ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ ПО СВЯЗИ, ИНФОРМАТИЗАЦИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА
ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

СТУДЕНТКИ 728 11 ГРУППЫ

Сдала: Примбетова А.

Принял: к.ф.-м.н. А.Арзиев

Нукус 2013

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

План

Кванторные операции над предикатами

Квантор общности

Численные кванторы

Специфическая природа предикатов, позволяет ввести над ними такие операции, которые не имеют аналогов среди операций над высказываниями. Имеются в виду две кванторные операции над предикатами.

Квантор общности

Для превращения одноместного предиката в высказывание нужно вместо его переменной подставить какой-нибудь конкретный предмет из области задания предиката. Имеется еще один способ для такого превращения – это применение к предикату операций связывания квантором общности или квантором существования. Каждая из этих операций ставит в соответствие одноместному предикату некоторое высказывание, истинное или ложное в зависимости от исходного предиката.

Определение. ***Операцией связывания квантором общности*** *называется правило, по которому каждому одноместному предикату P(x), определенному на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое,* $(\forall x)(P(x))$ *которое истинно в том и только в том случае, когда предикат P(x) тождественно истинен, и ложно в противном случае, то есть*

$$(\forall x)(P(x)) = \begin{cases} 1, \text{если} P(x) - \text{тождественно} - \text{истинный предикат}, \\ 0, \text{ если } P(x) - \text{опровержимый предикат}. \end{cases}$$

Словесным аналогом квантору общности " является: «для любого», «для каждого», «для всякого» и т.п.

В выражении $(\forall x)(P(x))$ переменная *x* уже перестает быть переменной в обычном смысле этого слова, то есть вместо нее невозможно подставить какие бы, то ни было конкретные значения. Говорят, что переменная *x* ***связанная***.

Если одноместный предикат *P(x)* задан на конечном множестве $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, то высказывание $(\forall x)(P(x))$ эквивалентно конъюнкции $P(a_1)$, $P(a_2)$, … , $P(a_n)$.

Пусть *x* определен на множестве людей *M*, а *P(x)* – предикат *«x – смертен»*. Дать словесную формулировку предикатной формулы .

Решение.

Выражение $(\forall x)(P(x))$ означает «все люди смертны». Оно не зависит от переменной *x*, а характеризует всех людей в целом, т. е. выражает суждение относительно всех *x* множества *M*.

Определение. ***Операцией связывания квантором общности*** *по переменной (*x_1 *называется правило, по которому каждому n-местному (*n_{i2}*) предикату* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, определенному на множествах* $M_1, M_2, \ldots, M_n$*, сопоставляется новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый ,* $(\forall x_1)(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ *который для любых предметов, превращается в высказывание , истинное в том и только в том случае, когда одноместный предикат , определенный на множестве* M_1*, тождественно истинен, и ложное в противном случае, то есть:*

$$(\exists x)(P(x)) = \begin{cases} 0, \textit{если } P(x) - \textit{тождественно} - \textit{ложный предикат}, \\ 1, P(x) - \textit{выполнимый предикат}. \end{cases}$$

Квантор существования

Определение. ***Операцией связывания квантором существования*** *называется правило, по которому каждому одноместному предикату P(x), определенному на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое,* $(\exists x)(P(x))$ *которое ложно в том и только в том случае, когда предикат P(x) тождественно ложен, и истинно в противном случае, то есть*

$$(\exists x)(P(x)) = \begin{cases} 0, \textit{если } P(x) - \textit{тождественно} - \textit{ложный предикат}, \\ 1, P(x) - \textit{выполнимый предикат}. \end{cases}$$

Словесным аналогом квантору существования является: «существует», «найдется» и т.п.

Подобно выражению $(\forall x)(P(x))$, в выражении $(\exists x)(P(x))$ переменная *x* также перестает быть переменной в обычном смысле этого слова: это - **связанная переменная**.

Если одноместный предикат $P(x)$ задан на конечном множестве $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, то высказывание $(\exists x)(P(x))$ эквивалентно дизъюнкции $P(a_1)$Ъ $P(a_2), ... , P(a_n)$.

Пример

Пусть $P(x)$ – предикат *«х – четное число»*, определенный на множестве *N*. Дать словесную формулировку высказыванию $(\exists x)(P(x))$, определить его истинность.

Решение.

Исходный предикат *P(x): «х – четное число»* является переменным высказыванием: при подстановке конкретного числа вместо переменной *х* он превращается в простое высказывание, являющееся истинным или ложным, например при подстановке числа 5 – ложным, при подстановке числа 10 – истинным. Высказывание $(\exists x)(P(x))$ означает «во множестве натуральных чисел *N* существует четное число». Поскольку множество *N* содержит четные числа, то высказывание $(\exists x)(P(x))$ истинно.

Определение. ***Операцией связывания квантором существования*** *по переменной* x_1 *называется правило, по которому каждому n-местному* (n_{i2}) *предикату* $P(x_1, x_2, ..., x_n)$*, определенному на множествах* $M_1, M_2, ..., M_n$*, сопоставляется новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый* $(\exists x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_n))$*, который для любых предметов* $a_2 \in M$ $, ..., a_n \in M_n$*, превращается в высказывание* $(\exists x_1)(P(x_1, a_2, ..., a_n))$*, ложное в том и только в том случае, когда одноместный предикат* $P(x_1, a_2, ..., a_n)$*, определенный на множестве M1, тождественно ложен, и истинное в противном случае, то есть:*

$$(\exists x_1)(P(x_1, a_2, ..., a_n)) = \begin{cases} 0, \text{если } P(x_1, a_2, ..., a_n) - \text{тождественно} - \text{ложный предикат от } x_1, \\ 1, \text{если } P(x_1, a_2, ..., a_n) - \text{выполнимый предикат от } x_1. \end{cases}$$

Выше уже было сказано, что переменная, на которую навешен квантор, называется связанной, несвязанная квантором переменная называется **свободной**. Выражение, на которое навешивается квантор, называется **областью действия квантора** и все вхождения переменной, на которую навешен квантор, в это выражение являются связанными. На многоместные предикаты можно на разные переменные навешивать различные кванторы, нельзя на одну и ту же переменную навешивать сразу два квантора.

Пример

Пусть предикат *P(x, y)* описывает отношение «x любит y» на множестве людей. Рассмотреть все варианты навешивания кванторов на обе переменные. Дать словесную интерпретацию полученных высказываний.

Решение.

Обозначим предикат *«x любит y»* через *ЛЮБИТ(x, y)*. Предложения, соответствующие различным вариантам навешивания кванторов, где *x* и *y* показаны на разных множествах, что является условностью и предпринято только для объяснения смысла предложений (реальные множества переменных *x* и *y*, очевидно, должны совпадать):

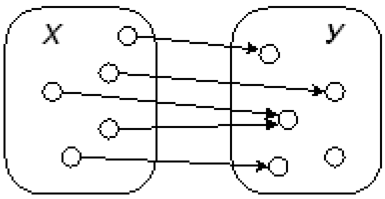

Рис. 13.

1.

$\forall x\ \exists y\ ЛЮБИТ(x,y)$ - «для любого человека *x* существует человек *y*, которого он любит» или «всякий человек кого-нибудь любит».

2. $\exists y\ \forall x\ ЛЮБИТ(x,y)$

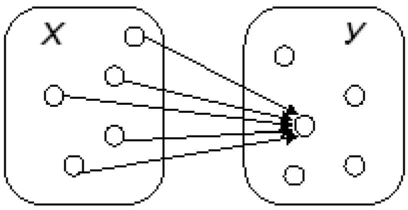

Рис. 14.

$\exists y\ \forall x\ ЛЮБИТ(x,y)$ - «существует такой человек *y*, которого любит всякий человек *x*» (рис. 14).

3. $\forall x\ \forall y\ ЛЮБИТ(x,y)$

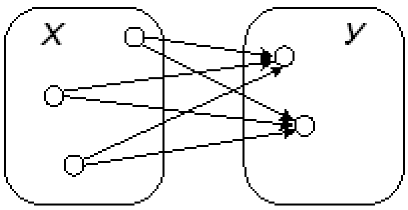

Рис. 15.

$\forall x\ \forall y\ ЛЮБИТ(x, y)$ **- «все люди любят всех людей» (рис. 15).**

4. $\exists x\ \exists y\ ЛЮБИТ(x, y)$

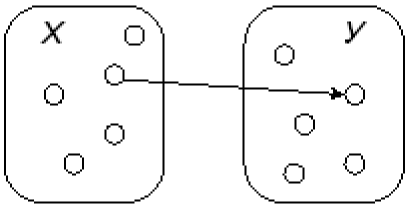

Рис. 16.

$\exists x\ \exists y\ ЛЮБИТ(x, y)$ **- «существует человек, который кого-то любит» (рис. 16).**

5. $\exists x\ \exists y\ ЛЮБИТ(x, y)$

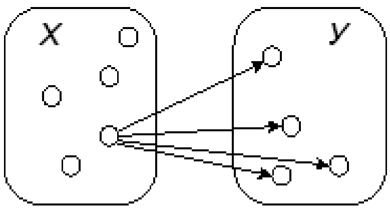

Рис. 17.

$\exists x\ \exists y\ ЛЮБИТ(x, y)$ **- «существует человек, который любит всех людей» (рис. 17).**

6. $\forall y\ \exists x\ ЛЮБИТ(x, y)$

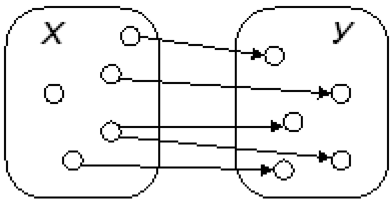

Рис. 18.

$\forall y\ \exists x\ ЛЮБИТ(x, y)$ - «для всякого человека существует человек, который его любит» или «каждого человека кто-то любит» (рис. 18).

Из приведенного выше примера можно сделать вывод о том, что перестановка кванторов общности и существования меняет смысл высказывания, т.е. кванторы общности и существования не обладают в общем случае свойством коммутативности. Итак, одноименные кванторы можно менять местами, разноименные кванторы менять местами нельзя.

Численные кванторы

В математике часто встречаются выражения вида «по меньшей мере *n*» («хотя бы *n*»), «не более чем *n*», «*n* и только *n*», где *n*– натуральное число.

Эти выражения, называемые численными кванторами, имеют чисто логический смысл; они могут быть заменены равнозначными выражениями, не содержащими числительных и состоящими только из логических терминов и знака =, обозначающего тождество (совпадение) объектов.

Пусть $n = 1$.

Предложение «По меньшей мере один объект обладает свойством *P*» имеет тот же смысл, что и предложение «Существует объект, обладающий свойством *P*», т.е.

x= (P(x)).   (1)

Предложение «Не более чем один объект обладает свойством *P*» равнозначно предложению «Если есть объекты, обладающие свойством *P*, то они совпадают», т.е.

"x ,"y =((P(x), P(y)); x = y).   (2)

Предложение «Один и только один объект обладает свойством Р» равнозначно конъюнкции предложений (1) и (2), т.е.

x= (P(x)); "x ,"y ((P(x), P(y)) ; x = y).

Рассмотрим случай $n = 2$.

Предложение «По меньшей мере два объекта обладают свойством Р» означает то же, что и предложение «Существуют несовпадающие объекты, обладающие свойством Р», т.е.

x, y =(P(x), P(y); x, y).   (3)

Предложение «Не более чем два объекта обладают свойством P» равнозначно предложению «Каковы бы ни были объекты x, y, z, если все они обладают свойством P, то по меньшей мере два из них совпадают», т.е.

"x ,"y ,"z ((P(x), P(y), P(z)) (x = y , x = z , y = z)).   (4)

Предложение «Два и только два объекта обладают свойством P» совпадают по смыслу с конъюнкцией предложений (3) и (4).

Совершенно аналогично обстоит дело с численными кванторами при *n> 2*.

2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Придание суждениям логической формы.

Главное затруднение при решении всех задач по теме «Суждение» состоит в придании выражениям естественного языка логической формы. В логической форме каждое простое категорическое суждение имеет четыре части:

......	S	......	P
квантор	субъект	связка	предикат

S – субъект – это то, о чём делается утверждение или отрицание, иначе говоря, то, о чём говорится;

P – предикат – это то, что говорится (утверждается или отрицается) о субъекте;

квантор – бывает двух видов: слово «Все» – квантор общности или слово «Некоторые» – квантор существования; квантор отсутствует, если S – единичное понятие. Квантор указывает на «количество» субъекта.

связка – также бывает двух видов: утвердительная – слова «есть», «суть» или отрицательная – слова «не есть», «не суть». Слово «суть» используется обычно для множественного числа.

Субъект и предикат суждения являются понятиями и называются также его терминами.

Процедура придания логической формы выражениям естественного языка выглядит так:

(а) спрашиваем, о чём (о ком) говорится в суждении; ответ на этот вопрос даёт нам субъект;

(б) спрашиваем, говорится ли обо всём объёме понятия, соответствующего субъекту, о части его или об отдельном предмете; ответ на этот вопрос даёт нам квантор (или обосновывает его отсутствие);

(в) спрашиваем, утверждается что-либо относительно субъекта или отрицается; ответ на этот вопрос даёт нам связку;

(г) спрашиваем, что именно утверждается или отрицается; ответ на этот вопрос даёт нам предикат;

(д) расставляем квантор, субъект, связку и предикат в том порядке, в котором они должны находится, и формулируем суждение в логической форме с теми переформулировками, которые придадут ему должные естественность и благозвучие.

Например, придадим логическую форму суждению

Слоновий балдахин ослику великоват

Здесь, очевидно, идёт речь о слоновьем балдахине, значит он и является субъектом. При этом подразумеваются все слоновьи балдахины, значит квантор ставим «все». В суждении делается утверждение, значит связка будет «суть». Наконец, о слоновьих балдахинах говорится, что они великоваты ослику, значит «быть великоватым для ослика» – это предикат. Расставляем теперь в нужном порядке все четыре части суждения:
«все», «слоновий балдахин», «суть», «то, что великовато для ослика»
Делаем необходимые переформулировки и получаем

Все слоновьи балдахины суть то, что великовато для ослика

Ещё несколько примеров.

С белого слона Петру Петровичу падать не доводилось
Логическая форма этого суждения выглядит так:
Пётр Петрович не суть тот, кому доводилось падать с белого слона

Суждение это единичное, а единичные суждения рассматриваются как общие, но квантор перед ними не ставится. Заметим, что речь здесь идёт не белом слоне, а о Петре Петровиче. Грамматически, субъект суждения как правило является подлежащим.

Некоторые могущественные владыки Азии падали здесь со слона

Получаем:

Некоторые могущественные владыки Азии суть те, кто падал здесь со слона.
Погонщики слонов не щёлкали своими бичами

Логическая форма:

Все погонщики слонов не суть те, кто щёлкал своим бичом

Впрочем, не всегда присутствует полная ясность с установлением того, какой термин является субъектом суждения и не всегда именно грамматическое подлежащее следует рассматривать в качестве субъекта. Например,

Мне белый слон сегодня не встретился

Термины «мне» или «я» с равным основанием, что и «белый слон» могут претендовать на роль субъекта. Альтернативные варианты логической формы этого суждения выглядят так:

Я не суть тот, кому сегодня встретился белый слон.
Белый слон не суть тот, кто сегодня встретился мне.

И то, и другое вполне приемлемо. Выбор может зависеть как от контекста, если он, конечно, есть, так и от субъективной оценки той информации, которая суждением сообщается. Например, если рассматриваемое суждение является ответом на вопрос «Встречал ли ты сегодня белого слона?», то субъектом естественнее считать термин «я», а если вопрос звучал иначе, например, как «Кого ты сегодня не встречал?», то больше оснований быть субъектом у термина «белый слон».
Когда нет полной ясности с тем, какой термин является субъектом, следует принимать во внимание однозначность в установлении квантора. Например в суждении

Слониха весь вечер пришивала бряки даже, если оно звучит в качестве ответа на вопрос «Что пришивала слониха весь вечер?» термин «бряки» не может играть роль субъекта, поскольку неясно,
о каком количестве бряк идёт речь, обо всех (об одной) или о некоторых. В самом деле, «пришивать бряки» означает по меньшей мере пришивать одну бряку, так что сделать вывод о том, что их было несколько, или, тем более, что речь идёт обо все бряках вообще, конечно, нельзя.
Обычная ошибка при решении задач на придание суждениям логической формы состоит в том, что отрицание в связке путают с отрицание в предикате. Субъект и предикат – это понятия и они могут быть понятиями отрицательными, например, неудача или невежливый. Поэтому будем ориентироваться на расположение отрицательной частицы «не» и на общий смысл суждения – утверждающий или отрицающий. Например

Этот слон страшно невежлив

Здесь, конечно, утверждение, а предикат отрицательный.

Этот слон не проявил должной вежливости

Здесь, напротив, отрицание, а предикат положительный.

Танец в исполнении слона не удался

Снова, отрицательная связка и положительный предикат.

Танец в исполнении слона неудачен

Связка здесь утвердительная, а предикат отрицательный.

Тётушка слона не была сегодня неучтива

Здесь и связка, и предикат отрицательны.
В некоторых примерах для невнимательных студентов приготовлена ловушка, связанная с употреблением слова «некоторые» в суждениях типа

Уши некоторых слонов не годятся в качестве паруса

Может показаться, что это частное суждение с квантором «некоторые», хотя на самом деле это суждение общее и субъектом в нём являются «уши некоторых слонов». Логическая форма выглядит так:
Все уши некоторых слонов не суть то, что годится в качестве паруса.

2. Отношения между суждениями: «логический квадрат».

Перейдём теперь к задачам, в которых нам потребуется знание логического квадрата и описываемых в нём отношений между суждениями. Простые категорические суждения бывают четырёх видов (помним, что суждения с единичным S приравниваются к общим):

a – общеутвердительные Все S суть P
S есть P (для единичного S)

i – частноутвердительные Некоторые S суть P

e – общеотрицательные Все (Ни одно) S не суть P
S не есть P (для единичного S)

o – частноотрицательные Некоторые S не суть P

Их отношения по логическому квадрату таковы:

- a и e находятся в отношении противоположности;
- i и o находятся в отношении совместимости (подпротивоположности);
- a и o, e и i противоречат друг другу;
- i подчинено a и o подчинено e.

Для общего суждения, например,

Ни один слон не выписывает журнал «Знойная мартышка»

можно сформулировать суждения подчинённые, противоречащие и противоположные ему. Сначала, конечно, надо придать суждению логическую форму, чтобы не запутаться в том, где S, где P, каковы связка и квантор. Для этого примера получаем (не в логической, а в естественной форме) подчинённое – o:

Некоторые слоны не выписывают журнал «Знойная мартышка»,

противоречащее – i:

Некоторые слоны выписывают журнал «Знойная мартышка»,

противоположное – a:

Все слоны выписывают журнал «Знойная мартышка».

Для частных суждений нет противоположных и подчинённых им, а есть только противоречащие и совместимые с ними. Например, для частноутвердительного суждения

Некоторые погонщики слонов курят кальян

получаем (в естественной форме) противоречащее – e:

Ни один погонщик слона не курит кальян

совместимое – o:

Некоторые погонщики слонов не курят кальян.

Задания такого рода очень просты.

3. Логический анализ структуры сложного суждения.

Суждение – это, вообще говоря, то, что может быть истинным или ложным.
Сложное суждение строится из простых при помощи логических союзов
(связок), которые являются истинностными функциями, т. е. для каждого
набора значений связываемых ими аргументов (суждений) каждая связка даёт
зна-
чение получающемуся целому. Значение сложного суждения зависит от
того,какие логические союзы связывают содержащиеся в нём простые
суждения и от
значений этих простых суждений.
Логические союзы в какой-то степени являются формальными аналогами
союзов и союзных слов естественного языка. Возможные соответствия приводим в следующей ниже таблице:

Логический союз	символ	аналог в естественном языке
Конъюнкция	&	«и», «а», «но», «тогда как», «при том,что», запятая и т. п.

Слабая дизъюнкция	$\vee$	«или», «или ..., или ...»,
Строгая дизъюнкция	$\neq$	«либо», «либо ..., либо ...»
Импликация	$\rightarrow$	«если ..., то ...»
Эквиваленция	$\leftrightarrow$	«тогда и только тогда, когда»
Отрицание	$\neg$	«неверно, что», «ложно, что»

Примеры просты. Так, сложные суждения

Слоны не обратили на это внимание, а бегемот обратил.

Когда письмо пришло, мартышки не было дома.
Карася поймали, отрезали хвост.
У меня на носу растут голубая и розовая ленты.

образованы из простых с помощью конъюнкции, суждения

Эта рыба либо корюшка, либо ряпушка.
Внутри его головы звенят болты или гайки.

образованы с помощью различных дизъюнкций. Суждения

Если у слона стреляет в ухе, то слышно далеко вокруг.
Если Лондон – столица Парижа, то Париж – столица Рима.

образованы импликациями. Суждение

Фиорелло идёт в кино тогда и только тогда, когда там показывают комедию

содержит эквиваленцию. Кроме того, суждения

Неверно, что слоны умеют летать.
Ложно, что Париж не является столицей Рима.

образованы с помощью отрицания.
Следует отметить, что логическая роль союза или союзного слова не всегда очевидна. Например, в суждениях

У меня на носу растут голубая и розовая ленты.
Внутри его головы звенят болты или гайки.

союзы «и» и «или» связывают, как кажется, не суждения, а объекты и можно подумать, что эти суждения не являются сложными, ведь с точки зрения грамматики мы здесь имеем дело с простыми предложениями, содержащими однородные члены. Но логический взгляд на вещи несколько иной, и при анализе таких суждений надо осуществлять их трансформацию. Так, после трансформирования приведённых суждений мы получим

У меня на носу растёт голубая лента, и у меня на носу растёт розовая лента.
Внутри его головы звенят болты или внутри его головы звенят гайки.

Детальное описание правил трансформирования сложно, так что в дальнейшем при работе с суждениями естественного языка будем руководствоваться интуицией.
Теперь приведём сводную таблицу истинности для основных логических союзов, связывающих два суждения, обозначенные в ней как A и B, а также таблицу для отрицания.

A	B	A∧B	A∨B	A≠B	A→B	A↔B	A	¬A
И	И	И	И	Л	И	И	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	И	И	И	Л		
Л	Л	Л	Л	Л	И	И		

Дадим некоторые пояснения. Поскольку каждое из суждений A и B может быть либо истинным, либо ложным, т. е. принимает одно из значение И или Л, таблица истинности имеет четыре строки, каждая из которых соответствует некоторому сочетанию значений A и B. Каждому такому сочетанию каждый логический союз сопоставляет значение целого выражения. Например, конъюнкция двух суждений истинна только в том случае, когда оба эти суждения истинны, а во всех остальных случаях конъюнкция ложна. Слабая или неисключающая дизъюнкция истинна во всех случаях, кроме того, когда оба суждения ложны, а строгая дизъюнкция истинна только при различающихся значениях A и B. Это можно пояснить на примерах

Эта рыба либо корюшка, либо ряпушка.
Внутри его головы звенят болты или гайки.

Первое суждение, очевидно, предполагает использование строгой дизъюнкции, поскольку если считать, что оно истинно, то это будет означать, что данная рыба обязательно будет либо корюшкой, либо ряпушкой, но не чем-либо другим и уж конечно, не тем и другим вместе. Предполагая истинность второго суждения, мы, напротив, допускаем, что в голове могут звенеть как болты, так и гайки, т. е. в нём используется слабая дизъюнкция.
Не очень проста для понимания импликация. Здесь следует сразу же развести по разные стороны наше привычное представление о «если ... то ...», как о средстве описания причинно-следственных отношений между явлениями и логическую интерпретацию «если ... то ... ». Последняя адекватна только

отрицательному тесту на причинность. В самом деле, импликации

Если 2+2=4, то снег белый.

Если 2+2=5, то снег белый.
Если Лондон столица Парижа, то Париж – столица Рима.1

являются, как это ни покажется парадоксальным, истинными – это легко можно установить, воспользовавшись приведённой выше таблицей. Отсюда следует, что система значений логической импликации не может быть использована как формальный позитивный тест для причинно-следственных отношений. И в этом
нет ничего удивительного, поскольку для этих отношений вообще не может быть ни универсальной, ни логической позитивной концепции. Но зато есть негативная. Негативный тест на причинность содержится во второй строке таблицы истинности для импликации, а именно, там, где следование из истинного суждения ложного суждения объявляется невозможным.
Рассмотрим пример:

Если Петя усердно готовится к экзамену, то он получает пятёрку.

Всем известно, что усердная подготовка к экзамену иногда может стать одной из причин получения оценки «пять», но, во-первых, не единственной и, во-вторых, не всегда. Приводя всего один пример, когда Петя усиленно готовился к экзамену, но не получил пятёрки, мы опровергаем предположение о том, что подготовка к экзамену является достаточной для получения оценки «пять». И в этом же случае оказывается ложной соответствующая импликация.
В задачах на анализ сложных суждений естественного языка требуется записать их в символическом виде, обозначая простые суждения буквами, а логические союзы – символами. При этом надо должным образом использовать скобки. Детали можно найти в учебнике.
Приведём примеры решений таких задач.

Если Петя надевает очки, то видит, что на его носу сидит муха,
а если снимает, то не видит мухи.

Это сложное суждение образовано четырьмя простыми: «Петя надевает очки», «Петя видит, что на его носу сидит муха», «Петя снимает очки», «Петя не видит, что на его носу сидит муха», которые мы обозначим как A, B, C и D соответственно. Первая часть суждения есть импликация $A \to B$, вторая – также импликация $C \to D$, а всё суждение представляет собой конъюнкцию этих импликаций – $((A \to B) \& (C \to D))$.

Бряка фордыбачит на глызе только тогда, когда с весны не закурдявилась.

Здесь, очевидно, представлена эквивалентность двух суждений, а именно, «бряка фордыбачит на глызе» и «неверно, что бряка с весны закурдявилась». Последнее суждение содержит отрицание, так что результат записи исходного сложного суждения в символическом виде таков: (A ↔ ¬B).

Он молчит, а Варенька ему поёт «Виют витры», или глядит на него задумчиво своими тёмными глазами, или вдруг зальётся: «Ха-ха-ха!»2.

Здесь, конечно, все дизъюнкции строгие, так что обозначив простые суждения «он молчит», «Варенька ему поёт ...», «Варенька глядит на него ...», «Варенька вдруг зальётся ...» буквами A, B, C и D соответственно, мы получим выражение (A & (B ≠ (C ≠ D))).

Он и ахнуть не успел, как на него медведь насел.

Здесь получаем конъюнкцию вида (¬A & B).

Если в ящике нет кролика, то там голуби или ежи.

Присутствующая здесь дизъюнкция может быть и слабой, так что получаем символическую запись (¬A → (B ∨ C)).

Кобелякин просыпается, если его трясут или пинают,
но никогда не от звона будильника

Поскольку пробуждение Кобелякина может наступить вследствие одновременного применения тряски и пинков, здесь присутствует слабая дизъюнкция. Ещё одна трудность связана с тем, что импликация и отрицание во второй части суждения замаскированы оборотом «никогда не от». Символическая запись рассматриваемого суждения имеет следующий вид: (((A ∨ B) → C) & ¬(D → C)).

Если друг оказался вдруг
И не друг, и не враг, а так,
Парня в горы бери, тяни ...3

Здесь решения не может быть вовсе, т. к. данное высказывание является императивом и относительно него нельзя говорить, что оно является истинным или ложным. Императив – это не суждение.

3. ТЕСТЫ

1. *Операцией связывания квантором общности*

А) называется правило, по которому каждому одноместному предикату P(x), определенному на множестве М, сопоставляется высказывание, обозначаемое, $(\forall x)(P(x))$ *которое истинно в том и только в том случае, когда предикат P(x) тождественно истинен, и ложно в противном случае*

Б) правило, по которому каждому двуместному предикату P(x), определенному на множестве М, сопоставляется высказывание, обозначаемое, $(\forall x)(P(x))$ *которое истинно в том и только в том случае, когда предикат P(x) тождественно истинен, и ложно в противном случае*
В) правило, по которому каждому двуместному предикату P(x), определенному на множестве М, сопоставляется высказывание, обозначаемое, $(\forall x)(P(x))$ *которое истинно в том и только в том случае, когда предикат P(x) тождественно ложен, и ложно в противном случае*

2. *Операцией связывания квантором общности по переменной* x_1

А) называется правило, по которому каждому n-местному (n_{i2}) *предикату* $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$*, определенному на множествах* $M_1, M_2, \dots, M_n$*, сопоставляется новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый ,* $(\forall x_1)(P(x_1, x_2, \dots, x_n))$ *который для любых предметов, превращается в высказывание , истинное в том и только в том случае, когда одноместный предикат , определенный на множестве М1, тождественно истинен, и ложное в противном случае*
Б) правило, по которому каждому n-местному (n_{i2}) *предикату* $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$*, определенному на множествах* $M_1, M_2, \dots, M_n$*, сопоставляется новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый ,* $(\forall x_1)(P(x_1, x_2, \dots, x_n))$ *который для любых предметов, превращается в высказывание , истинное в том и только в том случае, когда двуместный предикат , определенный на множестве* M_1*, тождественно истинен, и ложное в противном случае*
В)) называется правило, по которому каждому n-местному (n_{i2}) *предикату* $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$*, определенному на множествах* $M_1, M_2, \dots, M_n$*, сопоставляется новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый ,* $(\forall x_1)(P(x_1, x_2, \dots, x_n))$ *который для любых предметов, превращается в высказывание , ложное в том и только в том случае, когда одноместный предикат , определенный на множестве М1, тождественно истинен, и ложное в противном случае*

3. Для логического значка “~”
принято следующие чтение:
а)”…или...“;

б):”...если..., то...,”;
в) “тогда и только тогда, когда...”.

4. Квантор $\forall$ читается:
а) для всех;
б) существует;
в) найдется.

5. Высказывание: “существует вещественное число x, удовлетворяющее уравнению $x^2+1=0$” в символической форме записывается:

а) $\forall x : x^2 + 1 = 0$;

б) $\exists x \in R : x^2 + 1 = 0$;

в) $\forall x \in R : x^2 + 1 = 0$.

6. Высказыванием называется утверждение, имеющее значение:
а) истина;
б) ложь;
в) истина или ложь.

7. Каким значком обозначают импликацию:
а) $\vee$;
б) $\wedge$;
в) $\Rightarrow (\rightarrow)$.

8. *Операцией связывания квантором существования*

А) называется правило, по которому каждому одноместному предикату P(x), определенному на множестве М, сопоставляется высказывание, обозначаемое, $(\exists x)(P(x))$ *которое ложно в том и только в том случае, когда предикат P(x) тождественно ложен, и истинно в противном случае*
Б) называется правило, по которому каждому двуместному предикату P(x), определенному на множестве М, сопоставляется высказывание, обозначаемое, $(\exists x)(P(x))$ *которое ложно в том и только в том случае, когда предикат P(x) тождественно ложен, и истинно в противном случае*
В)) называется правило, по которому каждому двуместному предикату P(x), определенному на множестве М, сопоставляется высказывание, обозначаемое, $(\exists x)(P(x))$ *которое ложно в том и только в том случае, когда предикат P(x) тождественно истинен, и истинно в противном случае*

9. Операцией связывания квантором существования по переменной x_1

А) называется правило, по которому каждому n-местному (n_{i2}) предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенному на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, сопоставляется новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый $(\exists x_1)(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, который для любых предметов $a_2 \in M, \ldots, a_n \in M_n$, превращается в высказывание $(\exists x_1)(P(x_1, a_2, \ldots, a_n))$, ложное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, \ldots, a_n)$, определенный на множестве M_1, тождественно ложен, и истинное в противном случае

Б) *Операцией связывания квантором существования по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному (n_{i2}) предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенному на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, сопоставляется новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый $(\exists x_1)(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, который для любых предметов $a_2 \in M, \ldots, a_n \in M_n$, превращается в высказывание $(\exists x_1)(P(x_1, a_2, \ldots, a_n))$, ложное в том и только в том случае, когда двуместный предикат $P(x_1, a_2, \ldots, a_n)$, определенный на множестве M_1, тождественно ложен, и истинное в противном случае,*

В) называется правило, по которому каждому n-местному (n_{i2}) предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенному на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, сопоставляется новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый $(\exists x_1)(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, который для любых предметов $a_2 \in M, \ldots, a_n \in M_n$, превращается в высказывание $(\exists x_1)(P(x_1, a_2, \ldots, a_n))$, истинное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, \ldots, a_n)$, определенный на множестве M_1, тождественно ложен, и истинное в противном случае

10. Выражение, на которое навешивается квантор

А) называется **областью действия квантора**
Б) называется **областью переменной квантора**
В) оба ответа верны

ПРЕЗЕНТАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1.Квантор всеобщности.

Пусть P(x) – предикат, определенный на множестве M. Под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, истинное, когда P(x) истинно для каждого элемента x из множества M, и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение звучит так: “Для всякого x P(x) истинно ”.
Символ называют квантором всеобщности (общности).
Переменную x в предикате P(x) называют свободной (ей можно придавать различные значения из M), в высказывании же $\forall xP(x)$ x называют связанной квантором всеобщности.

2.Квантор существования

Пусть P(x) -предикат определенный на множестве M. Под выражением $\exists$ xP(x) понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент x∈M, для которого P(x) истинно, и ложным - в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение звучит так: "Существует x, при котором P(x) истинно." Символ $\exists$ называют квантором существования.

3.Численные кванторы

В математике часто встречаются выражения вида "по меньшей мере n" ("хотя бы n"), "не более чем n", "n и только n" ("ровно n"), где n - натуральное число.

Эти выражения, называемые <u>численными кванторами</u>, имеют чисто логический смысл; они могут быть заменены равнозначными выражениями, не содержащими числительных и состоящими только из логических терминов и знака = или означающего тождество (совпадение) объектов.

Запись математических предложении и определений в виде формул логики предикатов

1.Определение непрерывности функции в точке.

Функция , определенная на множестве E, непрерывна в точке $x_0 \in E$, если $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in E(P(\varepsilon,\delta,x))$ где

$$P(\varepsilon,\delta,x)=(0<|x-x_0|<\delta\to|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

2. Построение противоположный утверждений

$$\overline{\exists M\in R_+\forall x\in E(|f(x)|\le M)}^{31}\equiv\forall M\in R_+\overline{\forall x\in E(|f(x)|\le M)}^{31}\equiv\forall M\in R_+\exists x\in E(\overline{|f(x)|\le M})\equiv$$

$$\equiv\forall M\in R_+\exists x\in E(|f(x)|>M)$$

Прямая, обратная и противоположная теоремы

Рассмотрим четыре теоремы:

1 $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$

2 $\forall x \in E(\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x))$

3 $\forall x \in E(Q(x) \to P(x))$

4 $\forall x \in E(\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x))$

“Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником ” (1) обратной является теорема “Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали равны” (2). Для теоремы (1) противоположной является теорема “Если в четырехугольнике диагонали не равны, то четырехугольник не является прямоугольником ” (3), а для теоремы (2) противоположной является теорема “Если четырехугольник не является прямоугольником, то его диагонали не равны ” (4)

9.4 Необходимые и достаточные условия.

Рассмотрим теорему

$$\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$$

Как отмечалось, множество истинности предиката $P(x) \to Q(x)$ есть множество $I_{\overline{P}} \cup I_Q$. Но тогда множеством ложности этого предиката будет $\overline{I_{\overline{P}} \cup I_Q} = I_P \cap I_{\overline{Q}}$. Последнее множество будет пустым лишь в случае, когда $I_P \subset I_Q$

Итак, предикат $P(x) \to Q(x)$ является истинным для всех том и в только в том случае, когда множество истинности предиката P(x) содержится в множестве истинности предиката Q(x). При этом говорят, что предикат Q(x) логически следует из предиката P(x), и предикат Q(x) называют необходимым условием для предиката P(x), а предикат P(x) – достаточным условием для Q(x).

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Гусак А.А. Высшая математика. Том 1. Минск. Изд-во БГУ. 1983 год.**
2. **Баврин И.И. Высшая математика. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 616 с.**
3. **Гусак А.А., Бричикова Е. А., Гусак Г. М. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление. Мн.: Тетрасистемс, 2002.**
4. **Кастрица О.А. Высшая математика для экономистов. М.: Новое знание, 2009**
5. **Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного.**
6. **М.: Наука, 1976.**