O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI QISHLOQ VA SUV XO'JALIGI VAZIRLIGI

SAMARQAND QISHLOQ XO'JALIK INSTITUTI

"Oliy matematika va axborot texnologiyalari" kafedrasi

"Qishloq xo'jaligi menejmenti" ta`lim yo'nalishi 1 bosqich 112-guruh

talabasi G'ulomov Manzurning "Oliy matematika" fanidan yozgan

REFERATI

Mavzu: Детерминантлар уларнинг ҳисоблаш усуллари ва хоссалари.

Samarqand - 2015

Мавзу. Детерминантлар уларнинг ҳисоблаш усуллари ва хоссалари.

Режа:

1. ***Иккинчи тартибли детерминант***
2. ***Учинчи тартибли детерминант***
3. ***Детерминантнинг хоссалари***
4. ***Минор тушунчаси***
5. ***Детерминантни сатр ёки устун элементлари бўйича ёйиш***
6. ***Чизиқли тенгламалар системаси – детерминантлар ёрдамида ечиш. (Крамер усули)***

1. Иккинчи тартибли детерминант

1-таъриф. a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонлардан тузилган ушбу $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$ кўринишдаги символ ёки жадвалда иккинчи тартибли детерминант дейилади.

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонлар детерминантнинг элементлари дейилади. Иккинчи тартибли детерминант (ИТД) сондан иборат бўлиб у a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} га тенг бўлади.

Демак, $$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (1)$$

2. Учинчи тартибли детерминант

2-таъриф. a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} 9 та сонлардан тузилган ушбу кўринишидаги символ ёки жадвалга $D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$ учинчи тартибли детерминант дейилади.

Учинчи тартибли детерминант хам сондан иборат бўлиб у қуйидаги тенгликдан аниқланади.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

(2)

(2) формулани учинчи тартибли детерминантни учбурчак усулида ҳисоблаш дейилади ёки диагонал қоидаси деб ҳам юритилади. Бу усул қуйидаги схемага асослангандир:

Масалан ушбу детерминантни учбурчак ёки диагонал қоидаси билан хисоблайлик:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=1*8*9+2*(-6)*7+(-4)*8*3-7*5*3-(-4)*2*9-8*(-6)*1=$$

$$=45-84-96-105+48+72=-120$$

детерминантларни ҳисоблашда унинг хоссаларидан фойдаланиш қулай бўлади.

3.Детерминантнинг хоссалари

1^0. Детерминантда ҳамма сатрлар мос устунлар қилиб ёзилса унинг қийматы ўзгармайди.

Масалан: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}=16-15=1$ $\quad\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=16-15=1$

2^0.Детерминантда исталган икки устуни (ёки икки сатри) ўзаро алмаштирилса, уни фақат ишораси ўзгаради.

Масалан: $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=6-20=-14$ $\quad\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=20-6=14$

3^0.Детерминантда бирор устун (сатр)нинг ҳамма элементлари бошқа устун ёки сатрнинг мос элементларига тенг ёки пропорционал бўлса, бундай детерминант нолга тенг бўлади.

Масалан:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=12-12=0$$

4^0.Агар детерминантда айрим устун ва сатрларнинг элементлари умумий кўпайтувчиларга эга бўлса, уларнинг ҳаммасини детерминант белгиси ташқарисига чиқариш мумкин.

Масалан: $$\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6*2 \\ 5 & 5*3 \end{vmatrix} = 6*5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 30(3-2) = 30*1 = 30$$

5^0.Детерминантни m≠0 сонига кўпайтириш учун унинг бирор сатри ёки устундаги ҳамма элементларни шу m сонига кўпайтириш лозим.

Масалан: $$2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2*3 & 2*4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2*3 & 4 \\ 2*2 & 6 \end{vmatrix} = (36-16) = 20$$

6^0.Агар D детерминантда бирор устун элементлари m та қўшилувчилар йиғиндисидан иборат бўлса у ҳолда D детерминант m та $D_1,D_2,\ldots.D_m$ детерминантлар йиғиндисига ёйилади.

Масалан: $$\begin{vmatrix} 2+3 & 4 \\ 3+5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (12-12)+(18-20) = -2$$

7^0. Масалан: $$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5+2*2 \\ 3 & 6+3*2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 24-27 = -3$$

4. Минор тушунчаси

3-таъриф. n-тартибли D детерминантнинг исталган r та сатри ва r та устунларини ажратайлик (1≤ r ≤ n). Бу сатрлар ва устунларнинг кесишган жойларидаги элементларини олиб, улардан r-тартибли M детерминантни тузамиз, буни D нинг r-тартибли минори дейилади.

4-таъриф. D да ажратилган r та сатр ва r та устунни ўчирайлик. D нинг қолган элементларини шу D дагидек тартибда олиб, улардан (n-r)- тартибли $\overline{M}$ детерминантни тузамиз. $\overline{M}$–ни M га қўшимча минор дейилади.

Мисол. Ушбу
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 12 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

5-тартибли детерминантда 1- ва 5- сатрларни, 3- ва 4- устунларни ажратайлик. У ҳолда

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \qquad \bar{M} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 12 \end{vmatrix}$$

5-таъриф. $(-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_r + \ldots + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r}$ даражанинг $\overline{M}$ қўшимча минорга кўпайтмаси r –тартибли M минорнинг алгебраик тўлдирувчиси дейилади, яъни

$$(-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \ldots + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_2}. \quad (3)$$

Бу ерда α_1 , α_2 ,....., α_2 , ва β_1 ,β_2 ,….,β_2 мос равишда D нинг M га тегишли сатр ва устунларнинг номерини билдиради. Масалан юқорида келтирилган мисолдаги M минорнинг алгебраик тўлдирувчиси

$$A=(-1)^{1+5+3+4} * \bar{M} = (-1)\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 12 \end{vmatrix}$$

5. Детерминантни сатр ёки устун элементлари бўйича ёйиш.

n- тартибли D детерминантда исталган i –сатр (ёки j– устун)ни ажратамиз. Бу ажратилган сатр (ёки устун) элементларидан тузилган ҳамма биринчи тартибли минорларни ўз алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб натижаларни қўшсак йиғинди D детерминантга тенг бўлади.

Бу теоремага кўра i –сатр ажратилган бўлса $D=a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} +\ldots+ a_{in} A_{in}$ (4)

(4)-ни D-ни i - сатр элементлари бўйича ёйиш дейилади. Агар j- устун ажратилган бўлса

$$D=a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} +\ldots\ldots+ a_{nj} A_{nj} \quad (5)$$

(5)-ни D-ни j– устун элементлари бўйича ёйиш дейилади.

6. Чизиқли тенгламалар системаси – детерминантлар ёрдамида ечиш. (Крамер усули)

Соддалик учун уч номаълумли биринчи даражали учта (чизиқли) тенгламалар системасини олайлик.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Агар Δ≠0 бўлса у ҳолда (1) система ягона ечимгаэга бўлиб у қуйидаги формулалардан топилади:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \qquad (2)$$

(1) системани (2) формулалар ёрдамида ечишни Крамер усулида ечиш ҳам деб юритилади.

(1) системани ечимларини номалумларни кетма-кет йўқотиш усули билан ҳам ечиш мумкин бу усул француз олими Гаусс томонидан топилган бўлиб уни Гаусс усули ҳам деб юритилади. Бу усулга доир мисол келтирамиз.

Мисол. Ушбу система ечилсин

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Ечиш Δ=4≠0. Демак, система ечимга эга.

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0 - x_2 - 3x_3 = -5 \Rightarrow \\ 0 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_2 - 3x_3 = -5 \\ 0 - 4x_3 = -8 \end{cases}$ учинчи тенгламадан $4x_3 = 8 \quad x_3 = 2$ ни топамиз.

x_3 ни иккинчи тенгламага қўйиб x_2 ни топамиз, яъни $x_2 + 3*2 = 5 \quad x_2 = 5 - 6 = -1$.

У ҳолда биринчи тенгламадан $x_1 - 1 + 2*2 = 4 \quad x_1 = 1$ келиб чиқади. Демак, берилган систамани ечиш $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$ бўлади.

Текшириш: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \quad \text{ни} \quad \text{оламиз}:$

$$1 - 1 + 2*2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$$

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Б.Абдалимов «Олий математика” Тошкент, “Ўқитувчи” 1994 й.

2. Ё.Соатов «Олий математика” Тошкент, “Ўқитувчи” 1992 й.

3. Р.Искандаров «Олий алгебра” Тошкент, 1960 й.