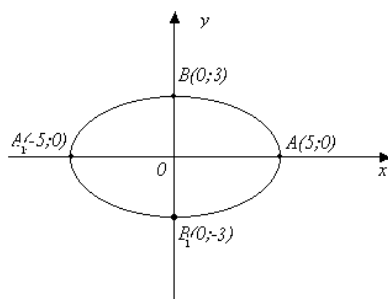
ko'rinishda bo'lar ekan.

4-misol. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ tenglamaga ko'ra ikkinchi tartibli egri chiziqlarning turi aniqlansin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani $9x^2 + 25y^2 = 225$ ko'rinishda yozib buni 225 ga bo'lsak

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \text{ yoki } \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

kelib chiqadi. Demak berilgan tenglama yarim o'qlari $a=5$, $b=3$ bo'lgan ellipsni tenglamasi ekan (4-chizma)



4-chizma.

5-misol. $4x^2 - 16x + 9y^2 - 54y + 61 = 0$ egri chiziq chizilsin.

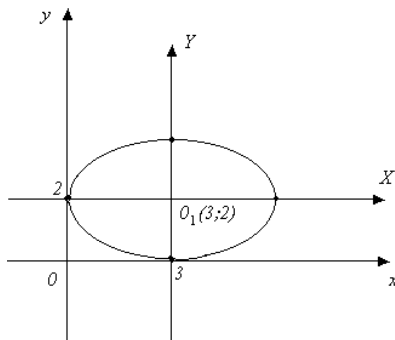
Yechish. Tenglamani $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) + 61 = 0$;

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) - 16 - 81 + 61 = 0; 4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 36$$

ko'rinishda yozib buni 36 ga bo'lsak $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ yoki

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1 \text{ tenglama hosil bo'ladi. } x-2=X; y-3=Y \text{ almashtirish olsak}$$

$$\frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1 \text{ kelib chiqadi.}$$



5-chizma.

Bu ellipsning O_1XY sistemaga nisbatan kanonik tenglamasi.

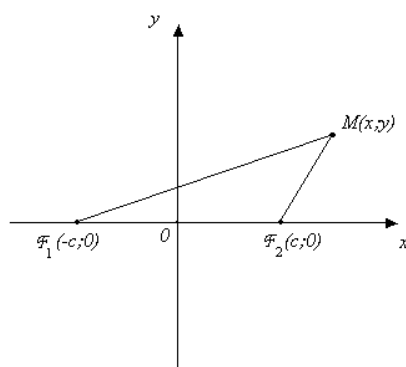
Shunday qilib berilgan tenglama ellipsning umumiy tenglamasi ekan. Agar Oxy eski sistemani $O_1(3,2)$ nuqtaga parallel kuchirilsa ya'ni O_1XY sistemaga nisbatan ellipsning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'lar ekan (5-chizma).

Giperbola va uning kanonik tenglamasi.

5-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **giperbola** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni giperbolaning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va giperbolaning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning ayirmasini $\pm 2a$ orqali belgilaymiz. Oxy dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellipsdagidek, ya'ni Ox o'qni F_1, F_2 fokuslaridan o'tadigan qilib tanlaymiz va koordinatalar boshini F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz.

U holda fokuslar $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo'ladi (6-chizma).



6-chizma

Endi giperbolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

Ta'rifga binoan giperbolaning M nuqtasidan uning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas son $\pm 2a$ ga teng, ya'ni

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga binoan $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ va $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ bo'lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (9)$$

kelib chiqadi.

Ellips tenglamasini chiqarishda bajarilgan amallarga o'xshash amallarni bajarib $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ (10) tenglamaga ega bo'lamiz. Ma'lumki uchburchakning ikki tomonini ayirmasi uchinchi tomonidan kichik. Shunga ko'ra ΔF_1MF_2 dan

$F_1M - F_2M < F_1F_2$; $2a < 2c$; $a < c$; $a^2 - c^2 < 0$ ($a > 0, c > 0$) hosil bo'ladi. Shuning uchun $a^2 - c^2 = -b^2$ yoki $c^2 - a^2 = b^2$ deb belgilab olamiz. U holda (10) formula

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \quad \text{yoki} \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni a^2b^2 ga bo'lib

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib giperbolaning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (11) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek giperbolaga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak u giperbolaning tenglamasi (11) giperbolaning **kanonik** tenglamasi deb ataladi. Giperbolaning tenglamasida x va y juft darajalari bilan ishtirok etadi. Bu giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi.

Ya'ni qarayotgan holda koordinata o'qlari giperbolaning simmetriya o'qlari ham bo'ladi.

Giperbolaning simmetriya o'qlarini kesishish nuqtasi **giperbolaning markazi** deb ataladi.

Giperbolaning fokuslari joylashgan simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Endi giperbolaning shaklini chizishga harakat qilamiz. Oldin uning shaklini I-chorakda chizamiz.

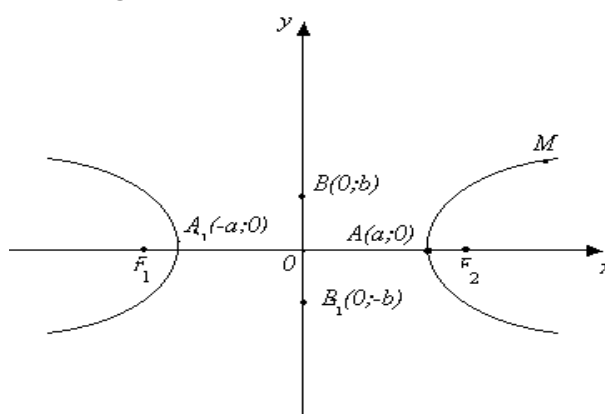
Giperbolaning kanonik tenglamasi (11) dan

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1; \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}; \quad y^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}; \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

kelib chiqadi, chunki I-chorakda $y \geq 0$. Bunda $x \geq a$, aks holda u ma'noga ega bo'lmaydi (ildiz ostida manfiy son bo'ladi). x a dan $+\infty$ gacha o'zgarganda y 0 dan $+\infty$ gacha o'zgaradi. Demak giperbolaning I-chorakdagi qismi 7-chizmada tasvirlangan AM yoydan iborat bo'ladi.

Giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligini hisobga olsak uning shakli 7-chizmada tasvirlangan egri chiziqdan iborat bo'ladi.

Giperbolaning fokal o'q bilan kesishish nuqtalari uning **uchlari** deb ataladi. Giperbolaning tenglamasiga $y=0$ ni qo'ysak $x=\pm a$ kelib chiqadi. Demak $A_1(-a;0)$ va $A(a;0)$ nuqtalar giperbolaning uchlari bo'ladi



7-chizma.

Giperbolaning tenglamasi (11) ga $x=0$ ni qo'ysak $-\frac{y^2}{b^2} = 1; y = \pm \sqrt{-b^2}$

bo'ladi. Bu esa haqiqiy son emas (manfiy sondan kvadrat ildiz chiqmaydi). Demak giperbola Oy o'q bilan kesishmas ekan.

Shuning uchun giperbolaning fokal o'qi **haqiqiy o'qi** o'nga perpendikulyar o'qi **mavhum o'qi** deb ataladi.

a va b sonlar mos ravishda giperbolaning **haqiqiy** va **mavhum yarim o'qlari** deyiladi.

Giperbolaning M nuqtasi u bo'ylab cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan $y = -\frac{b}{a}x$ va $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlarning birortasigacha masofa nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Ya'ni giperbolaning koordinatalar boshidan yetarlicha katta masofada joylashgan nuqtalari $y = -\frac{b}{a}x$ va $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlardan biriga yetarlicha yaqin joylashadi. Koordinatalar boshidan o'tuvchi bu to'g'ri chiziqlar **giperbolaning asimptotalari** deb ataladi.

Giperbolani chizishdan oldin uning asimptotalarini chizish tavsiya etiladi.

Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari Ox va Oy o'qlarga parallel va mos ravishda $2a$ va $2b$ ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli to'rtburchak yasaymiz. Bu to'rtburchakni giperbolaning **asosiy to'rtburchagi** deb ataymiz.

To'rtburchakni diagonallarini har tarafga cheksiz davom ettirsak giperbolaning asimptotalari hosil bo'ladi (8-chizma).

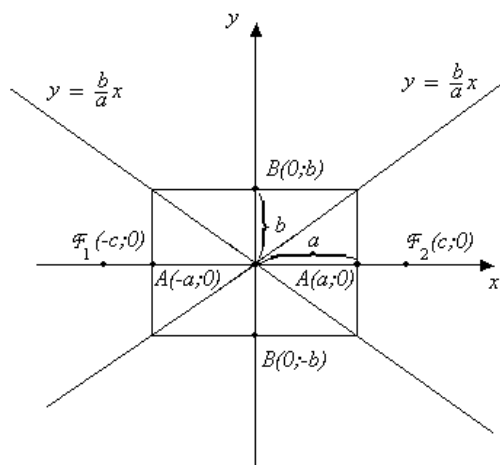
$\frac{c}{a}$ nisbat giperbolaning **ekssentrisiteti** deb ataladi va ε orqali belgilanadi.

Giperbola uchun $c > a$ bo'lganligi sababli $\varepsilon > 1$ bo'ladi.

Ekssentrisitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatdan, $c^2 - a^2 = b^2$ tenglamani har ikkala tomonini a^2 ga bo'lsak $\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki

$\varepsilon^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ kelib chiqadi. ε kichrayganda $\frac{b}{a}$ nisbat ham kichrayadi. Ammo $\frac{b}{a}$ nisbat giperbolaning asosiy to'rtburchagini shaklini belgilaganligi uchun u giperbolaning ham shaklini belgilaydi. ε qanchalik kichik bo'lsa $\frac{b}{a}$ nisbat ham ya'ni giperbolaning asimptotalarini burchak koeffitsientlari ham shunchalik kichik bo'ladi va giperbola Ox o'qqa yaqinroq joylashadi.

Bu holda giperbolani asosiy to'rtburchagi Ox o'q bo'ylab cho'zilgan bo'ladi.



8-chizma

Haqiqiy va mavhum yarim o'qlari teng giperbola **teng tomonli** yoki **teng yonli** deb ataladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

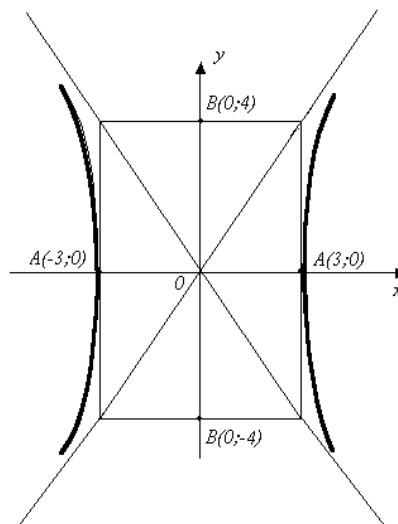
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad x^2 - y^2 = a^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$y=x$ va $y=-x$ to'g'ri chiziqlar teng tomonli giperbolaning asimptotalari bo'lib

uning eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}$ bo'ladi.

6-misol. $16x^2 - 9y^2 = 144$ egri chiziq chizilsin.



9-chizma

Yechish. Uni har ikkala tomonini 144 ga bo'lsak

$$\frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1; \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

kelib chiqadi. Demak qaralayotgan egri chiziq yarim o'qlari $a=3$ va $b=4$ bo'lgan giperbola ekan. Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari koordinata o'qlariga parallel hamda asosi 6 balandligi 8 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasaymiz. Uning diagonallarini cheksiz davom ettirib giperbolaning asimptotalarini hosil qilamiz. Giperbolaning uchlari $A_1(-3;0)$ va $A(3;0)$ nuqtalar orqali asimptotalarga nihoyatda yaqinlashib boruvchi silliq chiziqni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan egri chiziq giperbolaning grafigi bo'ladi (9-chizma).

7-misol. $y = \frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi giperbola ekanligi ko'rsatilsin.

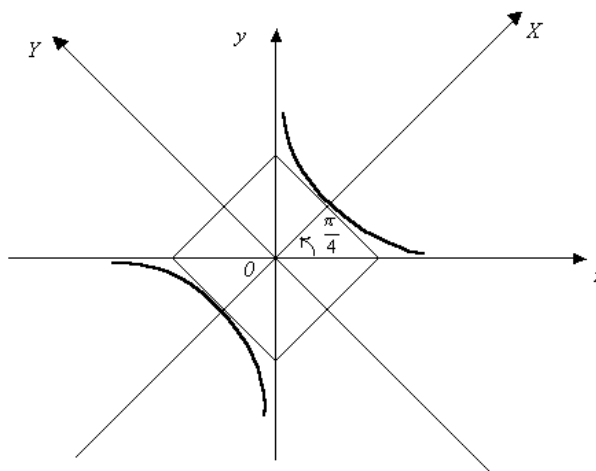
Yechish. Koordinata o'qlarini $\alpha = \frac{\pi}{4}$ burchakka burib yangi OXY sistemani hosil qilamiz. Bu holda yangi koordinatalardan eski koordinatalarga o'tish formulasi.

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

ko'rinishga ega bo'lishi ko'rsatilgan edi (1-ma'ruza). x va y ning ushbu qiymatlarini $y = \frac{k}{x}$ tenglamaga qo'ysak

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) = \frac{k}{\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)}; \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)(X-Y) = k \text{ yoki } X^2 - Y^2 = 2k$$

hosil bo'ladi. Bu tenglama tengtomonli giperbolaning tenglamasi. $k > 0$ bo'lganda giperbolaning haqiqiy o'qi OX bilan, $k < 0$ bo'lganda OY o'q bilan ustma-ust tushadi. $k > 0$ bo'lgan hol uchun giperbola 10-chizmada tasvirlangan.



10-chizma.

Ox , Oy eski o'qlar OXY yangi sistemani koordinata burchaklarini bissektoralari bo'lgani uchun ular teng tomonli giperbolani asimptotalari bo'ladi. Shunday qilib $y = \frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi asimptotalari Ox va Oy o'qlardan iborat tengtomonli giperbola bo'lar ekan.

Shuningdek $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ kasr-chiziqli funksiyaning grafigi ham asimptotalari koordinata o'qlariga parallel tengtomonli giperbola ekanligini ko'rsatish mumkin.

Parabola va uning kanonik tenglamasi.

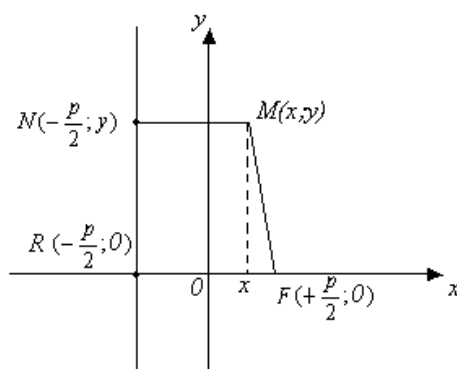
6-ta'rif. Berilgan nuqtadan hamda berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **parabola** deb ataladi.

Berilgan nuqtani F orqali belgilab uni parabolaning **fokusi** deb ataymiz. Berilgan to'g'ri chiziqni parabolaning **direktrisasi** deb ataladi. (Fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi).

Fokusdan direktrisagacha masofani p orqali belgilaymiz va uni parabolaning **parametri** deb ataymiz.

Endi parabolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Absissalar o'qini fokusdan direktrisaga perpendikulyar qilib o'tkazib yo'nalishini direktrisadan fokusga tomon yo'naltiramiz.

Koordinatalar boshini fokusdan direktrisagacha masofa FR ning qoq o'rtasiga joylashtiramiz (11-chizma).



11-chizma

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan fokus $F\left(\frac{p}{2};0\right)$

koordinatalarga, direktrisa $x = -\frac{p}{2}$ tenglamaga ega bo'ladi.

Faraz qilaylik $M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Parabolaning ta'rifiga binoan M nuqtadan direktrisagacha MN masofa undan fokusgacha MF masofaga teng: $MN=MF$

53-chizmadan $MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{p}{2}$ va $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2}$

ekani ravshan.

Demak, $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$.

Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \text{ yoki } y^2 = 2px \quad (12)$$

hosil bo'ladi.

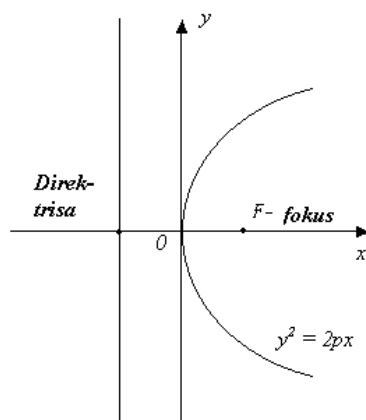
Shunday qilib parabolaning istalgan $M(x,y)$ nuqtasining koordinatalari (12) tenglamani qanoatlantiradi. Parabola yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak (12) parabolaning tenglamasi ekan. U parabolaning **kanonik tenglamasi** deb ataladi.

Endi kanonik tenglamasiga ko'ra parabola shaklini chizamiz (12) tenglamada y ni $-y$ ga almashtirilsa tenglama o'zgarmaydi. Bu abssissalar o'qi parabolaning simmetriya o'qidan iborat ekanligini bildiradi. (12) tenglamaning chap tomoni manfiy bo'lmaganligi uchun uning o'ng tomoni ya'ni x ning ham manfiy bo'lmasligi kelib chiqadi. Demak parabola Oy o'qning o'ng tomonida joylashadi. $x=0$ da $y=0$. Demak parabola koordinatalar boshidan o'tadi.

x cheksiz o'sganda y ning absolyut qiymati ham cheksiz o'sadi. (12) tenglama yordamida aniqlanadigan parabola 12-chizmada tasvirlangan.

Parabolaning simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning **uchi** deyiladi. Qaralayotgan hol uchun koordinatalar boshi parabolaning uchi bo'ladi.



12-chizma.

8-misol. $y^2=8x$ parabola berilgan. Uning direktrisasining tenglamasi yozilsin va fokusi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (12) bilan taqqoslab $2p=8$, $p=4$ ekanini ko'ramiz. Direktrisa $x=-\frac{p}{2}$ tenglamaga, fokus $-\frac{p}{2}$, 0 koordinatalarga ega bo'lishini hisobga olsak direktrisaning tenglamasi $x=-2$ va fokus $F(2;0)$ bo'ladi.

Izoh. Fokal o'qi Oy o'qdan iborat parabolaning tenglamasi

$$x^2=2py \quad (13)$$

ko'rinishga ega bo'ladi

9-misol. $y=3x^2-12x+16$ parabolaning tenglamasi kanonik holga keltirilsin va uning uchi topilsin.

Yechish. Tenglamani

$$y=3(x^2-4x)+16, y=3(x^2-4x+4-4)+16; y=3(x-2)^2+4; y-4=3(x-2)^2$$

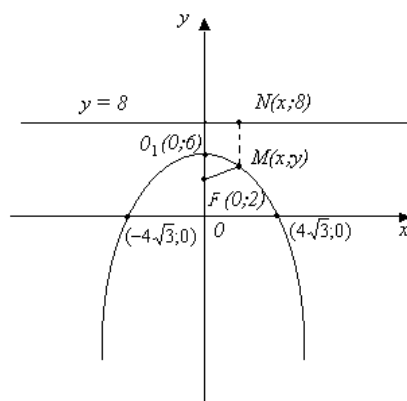
ko'rinishga keltirib $x-2=X$, $y-4=Y$ deb belgilasak parabolaning tenglamasi

$$Y=3X^2$$

kanonik ko'rinishga keladi. $x-2=X$, $y-4=Y$ almashtirish bilan eski Oxy sistemani $O_1(2;4)$ nuqtaga parallel ko'chirdik. Yangi O_1XV sistemaga nisbatan parabolaning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'ladi. Yangi sistemani koordinatalar boshini koordinatalari parabola uchining koordinatalari bo'ladi, ya'ni $x_0=2$, $y_0=4$.

10-misol. $F(0,4)$ nuqtadan hamda $y=8$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rni, egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. $M(x,y)$ egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Shartga binoan undan $y=8$ to'g'ri chiziqqacha $MN = \sqrt{(x-x)^2 + (8-y)^2}$ masofa va undan $F(0,2)$ nuqttagacha $MF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$ masofa o'zaro teng ya'ni,



13-chizma.

$$\sqrt{(x-x)^2 + (8-y)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} \quad (13\text{-chizma}).$$

Bu tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak $(8-y)^2 = x^2 + (y-4)^2$ yoki qavslarni ochsak.

$$64 - 16y + y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16 \quad \text{yoki} \quad 64 - 16y = x^2 - 8y + 16$$

hosil bo'ladi. Tenglamani soddalashtirish

$$-16y + 8y = x^2 + 16 - 64, \quad -8y = x^2 - 48$$

yoki -8 ga bo'lsak

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + 6$$

tenglamaga ega bo'lamiz. U Oy o'qqa simmetrik parabolaning tenglamasi.

Endi parabolaning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Parabola tenglamasiga $x=0$ qiymatni qo'ysak $y=6$ kelib chiqadi. Demak parabola Oy o'q bilan $O_1(0,6)$ nuqtada kesishar ekan. Shuningdek parabola tenglamasiga $y=0$ qiymatini qo'ysak $-\frac{1}{8}x^2 + 6 = 0; -x^2 + 48 = 0; x^2 = 48; x = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$

hosil bo'ladi. Demak parabola Ox o'q bilan $(-4\sqrt{3},0)$ va $(4\sqrt{3},0)$ nuqtalarda kesishar ekan.

Agar parabola tenglamasini $y - 6 = -\frac{1}{8}x^2$ yoki $x^2 = -8(y-6)$ ko'rinishda yozib $x=X, y-6=Y$ almashtirish olsak uning tenglamasi $X^2 = -8Y$ kanonik shaklni oladi.

Izoh. Aylana, ellips, giperbola va parabola umumiy tenglamalari yordamida berilganda koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish yoki koordinata o'qlarini burish yordamida umumiy tenglamani yangi sistemaga nisbatan kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

Adabiyotlar

1. Т.Азларов, Ҳ.Мансуров. Математик анализ. 1-қисм. Тошкент «Ўқитувчи», 1986.
2. А.А.Гусак. Высшая математика. 1-том. Минск, 2001.
3. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, «Наука», 1986.
4. В.П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. Москва, «Наука», 2000.
5. Н.С.Пискунов. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. 1-том, Тошкент, «Ўқитувчи», 1972.