Государственный университет связи, информатизации и телекоммуникационных технологий Республики Узбекистан

Нукусский филиал ташкентского университета информационных технологий

САМОМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Студента 5330200 группы

Воробьёва Григория

Подготовил: **Воробьёв Г.**

Принял: **к.ф. – м.н. Арзиев А.**

Нукус - 2013

Содержание

План

1. Теорема (о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом).

2. Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом).

3. Формула Ньютона-Лейбница.

4. Исторические факты.

Ключевые слова: интеграл с переменным верхним пределом ,Формула Ньютона-Лейбница.

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то, для любого x, $a \le x \le b$, существует интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad (*)$$

который называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема (о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом).

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)$, определяемая равенством $(*)$, непрерывна на этом отрезке.

Доказательство.

Пусть x и $x+\Delta x$ - точки отрезка $[a,b]$. Т.к. $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и, следовательно, ограничена на этом отрезке, то существует число M такое, что для любого $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Поэтому

$$|F(x+\Delta x) - F(x)| = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \le \left| \int_a^{x+\Delta x} |f(t)dt| \right| \le$$

$$\le \left| \int_a^{x+\Delta x} Mdt \right| = M * |\Delta x|,$$

т.е $|F(x+\Delta x) - F(x)| \le M|\Delta x| \to 0$ при $\Delta x \to 0$, и функция непрерывна в точке x. **Теорема доказана**.

Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом).

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна в некоторой точке этого отрезка. Тогда функция (*) дифференцируема в точке x, и $F'(x) = f(x)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\right)=0 \qquad (**)$$

Оценим сверху модуль выражения под знаком предела в левой части этого равенства; имеем

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\left(\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_x^{x+\Delta x}f(x)dt\right)\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}\left(f(t)-f(x)\right)dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\Delta x}*\left|\int_x^{x+\Delta x}\left|f(t)-f(x)\right|dt\right|.$$

Т.к. функция f непрерывна в точке x, то для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при любом t, $|t-x|<\delta$, выполняется неравенство $|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Поэтому для указанных t

$$\left|\int_x^{x+\Delta x}\left|f(t)-f(x)\right|dt\right|\le\frac{\varepsilon}{2}*|\Delta x|<\varepsilon,$$

Окончательно

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|\le\frac{1}{|\Delta x|}*\frac{\varepsilon}{2}*|\Delta x|<\varepsilon,$$

если $|\Delta x|<\delta$. Это означает справедливость (**). **Теорема доказана**.

Следствие.

Если функция непрерывна на отрезке, то она имеет на этом отрезке первообразную. В качестве такой первообразной можно взять, например, интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и $\Phi(x)$ - какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (*)$$

Доказательство.

Одной из первообразных функции $f(x)$ является

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt;$$

две первообразные функции $f(x)$ различаются самое большее на константу, т.е.

$$\Phi(x) - \int_a^x f(t)dt = C.$$

Подставляя сюда $x = a$, получаем, что $C = \Phi(a)$. Поэтому

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

При $x = b$ получаем требуемую формулу. **Теорема доказана**.

Доказанную теорему часто называют основной теоремой интегрального исчисления. Фор-мула (*) называется формулой Ньютона-Лейбница; эту формулу часто записывают в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

правую часть при этом называют двойной подстановкой от a до b. Заметим еще, что формула Ньютона-Лейбница справедлива и при $a \geq b$.

На интеграл с переменным верхним пределом распространяются все правила и свойства определённого интеграла.

Исторические факты

Ещё до появления математического анализа данная теорема (в геометрической или механической формулировке) была известна Торричелли, Грегори и Барроу. Например, Барроу описал этот факт в 1670 году как зависимость между задачами на квадратуры и на проведение касательных. После создания Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчислений смысл формулы стал трактоваться чисто математически: операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны.

Ньютон сформулировал теорему словесно следующим образом: «Для получения должного значения площади, прилегающей к некоторой части абсциссы, эту площадь всегда следует брать равной разности значений z [первообразной], соответствующих частям абсцисс, ограниченным началом и концом площади». У Лейбница запись данной формулы в современном виде также отсутствует, поскольку обозначение определённого интеграла появилось гораздо позже, у Фурье в начале XIX века. Современное оформление и строгое доказательство впервые опубликованы также в начале XIX века Лакруа.

Примеры.

1. $\int\limits_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}$

2. $\int\limits_1^x \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^x = \ln x;$ это равенство справедливо при любом $x > 0$

3. Переменная сила на прямолинейном пути изменяется по закону:

   $f(x) = 6x^2 + 5$ при $x \geq 0$. По какому закону изменяется работа этой силы ?

   Работа силы $f(x)$ на отрезке $[0, x]$ прямолинейного пути равна:

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_0^x (6t^2 + 5)dt = 2x^3 + 5x$$

   Таким образом, работа изменяется по закону: $F(x) = 2x^3 + 5x$.

Образцы решения задач

1) При $x > 0$ вычислим интеграл с переменным верхним пределом:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Применяя формулу Ньютона - Лейбница на отрезке между 1 и x, получаем:

$$F(x) = \ln t \Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

Ответ: $\ln x$.

2) Найдём значение функции:

$$_7 F(x) = \int_1^x \ln t dt$$

Применим формулу интегрирования по частям, взяв $u = \ln t$ и $dv = dt$:

$$F(x) = \int_1^x \ln t dt = \left| \begin{matrix} u = \ln t \\ dv = dt \\ du = \dfrac{dt}{t} \\ v = t \end{matrix} \right| = t \ln t \Big|_1^x - \int_1^x t \frac{dt}{t} = x \ln x - \int_1^x dt = x \ln x - t \Big|_1^x = x \ln x - x + 1$$

Ответ: $x \ln x - x + 1$.

3) Вычислить $\int_0^1 x e^{x^2} dx$:

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \dfrac{1}{2} dt \end{matrix} \right| = \int_0^1 e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e - 1)$$

Ответ: $\frac{1}{2}(e-1)$.

4) Вычислить $\int\limits_0^{\pi} x\sin dx$:

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin dx = \begin{vmatrix} u = x \\ dv = \sin dx \\ du = dx \\ v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}(-\cos x)dx = -(\pi(-1)-0) + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

Ответ: π **.**

5) Найдите объем тела, образованного при вращении фигуры вокруг оси Ox, ограниченной данными кривыми $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$:

Применим формулу для вычисления объема тела вращения:

$$V = \pi\int\limits_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\pi\frac{1}{x}\Big|_1^4 = -\pi\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$ **.**

6) Материальная точка движется прямолинейно. Ее скорость изменяется по закону $v(x) = 2x + 1$ м/с, $t_1 = 2$, $t_2 = 5$. Какой путь пройдет материальная точка за время от t_1-й секунды до t_2-й включительно?

В силу того, что для вычисления пути можно воспользоваться правилом:

$$s = \int\limits_{t_1 - 1}^{t_2} v(x)dx$$

получим

$$s = \int_1^5 (2x+1)dx = (x^2 + x)\Big|_2^5 = 30 - 2 = 28$$

Ответ: 28.

7) Определите массу стержня длины $l = 10$, если линейная плотность стержня меняется по закону $\delta(x) = 6 + 0.3x$, где x - расстояние от одного из концов стержня.

В силу того, что для вычисления массы стержня можно воспользоваться правилом:

$$m = \int_0^l \delta(x)dx$$

получим

$$m = \int_0^{10} (6 + 0.3x)dx = (6x + 0.15x^2)\Big|_0^{10} = 60 + 15 - 0 = 75$$

Ответ: 75.

8) Определите работу, необходимую для поднятия тела массой $m = 10$ с поверхности Земли вертикально вверх на высоту $h = 1000$

Работа переменной силы $F(x)$ на отрезке $[a,b]$ вычисляется по правилу:

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

Обозначим через F силу притяжения тела Землей. Пусть $m_з$ - масса Земли. Согласно закону Ньютона,

$$F(x) = G\frac{mm_з}{x^2}$$

где x - расстояние от тела до центра Земли. Полагая $Gmm_з$, получим

$$F(x) = \frac{k}{x^2}, \ R \le x \le R+h$$

где R - радиус Земли. При $x = R$ сила $F(R)$ равна весу тела $P = mg$, т.е.

$$\frac{k}{x^2} = mg$$

откуда $k = mgR^2$ и

$$F(x) = \frac{mgR^2}{x^2}$$

В расчетах полагаем радиус Земли равным $R = 6371032$ м, ускорение свободного падания $g = 9.81$ м/с^2.

Таким образом, искомая работа равна

$$A = \int_R^{R+h} F(x)dx = \int_R^{R+h} \frac{mgR^2}{x^2}dx = -mgR^2\frac{1}{x}\Big|_R^{R+h} =$$

$$= -mgR^2\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = \frac{mgRh}{R+h} \approx \frac{10\cdot 9.81\cdot 6371032\cdot 1000}{6371032+1000} \approx 98085$$

Ответ: 98085.

Тесты

1) Для вычисления определенного интеграла применяется формула Ньютона–Лейбница, которая имеет вид (здесь $F(x)$- одна из первообразных для функции $f(x)$):

A) $\int_a^b f(x)dx = F(a)+F(b)$ B) $\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$ C) $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

2) Выберите верные высказывания:

1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

2. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она непрерывна на этом отрезке.

A) 1 B) 2 C) 1 и 2 D) оба неверные

3) Может ли функция, не являющаяся непрерывной на отрезке $[a,b]$, быть интегрируемой на этом же отрезке:

A) Да B) Нет

4) Если функция $f(x)$ является четной, то интеграл $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ равен $(a>0)$:

A) 0 B) $2\int_0^a f(x)dx$ C) ∞ D) $\int_0^a f(x)dx$

5) Если функция $f(x)$ является нечетной, то интеграл $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ равен $(a>0)$:

A) 0 B) $2\int_0^a f(x)dx$ C) ∞ D) $\int_0^a f(x)dx$

6) Вычислите определенный интеграл $\int_{2}^{10} dx$:

A) 0 B) 1 C) 8 D) ∞

7) Вычислите определенный интеграл $\int_{0}^{\pi} \sin x dx$:

A) 0 B) 2 C) π D) $\frac{\pi}{2}$

8) Вычислите определенный интеграл $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$:

A) 0 B) 1 C) π D) $\frac{\pi}{4}$

9) Вычислите определенный интеграл $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} dx$:

A) $e-1$ B) $e+1$ C) 1 D) π

10) Вычислите определенный интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{2x+5}{(x+2)(x+3)} dx$:

A) $\ln 2$ B) $\ln 3$ C) $\ln 6$ D) 1

11) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$:

A) B) C) D)

12) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$:

A) B) C) D)

13) Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox области под параболой $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$:

A) $\frac{32\pi}{5}$ B) $\frac{23\pi}{5}$ C) π D) 1

14) Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$:

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) π D) $\frac{\pi}{2}$

15) Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$:

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) π D) $\frac{\pi}{2}$

Использованная литература

1. Баврин И.И. Высшая математика. Учебник для педагогических институтов. Москва: Просвещение, 1993 год, 319 стр.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридма М.Н. Высшая математика для экономистов. Москва: Юнити, 2000 год, 271 стр.
3. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. Москва: Высшая школа, 1972 год, 480 стр.