

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ ПО СВЯЗИ,
ИНФОРМАТИЗАЦИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

**СТУДЕНТА 720 08 ГРУППЫ
УРАЗБАЕВА БАТЫРА**

Сдал:

Уразбаев Б.

Принял:

к.ф.-м.н. А.Арзиев

Нукус 2013

Содержание:

1. Методическая указания.....	3
1.1 Неопределенный интеграл	3
1.2 Таблица первообразных	4
1.3 Не берущиеся интегралы	4
1.4 Замена переменной	5
1.5 Выделение множителя из-под знака дифференциала	5
1.6 Интегрирование по частям неопределенного интеграла	6
1.7 Интегрирование рациональных функций	8
2. Практические задания	10
3. Тесты	13
4. Презентация	14
5. Список литературы	14

Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на множестве X , если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in X$. Поскольку при этом $dF(x) = f(x)dx$, то $F(x)$ называют также первообразной для выражения $f(x)dx$. Для функций $f(x)$, $g(x)$, $u(x)$, ... первообразные обозначаются соответственно $F(x)$, $G(x)$, $Y(x)$, ...

Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то $F(x) + 2$, $F(x) - 5$ и т.п. также являются первообразными для $f(x)$.

Теорема 1. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где $F(x)$ - какая-либо первообразная для $f(x)$, C - произвольная постоянная.

Доказательство

Из критерия постоянства следует, что любые две первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функции $f(x)$ отличаются на постоянную, т.к. $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, $C' = 0$ ■

Неопределенный интеграл.

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке X .

Неопределенным интегралом называют совокупность всех первообразных функции $f(x)$. Обозначают $\int f(x)dx$. Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ - одна из первообразных, C - произвольная постоянная.

Пример 1: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ так как $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$

Свойство 1. Из определения неопределенного интеграла следует, что

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Свойство 2. $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$ Точнее, если $F(x)$ и $G(x)$ - какие-либо первообразные для $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = F(x) + G(x) + C$$

при любых постоянных α и β .

Линейностью интеграла называют свойство, выраженное формулой

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Таблица первообразных

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad \forall m \neq -1 \text{ на каждом из интервалов, где определена функция } x^m$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \text{ на каждом из интервалов } (-\infty, 0), (0, +\infty)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \text{ на каждом из интервалов } \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z};$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C \text{ на каждом из интервалов } (\pi k, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z};$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C \text{ или } = -\operatorname{arcctg} x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C \text{ или } = -\operatorname{arccos} x + C;$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \text{ на каждом из интервалов } (-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty).;$$

При вычислении неопределенных интегралов обычно с помощью различных приемов сводят данный интеграл к нескольким табличным интегралам.

Пример 2:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

на каждом из интервалов, не содержащем точек $k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z};$

Не берущиеся интегралы

Не берущимися интегралами называют неопределенные интегралы от функций, первообразные для которых не являются элементарными функциями. (Более точное название: интегралы, не берущиеся в классе элементарных функций). Не берущимися являются, например,

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int e^{x^2} dx, \int \sin x^2 dx;$$

Замена переменной

Введение множителя под знак дифференциала. Пусть $v = v(x)$ дифференцируемая на X функция, такая, что $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(v(x))v'(x)$.

Тогда

$$\int f(x)dx = \int g(v(x))dx = \int g(v)dv = G(v) + C = G(v(x)) + C.$$

Говорят, что в неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ выполнена замена переменной или подстановка $v = v(x)$.

Пример 3: $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}} = [x^2+1 = v, dv = 2xdx] = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = v^{1/2} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$

Пример 4: $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \left[\arctg x = t, dt = \frac{1}{1+x^2} dx \right] = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} (\arctg x)^2 + C.$

Линейная подстановка.

Частным случаем введения множителя под знак дифференциала является линейная подстановка.

Теорема 2: (Теорема о линейной подстановке.). Если $a \neq 0$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Доказательство

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)(ax+b)'dx = [ax+b = t, dt = adx] = \frac{1}{a} \int f(t)dt = \frac{1}{a} F(t) + C = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Пример 5: $\int \sin(5x-3)dx = -\frac{1}{5} \cos(5x-3) + C$

Пример 6: $\int \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + C$

Пример 7: $\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \arctg(x-1) + C$

Выделение множителя из-под знака дифференциала.

Пусть функция $x=x(t)$ дифференцируема на промежутке T , $x'(t) \neq 0$, и значения x заполняют X . Тогда

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C.$$

Это дает параметрическое задание неопределенного интеграла

$$y = G(t) + C, \quad x = x(t), \quad t \in T.$$

Если перейти к функции $t=t(x)$, обратной для функции $x=x(t)$, то получаем явное задание интеграла

$$\int f(x)dx = G(t(x)) + C.$$

Пример 8:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left[x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad dx = \cos t dt, t = \arcsin x \right] = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ &= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = [t = \arcsin x] = \frac{1}{2} (\arcsin x + \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x)) = \\ &= \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}) = \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям неопределенного интеграла

Теорема 3: Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, определенные на X . Если $v(x)u'(x)$ имеет первообразную на X , то и $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на X , причем

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Доказательство

Так как

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x),$$

то

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - v(x)u'(x).$$

и, следовательно,

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))' dx - \int v(x)u'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \blacksquare$$

Формулу

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

называют **формулой интегрирования по частям** неопределенного интеграла. Коротко эту формулу записывают в виде

$$\int uvd = uv - \int vdu.$$

Формулу интегрирования по частям следует использовать при вычислении интегралов от функций $P(x)a^x$, $P(x)\sin bx$, $P(x)\cos bx$, где $P(x)$ – многочлен, причем в качестве $u(x)$ нужно брать функцию $P(x)$.

Пример 9: $\int (x+5)\cos 3x dx = \left[x+5 = u, \cos 3x dx = dv, du = dx, v = \frac{1}{2} \sin 3x \right] = \frac{1}{3}(x+5) - \int \frac{1}{3} \sin 3x dx = \frac{1}{3}(x+5) \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$

Замечание 1: При использовании формулы интегрирования по частям приходится находить функцию $v = v(x)$ по выбранному $dv = dv(x)$. При этом $v = v(x) + C$. Обычно берут произвольную постоянную $C = 0$.

Пример 10: $\int (x^2 + 2x)e^x dx = [x^2 + 2x = u, e^x dx = dv, du = (2x + 2)dx, v = e^x] = (x^2 + 2x)e^x - \int (2x + 2)e^x dx = [2x + 2 = u, e^x dx = dv, du = 2dx, v = e^x] = (x^2 + 2x)e^x - (2x + 2)e^x + \int 2e^x dx = (x^2 + 2x)e^x - (2x + 2)e^x + 2e^x + C = x^2 e^x + C$

Пример 11: $\int \operatorname{arctg} x dx = \left[\operatorname{arctg} x = u, dx = dv, du = \frac{dx}{1+x^2}, v = x \right] = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = [1+x^2 = t, dt = 2x dx] = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln|t| + C = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$

Вычисление $K_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$

Теорема 3: Для интеграла $K_n(x)$ справедлива рекуррентная формула

$$K_n(x) = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} K_{n-1}(x).$$

Замечание 2: Использование рекуррентной формулы $n - 1$ раз позволяет свести вычисление $K_n(x)$ к вычислению $K_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

Пример 12:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2} = K_2(x) &= [n = 2, a = 3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{9(x^2 + 9)} + \frac{1}{9 \cdot 2} K_1(x) = \frac{1}{18} \cdot \frac{x}{x^2 + 9} + \frac{1}{18} \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \\ &= \frac{1}{18} \cdot \frac{x}{x^2 + 9} + \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование рациональных функций

Теорема 3: Любая рациональная функция имеет первообразную в классе элементарных функций.

Доказательство

Как известно любую рациональную функцию, т.е. функцию вида $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены, можно представить в виде суммы простейших рациональных функций вида

$$bx^m, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l},$$

Где $p^2 - 4q < 0$, $m, k, l \in \mathbb{N}$ Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что интеграл от любой из перечисленных функций является берущимся.

1. $\int bx^m dx = b \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ — берется.

2. а) При $k = 1$ интеграл $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$ — берется.

б) При $k \neq 1$ интеграл $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$ — берется.

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l} dx &= \int \frac{M\left(x-\frac{p}{2}\right) + \left(M\frac{p}{2} + N\right)}{\left(\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^l} dx = \left[x-\frac{p}{2} = t, \quad q-\frac{p^2}{4} = a, \quad M\frac{p}{2} + N = N_1 \right] = \\ &= \int \frac{Mt + N_1}{(t^2 + a^2)^l} dx = M \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^l} + N_1 \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l} = M l_1 + N_1 l_2. \end{aligned}$$

Интеграл $l_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l} = K_l(x)$

$$l_1 = \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^l} = [\text{после замены } t^2 + a^2 = z, \quad 2t dt = dz \text{ сводится к интегралу}] = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^l}.$$

который уже рассмотрен в 2., т.е. является берущимся.

Таким образом, интеграл от любой простейшей рациональной функции является берущимся, а, следовательно, берется интеграл от любой рациональной функции. ■

При практическом вычислении интеграла от рациональной функции раскладывают рациональную функцию на сумму простейших и вычисляют интеграл от каждого слагаемого так же, как это выполнялось при доказательстве теоремы об интегрировании рациональных (Теорема 3).

Пример 13: Вычислим $\int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} dx$.

Разложение подынтегральной функции на сумму простейших имеет вид

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}.$$

Следовательно,

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2).$$

При $x = -2$ получаем

$$5A = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{5}.$$

При $x = 0$ получаем

$$1 = A + 2C \Rightarrow C = \frac{3}{5}.$$

При $x = -1$ получаем

$$0 = 2A - B + C \Rightarrow B = \frac{1}{5}.$$

Таким образом,

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} = -\frac{1}{5(x+2)} + \frac{x+3}{5(x^2+1)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} dx &= \int \left(\frac{x+3}{5(x^2+1)} - \frac{1}{5(x+2)} \right) dx = \frac{1}{10} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \frac{1}{10} \ln(x^2+1) + \frac{3}{5} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{5} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Поскольку интеграл от любой рациональной функции является берущимся, то в ряде случаев полезно рассмотреть возможность сведения заданного интеграла к интегралу от рациональной функции.

Если после замены переменной $x = x(t)$ или $t = t(x)$ в интеграле $\int f(x)dx$ с использованием элементарных функций $x(t)$, $t(x)$ получается интеграл $\int g(t)dt$ от рациональной функции $g(t)$, то интеграл $\int f(x)dx$ является берущимся в классе элементарных функций. В таких случаях говорят, что использование замены переменной позволяет рационализировать подынтегральное выражение (рационализировать интеграл), а замену переменной называют **рационализирующей подстановкой**.

«Практические задания»

Цель работы: Найти неопределенный интеграл, результат проверить дифференцированием.

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{7-8x^2}}.$$

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-8x^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{8}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \arcsin \frac{x}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}} + C = \frac{1}{\sqrt{8}} \arcsin \frac{x\sqrt{8}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{x \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + C.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{x \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + C \right)' &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 \cdot (2\sqrt{2})^2}{(\sqrt{7})^2}}} \cdot \left(x \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{8x^2}{7}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{7}(7-8x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7-8x^2}} = \frac{1}{7-8x^2} \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$$

Решение:

$$\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} x + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} x + C \right)' = \frac{1}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} = \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}$$

$$3) \int \frac{2x \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{2x \sin^2 x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int 2x dx + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x} = x^2 + \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \\ &= x^2 + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = x^2 - \operatorname{ctg} x - x + C. \end{aligned}$$

Проверка:

$$(x^2 - \operatorname{ctg} x - x + C)' = 2x - 1 + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{2x \sin^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} = \frac{2x \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$4) \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

Решение:

$$\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx + \int \frac{x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4 + 1} dx \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctgt} + C = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctgx}^2 + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctgx}^2 + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x^4 + 1)'}{x^4 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2)'}{x^4 + 1} + C' = \frac{4x^3}{4(x^4 + 1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^4 + 1} = \frac{x^3}{x^4 + 1} + \frac{x}{x^4 + 1} = \frac{x^3 + x}{x^4 + 1}$$

5) $\int \frac{e^{2x}}{e^x - e^{-x}} dx.$

Решение:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x - e^{-x}} dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{array} \right| \frac{e^{2x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x}}{e^x} = \int \frac{t^2 \frac{1}{t}}{t - \frac{1}{t}} dt = \int \frac{t dt}{t^2 - 1} = \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 - 1} dt + \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = t + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) + C = e^x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) + C.$$

Проверка:

$$\left(e^x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) + C \right)' = e^x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} \cdot \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)' + C' = e^x + \frac{e^x + 1}{2(e^x - 1)} \cdot \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x + 1)'(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = e^x + \frac{e^x + 1}{2(e^x - 1)} \cdot \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = e^x + \frac{(e^x + 1)(e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x)}{2(e^x - 1)(e^x + 1)^2} = e^x + \frac{2e^x}{2(e^x - 1)(e^x + 1)} = e^x + \frac{e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x(e^{2x} - 1) + e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{3x} - e^x + e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{2x}}{e^x - e^{-x}}$$

6) $\int (3^x + 5^{2x}) dx.$

Решение:

$$\int (3^x + 5^{2x}) dx = \int 3^x dx + \int 5^{2x} dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{25^x}{\ln 25} + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{25^x}{\ln 25} \right)' = \frac{3^x \ln 3}{\ln 3} + \frac{25^x \ln 25}{\ln 25} = 3^x + 25^x = 3^x + 5^{2x}$$

$$7) \int \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

Решение:

$$\int \frac{1 + \ln x}{x} dx = \left. \frac{\ln x = t}{\frac{1}{x} dx = dt} \right| = \int (1+t) dt = \int dt + \int t dt = t + \frac{t^2}{2} = \ln x + \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Проверка:

$$\left(\ln x + \frac{\ln^2 x}{2} \right)' = \frac{1}{x} + \frac{2 \ln x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$8) \int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left. \frac{\arccos x = t}{-\frac{dt}{\sqrt{1-x^2}} = dt} \right| = -\int t^3 dt - (-\arccos x) = \\ &= -\frac{t^4}{4} + \arccos x = -\frac{\arccos^4 x}{4} + \arccos x + C. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\left(-\frac{\arccos^4 x}{4} + \arccos x + C \right)' = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4 \arccos^3 x}{-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$9) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x}}.$$

Решение:

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x}} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

Проверка:

$$\left(-\ln |\cos x| + C \right)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

Тесты

1) Количество первообразных для непрерывной на интервале (a; b) функции $y = f(x)$:

- a) равно одна a) равно одна c) бесконечное количество d) равно две

2) Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то также первообразными являются функции вида (C — некоторая константа):

- a) $F(x)+C$ b) $CF(x)$ c) $(F(x)):C$ d) первообразных больше нет

3) Выберите неверное правило:

- a) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ b) $\int dx = x + C$ c) $\int (f(x) \cdot g(x))dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$ d) $\int \cos x dx = \sin x + C$

4) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ то:

- a) $\int f(ax+b)dx = aF(ax+b) + C$ b) $\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C$ c) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ d) $\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C + a$

5) Формулу интегрирования по частям в кратной форме можно записать в виде:

- a) $\int u dv = uv + \int v du$ b) $\int u dv = uv - \int v du$ c) $\int u dv = uv - \int u dv$ d) $\int u dv = \int v du$

6) Первообразной для функции $\cos x$ является функция:

- a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $-\sin x$ d) $-\cos x$

7) Первообразной для функции $2x$ не является функция:

- a) x^2 b) $x^2 + 1$ c) $2x^2$ d) $x^2 - 2$

8) Неопределенный интеграл $\int \frac{x+1}{x} dx$

- a) $x + \ln|x| + C$ b) $1 + \ln|x| + C$ c) $x + 1$ d) C

9) Неопределенный интеграл $\int e^x dx$

- a) $x + C$ b) $e + C$ c) C d) $e^x + C$

10) Не берущимся интеграл :

- a) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ b) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$ c) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ d) $\int \frac{1}{x} dx$

Ответы на Тесты										
Вопросы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответы	с	а	с	с	b	а	с	а	d	а

Литература

- 1) Альсевич Л.А., Мазаник С.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. Мн.:БГУ, 2000.
- 2) Альсевич Л.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. Мн.: Высшэйшая школа, 1990.
- 3) Апатенок Р.Ф. и др. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. Мн.: Высшэйшая школа, 1990.
- 4) Баврин И.И. Высшая математика. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 616 с.
- 5) Баврин И.И. Высшая математика. М.: Просвещение, 1980. 384с.
- 6) Богданов Ю.С. Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Мн.: Изд-во БГУ. 1974. 176 с.