ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ ПО СВЯЗИ,
ИНФОРМАТИЗАЦИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

СТУДЕНТКИ 720 08 ГРУППЫ
СУНЧИЛИЕВОЙ ЛЮЗИИ

Сдала: **Л.Сунчилиева**

Принял: **к.ф.-м.н. А.Арзиев**

Нукус 2013

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

План:

Ключевые слова. Комплексное число, действительная и мнимая часть, комплексно-сопряженные числа, формула Муавра,

1. Понятие комплексного числа

Определение. Комплексным числом *z* называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = Re\, z$), а b- **мнимой частью** ($b = Im\, z$).

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

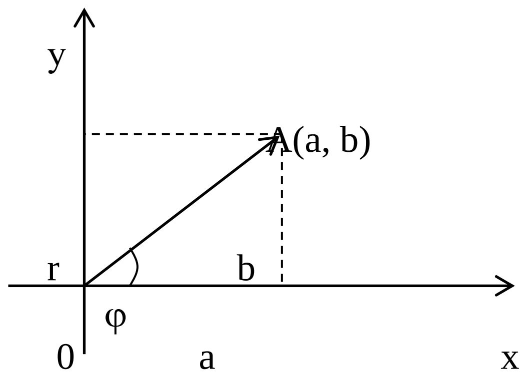
$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$$

3. Операции над комплексными числами

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) Сложение и вычитание.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) Умножение.

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

4) Возведение в степень. Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.** (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик)

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

Пример. Найти формулы sin2φ и cos2φ.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда с одной стороны

$$z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi).$$

По формуле Муавра:

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Приравнивая, получим

$$\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$$

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Получили известные формулы двойного угла.

4. Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z$; $z = x + iy$.

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Вывод этого уравнения будет рассмотрен позднее. (См.).

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

2) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $(e^z)^m = e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin\ y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$z = re^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

5. История возникновения комплексного числа

Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах»Кардано (1545), который счёл их непригодными к употреблению. Пользу мнимых величин, в частности, при решении кубического уравнения, в так называемом неприводимом случае (когда вещественные корни многочлена выражаются через кубические корни из мнимых величин), впервые оценил Бомбелли (1572). Он же дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами.

Выражения вида $a + b\sqrt{-1}$, появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть «мнимыми» в XVI—XVII веках, однако даже для многих крупных ученых XVII века алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной. Лейбниц, например, писал: «Дух божий нашёл тончайшую отдушину в этом чуде анализа, уроде из мира идей, двойственной сущности, находящейся между бытием и небытием, которую мы называем мнимым корнем из отрицательной единицы».[5]

Долгое время было неясно, все ли операции над комплексными числами приводят к комплексным результатам, или, например, извлечение корня может привести к открытию какого-то нового типа чисел. Задача о выражении корней степени n из данного числа была решена в работах Муавра (1707) и Котса (1722).

Символ $i = \sqrt{-1}$ предложил Эйлер (1777, опубликовал. 1794), взявший для этого первую букву слова лат. *imaginarius*. Он же распространил все стандартные функции, включая логарифм, на комплексную область. Эйлер также высказал в 1751 году мысль об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. К такому же выводу пришел д'Аламбер (1747), но первое строгое доказательство этого факта принадлежит Гауссу (1799). Гаусс и ввёл в широкое употребление термин «комплексное число» в 1831 году, хотя этот термин ранее использовал в том же смысле французский математик Лазар Карно в 1803 году.

Геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе Весселя (1799). Первые шаги в этом направлении были сделаны Валлисом (Англия) в 1685 году. Термины «модуль», «аргумент» и «сопряжённое число» ввёл Коши.

Арифметическая модель комплексных чисел как пар вещественных чисел была построена Гамильтоном (1837); это доказало непротиворечивость их свойств. Гамильтон предложил и обобщение комплексных чисел — кватернионы, алгебра которых некоммутативна.

2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Сложение комплексных чисел

<u>Пример 1</u> Сложить два комплексных числа $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 4-5i$

Решение. Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части: $z_1 + z_2 = 1+3i+4-5i = 5-2i$

Для комплексных чисел справедливо правило первого класса: $z_1 + z_2 = z_2 + x_1 -$ от перестановки слагаемых сумма не меняется.

2. Вычитание комплексных чисел

<u>Пример 2.</u> Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2+i$, $z_2 = \sqrt{3}+5i$

<u>Решение.</u> Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 - z_2 = -2+i-(\sqrt{3}+5i) = -2+i-\sqrt{3}-5i = -2-\sqrt{3}-4i$$

Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Просто действительная часть – составная: $-2-\sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так:

$$z_1 - z_2 = -2-\sqrt{3}-4i\,.$$

Рассчитаем вторую разность:

$$z_2 - z_1 = \sqrt{3}+5i-(-2+i) = \sqrt{3}+5i+2-i = 2+\sqrt{3}+4i$$

Здесь действительная часть тоже составная: $2+\sqrt{3}$

Чтобы не было какой-то недосказанности, приведу короткий пример с «нехорошей» мнимой частью: $-1+\sqrt{2}i+7-3i = 6+(\sqrt{2}-3)i$. Вот здесь без скобок уже не обойтись.

3. Умножение комплексных чисел

<u>Пример 3.</u> Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1-i$, $z_2 = 3+6i$

<u>Решение</u>. Очевидно, что произведение следует записать так:

$$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i)$$

Что напрашивается? Напрашивается раскрыть скобки по правилу умножения многочленов. Так и нужно сделать! Все алгебраические действия нам знакомы, главное, помнить, что $i^2 = -1$ **и быть внимательным**.

Далее,

$$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i) = 1\cdot 3 - i\cdot 3 + 1\cdot 6i - i\cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$$

Надеюсь, всем было понятно, что

$$-i\cdot 6i = -6i^2 = -6\cdot(-1) = +6$$

Как и сумма, произведение комплексных чисел перестановочно, то есть справедливо равенство: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

4. Деление комплексных чисел

<u>**Пример 4.**</u> Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i$, $z_1 = 7 - 6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. Составим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13+i}{7-6i}$$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Вспоминаем формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш <u>знаменатель</u>: $7-6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $(7+6i)$

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $(7+6i)$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $(7+6i)$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (помним, что $i^2 = -1$ и не путаемся в знаках!!!).

Распишем подробно:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}=\frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2}=\frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)}=$$
$$=\frac{85+85i}{49+36}=\frac{85+85i}{85}=1+i$$

Пример 5. Дано комплексное число $z=\frac{1}{\sqrt{3}+i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a+bi$).

Решение. Приём тот же самый – умножаем знаменатель и числитель на сопряженное знаменателю выражение. Снова смотрим на формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. В знаменателе уже есть $(a+b)$, поэтому знаменатель и числитель нужно домножить на сопряженное выражение $(a+b)$, то есть на $\sqrt{3}-i$:

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-(i)^2}=\frac{\sqrt{3}-i}{3+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}$$

5. Представление комплексного числа в тригонометрическом виде

Пример 6. Представить в тригонометрической форме число $z_1=1$. Найти его модуль и аргумент.

Решение. Очевидно, что $|z_1|=1$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1.$$

Очевидно, что $\varphi_1=0$ (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме:

$$z_1=\cos 0+i\sin 0.$$

Выполним проверочное действие: $z_1=\cos 0+i\sin 0=1+i*0=1$

Пример 7. Представить в тригонометрической форме число $z_2=2i$. Найти его модуль и аргумент.

Решение. Очевидно, что $|z_2|=2i$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=2.$$

Очевидно, что $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ (или 90 градусов). Таким образом, число в тригонометрической форме:

$$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}).$$

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):

$$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2(0 + i\cdot 1) = 2$$

Пример 8. Представить в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найти его модуль и аргумент.

Решение. Очевидно, что $|z_3| = -3$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Очевидно, что $\varphi_3 = \pi$ (или 180 градусов). На чертеже угол обозначен синим цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме:

$$z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Проверка: $z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1 + i\cdot 0) = -3$

Пример 9. Представить в тригонометрической форме число $z_4 = -4i$. Найти его модуль и аргумент.

Решение. Очевидно, что $|z_4| = 4$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_4| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Аргумент можно записать двумя способами: Первый способ:

$$\varphi_4 = \frac{3\pi}{2} \text{ (270 градусов)},$$

и, соответственно:

$$z_4 = 4(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}).$$

Проверка: $z_4 = 4(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 4(0 + i\cdot(-1)) = -4i$

Однако более стандартно следующее правило: **Если угол больше 180 градусов**, то его записывают со знаком минус и противоположной ориентацией («прокруткой») угла: $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ (минус 90 градусов). Легко заметить, что $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ – это один и тот же угол.

Таким образом, запись принимает вид:

$$z_4 = 4(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$$

Внимание! Ни в коем случае нельзя использовать четность косинуса, нечетность синуса и проводить дальнейшее «упрощение» записи:

$$z_4 = 4(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) \cancel{= 4(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})}$$

6. Возведение в степень комплексное число

<u>Пример 10.</u> Возвести в квадрат комплексное число $z = 2 + 3i$

Решение. Здесь можно пойти двумя путями, первый способ это переписать степень как произведение ножителей $z^2 = (2+3i)^2 = (2+3i)(2+3i)$ и перемножить числа по правилу умножения многочленов.

Второй способ состоит в применение известной школьной формулы сокращенного умножения $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$z^2 = (2+3i)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i.$$

<u>Пример 11.</u> Дано комплексное число $z = 3 + \sqrt{3}i$, найти z^{20}.

Решение.Что нужно сделать? Сначала нужно представить данной число в тригонометрической форме. Тринонометрическая форма этого числа имеет следующий вид:

$$z = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

Тогда, по формуле Муавра:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20}(\cos(20\cdot\frac{\pi}{6}) + i\sin(20\cdot\frac{\pi}{6})) = (2\sqrt{3})^{20}(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}$$

В большинстве случае угол следует упростить. Как упростить? Образно говоря, нужно избавиться от лишних оборотов. Один оборот составляет 2π радиан или 360 градусов. Смотрим сколько у нас оборотов в аргументе

$\frac{10\pi}{3} : \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ оборотов, в данном случае можно убавить один оборот: $\frac{10\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3}$. Понятно, что $\frac{10\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ – это один и тот же угол.

Таким образом, окончательный ответ запишется так:

$$z^{20}=(2\sqrt{3})^{20}(\cos\frac{4\pi}{6})+i\sin\frac{4\pi}{6}) .$$

<u>Пример 12.</u> Возвести в степень комплексные числа i^{10}, i^{33}, $(-i)^{21}$

Решение. Здесь тоже всё просто, главное, помнить знаменитое равенство.

Если мнимая единица возводится в четную степень, то техника решения такова:

$$i^{10}=(i^{2})^{5}=(-1)^{5}=-1$$

Если мнимая единица возводится в нечетную степень, то «отщипываем» одно «и», получая четную степень:

$$i^{33}=i\cdot i^{32}=i\cdot(i^{2})^{16}=i\cdot(-1)^{16}=i$$

Если есть минус (или любой действительный коэффициент), то его необходимо предварительно отделить:

$$(-i)^{21}=(-1)^{21}\cdot i^{21}=-i\cdot i^{20}=-i\cdot(i^{2})^{10}=-i\cdot(-1)^{10}=-i$$

3. ТЕСТЫ

1. Если z=3+4i, то $|z|-?$

&A) 5 B) -5 C) 3 D) 4 E) 4

2 Какое из следующих утверждений верно для комплексного числа z=4+3i

&A) $\operatorname{Re} z = 4,\ \operatorname{Im} z = 3,\ |z| = 4$ B) $\operatorname{Re} z = 4,\ \operatorname{Im} z = 3,\ |z| = 5$

C) $\operatorname{Re} z = 3,\ \operatorname{Im} z = 4,\ |z| = 4$ D) $\operatorname{Re} z = 3,\ \operatorname{Im} z = 4,\ |z| = 5$

E) нет верного ответа

3. Дополните формулу $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$

&A) $\cos n\varphi + i\sin n\varphi$ B) $\cos^n\varphi + i\sin^n\varphi$

C) $n\cos\varphi + in\sin\varphi$ D) $\cos\varphi + i\sin\varphi$

E) нет верного ответа

4. Вычислите $(1+i)^6$.

A) 8i &B) -8i C) 8 D) 8-8i E) 8+8i

5. Решение уравнения $z^2 + 1 = 0$ над множеством комплексных чисел имеет вид

A) $z = i$ B) $z = \pm 1$ &C) $z = \pm i$ D) $z = -i$ E) $z = +u$

6. Значение выражения $e^{i\pi}$ равно

A) 1 &B) -1 C) i D) 0 E) $-i$

7. Вычислите $2z_1 - 3z_2$, если $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 5 + 3i$.

A) $11 + 7i$ B) $11 - 7i$ C) $-11 + 7i$ &D) $-11 - 7i$ E) $-7 - 11i$

8. Вычислите $(1+i)^2$.

&A) $2i$ B) $-2i$ C) 2 D) -2 E) 0

9. Вычислите $\dfrac{z_1 + z_2}{z_3}$, если $z_1 = i,\ z_2 = 3 - 2i,\ z_3 = 1 - i$.

A) $2 - i$ &B) $2 + i$ C) $1 + 2i$ D) $1 - 2i$ E) 1

10 . Представьте число в тригонометрической форме $z = 2i$.

&A) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ B) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$

C) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

D) $\cos\pi + i\sin\pi$

E) нет верного ответа

11. Представьте число в тригонометрической форме $z = -5$.

A) $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

B) $-5(\cos\pi + i\sin\pi)$

&C) $5(\cos\pi + i\sin\pi)$

D) $\cos\pi + i\sin\pi$

E) нет верного ответа

12. Представьте число в алгебраической форме $z = e^{(\pi/2)i}$.

A) 1 &B) i C) -1 D) $-i$ E) $1+i$

13. Представьте число в алгебраической форме $z = \sqrt{2}e^{(\pi/4)i}$..

□ .

&A) $1+i$ B) $1-i$ C) -1 D) $-i$ E) i

14. Вычислите $(\cos 10^0 + i\sin 10^0)^9$..

A) 1 B) i C) -1 &D) $-i$ E) 0

15. Вычислите $(1+i)^6$.

A) 6 B) $-6i$ C) $8i$ &D) $-8i$ E) $8-6i$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Гусак А.А. Высшая математика. Том 1. Минск. Изд-во БГУ. 1983 год.**
2. **Баврин И.И. Высшая математика. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 616 с.**
3. **Гусак А.А., Бричикова Е. А., Гусак Г. М. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление. Мн.: Тетрасистемс, 2002.**
4. **Кастрица О.А. Высшая математика для экономистов. М.: Новое знание, 2009**
5. **Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного.**
6. **М.: Наука, 1976.**