ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ ПО СВЯЗИ,
ИНФОРМАТИЗАЦИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

СТУДЕНТА 720 08 ГРУППЫ

УРАЗБАЕВА БАТЫРА

Сдал: **Уразбаев Б.**

Принял: **к.ф.-м.н. А.Арзиев**

Нукус 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

.

План:
1. Вычисление определенного интеграла
2. Замена переменных
3. Интегрирование по частям
4. Формула прямоугольников
5. Формула трапеций
6. Формула парабол

1.Вычисление определенного интеграла

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел $a = const$, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла. Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Φ(x). Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: *Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.*

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница

Доказательство: Пусть *F(x)* – первообразная функции *f(x).* Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого х, т.е. при х = а:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a)$$

Тогда $$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

А при $x = b$: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

2.Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$
2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$
3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x=\sin t; \\ \alpha=0;\ \beta=\pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = $\pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

4.Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

5.Формула прямоугольников.

Если известны значения функции f(x) в некоторых точках $x_0, x_1, \dots, x_m$, то в качестве функции “близкой” к f(x) можно взять многочлен P(x) степени не выше m, значения которого в выбранных точках равны значениям функции f(x) в этих точках.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на n равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. При этом:

$$y_0 = f(x_0),\ \ y_1 = f(x_1),\ \ \dots\ ,\ y_n = f(x_n).$$

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \dots + y_{n-1}\Delta x$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \dots + y_n\Delta x$$

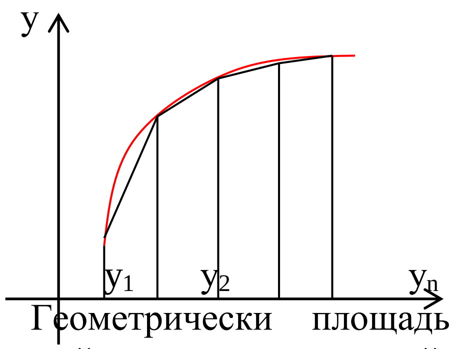
Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$ или

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ - любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

6.Формула трапеций.

Эта формула является более точной по сравнению с формулой прямоугольников. Подинтегральная функция в этом случае заменяется на вписанную ломаную.



Геометрически площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей вписанных трапеций. Очевидно, что чем больше взять точек n разбиения интервала, тем с большей точностью будет вычислен интеграл.

Площади вписанных трапеций вычисляются по формулам:

$$\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x;\quad \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x;\quad \dots\quad ,\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

После приведения подобных слагаемых получаем **формулу трапеций**:

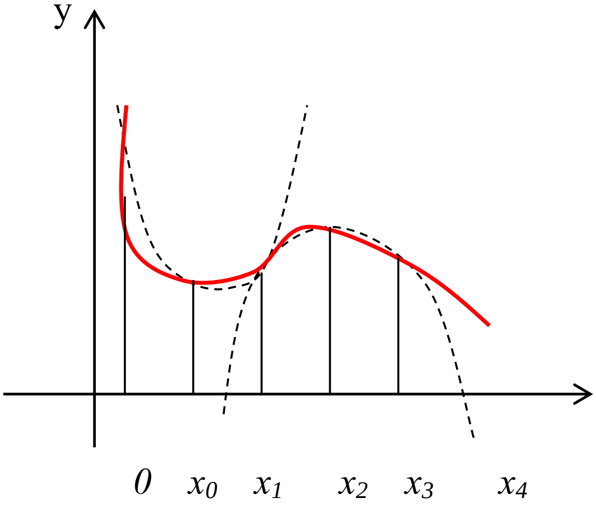
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

5.Формула парабол (формула Симпсона или квадратурная формула).

(Томас Симпсон (1710-1761)- английский математик)

Разделим отрезок интегрирования [a, b] на четное число отрезков (2m). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x) заменим на площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой второй степени с осью симметрии, параллельной оси Оу и проходящей через точки кривой, со значениями $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Для каждой пары отрезков построим такую параболу.



Уравнения этих парабол имеют вид $Ax^2 + Bx + C$, где коэффициенты A, B, C могут быть легко найдены по трем точкам пересечения параболы с исходной кривой.

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C \end{aligned} \qquad (1)$$

Обозначим $2h = x_2 - x_0$.

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right]\Bigg|_{x_0}^{x_2}$$

Если принять $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, то

$$S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) \qquad (2)$$

Тогда уравнения значений функции (1) имеют вид:

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = C$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

С учетом этого: $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$.

Отсюда уравнение (2) примет вид:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

………………………………………

Складывая эти выражения, получаем **формулу Симпсона:**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right]$$

Чем больше взять число m, тем более точное значение интеграла будет получено.

Пример. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

По формуле Симпсона получим:

$$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}dx \approx \frac{8+2}{6 \cdot 5}[y(-2) + y(8) + 2[y(0) + y(2) + y(4) + y(6)] + 4[y(-1) + y(1) + y(3) + y(5) +$$
$$+ y(7)]].$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	2.828	3.873	4	4.123	4.899	6.557	8.944	11.874	15.232	18.947	22.978

$$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}dx \approx \frac{8+2}{6 \cdot 5}[2.828 + 22.978 + 2[4 + 4.899 + 8.944 + 15.232] + 4[3.873 + 4.123 + 6.557 +$$
$$+ 11.874 + 18.947]] = 91.151$$

Точное значение этого интеграла – 91.173.

Как видно, даже при сравнительно большом шаге разбиения точность полученного результата вполне удовлетворительная.

Для сравнения применим к этой же задаче формулу трапеций.

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)=\frac{8+2}{10}\left(\frac{2.828+22.978}{2}+3.873+4+4.123+\right.$$
$$\left.+4.899+6.557+8.944+11.874+15.232+18.947\right)=91.352$$

Формула трапеций дала менее точный результат по сравнению с формулой Симпсона.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Вычислить определённые интегралы:

1. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-2x}$.

Решение.

$$\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-2x} = F(4)-F(3) = \int\limits_3^4 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\cos 2x dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\cos 2x dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 5x+\sin x)dx = \left(-\frac{\cos 5x}{5}-\cos x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -2\left(\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{5}+\cos\frac{\pi}{4}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{5\sqrt{2}}.$$

3. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = F(1)-F(0) = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

4. $\int\limits_e^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

Решение.

$$\int_e^{e^2}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int_e^{e^2}(\ln x)^{\frac{1}{2}}d(\ln x)=\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}\Big|_e^{e^2}=\frac{2}{3}\left((\ln e^2)^{\frac{3}{2}}-(\ln e)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

5. $\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$

Решение.

$$\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{1+x^2}=\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\ln(1+1^2)-\ln(1+0^2)=\ln 2$$

6. $\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$

Решение.

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}=\begin{bmatrix}2-6x-9x^2=\\=3-(3x+1)^2\end{bmatrix}=\int_{-\frac{1}{3}}^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{3-(3x+1)^2}}=\frac{1}{3}\int_{-\frac{1}{3}}^{\varphi}\frac{d(3x+1)}{\sqrt{3-(3x+1)^2}}$$

$$=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\frac{1}{3}}^{0}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\arcsin 0=\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\approx\frac{0.63}{3}\approx 0.21$$

7. $\int_0^1 x2^x dx$

Решение.

$$\int_0^1 x2^x dx=\begin{bmatrix}u=x; & du=dx\\ dv=2^x dx; & v=\dfrac{2^x}{\ln 2}\end{bmatrix}=\frac{x2^x}{\ln 2}\Big|_0^1-\frac{1}{\ln 2}\int_2^1 2^x dx=\frac{x2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{(\ln 2)^2}\Big|_0^1=$$

$$\frac{1\cdot 2^1}{\ln 2}-\frac{2^1}{(\ln 2)^2}-0+\frac{1}{(\ln 2)^2}=\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}=\frac{2\ln 2-1}{(\ln 2)^2}=\frac{\ln(4)-1}{(\ln 2)^2}$$

8. $\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$

Решение.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{bmatrix} u=\ln x; & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{x^2}; & v=-\dfrac{1}{x} \end{bmatrix} = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e =$$

$$= -\frac{\ln e}{e} + \frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} tgx\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(tg\frac{\pi}{4} - tg0\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

10. $\displaystyle\int_3^8 \frac{dx}{x^2-6x+34}$

Решение.

$$\int_3^8 \frac{dx}{x^2-6x+34} = \begin{bmatrix} x^2-6x+34=(x^2-2\cdot x\cdot 3+9)-9+34= \\ =(x-3)^2+25 \end{bmatrix} =$$

$$\int_3^8 \frac{dx}{(x-3)^2+25} = [d(x-3)=dx] = \int_3^8 \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+25} = \frac{1}{5} arctg\frac{x-3}{5}\Big|_3^8 =$$

$$\frac{1}{5}\left(arctg\frac{8-3}{5} - arctg\frac{3-3}{5}\right) = \frac{1}{5}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20}$$

ТЕСТЫ

1. Вычислить определенный интеграл $\int_{1}^{2} 2x^2 dx$

a)* $4\frac{2}{3}$ b) $4\frac{1}{3}$ c) $-4\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

2. Вычислить определенный интеграл $\int_{1}^{5} \frac{7dx}{x}$

a) $7\ln 2$ b) $7\ln 3$ c)* $7\ln 5$ d) $7\ln 4$

3. Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^{4} (8+2x-x^2)dx$

a)33 b)34 c)35 d) *36

4. Вычислить определенный интеграл $\int_{-3}^{1} (2x^2+3x-1)dx$

a)* $2\frac{2}{3}$ b) $2\frac{1}{3}$ c) $-2\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

5. Вычислить определенный интеграл $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$

a) ≈ 0.33 b)* ≈ 0.35 c) ≈ 0.3 d) ≈ 0.36

6. Вычислить определенный интеграл $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\cos^2 x+1}$

a)* $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{3}$ d) $-\frac{\pi}{4}$

7. Вычислить определенный интеграл $\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$

a) $-e-\sqrt{e}$ b)* $e-\sqrt{e}$ c) $e-\sqrt[3]{e}$ d) $e-\frac{1}{\sqrt{e}}$

8. Вычислить определенный интеграл $\int_{0}^{\pi/4} xtg^2 xdx$

a)* $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\pi}{16}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2xdx$

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c)* $\frac{\pi}{2}$ d) π

10. Вычислить определенный интеграл $\int_{0}^{\pi/3}(\cos x-\sin x)dx$

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ d) * $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Гусак А.А. Высшая математика. Том 1. Минск. Изд-во БГУ. 1983 год.**
2. **Бaврин И.И. Высшая математика. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 616 с.**
3. **Гусак А.А., Бричикова Е. А., Гусак Г. М. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление. Мн.: Тетрасистемс, 2002.**
4. **Кастрица О.А. Высшая математика для экономистов. М.: Новое знание, 2009**
5. **Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного.**
6. **М.: Наука, 1976.**