Государственный комитет связи и информатизации, и телекоммуникационных технологий Республики Узбекистан

Нукусский филиал

Ташкентского Университета Информационных Технологий

Кафедра “Естественных и общепрофессиональных дисциплин”

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

По предмету Дискретная математика

На тему “Бинарные отношения”

Подготовил: Студент II-го курса группы 718-11 по специальности “Информатика и информационные технологии” АяпбергеновБахыт

Принял: к. ф-м. н. АрзиевАллабай

Нукус 2013

План:

Бинарные отношения

Бинарные отношения служат простым и удобным аппаратом для весьма широкого круга задач. Язык бинарных и *n*-арных отношений используется во многих прикладных (для математики) областях, например, таких как математическая лингвистика, математическая биология, математическая теория баз данных. Широкое использование языка бинарных отношений легко объясняется - геометрический аспект теории бинарных отношений есть попросту теория графов.

Введем необходимые определения.

Определение 1.1. *Декартовым произведением* множеств ***X*** и ***Y*** называется множество ***X*x*Y*** всех упорядоченных пар **(*x*, *y*)** таких, что ***xX***, ***yY***.

Определение 1.2. *Соответствием* между множествами ***X*** и ***Y*** (или соответствием из ***X*** в ***Y***) называется любое подмножество декартова произведения ***X*x*Y***. Если множества ***X*** и ***Y*** совпадают, то соответствие между множествами ***X*** и ***Y*** называют также *бинарным отношением* на множестве ***X***.

Пример 1.1. Пусть ***X* = {*a*, *b*, *c*, *d*}**, ***Y* = {*1*, *2*, *3*, *4*, *5*}**. Тогда множество кортежей **a={(*a*, *1*), (*b*, *2*), (*c*, *3*), (*d*, *4*)}** являются соответствием из ***X*** в ***Y***.

Отметим, что обычно соответствия задаются не путем указания подмножества а декартова произведения *X*x*Y*, а путем указания свойства пар (*x*, *y*), принадлежащих этому подмножеству

а. Например, отношение **a= {(*4*, *4*), (*3*, *3*), (*2*, *2*), (*4*, *2*)}** на множестве ***X* = {*4*, *3*, *2*}** можно определить как свойство "Делится" на этом подмножестве целых чисел.

Хорошо известными примерами отношений из школьного курса математики являются:

- на множестве целых чисел **Z** отношения "делится", "делит", "равно", "больше", "меньше", "взаимно просты";
- на множестве прямых пространства отношения "параллельны", "взаимно перпендикулярны", "скрещиваются", "пересекаются", "совпадают";
- на множестве окружностей плоскости "пересекаются", "касаются", "концентричны".

Факт принадлежности кортежа **(*x*, *y*)** соответствию **а**, часто обозначают с помощью так называемой инфиксной формы записи: *x*a*y*. Типичными примерами таких записей из курса математики являются: ***x* >*y*, *a* = *b*, *84*, *m*||*l*, *ab*** и т. п.

Отношения могут задаваться формулами:

- формула$y = x^2 + 5x - 6$,задает бинарное отношение на множестве действительных чисел;

- формула***x* + *y* = любовь**,задает бинарное отношение на множестве людей. Этому отношению принадлежит любая пара людей, между которыми существует любовь.

Задание отношений в виде формул достаточно широко распространено. Об этом свидетельствуют многочисленные надписи на деревьях заборах или стенах домов типа:

"**Вася + Таня = любовь**",

увековечивающие принадлежность конкретной пары (Вася, Таня) отношению "любовь".

Рассмотрим еще три формы представления бинарных отношений: матричное представление и два графических представления. В качестве носителя отношения для иллюстрирующих примеров будем использовать множество $X = \{a, b, c, d, e\}$.

Вначале рассмотрим метод, восходящий к аналитической геометрии. Начертим пару взаимно перпендикулярных осей (***OX***- горизонтальная ось, а ***OY***- вертикальная ось) и на каждой отметим точки, представляющие элементы множества X.

Считая метки a, b, c, d, eкоординатами точек на горизонтальной и вертикальной осях, отметим на плоскости точки с координатами (x, y) такими, что (x, y) . На рисунке 2 изображено множество точек, соответствующее отношению **a= {(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (e,b), (e, e)}**.

Другой широко распространенный способ представления отношений основан на использовании ориентированных графов. При таком представлении элементы множества Xизображаются вершинами графа (точками плоскости), а элементы (x, y) отношения а дугами (стрелками), соединяющими первую компоненту xотношения со второй компонентой y.

Для бинарных отношений, определенных на конечных множествах, часто используется матричный способ задания. Пусть на некотором конечном множестве Xзадано отношение а. Упорядочим каким-либо образом элементы множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и определим *матрицу отношения* $A = [a_{ij}]$ следующим образом:

Часто матрицу отношения называют булевой, чтобы подчеркнуть, что ее элементами являются только нули и единицы.

Бинарные отношения – это отношения между элементами двух множеств.

Пример.

X={2, 3}, *Y={3, 4, 5}.*

$X\times Y=\{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3,5)\}$.

$R\subseteq X\times Y$

R_1 – ”$X<Y$” $R_1=\{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

R_2 – ”$X\geq Y$” $R_2=\{(3,3)\}$

R_3 – ”$X>Y$” $R_3=\{\varnothing\}$

Способы задания бинарных отношений

1. Любое отношение может быть задано в виде **списка**, элементами которого являются пары, определяемые этим отношением.

Пример.

$A=\{2,3,5,7\}$; $B=\{24,25,26\}$;

$A\times B=\{(2,24),(2,25),(2,26),(3,24),(3,25),(3,26),(5,24),(5,25),$

$(5,26),(7,24),(7,25),(7,26)\}$

$R\subseteq A\times B$

R—“*бытьделителем*”,

$R=\{(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)\}$

2. Бинарное отношение может быть задано с помощью ***матрицы***.

$R\subseteq X\times Y$

$|X|=n$, $|Y|=m$.

n – количество строк,

m – количество столбцов.

Ячейка (i,j) матрицы соответствует паре (x_i,y_j) элементов, где $x_i\in X$, а $y_j\in Y$.

В ячейку (i,j) помещается 1, если $(x_i,y_j)\in R$.

В ячейку (i,j) помещается 0, если $(x_i,y_j)\notin R$.

***Пример*.**

A={2,3,5,7}; *B={24,25,26};*

R— “быть делителем”

R={(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)}

A \ B	24	25	26
2	1		1
3	1		
5		1	
7			

3. Бинарное отношение ***R*** на множествах ***X*** и ***Y*** может быть задано ***графически***.

Если пара (x_i,y_j) принадлежит отношению ***R***, соединяем изображенные точки x_i, y_j линией, направленной от первого элемента пары ко второму.

Направленные линии, соединяющие пары точек, называются ***дугами***, а точки, обозначающие элементы множеств – ***вершинами*** графа.

***Пример*.**

A={2,3, 5, 7}; *B={24,25,26}.*

R— “быть делителем”;

R={(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)}.

Частные случаи отношений

R– бинарное отношение на множестве ***A***: $R \subseteq A^2$.

$R=A^2$ –***полное*** отношение.

R=Ø –***пустое*** отношение.

Если отношение содержит все возможные пары вида ***(a, a)*** и не содержит других пар элементов, то такое отношение называется ***тождественным*** (***R***=***E***).

Свойства бинарных отношений.

1. Рефлексивность.

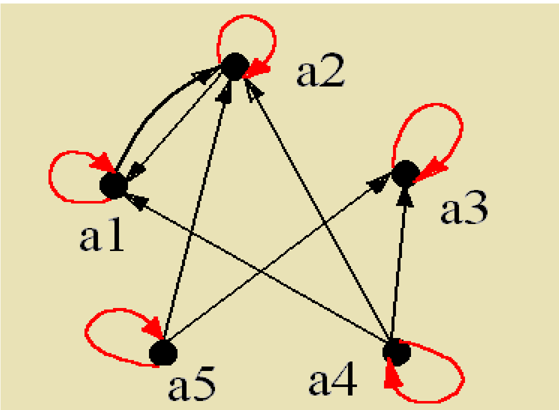
Отношение ***R*** на множестве ***X*** называется **рефлексивным**, если для любого $x \in X$ имеет место ***xRx***, то есть, каждый элемент $x \in X$ находится в отношении ***R*** к самому себе.

Все диагональные элементы матрицы равны 1; при задании отношения графом каждый элемент имеет петлю – дугу ***(x, x)***.

<u>Пример</u>.

R_1 — “≤” на множестве вещественных чисел,

R_2— “иметь общий делитель” на множестве целых чисел.



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1			
a_2	1	1			
a_3			1		
a_4	1	1	1	1	
a_5		1	1		1

2. Антирефлексивность.

Отношение ***R*** на множестве ***X*** называется **антирефлексивным**, если из x_1Rx_2 следует, что $x_1 \neq x_2$.

Все диагональные элементы являются нулевыми; при задании отношения графом ни один элемент не имеет петли – нет дуг вида ***(x,x).***

<u>Пример</u>.

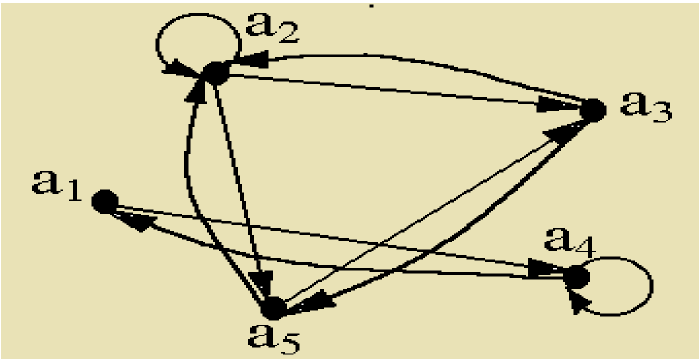
R_1 — “<” на множестве вещественных чисел,

R_2— “*быть сыном*” на множестве людей.

3. Симметричность.

Отношение R на множестве X называется **симметричным**, если для пары $(x_1,x_2)\in X^2$ из x_1Rx_2следует x_2Rx_1 (иначе говоря, для любой пары R выполняется либо в обе стороны, либо не выполняется вообще).

Матрица симметричного отношения является симметричной относительно главной диагонали, а в задающем графе для каждой дуги из x_iв x_k существует противоположно направленная дуга из x_k в x_i.



***Пример*.**

R_1 — “=” на множестве вещественных чисел,

R_2 — “быть родственником” на множестве людей.

4. Асимметричность.

Отношение R называется ***асимметричным***, если для пары $(x_1,x_2)\in X^2$ из x_1Rx_2 следует, что не выполняется x_2Rx_1(иначе говоря, для любой пары R выполняется либо в одну сторону, либо не выполняется вообще).

***Пример*.**

R_1 — “>” на множестве вещественных чисел,

R_2 — “*быть сыном*” на множестве людей.

5. Антисимметричность.

Отношение R называется **антисимметричным**, если из x_1Rx_2 и x_2Rx_1 следует, что $x_1=x_2$.

***Пример*.**

R_1 **— “≤”** на вещественной оси **.**

R_2 **—** *“быть делителем”*–на множестве действительных чисел.

6. Транзитивность.

Отношение R называется **транзитивным**, если для любых x_1,x_2,x_3 из x_1Rx_2 и x_2Rx_3 следует x_1Rx_3.

В графе, задающем транзитивное отношение R, для всякой пары дуг таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья дуга, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй.

<u>Пример</u>.

R— "≤" и "<" на множестве действительных чисел – ***транзитивны.***

7. ***Антитранзитивность.***

Отношение R называется **антитранзитивным**, *если для любых x_1,x_2,x_3 из x_1Rx_2 и x_2Rx_3 следует, что x_1Rx_3 не выполняется.*

<u>Пример</u>.

R_1 — "*пересекаться* ***с"*** на множестве отрезков,

R_2 — "*быть отцом****"*** на множестве людей.

Обратное отношение

Пусть **R** – бинарное отношение.

Обратное отношение к **R** обозначается $\mathbf{R^{-1}}$.

Упорядоченная пара **(y,x)** принадлежит $\mathbf{R^{-1}}$ тогда и только тогда, когда **(x,y)** принадлежит **R**.

Если $\mathbf{R\subseteq X^2}$, то $\mathbf{R^{-1}\subseteq X^2}$, где **X** – некоторое множество.

Если бинарное отношение задано на двух множествах **X** и **Y** – $\mathbf{R\subseteq X\times Y}$, то $\mathbf{R^{-1}\subseteq Y\times X}$.

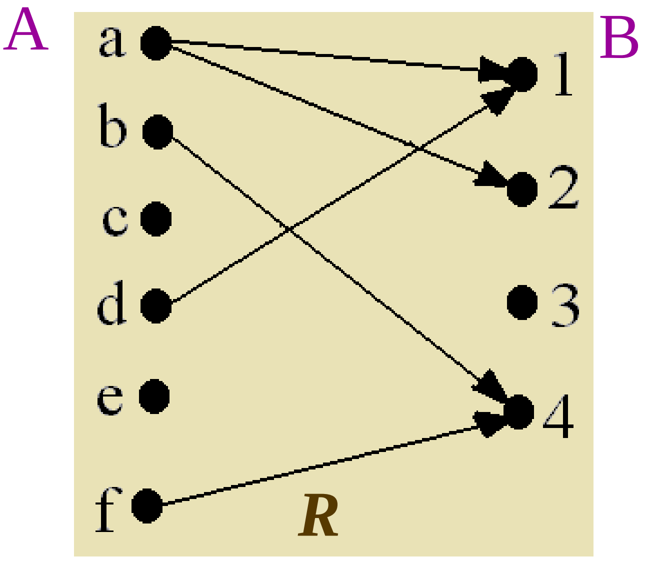
<u>Пример</u>.

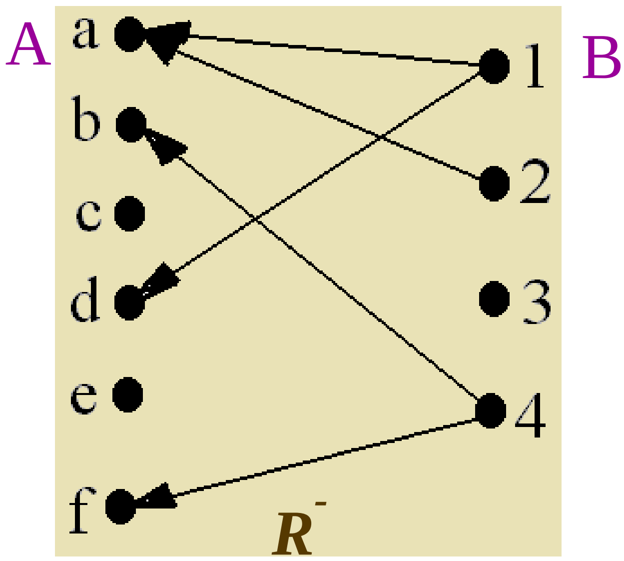
A={a,b,c,d,e,f}, B={1,2,3,4}

$R\subseteq A\times B$={(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,1),(c,2),(c,3),(c,4),(d,1),(d,2),(d,3),(d,4),(e,1),(e,2),(e,3),(e,4),(f,1),(f,2),(f,3),(f,4)};

R={(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)};

R^{-1}={(1,a),(2,a),(4,b),(1,d),(4,f)}.





Композиция отношений

Пусть ***R*** и ***S* – отношения**,

R*$\subseteq$*X*$\times$*Y, ***S*$\subseteq$*Y*$\times$*Z***, где ***X, Y, Z* – некоторые множества.**

Композицией отношений **R** и **S** называется **отношение**, состоящее из упорядоченных пар **(x,z)**, **x$\in$X**, **z$\in$Z**, для которых существует элемент **y$\in$Y** такой, что выполняются условия **(x,y)$\in$R**, **(y,z)$\in$S**.

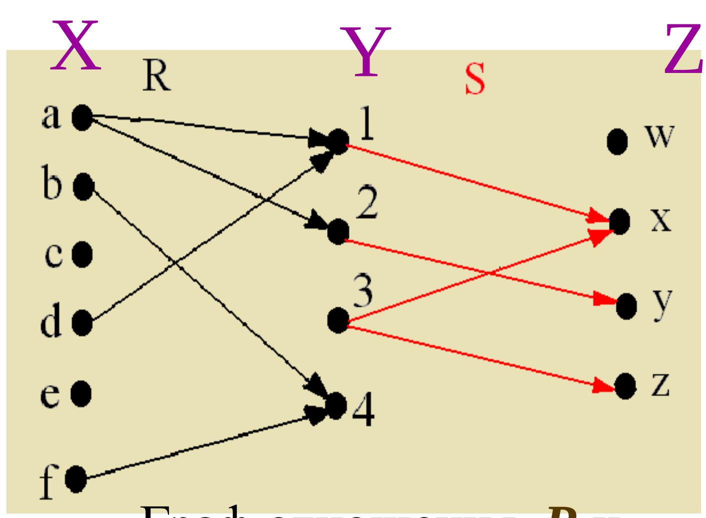
Композиция отношений **R** и **S** обозначается **S ° R**.

***<u>Пример</u>*.**

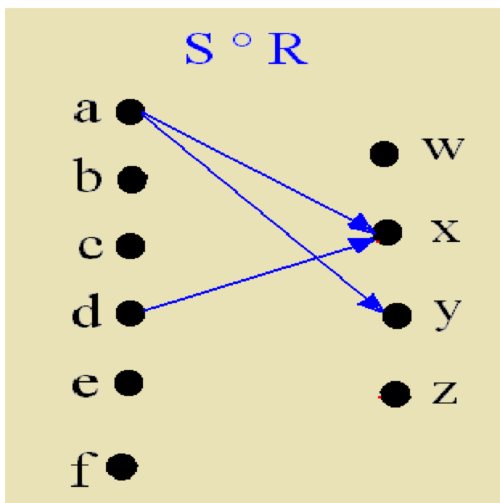
X={a,b,c,d,e,f}, Y={1,2,3,4} , Z={w,x,y,z}.

R$\subseteq$X$\times$Y   *R={(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)}*,

S$\subseteq$Y$\times$Z   *S={(1,x),(2,y),(3,x),(3,z)}.*



Граф отношения ***R*** и отношения



Граф отношения ***S °R***

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение называется **отношением эквивалентности** (обозначается **~**), если оно:

1) рефлексивно;

2) симметрично;

3) транзитивно.

<u>Пример</u>.

R_1— “=” на любом множестве.

R_2— “учиться в одной группе” на множестве студентов университета.

Отношение порядка

Бинарное отношение называется **отношениемчастичного порядка**(обозначается $\leq$), если оно:

1) рефлексивно;

2) антисимметрично;

3) транзитивно.

<u>Пример</u>.

R_1— “являться нестрогим включением”, заданное на системе множестве.

Если на множестве задано отношение частичного порядка, то это множество называется **частично упорядоченным.**

Применение свойств бинарных отношений

$A=\{1,2,3,4\};$

$R_1 \subseteq A^2;$ $R_2 \subseteq A^2.$

$R_1=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\};$

$R_2=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}.$

	***R*₁**	***R*₂**
Рефлексивность	+	
Антирефлексивность	− +	
Симметричность −		
Асимметричность − −	−	+
Антисимметричность		
Транзитивность −	−	+
Антитранзитивность + −		
Эквивалентности −		
Толерантности − −		
Частичногопорядка − −		
Строгогопорядка −	−	+

Образцы решения задач

Задача 1. Бинарное отношение Γ на множестве $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ задано характеристическим свойством $x\rho y : "x + y = 7"$.

Требуется:

1)Составить список элементов множества U^2.

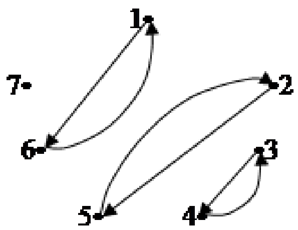
2)Составить график, матрицу инциденций и граф отношения.

Решение.

1) $U^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),),(1,7),(2,1),(2,2),(2,3),\dots,(7,7)\}$

(всего 49 пар элементов).

2) $\Gamma = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ – график



$$J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

отношения.

– матрица инциденций отношения. – граф отношения.

Задача 2. Бинарные отношения на множестве $A = \{1,2,3,4\}$ заданы двустрочными матрицами: $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти расстояния между этими отношениями, используя формулы линейного и евклидова расстояния.

Решение. Запишем матрицы инциденций этих отношений:

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{\Gamma_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейное расстояние между отношениями находим по формуле:

$$d_L(\Gamma_1,\Gamma_2) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left|p_{ij} - q_{ij}\right|,$$

евклидово расстояние:

$$d_E(\Gamma_1,\Gamma_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j}^{4}\left(p_{ij} - q_{ij}\right)^2},$$

где p_{ij}, q_{ij} элементы матриц J_{Γ_1}, J_{Γ_2}.

Очевидно, что $\left|p_{ij} - q_{ij}\right| = \left(p_{ij} - q_{ij}\right)^2$, а поэтому $d_E(\Gamma_1,\Gamma_2) = \sqrt{d_L(\Gamma_1,\Gamma_2)}$

Получаем:

$$d_L(\Gamma_1,\Gamma_2) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left|p_{ij} - q_{ij}\right| = (|0-1|+|0-1|+|0-1|)+(|1-0|+|1-1|)+|1-0|+|1-0| = 6;$$

$$d_E(\Gamma_1,\Gamma_2) = \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$

Аналогично:

$$d_L(\Gamma_1,\Gamma_3) = |0-1| + (|1-0| + |1-0| + |0-1|) + (|0-1| + |1-0|) + (|0-1| + |1-0|) = 8;$$

$$d_E(\Gamma_1,\Gamma_3) = \sqrt{8} \approx 2{,}83.$$

$$d_L(\Gamma_2,\Gamma_3) = (|1-0| + |0-1| + |1-0| + |1-0|) + (|1-0| + |0-1|) + |0-1| + |0-1| = 8;$$

$$d_E(\Gamma_2,\Gamma_3) = \sqrt{8} \approx 2{,}83.$$

Задача 3. Бинарные отношения Γ_1 и Γ_2 на множестве $U = \{1,2,3,4\}$ заданы характеристическими свойствами $x\rho_1 y :"x^2 + y^2 \geq 10"$, $x\rho_2 y :"x^2 - y^2 \leq 0"$.

Требуется:

1) записать матрицы инциденций этих отношений,

2) найти композиции $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$,

3) проиллюстрировать решение с помощью графов.

Решение.

1) Прежде, чем записывать матрицы инциденций отношений, выпишем их графики:

$$\Gamma_1 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\},$$

$$\Gamma_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),4,4)\}.$$

По графикам запишем матрицы инциденций:

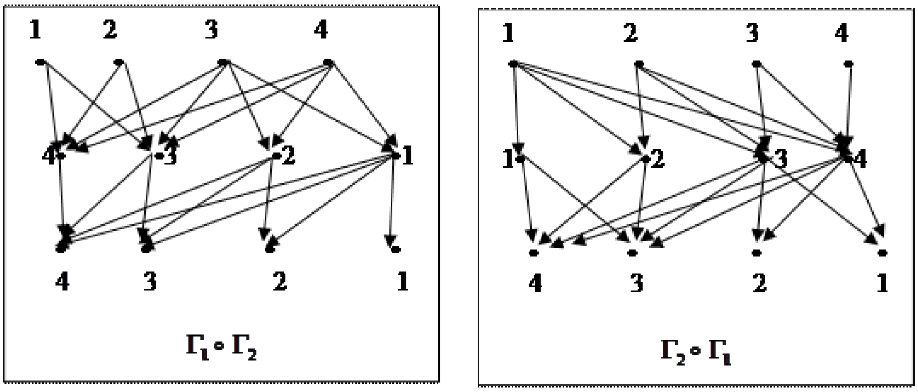
$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Композиции $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ найдем, перемножив матрицы $J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2}$ и $J_{\Gamma_2} \cdot J_{\Gamma_1}$ по правилу максимина:

$s_{ij} = \max(\min(p_{i1}, q_{1j}), \min(p_{i2}, q_{2j}), \min(p_{i3}, q_{3j}) \min(p_{i4}, q_{4j}))$, где p_{ij} и q_{ij} -элементы матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}, s_{ij} - элемент произведения матриц.

$$J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



$\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$

3) Представим отношения $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ с помощью двудольных графов.

Задача 4. На множестве $U = \{1,2,3,4\}$ заданы бинарные отношения:

$\Gamma_1 = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,4)\}$ и

$\Gamma_2 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$. Требуется определить, какое из них является транзитивным.

Решение. Запишем матрицы инциденций отношений:

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение транзитивно, если квадрат его матрицы инциденций не больше самой матрицы: $J_\Gamma \geq J_\Gamma^2$.

Будем возводить в квадрат матрицы инциденций отношений Γ_1 и Γ_2 и сравнивать полученные результаты с самими матрицами инциденций.

$$J_{\Gamma_1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторая и четвертая строки матрицы $J_{\Gamma_1}^2$ больше соответствующих строк матрицы J_{Γ_1}, т.е. $J_{\Gamma_1} < J_{\Gamma_1}^2$.Следовательно, отношение Γ_1 не является транзитивным.

$$J_{\Gamma_2}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_{\Gamma_2}.$$

Поскольку $J_{\Gamma_2} \geq J_{\Gamma_2}^2$, отношение Γ_2 транзитивно.

Задача5. На плоскости заданы пять прямых:

$a: 2x - 3y + 4 = 0$, $b: 2x + 3y + 1 = 0$, $c: -4x + 6y + 5 = 0$,
$d: 4x - 3y - 5 = 0$, $l: 3 - 10x - 15y = 0$.

На множестве прямых $U = \{a, b, c, d, l\}$ задано отношение E:"прямая p параллельна или совпадает с прямой q", $p, q \in U$.

Требуется:

1) Доказать, что E является отношением эквивалентности.

2) Записать фактор множество U/E.

3) Записать характеристические функции каждого класса.

Решение.

1) Напомним, что две прямые параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны.
2) Перепишем уравнения прямых a, b, c, d, l в виде уравнений прямых с угловым коэффициентом и начальной ординатой:

$$a: y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}, \quad k_a = \frac{2}{3}, \quad b: y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}, \quad k_b = -\frac{2}{3},$$

$$c: y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}, \quad k_c = \frac{2}{3},$$

$$d: y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}, \quad k_d = \frac{4}{3}, \quad l: y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}, \quad k_l = -\frac{2}{3}.$$

Сравнение угловых коэффициентов прямых позволяет записать график отношения E:

$$\mathrm{E} = \{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c),(b,b),(b,l),(l,b),(l,l),(d,d)\}.$$

Запишем матрицу отношения E:

$$J_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Все элементы главной диагонали матрицы J_E единицы, следовательно, E – рефлексивное отношение.

б) Матрица J_{Σ} симметрична относительно главной диагонали, следовательно, Ε – симметричное отношение.

в) Для проверки транзитивности отношения найдем матрицу J_{Σ}^2 :

$$J_{\Sigma}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_{\Sigma}.$$

$J_{\Sigma} = J_{\Sigma}^2$, следовательно, Ε – транзитивное отношение.

Отношение Ε рефлексивно,симметрично и транзитивно, следовательно Ε –отношение эквивалентности.

2) Отношение эквивалентности Ε разбивает множество U на непересекающиеся классы эквивалентности, объединение которых составляет все множество U . В один класс попадают элементы,связанные друг с другом отношением Ε, в разные классы– этим отношением не связанные.

Перебирая элементы множества U ,и записывая их образы и прообразы в отношении Ε,получим классы эквивалентности:

$a,c \to \{(a,a),(a,c),(ca),(cc)\}$;

$b,l \to \{(b,b),(b,l),(l,b),(l,l)\}$;

$d \to \{(d,d)\}$.

Отсюда получаем:

$U/\mathrm{E} = \{\{a,c\},\{b,l\},\{d\}\}$.

3) Характеристические функции каждого класса запишем в виде пятимерных двоичных векторов:

$\mu_{\{ac\}} = (1,0,1,0,0)$, $\mu_{\{bJ\}} = (0,1,0,0,1)$, $\mu_{\{d\}} = (0,0,0,1,0)$.

ТЕСТЫ

1. Бинарным отношением называется …

a) отношения между элементами двух множеств*

b) отношения между элементами трех множеств

c) отношения между элементами множеств

2. Двухместное отношение, состоящее из пар элементов (y, x), полученных перестановкой пар элементов (x, y) данного отношения R называется …

a) Рефлексивное отношение

b) Обратное отношение*

c) Транзитивное отношение

3. Какими свойствами могут обладать бинарные отношения ?

a) Рефлексивность, Симметричность, Транзитивность

b) Антирефлексивность, Антисимметричность, Асимметричность

c) Оба ответа верны*

4. Взаимо-обратные отношения – это …

a) двухместное отношение, состоящее из пар элементов (y, x), полученных перестановкой пар элементов (x, y) данного отношения R.

b) отношения, являющиеся обратными друг по отношению к другу. Область значений одного из них служит областью определения другого, а область определения первого — областью значений другого.*

c) отличающееся тем, что для любых x и y из xRy и $xR^{-1}y$ следует x = y (то есть R и R^{-1} выполняются одновременно лишь для равных между собой членов).

5. Асимметричность эквивалентна одновременной …

a) антирефлексивности и антисимметричности отношения* *b)* нет рпавильного ответа

c) симметричности отношения

Использованные литературы и источники

- *А. И. Мальцев.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
- Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. – М.: Вузовская книга, 2002 – 268 с.
- ЛавровИ.А., максимоваЛ.Л. Задачипотеориимножеств, математическойлогикеитеорииалгоритмов.-М.: Наука, 1984.-224с.

- www.google.ru
- www.yandex.ru
- www.vunivere.ru
- www.topref.ru
- www.rsl.ru