ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ ПО СВЯЗИ, ИНФОРМАТИЗАЦИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА
ПО ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

СТУДЕНТА 728 11 ГРУППЫ

САБЫРБАЕВ НУРЛАНБЕК

Сдал: **Н.Сабырбаев**

Принял: **к.ф.-м.н. А.Арзиев**

Нукус 2013

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

КНФ и СКНФ

План:
1. **Понятие КНФ и СКНФ**
2. **Построение КНФ.**
3. **Переход от КНФ к СКНФ**

1. Понятие КНФ и СКНФ

Определение. Конъюнкция любого конечного множества элементарных дизъюнкций булевой функции F называется **конъюнктивной нормальной формой** (КНФ) функции F. Число элементарных дизъюнкций, составляющих КНФ, называется длиной КНФ.

Пример. КНФ $F=(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$ имеет длину, равную 3.

Для произвольной булевой функции F существует, вообще говоря, много различных реализующих ее КНФ, отличающихся друг от друга длиной, числом вхождений литералов и т.д.

Определение. Две (или несколько) КНФ, реализующих одну и ту же булеву функцию F , называются эквивалентными (или равносильными).

Определение. КНФ булевой функции F, состоящая только из полных элементарных дизъюнкций, называется **совершенной КНФ** (СКНФ).

Пример. $F=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$- СКНФ функции F, заданной вектором значений таблицы истинности w(F)=(01100111).

Отметим, что КДНФ является единственной (с точностью перестановки множителей) для конкретной булевой функции F .

Любую булеву функцию F, заданную формулой, можно с помощью основных равносильности преобразовать к КНФ, а затем к СКНФ.

Конъюнкция называется *элементарной,* если она состоит только из переменных и их отрицаний. Например, $XYZ\overline{Z}$.

Формула алгебры высказываний находится в *конъюнктивной нормальной форме* и обозначается КНФ, если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций. Например,

$(X \vee Y)(Z \vee \overline{X})$

Совершенной конъюнктивной нормальной формой данной формулы алгебры высказываний (СКНФ) называется такая ее КНФ, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1. Она не содержит двух одинаковых сомножителей.
2. Ни один из сомножителей не содержит одновременно двух одинаковых слагаемых.
3. Ни один из сомножителей не содержит одновременно некоторого высказывания и его отрицания.
4. Каждый сомножитель СКНФ содержит в качестве слагаемого либо переменное высказывание, либо его отрицание для всех переменных, входящих в формулу.

Теорема. *Для каждой не тождественно равной 1 формулы Ф существует единственная равносильная ей СКНФ.*

СКНФ формулы Ф находится следующим образом.

1. Строится таблица истинности формулы Ф.
2. Так как формула Ф не является тавтологией, то в таблице истинности существуют такие наборы значений переменных, что Ф равна 0 на этих наборах.

Каждому такому набору ставим в соответствие элементарную дизъюнкцию по следующим правилам.

a. Если переменная в данном наборе имеет значение 0, то она входит в элементарную дизъюнкцию без отрицания.

b. Если переменная в данном наборе имеет значение 1, то она входит в элементарную дизъюнкцию с отрицанием

3. СКНФ данной формулы Ф строится как конъюнкция всех элементарных дизъюнкций, полученных по описанным выше правилам.

Составим таблицу истинности для булевой функции $F = (\bar{x}_1 \downarrow x_3) \oplus x_2$

Отметим связь между СКНФ и таблицей истинности.

Таблица истинности СКНФ

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 \downarrow x_3$	$F = (\bar{x}_1 \downarrow x_3) \oplus x_2$	Элементарные дизъюнкции СКНФ
0	0	0	1	0	0	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	1	1	0	0	$x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
0	1	0	1	0	1	
0	1	1	1	0	1	
1	0	0	0	1	1	
1	0	1	0	0	0	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
1	1	0	0	1	0	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$
1	1	1	0	0	1	

В общем случае также можно вывести закономерности построения СКНФ по таблице истинности булевой функции, что является очень удобным.

СКНФ состоит из конъюнкций полных элементарных дизъюнкций наборов переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, на которых функция принимает значение 0.

Переменные берутся без отрицания, если им соответствует в таблице истинности 0, с отрицанием, если 1.

2. Построение КНФ

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) в булевой логике — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид конъюнкции дизъюнкций литералов. Конъюнктивная нормальная форма удобна для автоматического доказательства теорем. Любая булева формула может быть приведена к КНФ. Для этого можно использовать: Закон двойного отрицания, Закон де Моргана, Дистрибутивность.

Примеры и контрпримеры:

Формулы в КНФ:

$$\neg A \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg D) \wedge (D \vee \neg E)$$

$$A \wedge B$$

Формулы не в КНФ:

$$\neg(B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \vee C$$

$$A \wedge (B \vee (D \wedge E)).$$

Но эти 3 формулы не в КНФ эквивалентны следующим формулам в КНФ:

$$\neg B \wedge \neg C$$

$$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee D) \wedge (B \vee E).$$

Алгоритм построения КНФ

1) Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы:

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$

$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

2) Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям на основании формул:

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

3) Избавиться от знаков двойного отрицания.

4) Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

Пример построения КНФ

Приведем к КНФ формулу

$F = (X \to Y) \wedge ((\neg Y \to Z) \to \neg X)$

Преобразуем формулу F к формуле не содержащей → :

$F = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg(\neg Y \to Z) \vee \neg X) = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg(\neg\neg Y \vee Z) \vee \neg X)$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:

$F = (\neg X \vee Y) \wedge ((\neg Y \wedge \neg Z) \vee \neg X) = (\neg X \vee Y) \wedge ((\neg Y \wedge \neg Z) \vee \neg X)$

По закону дистрибутивности получим КНФ:

$F = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Z)$

k-конъюнктивная нормальная форма

3. Переход от КНФ к СКНФ

Если в простой дизъюнкции не хватает какой-то переменной (например, z), то добавляем в нее выражение : $Z \wedge \neg Z = 0$ (это не меняет самой дизъюнкции), после чего раскрываем скобки с использованием распределительного закона:

$$(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) = (X \vee Y \vee (Z \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) = (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z)$$

Таким образом, из КНФ получена СКНФ.

2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Сложение комплексных чисел

Пример 1. Привести к виду СКНФ булеву функцию $F=(\bar{x}_1 \downarrow x_3) \oplus x_2$.

Решение. С помощью основных равносильности преобразуем к КНФ:

$$(\bar{x}_1 \downarrow x_3) \oplus x_2 = (\overline{\bar{x}_1 \vee x_3}) \oplus x_2 = x_1\bar{x}_3 \oplus x_2 = x_1\bar{x}_3\bar{x}_2 \vee \overline{x_1\bar{x}_3}x_2 =$$
$$= x_1\bar{x}_3\bar{x}_2 \vee (\bar{x}_1 \vee x_3)x_2 = (x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_3)(x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2) =$$
$$= ((x_1 \vee \bar{x}_1)(\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1) \vee x_3)(x_1\bar{x}_3 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_2) =$$
$$= (\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_3)(x_1\bar{x}_3 \vee x_2) = ((\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3 \vee x_3) \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_3 \vee x_2) =$$
$$= (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_3 \vee x_2) = (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_3 \vee x_2) =$$
$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee \bar{x}_3) \text{ — КНФ.}$$

В данном примере сначала выразили функцию только с помощью операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, а затем несколько раз применили формулу $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$, группируя переменные таким образом, чтобы каждый раз одна скобка в конъюнкции сокращалась по формуле $x \vee \bar{x} = 1$.

Применяя соотношение $x = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$, дополняем дизъюнкции $(x_1 \vee x_2)$, $(x_2 \vee \bar{x}_3)$ до полных элементарных дизъюнкций:

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee \bar{x}_3) =$$
$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3).$$

Так как $xx = x$, то после сокращения одинаковых конъюнкций получаем СКНФ: $F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$.

Пример 2. Для булевой функции, заданной в виде ДНФ $F = x_1 \vee x_2\bar{x}_3$, составить КНФ, СКНФ и выполнить проверку по таблице истинности.

Решение: Применяя формулу $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$, из ДНФ получаем КНФ:

$$F = x_1 \vee x_2\bar{x}_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3).$$

Применяя соотношение $x = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$, дополняем дизъюнкции $(x_1 \vee x_2)$, $(x_2 \vee \bar{x}_3)$ до полных элементарных дизъюнкций:

$$F = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)$$
$$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Так как $x \vee x = x$, то после сокращения одинаковых дизъюнкций получаем СКНФ:

$$F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Таблица истинности СКНФ

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_3$	$F = x_1 \vee x_2\bar{x}_3$	Элементарные дизъюнкции СКНФ
0	0	0	1	0	0	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	1	0	0	0	$x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
0	1	0	1	1	1	
0	1	1	0	0	0	$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$
1	0	0	1	0	1	
1	0	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	0	0	1	

Пример 3 Найти дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы для следующей формулы: $xy \Leftrightarrow z$.

Решение: Используя закон $x \Leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$, исключаем знак $\Leftrightarrow$. Получаем формулу $\overline{xy}\,\overline{z} \vee xyz$.

Используя закон де Моргана, получаем формулу $(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee xyz$. Раскрывая скобки, получаем дизъюнктивную нормальную форму
$\bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xyz$.

Чтобы получить конъюнктивную нормальную форму, применим к формуле $(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee xyz$ дистрибутивный закон, получаем:

$$(\bar{z} \vee xyz)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee xyz) = (\bar{z} \vee x)(\bar{z} \vee y)(\bar{z} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee x)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Последнее выражение является конъюнктивной нормальной формой. Так как $x \vee \bar{x} = 1$ и $x \vee 1 = 1$, то полученная КНФ равносильна следующей КНФ:

$$(\bar{z} \vee x)(\bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Пример 4 Найти совершенную конъюнктивную нормальную форму для функции $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z)$.

Решение: Составим таблицу истинности для данной функции.

x	y	z	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0

1	1	1	1	1	1

Отсюда получаем СКНФ

$$(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

<u>Пример</u> 5 Найти совершенную конъюнктивную нормальную форму формулы $(x \Rightarrow y)z$.

Решение: Используя, $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$, получаем $(\bar{x} \vee y)z$.

Данная формула является конъюнктивной нормальной формой. Она равносильна формуле $(\bar{x} \vee y \vee z\bar{z})(z \vee x\bar{x} \vee y\bar{y})$.

Используя закон дистрибутивности, получаем:

$$(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(z \vee x \vee y)(z \vee x \vee \bar{y})(z \vee \bar{x} \vee \bar{y})$$

Применяя закон идемпотентности, получаем требуемую совершенную конъюнктивную нормальную форму

$$(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

<u>Пример</u> 6. Дана таблица истинности логической функции от трех переменных. Построить логическую формулу, реализующую эту функцию.

A	B	C	$F(A, B, C)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Решение: Выберем те строки в данной таблице истинности, в которых значения функции равна 0.

$$F(A,B,C) = (\bar{A} + B + C) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C})$$

Проверим выведенную функцию, составив таблицу истинности.

A	*B*	*C*	*A*+B+C	A+B+C	*F*(*A*, *B*, *C*)
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Сравнив начальную и итоговую таблицу истинности можно сделать вывод, что логическая функция построена правильно.

3. ТЕСТЫ

1. Укажите КНФ:

A) $(A \wedge B) \vee C$ *B) $(\overline{A} \vee B) \wedge C$ C) $(A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee B$ D) $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge C)$

2. Укажите элементарную конъюнкцию?

A) $x \vee y$ B) $x \vee y \wedge z$ C) $x \wedge y \vee z$ * D) $x \wedge y \wedge z$

3. Укажите число всех полных элементарных конъюнкций составленных из n высскавывательных переменных

*A) n B) n^2 C) $2n$ D) 2^n

4. КНФ какого длина функций $F = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$

A) 1 *B) 3 C) 4 D)2

5. Найдти СКНФ?

*A) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3);$

B) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3);$

C) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3);$

D) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$

6. КНФ булевой функции *F*, состоящая только из полных элементарных дизъюнкций, называется.

A) ДНФ B) СДНФ C) A и B правильно *D) СКНФ

ПРЕЗЕНТАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Яблонский С.В.. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986г.**
2. **Никольская И.Л.. Знакомство с математической логикой. М.: «Флита», 1998 г.**
3. **Иванов Б.Н. Дискретная математика. М.: Лаборатория Базовых Знаний. 2001 г.**
4. **Уилсон Р.. Введение в теорию графов. Мир., 1977 г.**
5. **Новиков Ф.А.. Дискретная математика. Питер, 2001 г.**
6. **Мендельсон Э.. Введение в математическую логику. Наука, 1984 г.**
7. **Сачков В.Н.. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. Наука, 1982 г.**
8. **Харари Ф.. Теория графов. Мир, 1973 г.**