Государственный университет связи, информатизации и телекоммуникационных технологий Республики Узбекистан

Нукусский филиал ташкентского университета информационных технологий

САМОМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Студента 5330200 группы

Тлеумуратова Жанибека

Подготовил: **Тлеумуратов Ж.**

Принял: **к.ф. – м.н. Арзиев А.**

Нукус - 2013

Содержание

Комбинаторные тождества.

В этом параграфе будет доказан ряд соотношений для биномиальных коэффициентов. Все они интересны сама по себе и многие будут использоваться нами в дальнейшем. Однако не менее интересны способы их доказательства (или получения). Мы будем, как правило, предлагать доказательства, исходящие из комбинаторной природы соотношений. Общая схема рассуждений здесь такова. Пусть доказывается тождество $f(n,m,...) = g(n,m,....)$. По виду левой и правой частей реконструируется задача на **подсчет** числа комбинаций определенного вида ($n, m,....$ выступают в роли параметров), решая которую одним способом, получаем в качестве ответа $f(n,m,...)$, а другим способом – $g(n,m,...)$.

В нижеприводимых соотношениях значения параметров предполагаются такими, чтобы все биномиальные коэффициенты имели смысл (например, если в формуле присутствует C_n^k то предполагается, что $0 < k < n$).

Имеют место следующие тождества:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2) $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$;

3) $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$;

4) $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$;

5) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k = 1$;

6)[**Свертка Вандермонда**] $C_{m+n}^k = \sum_{s=0}^k C_m^s C_n^{k-s} (m \geq k, n \geq k)$;

7) $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$;

8) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;

9) $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$;

10) $\sum_{p=0}^k C_{m+p}^m = C_{m+k+1}^{m+1}$;

11) $\sum_{p=0}^k C_{n+p}^m = C_{n+k+1}^{m+1} - C_n^{m+1}$;

12) $\sum_{k=0}^m C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot 2^m$;

13) $\sum_{n=k}^m \frac{1}{n} C_n^k = \frac{1}{k} C_m^k$;

14) $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Доказательство.

1) Каждому k-элементному подмножеству n-элементного множества поставим в соответствие его дополнение до всего множества. Нетрудно видеть, что при этом задается взаимно однозначное соответствие между k-элементными и $n-k$ -элементными подмножествами n-элементного множества. Если между двумя конечными множествами существует взаимно однозначное соответствие, то эти множества содержат одинаковое количество элементов. Таким образом, число сочетаний из n по k совпадает с числом сочетаний из n по $n-k$.

2) Правая часть Доказываемого тождества есть число k-элементных подмножеств n-элементного множества. Докажем, что и левая часть есть то же самое. Зафиксируем некоторый элемент n - элементного множества, обозначим его γ. Разобьем все k- элементные подмножества на два семейства: в первое включим подмножества, содержащие γ, а во второе — не содержащие γ. Для того, чтобы сформировать подмножество из первого семейства, нужно из $n-1$ элемента выбрать $k-1$, поскольку элемент γ уже входит в это подмножество. Поэтому в первом семействе C_{n-1}^{k-1} подмножеств. Для формирования подмножества из второго семейства надлежит выбрать из $n-1$ элемента (γ выбирать нельзя!) k элементов; значит, во втором семействе C_{n-1}^{k} подмножеств. Так как всякое k-элементное подмножество входит ровно в одно из двух семейств, общее число k-элементных подмножеств может быть подсчитано как сумма $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}$.

3) 2^n – число всех подмножеств n-элементнвго множества. Так как C_n^k – число всех его k-элементных подмножеств, то просуммировав C_n^k по k от 0 до n, вновь получим общее число всех подмножеств.

Другой способ доказательства состоит в применении формулы бинома Ньютона. Положив в ней $x=1$, получим требуемое.

4) Тождество доказывается подстановкой в приведенной выше формуле $x=-1$. **Комбинаторное** доказательство может быть получено из решения следующей задачи. Доказать, что четное число элементов из n-элементного множества может быть выбрано 2^{n-1} способами.

5) Данное соотношение является другой формой записи предыдущего тождества.

6) Решим такую задачу. Имеется m мужчин и n женщин. Из них нужно сформировать делегацию из k человек. Каким числом способов это можно сделать?

Ответ очевиден: C_{m+n}^k. Будем классифицировать делегации по числу мужчин. Если в делегацию входят s мужчин, и $k-s$ женщин, то мужчин можно выбрать C_m^s способами, а женщин C_n^{k-s} способами; значит, число делегаций с s мужчинами равно $C_m^s C_n^{k-s}$. Суммируя $C_m^s C_n^{k-s}$ по s от 0 до k, получим общее число делегаций.

7) Для доказательства достаточно в предыдущем соотношении положить $k=m=n$ и применить 1).

8) Доказательство тождества может быть получено из решения следующей задачи: Каким числом способов можно из n кандидатов выбрать k депутатов и среди последних спикера?

Депутаты выбираются C_n^k способами, после чего спикер выбирается k способами; таким образом, общее число способов равно $C_n^k \cdot k$. То же число можно подсчитать по-другому. Будем сначала (всенародным голосованием) избирать спикера (из n кандидатов), а затем из оставшихся $n-1$ кандидата – еще $k-1$ депутата. Указанная процедура может быть выполнена я $n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ способами. Доказано, что $k \cdot C_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Отсюда вытекает полезное рекуррентное соотношение $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$, применяя которое несколько (точнее: k) раз, можно вновь вывести формулу для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} C_{n-2}^{k-2} = ... = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot ... \cdot \frac{n-k+1}{1} \cdot C_{n-k}^0 = \frac{n(n-1)....(n-k+1)}{k!}.$$

9) Это тождество – обобщение предыдущего (если в 9) положить $m=1$, то получим 8)) и может быть доказано с помощью решения задачи, также являющейся обобщением ранее рассмотренной: Каким числом способов можно выбрать из n кандидатов k депутатов и среди последних m членов президиума?

10) Докажем тождество математической индукцией по k. *База индукции*. При $k=0$ имеем верное равенство:

$C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1.$

Индукционный шаг. Пусть доказываемое утверждение верно при $k = n$:

$$\sum_{p=0}^{n} C_{m+p}^{m} = C_{m+n+1}^{m+1}.$$

Прибавив к обеим частям равенства C_{m+n+1}^{m},получим

$$\sum_{p=0}^{n+1} C_{m+p}^{m} = C_{m+n+1}^{m+1} C_{m+n+1}^{m} = [\textit{в силу } 2)] = C_{m+n+2}^{m+1}.$$

Таким образом, соотношение 10) справедливо и при $k = n+1$.

11) Тождество доказываете» на основе предыдущего:

$$\sum_{p=0}^{k} C_{n+p}^{m} = \sum_{i=m}^{n+k} C_i^m - \sum_{i=m}^{n-1} C_i^m = [p = i - m] = \sum_{p=0}^{n+k-m} C_{m+p}^{m} - \sum_{p=0}^{n-1-m} C_{m+p}^{m} = C_{n+k+1}^{m+1} - C_{n1}^{m+1}.$$

1) Решим задачу; Каким числом способов можно из n кандидатов выбрать m депутатов и

среди депутатов некоторых (может быть, всех, а может быть, никого) наградить?

С одной стороны, депутаты выбираются C_n^m способами, а награжденные выделяются 2^m способами (столько подмножеств имеет множество из m элементов), и, значит, ответ к задаче: $C_n^m \cdot 2^m$.

С другой стороны, если число награждаемых депутатов равно k $(0 \le k \le m)$, то их можно выбрать C_n^k способами, после чего остальные $m-k$ депутатов выбираются C_{n-k}^{m-k} способами. Суммируя $C_n^k C_{n-k}^{m-k}$ по k от 0 до m, вновь получим ответ к рассматриваемой задаче. Тождество доказано.

Воспользовавшись тождеством, заменим $\frac{1}{k} C_n^k$ на $\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} C_j^k$ и в полученной двойной сумме поменяем порядок суммирования:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} C_n^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} C_j^k = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \cdot \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k-1} C_j^k = [\textit{в силу } 5)] = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Пусть есть некоторое конечное множество элементов U={a_1, a_2, ..., a_n}. Рассмотрим набор элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{j_j}$, a_{j_j} где $\in U$, j = 1, 2, ..., r.

Этот набор называется выборкой объема r из n элементов. Любое подмножество U является выборкой, но не всякая выборка является подмножеством U, так как в выборку один и тот же элемент может входить несколько раз (в отличие от подмножества).

Комбинаторные задачи связаны с подсчетом числа выборок объема r из n элементов, где выборки подчиняются определенным условиям, т.е. выбор производится по какому-нибудь принципу. Подсчет числа выборок основывается на двух правилах теории множеств.

***Принцип суммы*:** если card $A = m$, card $B = n$ и $A \cap B = \varnothing$, то card $A \cup B$ = $=m+n$. На комбинаторном языке это означает: если объект A можно выбрать m способами, объект B другими n способами и их одновременный выбор невозможен, то выбор “A или B” может быть осуществлен $m+n$ способами.

Принцип произведения: если card $A=m$, card $B=n$, то card $(A \times B)=m+n$. На комбинаторном языке это означает: если объект A может быть выбран m способами, при любом выборе A объект B может быть выбран n способами, то выбор “A и B” может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

***Пример* 1**. A = 10 {различных шоколадок}, B = 5 { различных пачек печенья}. Выбор “A или B” означает, что выбирается что-то одно и способов выбора в этом случае будет 15. Выбор “A и B” означает, что выбирается 1 шоколадка и 1 пачка печенья и различных вариантов для такого выбора будет 50.

***Пример* 2.** Бросают 2 игральные кости. Сколькими способами они могут выпасть так, что на каждой кости выпадет четное число очков либо на каждой кости выпадет нечетное число очков?

Пусть m – число возможностей для выпадения четного числа на одной кости, n – число возможностей для выпадения нечетного числа. Здесь $m = n = 3$. По правилу произведения количество выпадения четных чисел, как и нечетных, равно 9. По правилу суммы количество возможностей для выпадения двух четных и двух нечетных чисел будет 18.

Рассмотрим основные способы формирования выборок.

Определение. Выборка называется упорядоченной, если в ней задан порядок следования элементов. Если порядок следования элементов несущественен, то выборка называется неупорядоченной.

Из определения следует, что две упорядоченные выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке, являются различными.

Список литературы

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. – М.: Наука, 1992. –408с.
2. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач на алгебре и теории чисел. – М. : Просвещение, 1993.
3. Набебин А.А. Логика и пролог в дискретной математике. – М.: МЭИ, 1996. –452с.
4. Кольман Э. Зих О. Занимательная логика. – М.: Наука, 1966. –127с.
5. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы./Под ред. Сканави М.И. – М.: Высшая школа, 1980. –541с.
6. Рембольд У. Введение в информатику для научных работников и инженеров. – Уфа: УГАТУ, 1996. –445с.