ӨЗБЕКИСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

ӨЗБЕКИСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БАЙЛАНЫС, ИНФОРМАЦИЯЛАСТЫРЫЎ ҲӘМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫ МӘМЛЕКЕТЛИК КОМИТЕТИ

ТАШКЕНТ ИНФОРМАЦИЯЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫ УНИВЕРСИТЕТИ НӨКИС ФИЛИАЛЫ

«ИНФОРМАЦИЯЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР» КАФЕДРАСЫ

«КОМПЬЮТЕР ИНЖИНИРИНГ» бакалавр бағдарының

4-курс студенти

НУРЫМОВ АЛИШЕРДИҢ

«МАТРИЦАЛЫҚ ОЙЫНЛАР МӘСЕЛЕСИН МОДЕЛЛЕСТИРИЎ» АТАМАСЫНДАҒЫ

ПИТКЕРИЎ ҚӘНИГЕЛИК ЖУМЫСЫ

Илимий басшы: **проф. Утеулиев Н.У.**

Кафедра баслығы: **т.п. Арзымбетов Т.З**

Нөкис-2014

Мазмуны

Кирисиў

1 бап. Ойынлар теориясы.

§ 1. Матрицалық ойынлар.

1.1 Таза стратегиялардағы матрицалық ойынлардың шешилиўи.

1.2 Матрицалық ойынның аралас шешими.

1.3 Матрицалық ойынлар шешимлериниң қәсийетлери.

1.4 2×2 тәртипли ойынлар

1.5 $2\times n$ ҳәм $m\times 2$ ойынларды шешиўдиң графикалық усыллары.

1.6 Матрицалық ойынды сызықлы программаластырыў мәслесине алып келиў.

§ 2. Шексиз антагонистикалық ойынлар.

2.1 Шексиз антагонистикалық ойын анықламасы

2.2 Утыслар функциясы дөңес болған ойынлар

2 бап. Аўыл хожалығы өндириси мәселелерин шешиў.

§ 1. Аўыл хожалығы өндириси мәселелерин шешиўде ойынлар теориясынан пайдаланыў.

§ 2. Санлы мысаллар.

Жуўмақлаў

Қосышалар

Әдебиятлар

Кирисиў

Ойынлар теориясы ең дәслеп Нейман ҳәм Моргенштерн тәрепинен 1944 жылы толығы менен суўретленген. Нейман ҳәм Моргенштерн тәрепинен жазылған китапта ойынлар теориясы экономикалық мәселелерди шешиў қуралы ретинде көрсетилген, себеби экономикалық конфликтлерди санлы түрде келтириў қыйын емес. Екинши дүнья жүзлик урыс ўақтында ҳәм онан кейин ойынлар теориясы әскерий мәселелерди шешиўде қолланыла баслады. Кейин ойынлар теориясы економикалық мәселелерди шешиўде қайта қолланыла баслады. Ҳәзирги ўақытта ойынлар теориясының қолланыўы сфераларын кеңейтиў бойынша көплеген жумыслар алып барылмақта.

Конфликт – бул қандайда бир болыўшы еки ямаса оннанда көп тәреплердиң қарама-қарслығы. Конфликтлерди *шешиў* – бул конфликт қатнасыўшылары ушын қандайда бир өзин тутыў жолы, яғный ис-ҳәрекети *стратегия* деп аталады.

Ойынлар теориясы – конфликтлерди шешиўге арналған математиканың бөлеги деп айтсақ ҳәм болады. Дерлик барлық жағдайларда инсанията өмиринде конфликтлер пайда болып турады. Ерте турып, жумысқа асығып баратырғанда конфликт жағдайының бир мысалы- толып турған траспорта орын ийелеў. Бул әдетте, ири конфликт емес, бизлер оны мысал ретинде келтирип өттик.

Аўыл хожалығы өндирис мәселелерин шешиў – бул ҳожалық пенен табият конфликтин шешиў, яғный ҳәр бир тәреп ушын ең жақсы, оптимал стратегияларын анықлап бериў болып табылады.

Бул жумыстыө мақсети-аўыл хожалығы өндириси мәселелерин шешиўде ойынлар теориясынан пайдаланыўды көрип өтиў. Жумыстың биринши бөлиминде ойынлар классификациясы, матрица ойынлар, оларды шешиў, матрицалық ойынлар шешимлери қәсийетлери ҳаққында айтылған. Екинши бөлиминде ойынлар теориясынан аўыл хожалығы өндириси мәселерин шешиӯде пайдаланыӯ ҳаққында айтылған, соңында санлы мысаллар келтирилген.

1 бап. Ойынлар теориясы.

ОЙЫНЛАР КЛАССИФИКАЦИЯСЫ

Ойынлар классификациясын төмендегише өткериӯге болады: Ойынлар саны, стратегиялар саны, ойыншылар қатнасықлары ҳәрекетлери, жүримлер саны, мағлумат жағдайы ҳ.т.б.

Ойынлар саны бойынша еки ҳәм n ойыншылар ойынлары қарастырылады. Олардың бириншилери көп изертленген. Үш ҳәм оннан да көп сандағы ойыншылар ойынлары пайда болатуғын көплеген қыйыншылықларға байланыслы аз изертленген. Ойыншылар қаншелли көп болса, соншелли машқалалар пайда болады.

Стратегиялар бойынша ойынлар шекли ҳәм шексиз болып бөлинеди. Егерде ойында шекли сандағы мүмкин болған стратегияларға ийе болса, ойын шексиз болады.

Қатнасықлар характери бойынша ойынлар төмендегилерге ийе бөлинеди:

1) Коалициясыз: ойыншылар келисимлерге келиӯ, коалициялар дүзиӯ ҳақысына ийе болмайды.
2) Коалициялык (кооператив) –келисимлер дүзе алады.

Кооператив ойынларда коалициялар алдын анық белгиленген болады.

Утыслар характери бойынша ойынлар нөллик қосындылы (ойыншылар улыӯма капиталы өзгермей, ойыншылар арасында бөлистириледи, барлық ойыншылар утыслары қосындысы нөлге тең) ҳәм де нөллик қосындылы болып екиге бөлинеди.

Ойын утысы функциялары түри бойынша ойынлар матрицалық, еки матрицалы, үзликсиз, дөңес, сепарабель ҳ.т.б. болып бөлинеди.

Матрицалық ойын-бул еки ойыншының нөллик қосындылы шекли ойыны, бунда 1–ойыншы утысы матрица көринисинде бериледи. (матрица қатары 1-ши ойыншының қолланылып атырған сратегиясы номерине сәйкес келеди: қатар менен бағана кесилисиӯинде 1-ойыншының қолланылып атырған стратегияларға сәйкес утысы жайласады).

Матрицалық ойынлар ушын олардың хәр бири шешимге ийе болатуғынлығы хәм де олардың шешимлери сызықлы программаластырыў мәселесине алып келиў арқалы табылатуғынлығы дәлилленген.

Еки матрицалы ойын – бул еки ойыншының нөллик емес қосындылы шекли ойыны, бунда хәр бир ойыншы утысы матрица көринисинде бөлек бериледи (хәр бир матрицада қатар 1-ойыншының қолланып атырған стратегиясына сәйкес болады, бағана 2-ойыншының қолланып атырған номерине сәйкес келеди. Қатар менен бағана кесилисиўинде биринши матрицада 1-ойыншының, екинши матрица болса 2- ойыншының қолланып атырған стратегияларға сәйкес утыслары жайласады).

Еки матрицалы ойынлар ушын хәм ойыншылардың оптимал стратегиясы ислеп шығылған, бирақта бундай ойынларды шешиўден қурамалырақ болады.

Үзликсиз деп хәр бир ойыншы утыслары функциясы стратегияларға қарата үзликсиз болыўшы ойынларға айтамыз. Бундай ойынлар классы шешимге ийе болатуғынлығы дәлиленген, бирақта оларды шешиўдиң әмелий усыллары еле исленип шықпаған.

Егер де утыслар функциясы дөңес болса, бундай ойын дөңес болады. Бундай ойынлар ушын бир ойыншы ушын оптимал (анық бир сандағы) стратегиялары хәм де басқа ойыншының таза оптимал стратегиялардан қолланыў итималлығын есаплаўға тийкарланған шешиў усыллары ислеп шығылған. Бундай мәселе салыстырмалы аңсат шешиледи.

§ 1. МАТРИЦАЛЫҚ ОЙЫНЛАР.

1.1 ТАЗА СТРАТЕГИЯЛАРДАҒЫ МАТРИЦАЛЫҚ ОЙЫНЛАРДЫҢ ШЕШИЛИЎИ

Еки ойыншының нөллик қосындылы матрицалық ойыны төмендегише еки ойыншының абстракт сыпатыда қарастырыўы мүмкин.
Биринши ойыншы m i=1,2,…,m стратегияға ийе, екинши ойыншы болса n j=1,2,..,n стратегияға ийе. Ҳәр (i,j) стратегиялар жуплығына a_{ij}, саны сәйкес қойылған, бул сан 1-ойыншының екинши ойыншы есабынан утысын аңлатады, бунда биринши ойыншы өзиниң i- стратегиясынан пайдаланады деп есаплаймыз.

Ҳәр бир ойыншы бир ҳүжим қылады: 1-ойыншы өзиниң i - $(i=\overrightarrow{1,m})$ 2-өзиниң j- $(j=\overrightarrow{1,n})$ стратегиясын таңлайды, усыдан соң 1-ойыншы 2-ойыншы есабынан a_{ij} утысқа ийе болады, (егер $a_{ij}< 0$ болса, бул 1-ойыншының екинши ойыншыға a_{ij} шамасын төлейтуғынлығын аңлатады). Усыда ойын тамамланады.

Ойыншының ҳәр бир $(i=\overrightarrow{1,m})$; $(j=\overrightarrow{1,n})$ стратегиясын көп жағдайда таза стратегия деп аталады.

Егерде

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицасын қарастырсақ, онда А матрицаға ийе ойынның ҳәр бир партиясын өткериў 1-ойыншының i- қатарды, ал 2-ойыншының j-бағананы сайлаўына ҳәм де 1-ойыншының (2-ойыншы есабынан) a_{ij} утысына ийе болыўына келеди.

Ойыншылардың оптимал стратегиялары түсиниги ойынларды изертлегенде ең маңызлы болып ойыншылардың оптимал стратегиялары түсиниги табылады. Бул түсиник төмедегише мәниске ийе; Ойыншы стратегиясы оптимал болады, егер бул стратегиядан қолланыў 2-ойыншының барлық мүмкин болған стратегияларында биринши ойыншыға ең көп муғдардағы утысты беретуғын болса. Усы көз карасларға сүйене отырып, 1-ойыншы утыслар матрицасы A ны келеси түрде изертлейди: Ҳәр бир i $(i=\overrightarrow{1,m})$ мәниси ушын екинши оқыўшы қолланған стратегияларға байланыслы түрде утыстың минимал мәниси анықланады.

$$\min_j a_{ij} \qquad (i=\overrightarrow{1,m})$$

яғный 1-ойыншы ушын ол өзиниң i- стратегиясынан қолланылады деген шәрти менен минимал утыс муғдары табылады, кейин усы минимал утысларда минимал утыс максимал болатуғындай $i=i_0$ стратегиясы анықланады, яғный төмендеги табылады.

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i0j0} = \underline{\alpha} \qquad (1)$$

<u>Анықлама;</u> <u>(1)</u> Формула бойыша анықланған $\underline{\alpha}$ саны *<u>оның төмендеги таза баҳасы</u>* деп аталады, ҳәм де 1-ойыншының таза стратегиялардан қолланып қандай муғдардағы минимал утысқа ийе болатуғынын көрсетеди.

Екинши ойыншы өзин оптимал услап барыўында өзиниң стратегиялары арқалы 1-ойыншы утысын максимал азайтыўға тырысыўы керек. Соның ушын екинши ойыншы ушын

$$\max_i a_{ij}$$

анықланады, яғный екинши ойыншы өзиниң j - стратегиясынан пайдаланады деген шәртинде 1-ойыншының максимал утысы анықланады, соң екинши ойынши 1-ойыншы минимал утысқа ийе болатуғындай $j=j_1$ стратегия табылады:

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \bar{\alpha} \qquad (2)$$

<u>Анықлама;</u> (2) жәрдеминде анықланыўшы $\bar{\alpha}$ саны *<u>ойынның жоқарғы таза баҳасы</u>* деп аталады, ҳәм де 1-ойыншының таза стратегиялары қолланып қандай муғдардағы максимал утысқа ийе болатуғын көрсетеди.

Басқаша айтқанда, өзиниң таза стратегиясынан пайдалана отырып 1-ойыншы өзин $\underline{\alpha}$ кем болмаған утыс пенен тәминлейди, екинши ойыншы болса өзиниң таза стратегиясынан пайдалана отырып 1- ойыншының утысын $\bar{\alpha}$ дан аспайтуғын ете алады.

Анықлама; Егер А матрицалы ойында $\underline{\alpha} = \bar{\alpha}$ болса, онда бул ойын таза стратегияларда *ерлик ноқатқа* ийе болады, ҳәм таза ойынның *таза баҳасына* ийе болады деп айтамыз.

$$\upsilon = \underline{\alpha} = \bar{\alpha}.$$

Ерлик ноқат – бул $\underline{\alpha} = \bar{\alpha}$ теңлик орынланатуғындай 1 ҳәм 2-ойыншының $(i_0 j_0)$ таза стратегиялары жуплығы. Бул түсиник төмендегише мәниске ийе; Егер ойыншылардың биреӯи ерлик ноқатқа сәйкес стратегиядан қолланса, онда екинши ойыншыға тек ғана ноқатқа сәйкес стратегиядан пайдаланыӯ ғана қалады. Математикалық түрде буны төмендегише жазсақ ҳәм болады.

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \qquad (3)$$

бунда i, j-сәйкесинше 1 ҳәм 2– ойыншылардың таза стратегиялары; (i, j)-ноқатқа сәйкес стратегиялар.

Усылай етип, (3) тен келип шыққан ҳалда, $a_{i_0 j_0}$ ерлик элементи А матрицасында ерлик ноқат төмендегише анықланады. A матрицада ҳәр бир қатар бойынша избе-из минимал элементти табады, ҳәм де бул элемент өз бағанасында максимал болатуғынлығын тексереди. Егер бул орынлы болса, онда ол ерлик элемент болып табылады, ҳәм оған сәйкес стратегиялар жуплығы ерлик ноқатты дүзеди. Ерлик элемент $a_{i_0 j_0}$ ҳәм ерлик ноқатты дүзиӯши $(i_0 j_0)$ 1 ҳәм 2- ойыншының таза стратегиялары жуплығы *ойын шешими* деп аталады. Бунда i_0 ҳәм де j_0 сәйкесинше 1 ҳәм 2-ойыншыларының *оптимал таза стратегиялары* деп аталады.

<u>Мысал</u> (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max_i \min_j a_{ij} = 2$$

$$\max_i a_{ij} = \underbrace{2 \quad 5 \quad 4}_{\min_j \max_i a_{ij}=2}$$

Ерлик ноқат-(i_0=3; j_0=1) жуплығы, бунда $\upsilon=\bar{\alpha}=\underline{\alpha}=2$. (3;3) жағдайында ҳәм утыс $2=\underline{\alpha}=\bar{\alpha}$ болғаны менен, бул стратегия ерлик ноқат бола алмайды, себеби бул утыс үшинши бағана утыслары арасында максимал болмайды.

<u>Мысал</u> (2)

$$H=\begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} 10 \\ 20 \end{matrix}\right\} \max_i \min_j a_{ij} = 20$$

$$\max_i a_{ij} \qquad \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{40 \ 30}_{\min_j \max_i a_{ij}=30} \end{matrix}$$

Матрица анализинен $\underline{\alpha} < \bar{\alpha}$, яғный берилген матрица ерлик ноқатқа ийе емеслиги көринип турыпты. Егер 1-ойыншы өзиниң максималлық i=2 стратегиясын таңласа, онда екинши ойыншы, өзиның минимакслик j=2 стратегиясын таңлап, тек ғана 20 уттырады. Бул жағдайда 1-ойыншыға i=1 стратегиясын таңлаў, яғный өзиниң таза максиминлик стратегиясын таңламай 30 ды уттырыў пайдалырақ болады. Онда 2-ойыншы ушын j=1 стратегиясын таңлаў, яғный өзиниң таза минимакслик стратегиясынан қолланбастан 10 уттырыў пайдалырақ болады. Өз гезегинде 1-ойыншы 40 утыў ушын өзиниң 2-стратегиясын таңлаўы керек болады, 2-ойыншы болса 2-стратегияны қолланыўы менен жуўап береди ҳ.т.б.

1. 2 МАТРИЦАЛЫҚ ОЙЫННЫҢ АРАЛАС ШЕШИМИ.

Матрицалық ойынлардың изертлениўи оның таза стратегиядағы ерлик ноқатын табыўдан басланады. Егер матрицалық ойын таза стратегияларда ерлик ноқатқа ийе болса, онда усы ноқатты табыў менен матрицалық ойынның изертлениўи тоқтайды. Егерде төмендеги таза баҳаларын табыўға болады. Олар 1-ойыншының утысының муғдарын шегаралап турады, яғный 1-ойыншы жоқары баҳадан үлкен болған утысқа ерисе алмайтуғынлығын ҳәм де төмендеги баҳадан кем утыс алмайтуғынын аңлатады.

Анықлама; *Ойыншының аралас стратегиясы* деп оның таза стратегиялардан пайдаланыўының итималлықларының толық жыйына айтамыз.

Усылай етип, егер 1-ойыншы *m 1,2,…,m* таза стратегияға ийе болса, оның *x* аралас стратегиясы–бул x $(x_1 \;,\ldots, x_m)$ төмендеги қатнасларды қанаатландырыўшы санлар жыйыны:

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}), \; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Дәл усылайынша *n* таза стратегияға ийе екинши ойыншы ушын *y* аралас стратегиясы бул төмендегише санлар жыйыны:

$$y = (y1,\ldots,yn), \quad yj \geq 0, \; (j = \overline{1,n}) \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Ойыншының бир таза стратегиядан пайдаланыўы, оның екинши стратегиядан пайдаланыўын бийкарлайтуғын болғаны себепли, таза стратегиялар биргеликли болмайтуғын ўақыялар болып табылады.

Таза стратегия аралас стратегиялардың дара жағдайы болып табылады. Ҳақықатында да, егер аралас стратегияда қандайда бир *i* – таза стратегия 1 итималлығы менен қолланылса, онда барлық қалған таза стратегиялар пайдаланылмайды. Бул i –таза стратегия ҳәм аралас стратегиялардың дара жағдайы болып табылады. Сырды сақлаў ушын ҳәр бир ойыншы өзиниң стратегияларынан екинши ойыншы сақлаўынан ғәрессиз түрде пайдаланылады.

Анықлама; 1-ойыншының орташа утысы A матрицалы матрицалық ойында төмендегише оның утысларының математикалық күтилиўи түринде аңлатылады.

$$E(A, x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = x\, A\, y^T$$

Биринши ойыншы мақсети-өзиниң x аралас стратегияларын өзгериў нәтийжесинде өзиниң $E(A, x, y)$ орташа утысын максимал асырыў, екинши ойыншы мақсети болса өзиниң аралас стратегиялары есабынан $E(A, x, y)$ ты минимал қылыў, яғный ойынды шеклеў ушын сондай x ҳәм y табыў керек. Бунда төмендегише ойынның жоқары баҳасы жетилиўи керек:

$$\bar{\alpha} = \min_{y} \max_{x} = E(A, x, y).$$

Екинши ойыншы ушын ҳәм жағдай дәл усындай болыўы керек, яғный ойынның төменги баҳасы төмендегише болыўы керек.

$$\underline{\alpha} = \max_{x} \min_{y} = E(A, x, y).$$

Бул жерде келеси анықламаны киритип өтемиз (ерлик ноқатқа ийе ойынлар жағдайы сияқлы) 1- ҳәм 2-ойыншының *оптимал аралас стртагиялары* деп төмендеги теңликти қанаатландыратуғын сәйкесинше жыйынларына айтамыз.

$$\min_{y} \max_{x} E(A, x, y) = \max_{x} \min_{y} E(A, x, y) = E(A, x^0, y^0).$$

$E(A, x^0, y^0)$ шамасына бул жерде *ойын баҳасы* деп атаймыз, ҳәм υ арқалы белгилеймиз.

Оптимал аралас стратегиялар басқаша ҳәм анықламасы бар; x^0, y^0 сәйкесинше 1 ҳәм 2-ойыншылардың оптимал аралас стратегиялары деп аталады, егерде олар еолик ноқатты пайда ететуғын болса:

$$E(A, x, y^0) \le E(A, x^0, y^0) \le E(A, x^0, y)$$

Оптимал аралас стратегиялар ҳәм ойын баҳасы *математикалық ойын шешими* деп аталады.

Матрицалық ойынлардың тийкарғы теоремасы төмендегише болады:

Теорема; (минимакс ҳаққында). Қәлеген A матрицалы матрицалық ойынлар ушын

$$\underline{\alpha} = \max_{x} \min_{y} = E(A, x, y) \text{ ҳәм } \bar{\alpha} = \min_{y} \max_{x} E(A, x, y)$$

шамалары бар болады, ҳәмде олар өз-ара тең болады.

1.2 МАТРИЦАЛЫҚ ОЙЫНЛАР ШЕШИМЛЕРИНЫҢ ҚӘСИЙЕТЛЕРИ.

1-ойыншы $x \in X$ стратегиясынан, 2- $y \in Y$ утысқа ийе болатуғындай нөллик емес ойынды G(X, Y, A) деп белгилеп алайық.

Анықлама; 1-ойыншының x^1 стратегиясы x^2 стратегиясына *үстемлик етеди (қатаң үстемлик етеди)*, егерде төмендегилер орынланса;

$$A(x^1, y) \geq A(x^2, y) \ (A(x^1, y > A(x^2, y)), \ y \in Y.$$

2-ойыншының y^1 стратегиясы y^2 стратегиясына *үстемлик етеди (қатаң үстемлик етеди)*, егерде төмендегилер орынланса:

$$A(x, y^1) \leq A(x, y^2) \ (A(x, y^1 < A(x, y^2)), \ \ x \in X$$

Бунда x^2 ҳәм де y^2 стратегиялары бағыныўшы (қатаң бағыныўшы) деп аталады. Ойынның шекли антагонистикалық ойындағы аралас стратегиясы спектри деп пайдаланыў итималығы усы стратегия бойынша тегис болмаған барлық таза стратегиялар көплигине айтамыз.

1-қәсийети; Егер бир ойыншның таза стратегиясы оның қандайда бир оптимал стратегиясы спектринде жайласқан болса, онда бул ойыншының усы таза стратегиясы менен екинши ойыншының қәлеген оптимал стратегиясы нәтийжесинде пайда болған жағдайдағы утысы шекли агнагонистикалық ойын мәнисине тең болады.

2-қәсийети; Ойынның хеш бир қатаң бағыныўшы стратегиясы оның оптимал стратегия спектринде жайласпайды.

G'=(*X*, *Y*, *A*) ойыншының үлес ойыны деп аталады, егер $X' \subset X$, болып *A'* матрицасы төмендегише дүзиледи. *A* матрицасында X' хәм Y'' стратегиясына сайкес болған қатарлар хәм бағаналар қалдырылады, қатарлар болса "сызылып тасланады". Нәтийжеде *A* матрицаның қалған барлығы A' мтрицасы болады.

<u>*3-қәсийети;*</u> Мейли *G*=(*X*, *Y*, *A*)-шекли антагонистикалық ойын, *G'*=(*X/x'*, *Y*, *A*)-*G* ойынының үлес ойыны, ал *x'*-1-ойыншының *G* ойынындағы қандайда бир $\bar{x}$ стратегясына бағыныўшы стратегия болсын. Онда *G'* ойынының хәр бир (x^0,y^2,ν) шешими *G* ойыны шешими болып табылады.

<u>*4-қәсийети;*</u> Мейли *G*=(*X*, *Y*, *A*)-шекли агнагонистикалық ойын, *G'*=(*X*, *Y/y'*, *A*)- *G* ойыншының үлес ойыны, *y'*- *2*-ойыншының *G* ойындағы қандайда бир *Y* стратегиясына бағыныўшы стратегия болсын. Онда *G'* ойыншының хәр бир шешими *G* ойыны шешими болып табылады.

<u>*5-қәсийети;*</u> Егерде 1-ойыншының *x'* таза стратегиясы ушын 3 қәсийеттиң 1 шәрти қанаатландыратуғын болса, ал 2-ойыншының таза стратеиясы ушын 4 қәсийет шәртлери қанаатландырылған болса, онда хәр бир *G'*=(*X*, *x'*,*Y/y'*, *A*) ойын шешими *G*=(*X*, *Y*, *A*) ойын шешими болып табылады.

<u>*6-қәсийети;*</u> (x^0, y^0,ν) үшлиги *G*=(*X*, *Y*, *A*) ойын шешими болыўы ушын (x^0, y^0, к$\nu + a$) *G*=(*X*, *Y*, *кA*+ *a*) ойын шешими болыўы керек, бунда *a* – қәлеген ҳақықый сан, *к>0.*

7-<u>қәсийети;</u> x^0=($x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_m^0$) *A* матрицалы хәм ν ойын баҳасына ийе матрицлық ойынның <u>*оптимал арас стратегиясы*</u> болыўы ушын төмендеги теңсизликлер орынланыўы зәрүр хәм жеткиликли болады.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^0 \geq \nu \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad\qquad (*)$$

Дәл усында екинши ойыншы ушын: y^0=($y_1^0, \ldots, y_j^0, \ldots, y_n^0$) 2-ойыншының оптимал аралас стратегиясы болыўы ушын төмендеги теңсизликлер орынланыўы хәрүр хәм жетеиликли болады.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_j^0 \le v \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (**)$$

(*x, y)* ҳәм де v ойын шешими болатуғынлығын тексериӯ ушын, олардың (*) ҳәм (**) теңсизликлерин қанаатландырыӯын тексерген зәрүрли ҳәм жетерли болады. Екинши тәрептен, (*) ҳәм де (**) теңсизликлериниң терис емес шешимлерин таба отырып, төмендеги теңлемелер менен биргеликте

$$\sum_{i=1}^{m} x_1 = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_1 = 1 \qquad (***)$$

матрицалық ойын шешимин табамыз.

Усылай етип, матрицалық ойынды шешиӯ (*) ҳәм (**) сызықлы теңлемелер ҳәм де (***) сызықлы теңлемелердиң шешимлериның оң параметрлерин табыӯға алып келеди. Бирақ бул көплеген есаплаӯларды талап етеди, есаплаӯлар саны ойыншылардың таза стратегиялар саны көбейиӯи менен өсебереди. (Мысал ушын, 3х3 матрицасы ушын 6 теңсизлик ҳәм де 2 теңлемеден ибарат системаға ийе боламыз). Соның ушын ең дәслеп мүмкиншилиги барынша, 2 ҳәм 3 қәсийетлерден пайдалана отырып, ойыншылардың таза стратегиялар санын азайтыӯ керек. Кейин барлық жағдайда теңсизлик орынланыӯын тексериӯ керек:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Егер ол орынланса, онда ойыншылар таза оптимал стратегияға ийе блады (1-ойыншы таза максиминлик, 2- ойыншы –таза минимакслик). Кери жағдайда ең болмағанда бир ойыншының оптимал стратегиялары аралас болады. Киши көлемдеги матрицалық ойынлар ушын бул шешимлерди 1-5 қәсийетлерди қолланып анықлаӯға болады.

<u>Мысал 3.</u> Мейли *G*=(*X*, *Y*, *A*), бунда *X*=$\{1,2,3,4\}$; *Y*=$\{1,2,3,4\}$, ойынлар функциясы *A* төмендегише берилсин:

$$A=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2C & C & 2C & 3C \\ 3C & \frac{3C}{2} & C & 2C \\ 2C & 2C & C & C \\ C & C & C & C/2 \end{pmatrix}$$

бундағы *C>0.*

<u>Шешеими: </u> 6 қәсийет бойынша *G'*=(*X*, *Y*, *A*), A^1=1/С*A* ойынды шешиў жетерли болады. *G'* ойыны матрицалық ыормада төмендегише утыслар матрицасы менен анықланады.

$$A^1=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Бул матриצаның төртинши қатарының елементлери үшинши қатардақы сәйкес елементлерден "≤ " хәм соның ушын 1-ойыншының 3 стратегиясы 4 стратегиясына үстемлик қылады. Соның менен бирге, матрицаның биринши бағанасы елементлери A^1 екинши бағананың сәкес елементлеринен "≥", демек, 2- ойыншының екинши стратегиясы оның биринши стратегиясына үстемлик қылады.

Соң, 5 қәсийеттен хәр бир G^2 =($X\backslash\{4\}, Y\backslash\{1,4\}, A^1$) ойынның шешими G^1 ойын шешими болатуғынлығы келип шығады. Матрицалық формада G^2 ойыннын төмендеги матрица менен анықлаўға болады.

$$A^2=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Екинши қатар элементлери биринши хәм үшинши қатардың сәйкес элементлериниң қосындысының ярымынан "≥" болатуғынлығы айқын көринип турыпты. Усының менен бирге, A^2 матрицасының үшинши бағанасы элементлери екинши бағананың сәйкес элементлеринен "≥". 5 қәсийеттен қолланып, хәр бир G^3 =($X\backslash\{4,2\}, Y\backslash\{1,4\}, A^2$) ойынының шешими

G^2 шешими, демек, G^1 ойынының ҳәм шешими болатуғынлығына ийе боламыз. G^3 төмендеги матрица менен анықланады.

$$A^3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A^3 матрицасы ерлик ноқатқа ийе емес, себеби

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

теңлиги орынланбаған, G^3 ойыны болса таза стратегияларда шешимге ийе болмайды, яғный ойыншылардың оптимал стратегиялары аралас болады. Бул стратегиялар (берилген жағдайда). A^3 матрица семметриялық болғаны ушын, ойыншылар оптимал стратегияда өзиның таза стратегияларынан тең итималлық пенен пайдаланады деп қабыллаўға болады.

Ҳақықатында да, егер 1-ойыншы теңдей теңдей итималлық пенен 1 ҳәм 3 стратегиялардан биреўин таңлағанынды 1-ойыншының утысының математикалық күтилиўи төмендегише болады:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2},$$

ямаса

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Дәл усылайынша, егер 2-ойыншы өзиның 2 ҳәм 3 стратегияларынан тең итималлық пенен пайдаланса, оның утысының математикалық күтилиўи $\frac{3}{2}$ ге тең болады. Демек, көрсетилген стратегиялар G^3 ойында оптимал стратегиялар, ал $\frac{3}{2}$ шамалары- G^3 ойын мәнислери болып табыллады. Алдын айтылғаннан бул стратегиялардың G^1 де ҳәм оптимал екенлиги келип шығады.

Усылай етип, $X=(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ стратегиясы 1-ойыншының, $Y=(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 2-ойыншының G^1 ойынында оптимал стратегиясы болады, G^1 ойын мәниси $\frac{3}{2}$ ге тең. 4 қәсийет бойынша (*X, Y, 3C/2*) үшлиги *G* ойын шешими болып табылады.

1.3 2×2 ТӘРТИПЛИ ОЙЫНЛАР.

Улыўма жағдайда 2×2 ойыны төмендегише матрица менен анықланады:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ең дәслеп берилген ойында ерлик ноқат бар ямаса жоқлығын тексериў керек.Егер бар болса, онда ойын таза стратегияларда шешимге ийе, бунда 1 ҳәм 2-ойыншының оптимал стратегиялары ретинде сәкесинше таза максиминлик ҳәм де таза минимакслик стратегиялар есапланады. Егерде А ойынлар матрицасына ийе ойын таза стратегияларға ийе болмаса, онда еки ойыншыда тек ғана оң итималлықлы таза стратегиялардан пайдаланыўшы оптимал стратегияларға ийе болады. Кери жағдайда ойыншылардың биреўы (мыал ушын 1) таза оптимал стратегияға ийе болады, ал екинши болса тек ғана аралас стратегияға ийе болады. Улыўма айтқанда 1-ойыншының оптимал стратегиясы ретинде 1 итмаллықлы биринши қатарды сайлаў есапланады. Соң, 1-қәсийет бойынша $a_{11} = a_{12} = \nu$ ҳәм де матрица төмендеги түрге келеди.

$$\begin{pmatrix} \nu & \nu \\ a_{21} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Бундай түрдеги матрицалар ушын 2- ойыншының стратегияға ийе болады, бул болса бизлердиң қабыллағанымызға қарама-қарсы.

Мейли X=(ζ, 1 - ζ)-1- ойыншының опимал стратегиячы болсын. 2-ойыншы аралас оптимал стратегияға ийе болғанлығы себепли, 1- қәсийеттен төмендегиге ийе боламыз. (7 қәсийетти ҳәм қара):

$$\begin{cases} a_{11}\,\zeta + a_{21}(1-\zeta) = \nu, \\ a_{12}\zeta + a_{22}\,\zeta(1-\zeta) = \nu. \end{cases}$$

буннан болса $\upsilon \neq 0$ болғанда A матрица бағаналары бирден өзгеше болған пропортционаллық коэффициентли пропорционал бола алмайтуғынлығы келип шығады. Егерде пропортционаллық коэффициенти бирге тең болса, онда A матрица төмендеги түрге келеди:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{pmatrix}$$

ҳәм де 1-ойыншы таза оптимал стратегияға ийе болады, (ол 1 минималығы менен элементлери басқа қатардың элементлеринен киши болмайтуғын қатарды сайлайды), бул болса қабылланып алғанымызға қврсы болады. Демек, егер $\upsilon \neq 0$ ҳәм де ойыншылар тек ғана аралас оптимал стратегияларқа ийе болса, онда *A* матрицасы анықлаӯшысы нөлге тең болмайды. Буннан болса соңғы теңлемелер системасы жалғыз шешимге ийе болатуғынлығы келип шығады. Оны шешип, төмендегилерге ийе боламыз.

$$\zeta = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}};$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

Дәл усындай ойлап отырып, 2-ойыншының оптимал стратегиясы $Y=(\eta, 1-\eta)$

$$\begin{cases} a_{11}\eta + a_{12}(1-\eta) = \nu \\ a_{21}\eta + a_{22}(1-\eta) = \nu \end{cases}$$

Теңлемелер системасын қанаатландыратуғынына келемиз, буннан

$$\eta = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

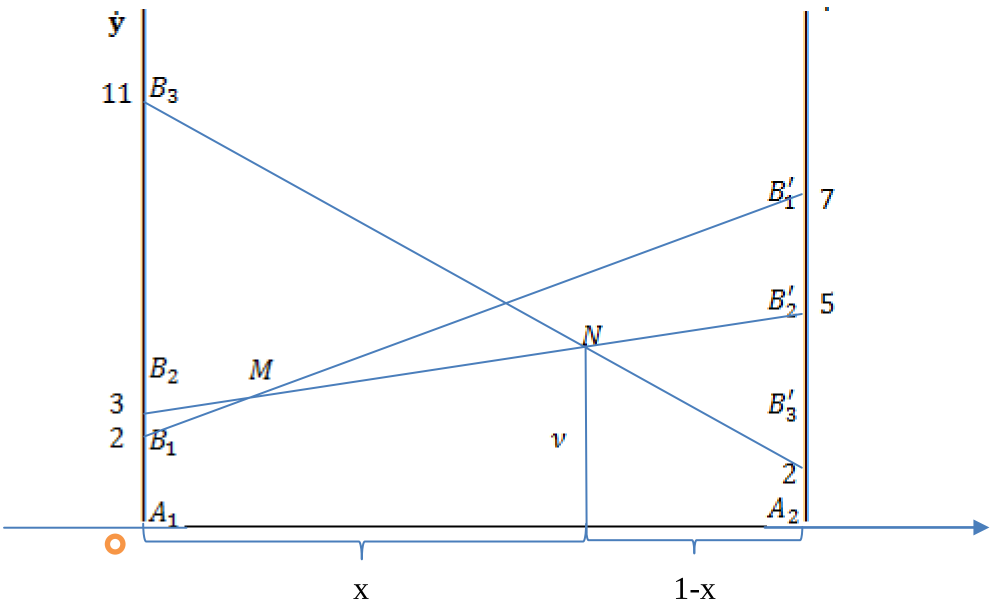
1.5 $2 \times n$ ҲӘМ $m \times 2$ ОЙЫН ЛАРДЫ ШЕШИӮДИҢ ГРАФИКАЛЫҚ УСЫЛЛАРЫ.

Усылды мысалларда келтирип өтейик.

<u>Мысал 1.</u> Төмендегише төлемлер матрицасы менен берилген ойынды қарап өтейик:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & 2 & \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

xOy тегислигинде координаталар системасын киритейик ҳәмде Ох көшери бойынан A_1, A_2 бирлик кесиндини белгилейик, оның ҳәр бир ноқатына 1-ойыншының қандайда бир аралас стратегиясын (х, 1 - х) сәйкес қояйық. Дара жағдайда, $A_1(0;0)$ ноқатына A_1стратегиясы сайкес келеди ҳ.т.б.



A_1, ҳәм A_2 ноқатларында перпендикуляр тиклеймиз ҳәмде алынған туўрыларда ойыншылар утысларын белгилеп баслаймыз. Биринши перпендикулярда (берилген жағдайда ол *OY* көшери менен бетлеседи) 1-ойыншының A_1 стратегиядан қолланғандағы утысын, екиншисинде- A_2стратегиясындағы утысын белгилейик. Егер 1-ойыншы A_1 стратегиясынан пайдаланса, онда ол 2-ойыншының B_1 стратегиясында 2, B_2 стратегиясында 3, B_3 стратегиясында болса 11 утысларға ийе болады. 2, 3, 11 санларына *ox* көшеринде B_1, B_2 ҳәм B_3 ноқатлар сәйкес келеди.

Егерде 1-ойыншы A_2 стратегиясынан қолланса, онда оның утысы екинши ойыншының B_1 стратегиясында 7 ге B_2 стратегиясында 5 ке, ал B_3 стратегиясында 2 ге тең болады. Бул санлар ноқатында тикленген перпендикулярдың бойында $B_1, B_2{}'$ $B_3{}'$ ноқатларын анықлайды. B_1 ҳәм B_1', B_2 ҳәм B_2', B_3 ҳәм B_3' ноқатларын бириктире отырып, үш туўрыға ийе боламыз, оларға шекемги *ox* көшерине аралық сәйкес стратегиялардың қәлеген қатынасындағы орташа утысты анықлайды. Мысал ушын, $B_1B_1{}'$ кесиндиниң қәлеген *ox* көшерине шекемги ара қашықлығы A_1, A_2 стратегиясының қәлеген қатнасындағы (*x* ҳәм 1-*x* жийиликлер менен) ҳәм де

2-ойыншының B_1 стратегиясы менен пайда етилетуғын орташа утыс ν ди анықлайды. Бул ара қашықлық төмендегиге тең.

$$2x_1+6(1-x_1)=\nu_1$$

Усылай етип, сынығына тийисли ноқатлар ординаталары 1-ойыншы ушын қәлеген стратегиялардағы минимал утысты анықлайды. Бул минимал шама N ноқатында максимал болып табылады: демек бкл ноқатқа $X=(x,1-x)$ оптимал стратегия сайкес келеди, ал оның ордынатасы υ ойын бахсына тең N ноқаты кординаталарын ДД туўрылары кесилсиў ноқаты ретинде табамыз. Сәйкес еки теңлеме төмендегише болады:

$$\begin{cases} 3x+5(1-x)=\nu \\ 11x+2(1-x)=\nu \end{cases} \Rightarrow\; x=\frac{3}{11},\; \nu=\frac{49}{11}.$$

Демек $X=\left(\frac{3}{11};\frac{9}{11}\right)$ ойын бахасы $\nu=\frac{49}{11}$. Усылай етип бизлер оптимал стратегияны

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

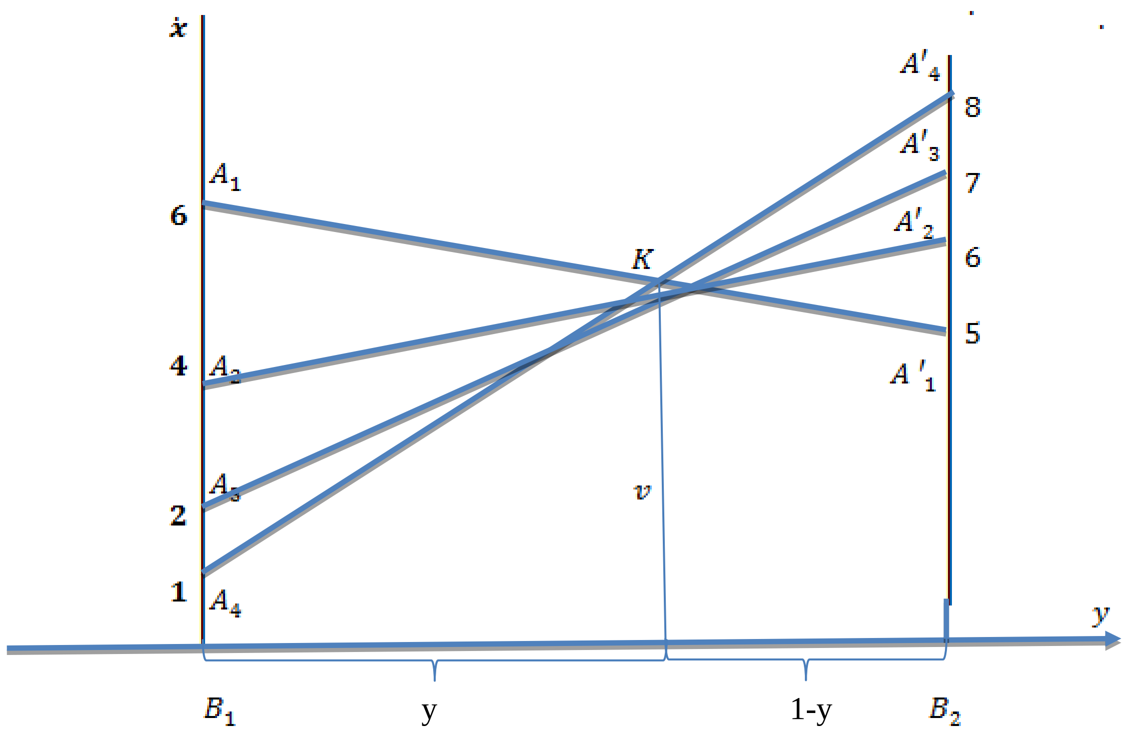
матрица көмеги менен таба аламыз. 2-ойыншы ушын оптимал стратегияларды төмендеги системадан тапсақ болады:

$$\begin{cases} 3y+5(1-y)=\nu \\ 5y+2(1-y)=\nu \end{cases} \rightarrow\; y=\frac{9}{11}$$

ҳәм, демек, $Y=(0;\frac{9}{11};\frac{2}{11})$ (Суўретте B_1 оптимал стратегияға кирмейтуғынлығы көринип турыпты).

<u>Мысал 2.</u> Төмендеги матрица менен берилген ойын шешимин табың:

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$



Шешим. Матрица 2×4 өлшемине ийе. 1-ойыншы стратегияларына сәйкес келиӯши туӯрыларды сызамыз. A_1 K A'_4 сынығы 1-ойыншы утысының жоқары шегарасына, N K кесиндиси –ойын баҳасына сәйкес келеди. Ойын шешими төмендегише болады:

$$Y=(\tfrac{3}{8};\tfrac{5}{8});\quad X=(\tfrac{7}{8};0;0;\tfrac{1}{8});\quad v=\tfrac{43}{8}.$$

1.4МАТРИЦАЛЫҚ ОЙЫНДЫ СЫЗЫҚЛЫ ПРОГРАММАЛАСТЫРЫЎ МӘСЕЛЕСИНЕ АЛЫП КЕЛИЎ

Ойын баҳасы оң болсын (υ>0). Егер бул орынланбаса, 6 қәсийет бойынша барқулла сондай *c* санын сайлап алыӯға болады, бул санның матрицасының барлық элементлерине қосылыӯы оң элементли матрицаны береди, ҳәм демек, ойын баҳасы оң болады. Бунда еки ойыншының ҳәм оптимал аралас стратегиялары өзгермейди.

Демек, мейли *A m x n* тәртипли матрицаға ийе матрицалық ойын берилген болсын. 7 қәсийет бойынша $x=(x_1,\dots,x_m)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ сәйкесинше 1 ҳәм 2- ойыншының оптимал аралас стратегиялары ҳәм де ойын баҳасы төмендегилерди қанаатландырыӯы керек:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq \nu \quad (j=\overrightarrow{1,n}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \qquad (i=\overrightarrow{1,m}) \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq \nu \quad (i=\overrightarrow{1,m}) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \geq 0, \qquad (j=\overrightarrow{1,n}) \end{cases} \qquad (2)$$

(1) ҳәм (2) теңсизликлердеги барлық теңлемелерди υ ға бөлейик (буны ислесек болады, себеби қабыллап алғанымыз бойынша υ>0) ҳәм де төмендегише белгилеӯлерди киритийик:

$$\frac{x_i}{\nu} = p_i \quad (i=\overrightarrow{1,m}), \qquad \frac{y_1}{\nu} = q_i \quad (j=\overrightarrow{1,n})$$

Онда (1) ҳәм (2) төмендегише жазылады:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geq 1, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i \geq \frac{1}{\nu}, \quad p_i \geq 0, \quad (i=\overrightarrow{1,m}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_i \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j \geq \frac{1}{\nu}, \quad q_i \geq 0, \quad (j=\overrightarrow{1,n}).$$

Биринши ойыншы ойын баҳасы υ максимал болатуғындай x_i ҳәм, демек p_i мәнислерин табыӯға умтылатуғын болғанлықтан биринши мәселени шешиӯ сондай терис емес p_i $(i=\overrightarrow{1,m})$ лерди табыӯға келеди, бунда

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \to min, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geq 1. \qquad (3)$$

Орынлы болатуғындай. Екинши ойыншы ушын баҳасы υ минимал болатуғындай y_i ҳәм, демек, q_j мәнислерин табыӯға умтылатуғын болғанлықтан, екинши мәселени шешиў сондай терис емес q_j, $(j=\overrightarrow{1,n})$ лерди табыўға келеди, бунда

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \to max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \leq 1. \qquad (4)$$

болатуғындай. (3) ҳәм (4) формулалары бир-бирине қосарлы болған сызықлы программалстырыў (СП) мәселелери болып табылады.

Бул мәселелерди шешип, p_i $(i=\overrightarrow{1,m})$, q_j $(j=\overrightarrow{1,n})$ ҳәм υ мәнислерин анықлаймыз. Онда аралас стратегиялар, яғный x_i ҳәм y_j лер төмендеги формулалар бойынша алынады.

$$x_i = vp_i \quad (i=\overrightarrow{1,m}) \qquad (5)$$
$$y_j = vq_j \quad (j=\overrightarrow{1,n})$$

Масал. Төмендеги матрица менен анықланыўшы ойын шешими табылсын:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Шешими. Бул ойынды шешкенде A матрицасының ҳәр бир элементине 1 ди қосамыз ҳәм келеси матрицаға ийе боламыз:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Енди өз-ара қосарлы мәселелер жуплығын дүзейик:

$$p_1+p_2+p_3 \to \min \qquad q_1+q_2+q_3 \to max$$
$$\begin{cases} p_1+p_2+2p_3 \geq 1, \\ 2p_1+p_3 \geq 1, \\ p_3 \geq 1, \\ p_1,p_2,p_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1+2q_2 \leq 1 \\ q_1+q_3 \leq 1, \\ 2q_1+q_2 \leq 1, \\ q_1,q_2,q_3 \geq 0 \end{cases}$$

Олардың екиншисин шешнйик

Б. о	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	Шешим	$\sum$	Қатнас
	-1	-1	-1	0	0	0		-3	
q_4	1	2	0	1	0	0	1	5	1/1
q_5	1	0	1	0	1	0	1	4	
	2	1	0	0	0	1	1	5	

q_6									

Б. о	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	Шешим	$\sum$	Қатнас
	-1	1	-1	0	1	0	1	1	
q_4 q_3 q_6	1 1 2	 0 1	0 1 0	1 0 0	0 1 0	0 0 1	1 1 1	5 4 5	 — 1/1=1

Б. о	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	Шешим	$\sum$	Қатнас
	1/2	0	0				3/2	7/2	
q_2 q_3 q_6	1/2 1 3/2	1 0 0	0 1 0	1/2 0 -1/2	0 1 0	0 0 1	1/2 1 1/2	5/2 4 5/2	

Оптимал симплекс-кестеден

$$(q_1, q_2, q_3) = (0; \tfrac{1}{2}; 1),$$

қосарлық қатнасларынан болса

$$(p_1, p_2, p_3) = (\tfrac{1}{2}; 1; 0).$$

болатуғынлығы келип шығады. Демек, ДД төлемлер матрицасына ийе ойын шешими баҳасы

$$v_1 = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{3}{2} \qquad \left(= \frac{1}{q_1 + q_2 + q_3}\right),$$

ал A төлемлер матрицасына ийе ойын баҳасы:

$$v = v_1 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

болады. Бунда ойыншылардың оптимал стртегиялары төмендегише болады.

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (vp_1; vp_2; vp_3) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2};\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0\right) = (\tfrac{1}{3}; \tfrac{2}{3}; 0)$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3) = (vq_1; vq_2; vq_3)) = \left(\frac{2}{3} \cdot 0; \frac{2}{3};\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\right) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

§ 2 ШЕКСИЗ АНТАГОНИСТИКЛЫҚ ОЙЫНЛАР.

2.1 ШЕКЧИЗ АНТАГОНИСТИКАЛЫҚ ОЙЫН АНЫҚЛАМАСЫ

Шексиз антагонистикалық ойынлар (ШАО) матрицалық ойынлардың тәбий улыӯмаластырылыӯы болып табылады, оларға ҳеш болмағанда бир ойыншы шексиз сандағы мүмкин болған стратегияларға ийе болады. Бизлер *еки ойыншы ойынын қарастырамыз, олардың ҳәр бири бир жүристен ислейди, ҳәм кейин утыслар бөлистириледи.* Әмелиятта ҳәр бир стратегияны бирлик интервалдан алынған қандайда бир санға сәйкес қойыӯға болады, себеби барқулла әпиӯайы түрлендириӯлер арқасында қәлеген интервалды бирлик интервлға келтириӯге болады ҳәм керисинше.

Еслетпе. Мейли *E*- қандайда бир ҳақиқый санлар көплиги болсын. Егер барлық $x\in E$ те (бунда *y E* ге тийисли болыӯы шәрт емес) $x\leq 0$ болғанындай *y* саны бар болатуғын болса, онда *E* көплиги жоқарыдан шегараланған деп аталады, ал *y* саны *E* көплигиниң жоқарғы шегарасы деп аталады. Жоқары ҳәм төменги шегаралар сәйкес түрде sup *E* ҳәм де inf *E* арқалы белгиленеди.

Мысал. Мейли *E* көплиги $\frac{1}{n}$ *n*=1, 2,… түрдеги санлардан турсын. Онда *E* шегараланған, оның жоқары шегарасы 1 ге, ал төменги шегарасы 0 ге тең, бунда $0\notin E$, ал $1\notin E$.

Бул класс ойынлары теориясын үренгенде келеси анықламаларды ҳәм белгилеӯлерди киритемиз. [0; 1] – ишинде ойыншы сайлаӯды иске асырыӯшы бирлик аралық; *x* -1-ойыншы таңлаған сан (стратегия); *y* -2-ойыншы таңлаған сан (стратегия); $M_i(x, y)$-*i*- ойыншы утысы: $G(X,Y,M_1,M_2)$ нөллик емес қосындылы ойыншы ойыны, бунда 1-ойыншы *x* саны *X* көплигинен таңлайды, 2-ойыншы *y* саны *Y* көплигинен таңлайды, ҳәм де усыдан кейин 1 ҳәм 2-ойыншылар сәйкес ҳәм де $M_2(x, y)$ утысларына ийе болады. Мейли, усының менен бирге, $G(X,Y,M)$-нөллик қосындылы еки ойыншы ойыны болсын, бунда 1- ойыншы *x* санын, 2-ойыншы –*y* санын таңласын, соң 1-ойыншы екинши ойыншы есабынан $M(x, y)$ утысқа ийе болады.

ШАО теориясында утыслар функциялары *M(x, y)* үлкен манысҡе ийе болады. Матрицалық ойынлар менен салыстырсақ, ҳәр бир *M(x, y)* функция ушын шешим бола бермейди. Ойыншының қандайда бир санды таңлаўы усы санға сайкес болған таза стратегиялардан пайдаланыўын билдиреди деп қабыллайық. Матрицалық ойынлардағы сыяқлы ойынның <u>*таза төменги баҳасы*</u> деп

$$V_1 = \max_x \inf_y M(x,y) \text{ ямаса } V_2 = \max_x \min_y M(x,y)$$

шамасына, ал <u>*таза төменги баҳасы*</u> деп төмендгни шамаға айтайық:

$$V_2 = \min_y \sup_x M(x,y) \text{ ямаса } V_2 = \min_y \max_x M(x,y)$$

<u>**Матрицалық ойынлар ушын V_1 ҳәм V_2 шамалары барқулла бар болады, шексиз ойынлар болса олар болыўы ҳәм мүмкин.**</u>

Егерде қандайда бир шексиз ойын ушын V_1 ҳәм де V_2 шамалары бар болып, олар өз-ара тең болса ($V_1=V_2=V$), онда бундай ойын таза стратегияларда шешимге ийе болады, яғный 1-ойыншының оптимал стратегиясы $-x_0 \in X$ санын таңлаў, ал 2-ойыншыныки-$y_0 \in Y$санын таңлаў болады, бул санларда $M(x_0\ y_0)=V$ болыўы керек, бул жағдайда V ойын баҳасы деп аталады, $(x_0\ y_0)$ болса-таза стратегиялардағы ерлик ноқат деп аталады.

<u>Мысал 1.</u> 1-ойыншы X=[0;1] көплигинен x санын екинши ойыншы Y=[0;1] көплигинен y санын таңлайды. Усыдан кейин 2-ойыншы 1-ойыншыға төмендеги муғдарды төлейди.

$$M(x, y)=2x^2 - y^2.$$

2-ойыншы 1-ойыншы утысын минималластырыўға тырысатуғынлығы себепли, ол төмендегини анықлайды:

$$\min_{y\in Y}(2x^2 - y^2) = 2x^2 - 1.$$

Яғный бунда y=1 болады. 1-ойыншы утысын минималластырыўға тырысатуғынлығы себепли, ол төмендегини анықлайды.

$$V_1 = \max_{x\in X}(\min_{y\in Y}(\mathrm{M(x,y)}) = \max_{x\in X}(2x^2 - 1) = 2 - 1 = 1,$$

бул болса x=1 болғанда орынланады.

Демек, ойының төмендеги баҳасы V_1=1. Оыйынның жоқары баҳасы

$$V_2 = \min_{y\in Y}(\min_{x\in Y}(\mathrm{M}(\mathrm{x,y})) = \min_{y\in Y}(2x^2-1) = 2-1 = 1,$$

яғный бул ойында V_1=V_2=1. Соң ушын ойын баҳасы V_1=1, ал (1;1)-ерлик ноқат.

<u>Мысал 2</u> 1-ойыншы $x \in X = (0;1)$ ти, 2-ойыншы $y \in Y = (0;1)$ ти таңлайды. Усыдан кейин 1-ойыншы 2-ойыншы есабынан төмендеги муғдардағы утыс ийе болады.

$$M(x_0\, y_0)=x+y$$

X ҳәм *Y* –ашық интерваллар болғанлығы ушын, оларда V_1 ҳәv де V_2 болмайды. Егерде *X* ҳәм *Y* –жабық интерваллар болғанда, онда төмендеги орынлы болар еди:

$$V_1=V_2=V=1,\ x_0 = 1,\ y_0 = 0.$$

Екинши тәрептен, *x* ти 1 ге жетерли дәрежеде жақын етип сайлап, 1-ойыншы ол *V*=1 ойын баҳасына жақын болған саннан кем болмаған утысқа ийе болыўына исенеди: *y* ти 0 ге жақын етип таңлап, 2-ойыншы 1-ойыншы утысы муғдары *V*=1 ойын баҳасынан қытты айырмашлыққа ийе болмаўына алып келеди.

Ойын баҳасына жақын болыў дәрежесин ε>0 саны менен сүретлеўге болады. Соның ушын бул ойында 1- ҳәм 2-ойыншының сәйкес түрде $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ таза стратегияларының оптимллығы ҳаққында ε>0 ерикли санға шекемги дәллилик пенен айтып кетсек болады. Усыған байланыслы келеси анықламаларды киритип өтейик.

$x_\varepsilon \in X, y_\varepsilon \in Y$ болған $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ *M(x, y)* ноқаты антагонистикалық үзликсиз *G* ойынынды *ε-* <u>*теппе-теңлик ноқаты*</u> деп аталады, егер 1-ойынның қәлеген формула стратегиялары ушын, y$\in Y$ еки қәлеген стратегиялары ушын төмендеги теңсизлик орынлы болса;

$$M(x,\ y_\varepsilon)-\varepsilon \le M(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \le M(x_\varepsilon, y\ y)+\varepsilon.$$

ε-теппе-теңлик ноқаты $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ *M(x, y)* *функциясының ε –ерлик ноқаты* деп те аталады, ал x_ε ҳәм y_ε) стратегиялары ε-*оптимал стратегиялар* деп аталады. Бул стратегиялар ε дәлликте оптимал болады, яғный, егер оптимал стратегиядан шетлениў ҳеш бир пайда келтирмесе, онда оның ε –оптимал стратегиядан шетлениўы оның утысын ε дан көп болмаған муғдарда өсиўи мүмкин.

M функциясы ε>0 ушын ε- ерлик ноқатларына ийе болыўы ушын төмендеги теңлик орынланыўы зәрүр ҳәм жетерли болатуғынлығын дәлилеўге болады:

$$\sup_x \inf_y M(x,y) = = \inf_y \sup_x M(x,y).$$

Егерде *G* ойыны таза стртегияларда ерлик ε –ерлик ноқатларға ийе болмаса, онда оптимал стратегияларды аралас стратегиялардан излеўге болады. Биракта, өлшем итималлығы ретинде бул жерде ойыншылардың таза стратегияларда пайдаланыў итималлықларының бөлистирилиў функциялары киритиледи.

Мейли *F(x)* – 1-ойыншының таза стратегиялардан пайдаланыў бөлистириў функциясы болсын. Егерде ζ саны – 1-ойыншының таза стратегиясы болса, онда

$$\mathrm{F(x)}=P(\zeta \leq x)$$

болады, бундағы $P(\zeta \leq x)$ тосыннан таңланған таза стратегия ζ, *x* санынан аспаўының итималлығы. Дәл усы түрде 2-ойыншының η таза стратегиялардан пайдаланыў итималлықларының бөлистирилиў функциясы қарстырылады:

$$\mathrm{Q}(y)=P(\eta \leq y).$$

F(x) ҳәм *Q(y)* функциялары сәйкесинше 1 ҳәм 2- ойыншының *аралас стратегиялары* деп аталады. Егер *F(x)* ҳәм *Q(y)* дифференциалланыўшы болса. Онда олардың туўындылары бар болып, олар сайкес түрде *f(x)* ҳәм *q(y)* (бөлистирилиў тығызлығы функциялары) деп белгилеймиз.

Улыўма жағдайда бөлистирилиў функциясы дифференциаллы *dF(x)*ζ стратегиясы

$$X \le \zeta \le x+dx.$$

аралық болыўы итималлсыныгиын билдиреди. Дәл усындай 2-ойыншы ушын: $dQ(y)$ оның η стратегиясы.

$$y \le \eta \le y+dy.$$

интервалында болыў итималлығы. Онда 1-ойыншының утыс муғдары төмендегише болады:

$$M(x, y)\, dF(x),$$

2-ойыншы утысы болса

$$M(x, y)\, dQ(y).$$

2 – ойыншы өзиниң таза стратегиүясын қолланса 1-ойыншының орта утысын утысты барлық мүмкин болған x лер бойынша интеграллаў арқалы табыўымызға болады, яғный

$$E(F,y)=\int_0^1 M(x,y)dF(x)$$

Y көплиги y ушын [0;1] жабық аралық болатуғынлығын еслетип өтейик.

Егер 1-ойын шы өзиниң x таза стратегияларынан қолланып, 2- ойыншы – y тен қолланса, онда 1- ойыншының орта утысы төмендеги муғдарды қурайды:

$$M(x, y)\, dP(x)dQ(y).$$

Егерде еки ойыншыда өзиниң аралас $F(x)$ ҳәм $Q(y)$ стратегияларынан пайдаланса, онда 1-ойыншының орта утысы төмендегиге тең болады:

$$E(F,Q)=\int_0^1 \int_0^1 M(x,y)dF(x)dQ(y).$$

Матрицалық ойынлар сияқлы ойыншылардың оптимал аралас стратегиялары ҳәм де ойын баҳасы анықланады. $G(X,Y,M)$ үзликсиз антагонистикалық ойынында сәйкес түрде 1 ҳәм 2- ойыншы ушын $F^*(x)$ ҳәм $Q^*(y)$ аралас стратегиялары жуплығы аралас стратегияларда ерлик ноқат пайда а даи, егер қәлеген аралас $F(x)$ ҳәм $Q(y)$ стратегиялары ушын төмендеги қатнаслар орынлы болса;

$$E(F,Q^*) \le E(F^*,Q^*) \le E(F^*,Q).$$

Соңғы теңсизликтиң шеп тәрепинен келеси келип шығады: егер 1-ойыншы өзиниң $F^*(x)$ стратегиясынан бас тартса, онда оның орташа утысы өсе алмайды да, ойыншының жақсырақ ҳәрекетлениўи нәтийжесинде кемейиўи мүмкин, соның ушын *F*(x)* 1-ойыншының ***оптимал аралас стратегиясы*** деп аталады.

Соңғы теңсизликтиң оң тәрепинен келеси кеоип шығады. Егер 2-ойыншы өзиның *Q*(y)* стратегиясынан бас тартса, онда 1-ойыншының орташа утысы 1-ойыншының жақсырақ ҳәрекетлениўи нәтийжесинде өсиўи мүмкин, соның ушын *Q*(y)* 2-ойыншының ***оптимал аралас стратегиясы*** деп аталады. Еки ойыншы ҳәм оптимал стратегияларының пайдаланыўында *E(F*,Q*)* 1-ойыншының ийе болатуғын орта утысы ***ойын баҳасы*** деп аталады. Матрицалық ойынлардағы сияқлы аралас стратегиялардағы төменги

$$V_1 = \max_F \min_Q E(F,Q)$$

Ҳәмде жоқарғы баҳасы қарастырылады:

$$V_2 = \min_F \max_Q E(F,Q).$$

Егер бир ҳәм екинши ойыншы ушын ойынның жоқарғы ҳәм төменги баҳалары тең болатуғындай *F*(x)* ҳәм де *Q*(x)* аралас стратегиялары бар болса, онда *F*(x)* ҳәм *Q*(x)* сәйкес ойыншылардың оптимал аралас стратегиялары болып, $V_1 = V_2 = V$ – ойын баҳасы болады.

G(X,Y,M) ойынның аралас стратегияларында ерлик ноқаттың бар болыўы аралас стратегияларда жоқарғы V_2 ҳәм де төменги V_1 ойын баҳаларының бар ҳәм де олардың $V_1 = V_2 = V$ тең болыўына алып келетуғынлығын дәлиллеп көрсетиўге болады.

Усылай етип, *G(X,Y,M)* ойынның шешиў – төменги ҳәм жоқарғы баҳалар тең болатуғындай аралас стратегияларды табыў ямаса ерлик ноқатты табыў дегенди билдиреди.

Теорема 1. (Бар болыўы). Ҳәр бир G шексиз антагонистикалық еки ойыншының бирлик квадратта *M(x, y)* утыслар функциясына ийе ойыны шешимге ийе болады (ойыншылар оптимал аралас стратегияларға ийе болады)**.**

Теорема 2. Мейли G-шексиз антангонистикалық *M(x, y)* утыслар функциясына ийе бирлик квадраттағы ҳәм де *V* ойын баҳасына ийе ойын болсын. Онда, егер $Q(y)$ 2-ойыншының оптимал стратегиясы болып, қандай да бир x_0 ушын

$$\int_0^1 M(x_0,y)dQ(y) < V$$

болса, онда x_0 1-ойыншының оптимал стратегиясы спектрине кире алмайды; егер $F(x)$-1-ойыншының оптимал стратегиясы ҳәм де қандайда бир c ушын

$$\int_0^1 M(x_0,y)dF(x) > V$$

Болса, онда y_0 оптимал стртегиясы спектри ноқаты бола алмайды.

2-теоремадан келеси нәтийже келип шығады: егер ойыншылардың биреўы оптимал, екиншиси болса таза стратегиядан пайдаланып, 1-ойыншы орта утысы ойын баҳасына тең болмаса, бул таза стратегия оның оптимал стратегиясына кире алмайды (ямаса ол нөлге тең итималлық пенен киреди).

Теорема 3. Мейли антагонистикалық ойында $M(x, y)$ утыслар функциясы $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$ ушын үзликсиз ҳәм де

$$M(x, y)=-M(x, y)$$

болса, онда оның баҳасы 0 болып, бир ойыншының қәлеген оптимал стратегиясы екинши ойыншының ҳәм оптимал стратегиясы болады.

Аралас оптимал стратегиялар ҳәм ойын баҳасының келтирилген қәсийетлери шешимлери табыўға ҳәм де оларды тексериўге көмек береди, қиракта олар қандайда бир улыўма шешиў усылын бере алмайды. Усы менен бирге ШАО анық шешимин табыўдың универсал шешими жоқ. Соның ушын шексиз антагонистикалық ойынлардың жеке дара түрлери қарастырылады.

2.2 УТЫСЛАР ФУНКЦИЯЛАРЫ ДӨҢЕС БОЛҒАН ОЙЫНЛАР

Дөңес шексиз утыслар функцияларына ийе ойынлар *дөңес ойынлар* деп аталады, бунда шексиз утыслар функциялары *ядро* деп аталады.

(a,b) интервалындаь x ҳақықый өзгериўшиның *дөңес* функиясы f төмендеги теңсизликти қанаалландырыўшы функцияға айтататуғынымызды еске алып өтейик.

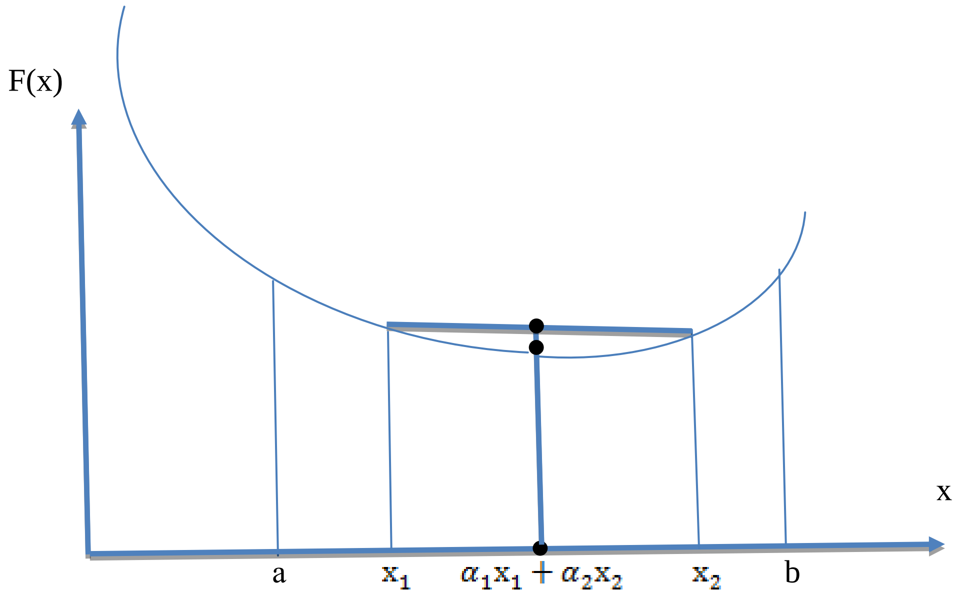
$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\le\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2),$$

бунда x_1 ҳәм де x_2-*(a,b) f* интервалдың қәлеген еки ноқатты бунда

Егер $\alpha_1\neq 0, \alpha_2\neq 0$ ушын барқулла

$$F(\alpha_1 x_2+\alpha_2 x_2)<\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2),$$

қатаң теңсизлик орынланса, *f* функциясы (*a*,*b*) да *<u>қатаң дөңес</u>* деп аталады. Геометириялық мәнисте дөңес функция графиги оны тартып турыўшы хордадан төмен жайласқан функциясы аңлатылады (суўретти қара)



Үзликсиз ҳәм қатаң дөңес *f* функция жабық интервалда тек ғана бир ноқатта минимал мәниске ийе болатуғынлығын ҳәм еслетип өтейик.

Дөңес ойын шешимин табыў ушын келеси теоремадан пайдалансақ болады.

Теорема 4. Мейли *M(x, y)* 1-ойыншының бирлик квадратта берилген ҳәм де қәлеген *x* ушын *y* бойынша *қатаң дөңес* үзликсиз утыслар функциясы болсын. Онда екинши ойыншы ушын бир ғана тек оптимал $y=y_0\in[0;1]$ стратегия бар болады, ойын баҳасы төмендегише анықланады:

$$V=\min_y \max_x M(x,y), \qquad (1)$$

y_0 мәниси төмендеги теңлеме шешими ретинде анықланады:

$$\max_x M(x,y_0)=V, \qquad (2)$$

Усылай етип, егер *M(x,y)* үзликсиз ҳәм де 2-ойыншы таза стратегияға ийе болып, ол (2) теңлемеден анықланады.

Дәл усылайынша 1-ойыншы ушын ҳәм: егер утыслар функциясы *M(x,y)* еки аргумент бойынша үзликсиз ҳәм де *y* <u>*бойынша қатаң ойыс*</u> болса, бул жағдайда 1- ойыншы жалғыз оптимал стратегияға ийе болады.

Ойын баҳасы төмендегише анықланады.

$$V = \max_x \min_y M(x,y), \qquad (3)$$

1-ойыншының таза оптимал x_0 стратегиясы төмендеги теңлеме ден анықланады.

$$\min_y M(x_0,y)=V. \qquad (4)$$

<u>Мысал.</u> Мейли [0;1] квадратта төмендеги функция берилген болсын:

$$M(x, y)=\sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

болғаны ушын, *M(x,y)* функция *x* бойынша қәлеген $y \in (0;1)$ ушын қатаң ойыс болады. Демек ойын баҳасы (3) формуласы менен анықланады:

$$V = \max_x \min_y \sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ болғанда төмендеги теңлик орынлы:

$$\min_{0\leq y\leq 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = sin\frac{\pi x}{2}.$$

ал $0{,}5<x \leq 1$, болғанда

$$\min_{0\leq y\leq 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = sin\frac{\pi(x+1)}{2}.$$

Соның ушын

$$V=max[\max_{0\leq x\leq\frac{1}{2}} \min_{0\leq y\leq 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2};\ \max_{\frac{1}{2}\leq x\leq 1} \min_{0\leq y\leq 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2}]=max[\max_{0\leq y\leq\frac{1}{2}} \sin\frac{\pi x}{2};\ \max_{\frac{1}{2}\leq x\leq 1} \sin\frac{\pi(x+1)}{2}]=max[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}]=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бунда *x* мәниси $x_0 = \frac{1}{2}$ ге тең болады. Усы мәнис төмендеги теңлеме ешеминен ҳәм анықланады;

$$\min_{0\leq y\leq 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

Себеби минимумге *y* =0 болғанда жетиледи, ҳәм бул теңлеме тңмендегиге айланады.

$$\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

буннан $x=\frac{1}{2}$.

Егерде (5) ойынлар функциясында x ҳәм y орын алмастырсақ ол өзгермейди. Демек, бул функция барлық $x\in[0;1]$ лерде ҳәм y бойынша қатаң дөңес болады. Соның ушын 2-ойыншыда оптимал таза стратегия y_0 бар болып ол (4) теңлемеден анықланады:

$$\max_{0\le x\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Максимум x бойынша $x=\frac{1}{2}$ болғанда болады, ҳәм сол теңлеме төмендеги түрге ийе болады:

$$\sin\frac{\pi\left(\frac{1}{2}+y\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Соңғы теңлеме шешими y_0 болады. Демек 2-ойыншы $y_0=0$ таза оптимал стратегияға ийе болады.

Утыслар функциясы дөңес болыўы *<u>шәрт болмаған</u>* ойынның стратегияларын анықлаўдың усылын көрип өтейик. Мейли бирлик квадратта берилген $M(x,y)$ үзликсиз функциясы y бойынша дөңес болсын. Бизлерди 1-ойыншының оптимал стратегияларын табыў мәселеси қызықтырады. $x\in[0;1], y\in[0;1]$ ушын $M(x,y)$ функциясының y бойынша дара туўындысы бар болып, $y=0$ ҳәм $y=1$ ноқатларына $M'_y(x,y)=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ сәйкес түрде шеп ҳәм оң туўынды ретинде түсиндирилсин. 2-ойыншының оптимал таза стратегияларының биреўы y_0 арқал белгилейик (бул стратегия 4-теорема бойынша болады).

2-теорема бойынша 1-ойыншы x таза стратегиялары оның оптимал стратегиясына оң итималлық пенен киреди. Егер олар ушын төмендеги теңлик орынланса:

$$M(x,y_0)=V.$$

Бундай таза стратегиялары *<u>маңызлы</u>* деп аталады.

Теорема 5. Мейли бизге бирлик квадратта берилген қәлеген x те y бойынша дифференциалланыўшы $M(x,y)$ утыслар функциясына ҳәм де 2-

ойыншының оптимал таза стратегиясына y_0 ийе болған шексиз антагонистикалық ойын берилген болып, ойын баҳасы V , болсын. Онда:

1) егер y_0=1 боолса, онда 1-ойыншының оптимал стратегиялары ушын маңызлы таза стратегия x_1 бар болып, ол ушын төмендеги орынлы болсын:

$$M'_y(x_1,1)\geq 1;$$

2) егер y_0=0 болса, онда 1-ойыншының таза оптимал стратегиялары арасында маңызлы таза x_2 стратегиясы бар болып, ол ушын төмендеги орынлансын.

$$M'_y(x_2,0)\geq 0;$$

3) Егер $0\leq y_0\leq 1$ болса, онда 1-ойыншының оптимал стратегиялары арасында еки маңызлы x_1 ҳәм x_2 араласпасы болатуғын стратегия табыллады. Бул стратегиялар ушын

$$M'_y(x_1,y_0)\leq 0,\ M'_y(x_2,y_0)\geq 0,$$

болып, x_1 стратегия α, x_2 стратегия –(1- α) итималлығы менен пайдаланады, бунда α төмендеги теңлемеден анықланады.

$$\alpha M'_y(x_1,y_0)+(1-\alpha)\, M'_y(x_2,y_0)\geq 0.$$

Мысал. Мейли шексиз антагонистикалық ойында утысларлар функциясы бирлик квадратта берилген болып, төмендегиге тең болсын.

$$M(x,y)=(x-y)^2=x^2-2x+y^2.$$

Бул функция x ҳәм y бойыншы үзликсиз соның ушын шешимге ийе. Усының менен бирге

$$\frac{\partial^2 M(x,y)}{\partial y^2}=2>0.$$

Демек, $M(x,y)$ бойынша дөңес болады, ҳәм 4-теоремаға сәйкес ойын баҳасы (1) формула бойынша анықланады, 2- ойыншы таза оптимал y_0 стратегиясына ийе болады, бул стратегия (2) теңлемеден анықланады. Усылай етип, төмендегиге ийе боламыз;

$$V=\min_y \max_x (x-y)^2;$$

$\underset{x}{max}(x^2 - 2xy + y^2)$ анықлаў ушын избе-из түрде төмендегилерди табамыз:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2x - 2y \coloneqq 0 \ \rightarrow x = y$$

$\frac{\partial^2 M}{\partial M^2} = 2 > 0 \rightarrow$ *x*=*y* *M* функциясы қәлеген *y* бойынша минимумға ийе болады. → максимумт *x*=0 ҳәм (ямаса) *x*=1 шетки ноқатлардың биреўынде болады.

$$M(0;y)=y^2, M(1;y)=1\text{-}2y+y^2 = (y-1)^2 \rightarrow \ V = \underset{0\leq y\leq 1}{min}\, max\{y^2; (1-y)^2\}$$

Берилген $\underset{0\leq y\leq 1}{min}\, max\{\dots\}$ тек ғана $y^2 = (1-y)^2$, яғный, y=$\frac{1}{2}$ болғанда жетиледи.

Демек, $x_0 = \frac{1}{2}$, болғанда *V*=$\frac{1}{4}$ болады.

Енди 1-ойыншы ушын оптимал стратегияларды анықлайық. $y_0 = \frac{1}{2}$ себепли, 0<$y_0 < 1$ болады. 5-теорема бойынша үшинши жағдайды көрип өтейик. *x* төмендеги теңлемелерден алайық:

$$M(x,y_0)=V,$$

яғный

$$(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Соңғы теңлемени шешип, x_1=0, x_2=1 шешимлерин аламыз. Енди α шамасын x_1 =0 таза стратегиядан қолланыў итималлығын анықлайық. Усы мақсетте (*) теңлемесин пайдаланайық:

$$\alpha M'_y(0,\tfrac{1}{2})+(1\text{-}\alpha)\, M'_y(1,\tfrac{1}{2})=0.$$

Төмендегилерди табыў қыйын емес

$$M'_y(0,\tfrac{1}{2})=-2(x\text{-}y)\Big|_{\substack{x=0\\ y=1/2}} = 1,$$

$$M'_y(1,\tfrac{1}{2})=-2(x\text{-}y)\Big|_{\substack{x=1\\ y=1/2}} = -1.$$

Сонда α ушын теңлеме төмендеги түрге келеди.

$$\alpha - (1 - \alpha) = 0,$$

буннан $\alpha = \frac{1}{2}$. Демек, 1-ойыншы стратегиясы

$$F(x)=\frac{1}{2}J_0(x)+\frac{1}{2}J_1(x),$$

болып 2-ойын шының стратегиясы төмендегише болады.

$$Q(y)=J_{1/2}(y).$$

Бул жерде $J_0(x)$ арқалы төмендегише «текшели» функцияны белгилегенбиз.

$$J_a(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

2 бап. АЎЫЛ ХОЖАЛЫҒЫ ӨНДИРИСИ МӘСЕЛЕЛЕРИН ШЕШИЎ

§ 1. АЎЫЛ ХОЖАЛЫҒЫ МӘСЕЛЕЛЕРИН ШЕШИЎДЕ ОЙЫНЛАР ТЕОРИЯСЫНАН ПАЙДАЛАНЫЎ

Аўыл хлжалығы мәселелерин шешиў- холхозлар менен совхозлар ушын маңызлы мәселе. Аўыл жожалығы өнимлерин өсириў жобаларын дүзгенде хәр бир аўыл ходалығында көплеген факторларды есапқа алыў керек: Ҳаў райын, -жер климатлық зоналарын, минирал төгинлердиң бар-жоқлығын, өнимдарлықты ресурслар менен тәмийнлениўин, өнимге талапта ҳ.т.б. Бул факторлардың биреўлери анық есапқа ала билиў қыйын болғанлығы себепли, аўыл хожалығы өнимлерин ислеп шығарыў жобаларын дүзгенде анық емеслик пайда болады. Бул анық емесликти, яғный, тосынанлы факторлар тәсирин, ойытеорнлар теориясы арқалы есапқа алыўға болады. Ойынлар теориясын аўыл хожалық өнимлерин ислеп шығарыў жобаларын дүзгенде пайдаланыў хожалыққа анық емеслик жағдайда аўыл хожалығы өнимлерин өндириўдиң ең жақсы стратегияларын береди. Бул ушын еки ойыншы ойыны-ҳожалық ҳәм де табият ойыны қарастырылады. Бизлер еки түрдеги аўыл хожалығы өнимлерин ислеп шығарыў қарастырамыз. Дән өнимлерин ҳәм де миўелерди.

Дән өнимлери ушын өзгермес сатыў ҳәм сатып алыў баҳалары белгиленген, соның ушын ең бас көрсеткиш бул жерде өндирилген өним муғдары болып табылады. Миййелер ушын баҳалар олар түрине ҳәм ўақытқа қарата өзгерип турады. Ерте мийўелердиң баҳасы кеш мийўелер баҳасынан жоқары болады. Соның ушын мийўелерди өсиргенде бас көрсеткиш алынған өнимди сатыўдан көрилген пайда.

Дәслеп дән өнимлерин өндириўде хожаллықтың оптимал стратегиясын табыў мәселесин қарастырайық. Мейли хожалыққа дән өнимлерин тонналарда өндириўдиң режеси берилген болсын. Хожалық стратегиялары деп бизлер ҳәр бир дән өними түрин өсириўге қойылатуғын жер майданларын есаплаймыз. Ҳәр бир жыл көрсеткишлери табияттан келип шығыўшы факторлардың синтези болып табылады, соның ушын табият стратегиялары ретинде конкрет жылларды есаплайсыз.

Демек, нөллик қосындылы еки ойыншының матрицалық ойынын қарастырамыз. Бул ойында биринши ойыншы-ҳожалық- ҳәр түрдеги дән өнимлерин өсириўден ибарат стратегияға ийе, екинши ойыншы-табият-конкрет жыллар көринисиндеги стратегияларға ийе болады. Белгилеўлерди киритийик: i- дән өниминың түри;- n-барлық дән өнимлери түрлериниң саны; x_i –i- өнимин өсириўге ажырылатуғын жер майданы (i=1,2,..,n); j-жыл номери; m-изертленип атырған жыллар саны; a_{ij} –j-жылдағы i-дән өниминиң бир гектардан өнимдарлығы; y_j –табияттың j-стратегиясынан қолланыўы итималлығы. Онда хожалық пенен табият ойыны төмендегише матрица көринисинде жазылады:

Табият

$$
\text{Хожалық}\quad
\begin{array}{c|cccc|}
\hline
 & 1 & 2 & \dots & m \\
1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
4 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \\
\hline
\end{array}
$$

Хожалықтың аралас стратегиялары – x_1, x_2, …, x_n санлары, олар таза стратегиялардан пайдаланыў итималықлары болып табылады, ҳәм де оларды

1 гектар жер майданының сәйкес дән өнимлерин өсириўге ажыратылатуғын бөleклерден қараўға болады. Ойынның шешими – хожалық пенен табият оптимал стратегиялары. Ҳожалықтың оптимал (x_1, x_2, …, x_n) стратегиясы егиў майданларының қабыл етилген схемасына қарата максимал муғдарда дән өнимлерин алыў болып табылады. Табияттың оптимал стратегиясы ең жаман табий шараятларды туўдырыўдан ибарат болады. Ойын баҳасы хожалық пенен табияттың оптимал стратегиялардан пайдаланғандағы дән өнимлериниң өнимдарлығын аңлатады.

Ойыншылардың оптимал стратегиялары усы матрицалық ойынға сәйкес келетуғын келеси түрдеги еки сызықлы программаластырыў мәселелерин шешиў арқалы табылады.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_1 - x_{n+1} \to max;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ij} - a_{i1})x_i - x_{n+j} + x_{n+1} = 0 \qquad (j = \overline{2,m}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad x_i \geq 0 \ \ (i = 1,2, \dots, n+m);$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i1}y_j - y_{m+1} \to min;$$

$$\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} - a_{1j})y_j - y_{m+1} + y_{n+i} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1\,; \qquad y_j \geq 0 \qquad (j = 1,2, \dots, m+n).$$

Бул мәселелерди, мысал ушын, симплекс –усылы менен шешип, барлық дән өнимлериниң орташа өнимдарлығын есаплаймыз: *a*= $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_i y_j$. Кейин дән өнимлерин өсириўге ажыратылыўы керек болған барлық жер майданын анықлаймыз: *B*=*A*/*a* ҳәм де ҳәр бир өнимин өсириўге ажыратылатуғын усы жер майданы бөлеклерин анықлаймыз:

$B_i = B_{xi}$ (i=1,2,…,n), i-дән өниминың орташа өнимдарлығы төмендеги формула менен анықланады.

$$a_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \ (i = 1,2, \dots, n),$$

A_i i- өнимның муғдары болса, $A_i = B_{xi} a_i \qquad (i = 1,2, \dots, n)$
формуласы менен анықланады.

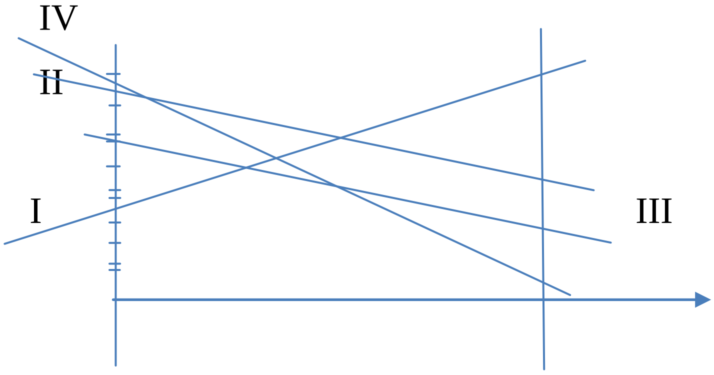
Демек, ең жағымсыз болған жағдайларда B_i жер майданларының i- дән өнимин өсириўге ажыратыў ҳәм де дән өнимлери муғдарын алыў керек (i=1, 2,…,n). Егер табий жағдайлар жақсы болса да, хожалық ең үлкен муғдардағы өнимди алыўға ериседи. Мийўелерди өсириўдеги хожаллықтың оптимал стратегияларын анықлағанда да табият пенен хожалық стратегиялары өзгермейди. Бунда тек ғана өнимдарлықтың орнына i-мийўеден j-жылдағы 1 гектар жерден көрилген a_{ij} пайдасы қарастырылады. Сонда ойынлар матрицасы, $\|a_{ij}\|$ 1 гектар жерден хожалықтың мийўе түринен көрсететуғын пайдасын аңлатады. Бундай ойынды шешип, бизлер x_i (i=1, 2, …, n) i-мийўе түрин өсириў ушын ажыратылатуғын 1 гектар жердиң бөleклерин көрсетиўши хожалықтың оптимал стратегияларын; y_j –табият стратегияларының пайдаланыў итималықларын; a= $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_i y_j -$ ҳәр бир мийўе түринен түсетуғын орташа пайдасын; $a_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i$ i-мийўе түринен түсиўшы орташа пайдасын анықлаймыз. Жақсырақ жағдайларда бул пайдалар көбрек болады.

§2. Санлы мысаллар

1. Мейли аўыл хожалығынан жоба бойынша дән өнимлерин өндириў A=12000 ц муғдарында талап етилсин. Оптимал стратегияларды анықлаў ушын соңы төрт жылды қарастырамыз. Белгилеўлер: i=1-бийдай, i=2-арпа, j=1-1979, j=3-1977, j=4-1976 жылларға сәйкес келеди. Бул өнимлердиң өнимдарлығы бойынша ойын матрицасы төмендегише болады:

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	35	42	39	48
i=2	45	38	28	23

Бизге 2 ⨯ 4 мартицалы ойын берилсин. Бундай ойынлар әдетте график усыллар менен шешиледи. Бул ойын шешилиўы төмендегише болады:



Сүўретте көринип турыпты, оптимал стратегиялар- I- ҳәм де III стратегиялары болып табылады (жумыстың биринши бөлиминде бул ҳаққында айтылған). Демек, Бизлердиң матрицамыз төмендегише 2 $\times$2 өлшемли матрицаға келеди.

$$A=\begin{pmatrix} 35 & 39 \\ 45 & 28 \end{pmatrix}$$

Буннан төмендеги шешимлерди табамыз:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{28 - 35}{35 + 28 - 45 - 39} = \frac{-17}{-21} \approx 0{,}81, \qquad x_2 = 0,$$

$$x_3 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{35 - 39}{35 + 28 - 45 - 39} = \frac{-4}{-21} \approx 0{,}19, \qquad x_4 = 0,$$

$$y_1 = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{35 - 45}{35 + 28 - 45 - 39} = \frac{-10}{-21} \approx 0{,}48, \qquad y_2 = 0,$$

$$y_3 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{28 - 39}{35 + 28 - 45 - 39} = \frac{-11}{-21} \approx 0{,}52, \qquad y_4 = 0,$$

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{35 \cdot 28 - 45 \cdot 39}{35 + 28 - 45 - 39} = \frac{-775}{-21} \approx 37,$$

Алынған нәтийжелер төмендегилерди аңлатады. Егер хожалық 0,81 ға жерге бийдай өсирсе, 0,19 ға жерге арпа өсирсе, онда ең жағымсыз жағдайларда орташа өнимдарлық 1 гектардан 37 центнерди қурайды.

Бийдай өнимдарлығы: a_1=35·0,48+39·0,52=16,8+20,28=37,08.

Арпа өнимдарлығы: a_2=45·0,48+28·0,52=21,6+14,56=36,16.

Жобалық тапсырма A=12000 ц. Онда бул дән өнимлерин өсириў ушын ДДД га жер майданын ажыратыў керек, бунда бийдай ушын B_1=324·0,48=155,5 арпа ушын B_2=324·0,52=168,5 га жеп майданларын ажыратыў керек.

Бийдай A_1=155,5·37,08=5766 ц., арпа –A_2= 168,5·36,16=6093 ц муғдарында алынады.

2. Өндиириў жобаларын алыў ушын еки түрдеги жемислер: i=1- капуста, i=2- помидор қарастырылған. Онда 1 га жер майданынан көретуғын пайданы төмендеги матрицаға алып келиўге болады:

	j=1	j=2	j=3	j=4

i=1	860	300	800	650
i=2	700	650	200	550

Бул ойынды ҳәм жоқарыдағыдай усыл менен шеше отырып, төмендегише нәтийжелерди аламыз.

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{200 - 650}{200 + 300 - 800 - 650} = \frac{450}{950} \approx 0{,}47, x_3 = \frac{500}{950} \approx 0{,}53, \quad x_4 = 0$$

$$y_1 = 0,\ y_2 = \frac{350}{950} = 0{,}37,\ \ y_3 = \frac{600}{950} = 0{,}63,\ \ y_4 = 0$$

$$\nu = \frac{300 \cdot 200 - 800 \cdot 650}{200 + 300 - 800 - 650} = \frac{460000}{950} = 484\ 210 \text{ сум.}$$

Капуста өсириўден алынатуғын орташа пайда a_1=300·0,37+800·0,63=615 мың сум.

Памидорлар өсириўден алынатуғын орташа пайда a_2=650·0,37+200·0,63=366,5 мың сум.

Демек, аўыл хожалығының оптимал стратегиясы 0,47 га жергета капуста ҳәм де 0,53 га жерге памидор өсириўден ибарат болады. Сонда бир гектардан көрилетуғын пайда 98,5 мың сумды қурайды.

Жуўмақлаў

Бизлер ойынлар теориясы ҳаққында айтып өттик. Әдетте, бул жумыста ойынлар теориясының қолланыўының барлығы ҳаққында айтылмады, бул ушын бөлек китап жазыў талап етилер еди.

Аўыл хожалығы өндириси мәселелерин ойынлар теориясынан пайдаланып шешкенде бизлер еки ойыншылы – табият ҳәм аўыл хожалығы – ойынды қарастырып өттик. Усының менен бирге жусыстың биринши бөлегинде ойынлар теориясы ҳаққында мағлуматлар келтирилди.

Енди исленген жумыслар нәтийжесинде пайда болған ҳәм де I, II қосымшаларда текст Visual Basic 6.0 программалстырыў тилинде жазылған, бул прогрмма 2×2 ҳәм де $n \times m$ өлшемли матрицалық ойынларды шешиўге арналған, екинши программа Turbo Pascal 7.0 программаластырыў тилинде жазылған болып, программа $n \times m$ өлшемли матрицалық ойынларды шешиўге арналған. Еки программаға да $n \times m$ өлшемли матрицалық ойынларды шешиўге арналған. Еки программаға да $n \times m$ Симплес-кестесиның биринши басқышы түринде келтириледи, есаплаўлар нәтийжелери биринши программада экранда, екинши программада бөлек «rez.pas» файлында көриўге болады.

ҚОСЫМШАЛАР

Әдебиятлар

1. Г. Оуэн «Теория игр» . Москва 1967 г.
2. И. Н. Ляшенко и др. «линейное и нелинейное программирование» Киев 1975 г.
3. У. И. Зангвилл. «Нелинейное программирование» Москва 1973 г.
4. Эрроу, Гурвиц, Удаава. «Исследования по линейному и нелинейному программированию» Москва 1962 г.
5. Данциг. «Линейное программирование, его пременения и обобщения» Москва 1966 г.
6. Гисс. «Линейное программирование» Москва 1961 г.
7. Д. Дж. Уайлд «Методи поиска экстремума» Москва 1967 г.
8. С. И. Зуховицкий «Алгоритм для решение задачи выпуклого программирования» ДАН СССР. 1963 г.

9. Ю. Д. Попов «Линейное и нелинейное программирование» Киев УМК ВО 1988 г.