ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳуқуқида

УДК 517.953

Жўрабоев Саидахбор Солижонович

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасининг ечимини *SL(2,C)* группа амалига нисбатан ягоналиги.

5A130101-математика (дифференциал тенгламалар)
Магистр
академик даражасини олиш учун ёзилган
дисертация

Илмий раҳбар:
Физика-математика фанлари
доктори Қ.Қ. Мўминов

МУНДАРИЖА

Кириш

Кадрлар тайёрлаш миллий дастурида олий таълимнинг асосий мақсади бозор иқтисодиёти шароитида рақобатбардош, юқори малакали мутахассислар тайёрлашдан иборат қилиб белгиланган. Шу мақсадни амалга оширишда бўлажак мутахассис билим ва кўникмаларининг мустахкамлиги, улар эгаллаган билимнинг атрофлича ўрганилгани катта ахамият касб этади.

Республикамиз Президенти Ислом Абдуғаниевич Каримов айтганларидек “..мамлакатимизнинг бой илмий- техникавий салохиятидан кенг фойдаланган ҳолда, юксак технология ва фан ютуқларига асосланган ишлаб чиқариш сохалари-автомобилсозлик, самолётсозлик, микробиология, электротехника ва электроника саноатларини, телекоммуникация ва замонавий ахборот технология воситаларини тез суръатларда ривожлантириш” учун сабоқ олаётган хар бир шахс ўзи ўрганган таълим мазмунини чуқур англаши ва хаётда амалиётга татбиқ қила олиши керак.

Маълумки, баркамол инсон шахснинг шаклланиши бевосита узлуксиз таълим жараёнида амалга ошади. Шундай экан, хар жабхада мувоффақиятга эришиш, жумладан, юқори малакали кадрлар тайёрлашда “Миллий дастур”нинг ўрни ва ахамияти беқиёсдир. Ўзбекистон Республикаси Президенти И.А.Каримов Олий мажлиснинг XIV сессиясида сўзлаган нутқида кадрлар тайёрлашнинг ахамиятига изох бериб шундай деган эди:

“Биз олдимизга қандай вазифа қўймайлик, қандай муаммони ечиш зарурияти туғилмасин, гап охир оқибат, барибир кадрларга бориб қадалаверади.

Муболағасиз айтиш мумкинки, бизнинг келажагимиз, мамлакатимиз келажаги, ўрнимизга ким келишига ёки бошқачарок қилиб айтганда, қандай кадрлар тайёрлашимизга боғлиқ....”.

Мавзунинг долзарблиги. Инвариантлар назаряси –замонавий математиканинг оҳирги вақтдаги муҳим ва кенг қамровли соҳаларидан бири бўлиб, математиканинг ўзида элементар геометрия, алгебраик кўпҳилликлар, дифференциал тенгламалар назаряси, дифференциал геометрия, физиканинг ядро физикаси, симметрик кристаллар, механика ва бошқа кўплаб бўлимларида муҳим ўрин тутади. Инвариантлар назаряси иккита муҳим масала асосида қурилган.

I масала. V-келтирилмаган аффин кўпҳилликда регуляр амалли алгебраик G-группа, $x=\{x_i,\ i=\overline{1,n}\}$, $y=\{y_i,\ i=\overline{1,n}\}$-икки чекли сондаги нуқталар системаси берилган бўлсин. Қандай шартлар ба.жарилганда юқорида берилган системалар Gгруппа амалига нисбатан эквивалент бўлади.

II масала. V-силлиқ кўпҳиллик ва Vда силлиқ амалли G-Ли группаси берилган бўлсин; α,β-Vдаги иккита силлиқ чизиқлар бўлсин.Қандай шартлар бажарилганда бу эгри чизиқлар G-группа амалига нисбатан эквивалент бўлади.

Мавзунинг ўрганилганлик даражаси. I масала бир қанча группавий алмаштиришлар фазосида умумий ҳолда XX аср бошларида қўйилган ва ўрганила бошлаган. 1906-йилда Пик томонидан ихтиёрий узлуксиз группавий алмаштиришлар текислигида натурал тенгламали чизиқлар учун қўйилган ва ўрганилган. Г Ковалевский томонидан 1937 йилгача умумий натурал геометрияда кўплаб натижалар қўлга киритилган.

II масала умумий ҳолда Э Картан томонидан XIX аср бошларида қўйилган бўлиб, фанда Картан проблемаси номи билан кириб келган. Э Картан бу проблемани реперлар усули ёрдамида ҳал қилган. Бу масала Помаретта, Фаварв, Адамса томонидан ўрганилиб кўплаб муҳим натижалар қўлга критилган.

Республикамизда юқоридаги масалаларни ўрганиш физика-математика фанлари доктори, профессор Ж Хожиев томонидан бошланган бўлиб, Р. Орипов, А. М Суктаева, Қ. Қ Мўминов шу ишларни давом этдириб келмоқдалар.

Биз ушбу магистрлик ишимизда юқоридаги масалаларни V - n ўлчовли вектор фазо, G-махсус чизиқли группа бўлган ҳолда ўргандик.

Тадқиқотнинг мақсади. Диссертацияда кўзда тутилган асосий мақсад V фазода берилган йўллар, сиртлар ва уларнинг системаларини махсус группа амалига нисбатан эквивалент бўлиши масаласини ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифаси. Йўллар ва сиртлар системаларини махсус группа амалига нисбатан эквивалент бўлиш шартларини топиш ва ўрганиш жараёнида ҳосил бўлган дифференциал тенгламалар системасини ечимини мавжуд ва ягоналигини текширишдан иборат.

Илмий янгилиги. Диссертацияда олинган барча натижалар янги. Унда йўллар ва сиртлар учун қўйилган масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланган.

Тадқиқот усуллари. Қўйилган масалаларни ўрганиш жараёнида, биринчидан, махсус матрицавий функция киритилиб уни асосий хоссалари ўрганилади ва бу функция ёрдамида йўллар ва уларни системаларини берилган группа амалига нисбатан эквивалент бўлишини зарурий ва етарли шартлари топилади. Натижада берилган группа амалига нисбатан инвариант функциялар ҳосил бўлиб, инвариант функцияларни хоссалари ёрдамида дифференциал тенгламалар системасининг ечимини мавжудлиги ва ягоналиги исботланади. Сиртлар учун ҳам юқоридаги ишлар амалга оширилади.

Диссертация мавзусининг назарий ёки амалий ахамияти. Диссертацияда олинган илмий натижалар асосан назарий ахамиятга эга. Улар дифференциал геометрия курсидаги чизиқларни ёки жисмларни конгруент ёки эквивалентлик шартларини ўрганиш ишларини ривожлантиришда қўлланиши мумкин.

Тадқиқотнинг мухокамаси. Диссертацияда олинган илмий натижалар Фарғона давлат университети дифференциал тенгламалар кафедраси қошида фаолият кўрсатаётган “Дифференциал тенгламалар ва унга турдош математик йўналишларнинг долзарб муаммолари” номли илмий семинарда маъруза қилинган. Мавзу бўйича учта мақола тайёрланган бўлиб, улардан иккитаси чоп этилган (13, 14) қолганлари эса “ФДУ хабарлари” журналига чоп этиш учун топширилган .

Ишнинг тузилиши ва хажми. Ушбу магистрлик диссертацияси кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, 75 бетни ташкил этади.

Диссертациянинг мазмуни. Диссертациянинг биринчи боби ёрдамчи характерга эга бўлиб, олтита қисмдан иборат.

1. да алгебраик системаларни асосий тушунчалари ва таърифлари берилган.

2. да группа таърифи ва унинг асосий хоссалари, жумладан гомоморфизм, изоморфизм тушунчалари ёритилган.

3. да ҳалқа ва унинг асосий хоссалари берилган.

4. да алгебраик майдон таърифи ва унинг асосий хоссалари берилган бўлиб, кейинги ишларда муҳим рол ўйновчи комплекс сонлар майдонига таъриф берилган.

5. да чизиқли вектор фазо ва унинг асосий хоссалари берилган.

6. да матрица ва унинг детерминанти таърифларининг асосий формулалари берилган.

Диссертациянинг иккинчи боби учта қисмдан иборат. Биринчи қисмда V фазода берилган йўлларнинг $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлиши шартлари топилган ва хосил бўлган оддий дифференциал тенгламалар системасининг ечимини мавжудлик ва ягоналик шартлари текширилган. Иккинчи қисмда шу фазода берилган иккита йўллар системасининг *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалентлик масаласи ўрганилган. Учинчи қисмда V фазода берилган сиртлар ва уларнинг системасини *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалентлик масаласи ўрганилган бўлиб, бунда хосил бўлган ҳусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасининг ечимини мавжудлиги ва ягоналиги текширилган.

Учинчи боб икки қисмдан иборат бўлиб, буларнинг биринчиси йўлларнинг $G=\{O(4,C)\cap Sp(4,C)\}$ группа амалига нисбатан эквивалентлик масаласи, иккинчи қисм эса сиртларнинг $G=\{O(4,C)\cap Sp(4,C)\}$ группа амалига нисбатан эквивалентлик масаласидан иборат.

I боб.

Асосий тушунчалар

1. Алгебраик системалар

Тўплам тушунчаси энг муҳим математик тушунчалардан биридир. Бу тушунча немис математиги Георг Кантор (1845-1918) томонидан киритилган.

Тўплам таърифланмайдиган математик тушунча бўлиб, баъзи бир нарсалар, буюмлар, обектларни биргаликда қараш натижасида вужудга келади. Масалан хақиқий сонлар тўплами, квадрат матрицалар тўплами, узлуксиз функциялар тўплами ва ҳ. к.

Ҳозирги замон алгебра фани тўплам ва унинг элементлари учун аниқланган алгебраик амал ва унинг хоссаларини ўрганади.

1-таъриф. Бўш бўлмаган А тўплам берилган бўлсин. $A\times A$ декарт кўпайтмани А тўпламни ўзига мос қўйувчи $\alpha : A\times A\rightarrow A$ акслантиришга А тўпламда аниқланган *бинар алгебраик амал* дейилади **.**

Бинар алгебраик амаллар одатда махсус танланган $\circ,*,\perp,..$ белгилар билан белгиланади.

2-таъриф $A^{n-1}\times A=A^{n}$ берилган бўлиб, декарт кўпайтманинг тартибланган ҳар бир $\left(a_1,a_2,a_3,...,a_n\right)$ элементига А тўпламнинг ягона a_{n+1} элементи мос қўйилган бўлса , А тўпламда ранги n га тенг бўлган *алгебраик амал* аниқланган дейилади.

Баъзи ҳолларда $\alpha\left(a_1, a_2, a_3, ..., a_n\right) = a_{n+1}$ кўринишида ҳам ёзилади, агар $a_{n+1} \notin A$ бўлса, α *қисмий алгебраик амал* дейилади.

Битта А тўпламнинг ўзида бир қанча алгебраик амаллар аниқланиши мумкин.

3-таъриф Бўш бўлмаган А тўплам ва унда қаралаётган алгебраик аммаллар тўплами Ω дан тузилган $\left(\langle A, \Omega \rangle\right)$ тартибланган жуфтлик *алгебра* дейилади**.**

f -алгебраик амалнинг ранги $r\left(f\right)$ билан белгиланади.

4-таъриф Агар $r\left(f_i\right) = r_i$, $(i = 1, 2, 3, ..., s)$ бўлса $\left(r_1, r_2, r_3, ..., r_s\right)$ кортеж $\langle A, f_1, f_2, f_3, ..., f_s \rangle$ алгебранинг *тури* дейилади.

Бинар алгебраик амалларнинг хоссалари

А тўпламда иккита ҳар хил $\circ$ ва $*$ каби бинар алгебраик амаллари берилган бўлсин.

1° $\forall a, b \in A$ учун $a \circ b = b \circ a$ бўлса, $\circ$ амал А да *комутатив* дейилади.

2° $\forall a, b, c \in A$ учун $a \circ \left(b \circ c\right) = \left(a \circ b\right) \circ c$ бўлса, $\circ$ амал *ассоциатив* дейилади.

3° $\forall a, b, c \in A$ учун $a \circ \left(b * c\right) = \left(a \circ b\right) * (a \circ c)$ бўлса, $\circ$ амал $*$ амалга нисбатан *дистрибутив* дейилади.

4° $\forall x, y \in A$ учун $x \circ a = y \circ a$ тенгликдан $x = y$ келиб чиқса, у ҳолда А тўплам элементлари учун *чапдан қисқартириш қонуни* ўринли дейилади.

Масалан, $x \geq 0$, $y \geq 0$ да $x^a = y^a$ тенглик ўринли.

5° $\exists e \in A$ бўлганда $e \circ x = x$ $\left(x \circ e = x\right)$ бўлса, е элемент x га нисбатан *чап (ўнг) нейтрал элемент* дейилади.

Агар А тўплам $\circ$ амалга нисбатан чап нейтраль элементга эга бўлса, у ҳолда бу элементлар тенгдир.

5-таъриф. Агар А тўпламнинг ихтиёрий a ва $\overline{a}$ элементлари учун $\overline{a}\circ a=e$ $\left(a\circ\overline{a}=e\right)$ бўлса, $\overline{a}$ элемент a га нисбатан *чап (ўнг) симметрик элемент* дейилади.

Агар $\overline{a}\circ a=a\circ\overline{a}=e$ бўлса a ва $\overline{a}$ лар ўзаро симметрик элементлар дейилади.

Агар a элементга симметрик $\overline{a}$ элемент мавжуд бўлса, a тескариланувчи элемент дейилади.

1-теорема. Агар А тўпламда аниқланган $\circ$ бинар алгебраик амал ассоциатив ва a элемент тескариланувчан бўлса, у ҳолда, a га симметрик элемент ягона бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик, иккита турли x ва y элемент $\circ$ бинар алгебраик амал бўйича битта a элементга симметрик бўлсин, яъни $a\circ x=e=x\circ a$ ва $a\circ y=e=y\circ a$. $\circ$ бинар алгебраик амал ассоциатив бўлганидан қуйидагини ёза оламиз:

$$x=x\circ e=x\circ\left(a\circ y\right)=(x\circ a)\circ y=e\circ y=y$$

Демак, $x=y$.

Қисм алгебралар. Алгебраларнинг гомоморфлик ва изоморфлик шартлари

Бизга A ва A' тўпламлар берилган бўлсин.

6-таъриф. А ва A' тўпламда аниқланган алгебраик амаллар сони тенг бўлиб, А тўпламда аниқланган f_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ алгебраик амалларнинг рангги билан A' тўпламда аниқланган ва f_i амалларга мос келувчи f_i' алгебраик амалларнинг рангги тенг бўлса, $A=\langle A, F\rangle$, $A'=\langle A', F'\rangle$ алгебралар *ўзаро бир хил турли алгебралар* дейилади.

7-таъриф. Агар A алгебранинг асосий A тўплами чекли (чексиз) бўлса , у ҳолда $A=\langle A, F\rangle$ алгебра ҳам *чекли (чексиз) алгебра* дейилади.

8-таъриф. Агар $b_1, b_2, b_3, ..., b_n \in B$ бўлганда $f_i(b_1, b_2, b_3, ..., b_n) \in B$ бўлса, у ҳолда B тўплам $f_i \in F$ амалларга нисбатан *ёпиқ* дейилади.

9-таъриф. $A \subset B$ бўлиб $A=\langle A, F\rangle$, $B=\langle B, F'\rangle$ алгебралар учун $r(f_i)=r(f_j)$ **ва** $(\forall a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \in A$ шартлар бажарилса, бу ҳолда A алгебра B алгебра учун *қисм алгебра* дейилади.

10-таъриф. Бир хил турли $A=\langle A, F\rangle$, $A=\langle A, F'\rangle$ алгебралар берилган бўлсин, A тўпламни A' тўпламга бир қийматли акслантирувчи шундай $\phi: A \to A'$ акслантириш мавжуд бўлиб, унинг учун

$$\phi\left[f_i(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)\right] = f_i\left[\phi(a_1), \phi(a_2), \phi(a_3), ..., \phi(a_n)\right]$$

тенглик A тўпламнинг барча элементлари учун бажарилса, у ҳолда A алгебра A' алгебрага *гомоморф аксланган* дейилади.

Масалан: $\forall a \in R$ учун $\phi(a)=|a|$ акслантириш $\langle R, \cdot\rangle$ алгебрани $\langle R_0^+, \cdot\rangle$ алгебрага гомоморф акслантиради.

A алгебранинг A' га гомоморфлиги $A \square A'$ орқали белгиланади. A' алгебра A алгебранинг гомоморф образи дейилади.

11- таъриф. Агар A алгебранинг A' алгебрага ϕ гомоморф аксланиши биектив бўлса, у ҳолда A алгебра A' алгебрага *изоморф* дейилади ва уни $A \cong A'$ орқали белгилаймиз.

Бўш бўлмаган A тўплам, унда аниқланган $F=\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ алгебраик амаллар ва $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ муносабатларнинг тартибланган учлиги *алгебраик система* деб аталади ва у $\langle A, F, \Omega \rangle$ орқали белгиланади.

2. Группа ва унинг хоссалари

Баъзи бир алгебраик системалардаги алгебраик амалларнинг хоссалари мактаб математикаси курсида кўриб ўтилган қўшиш ва кўпайтириш амаллари хоссаларига яқин хоссаларга эга бўлади. Бундай алгебраик системалар қаторига группа, ҳалқа, майдон, чизиқли фазо ва чизиқли алгебралар киради.Бу ситемаларнинг энг соддаси группадир қуйида шу тушунчаларни баён қиламиз.

Бизга битта бинар “$\circ$” ва битта унар “$*$” алгебраик амалларга эга бўлган бўш бўлмаган G тўплам берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар G тўпламда қуйидаги аксиомалар бажарилса, у ҳолда $\langle G, \circ, * \rangle$ алгебра группа дейилади:

1) $(\forall a, b, c \in G)$ $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, яъни $\circ$ бинар алгебраик амал ассоциатив;

2) $(\forall a \in G, \exists e \in G)$ $a \circ e = e \circ a = a$, яъни $\circ$ алгебраик амалга кўра ҳар бир $a \in G$ учун ўнг ва чап e элемент мавжуд;

3) $(\forall a \in G, \exists a^* \in G)$ $a \circ a^* = a^* \circ a = e$, яъни исталган $a \in G$ учун ўнг ва чап симметрик элемент мавжуд.

$\circ$ бинар алгебраик амал G тўпламда группа ҳосил қилувчи амал деб юритилади ва у G тўпламнинг исталган a ва b элементларидан тузилган тартибланган $(a; b)$ жуфтликка ягона $c \in G$ элементни мос қўяди.

2-таъриф. Агар $\langle G, \circ, * \rangle$ группа бўлиб, группанинг таърифидаги $(\forall a, b \in G)$ $a \circ b = b \circ a$ комутативлик шарти ҳам бажарилса, у ҳолда

$\langle G,\circ,*\rangle$ группа $\circ$ бинар алгебраик амалга нисбатан *комутатив группа* ёки *Абель группаси* дейилади.

Группа таърифидаги G тўплам ва унда қаралаётган бинар алгебраик амалнинг танланишига қараб бир қанча группаларни ҳосил қилиш мумкин.

3-таъриф. Агар G тўплам элеметлари $\circ$ бинар алгебраик амалга нисбатан ассоциатив бўлса, $\langle G,\circ\rangle$ алгебра *ярим группа* дейилади.

Нейтрал элементга эга бўлган ярим группа *моноид* деб аталади.

$\circ$ бинар алгебраик амални оддий кўпайтириш амли билан алмаштирсак, ҳосил бўлган группа *мултипликатив группа* дейилади.

Кўпайтириш амалига кўра нолдан фарқли a элементга симметрик бўлган элемент a^{-1} орқали белгиланади ва a элементга тескари элемент дейилади.

Кўпайтириш амалига нисбатан нейтрал элемент 1 орқали белгиланади.

$\circ$ бинар алгебраик амални оддатдаги қўшиш амали билан алмаштирсак, группа аксиомалари қуйидаги кўринишни олади:

1. $(\forall a,b,c\in G)\ \ a+(b+c)=(a+b)+c$ яъни G тўпламнинг ихтиёрий учта элементи учун қўшиш амали ассоциатив;

2. $(\forall a\in G,\exists 0\in G)\ \ a+0=0+a=a$ яъни G тўпламда нейтрал элемент 0 мавжуд;

3. $(\forall a\in G,\exists(-a\ )\in G)\ \ a+(-a\ )=(-a\ )+a=0$ яъни G тўпламнинг ихтиёрий a элементи учун қарама-қарши элемент мавжуд.

$\langle G,+,0\rangle$ группанинг ихтиёрий a ва b элементлари учун $a+b=b+a$ бўлгани сабабли $\langle G,+,0\rangle$ алгебра комутатив группа бўлади.

Қўшиш амалига нисбатан қаралаётган бундай группалар *аддитив группалар* деб аталади.

4-таъриф. $\langle G,\circ,*\rangle$ группанинг бирор M қисм тўплами $\langle G,\circ,*\rangle$ даги алгебраик амалга нисбатан группа ташкил этса, M қисм тўпламга $\langle G,\circ,*\rangle$ группанинг қисм группаси дейилади.

1-теорема. $\langle G,\circ,*\rangle$ *группанинг қисм тўплами* $\langle G,\circ,*\rangle$ *да қисм группа ташкил этиши учун қуйидаги иккита шарт бажарилиши зарур ва етарли:*

1. $h\circ h'\in M\ (\forall h,h'\in M)$;

2. $\forall h\in M\Rightarrow h^{-1}\in M$.

Исботи.

M тўплам группа бўлса, $M\subset\langle G,\circ,*\rangle$ юқоридаги икала шарт албатта бажарилади.

Фараз қилайлик юқоридаги икала шарт бажарилсин. У ҳолда, $\forall h\in\langle G,\circ,*\rangle$ учун $h\circ h^{-1}\in M$ бўлади. $M\subset\langle G,\circ,*\rangle$ бўлгани учун исталган $h, h', h''\in M$ лар учун $h\circ(h'\circ h'')=(h\circ h')\circ h''$ тенглик бажарилади. Демак, M группа $\langle G,\circ,*\rangle$ группанинг қисм группалари бўш тўплам эмас, чунки $\langle G,\circ,*\rangle$ нинг ўзи ва унинг бирлик элементларидан тузилган $\{e\}$ группалар $\langle G,\circ,*\rangle$ учун қисм группа бўлади.

Группанинг баъзи хоссалари

1-*хосса*. Исталган группада нейтрал элемент бир қийматли аниқланади ва группанинг исталган элементи учун ягона тескари (симметрик) элемент мавжуд.

2-*хосса.* Хар қандай мултипликатив группада бўлиш муносабати ўринли, яъни исталган a ва b элементлар учун шундай x ва y элементлар топиладики, улар учун $a\cdot x=b$ ва $y\cdot a=b$ тенгламалар ягона ечимга эга бўлади

Исбот. $a\cdot x=b$ тенгламани чапдан a^{-1} кўпайтирсак, бир томондан $a^{-1}(ax)=(a^{-1}a)x=ex=x$ иккинчи томондан $a^{-1}(ax)=a^{-1}b$ ларга эга бўламиз. Бу икки муносабат $x=a^{-1}b$ бўлгандагина ўринли. $x=a^{-1}b$ элемент $a\cdot x=b$ тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $a\left(a^{-1}b\right)=(aa^{-1})b=eb=b,\ a^{-1}b$ ечим $a\cdot x=b$ тенглама учун ягона ечим бўлади. Агар бирор c ҳам $a\cdot x=b$ нинг ечими бўлса, у ҳолда $c=a^{-1}b$ бўлади. Ҳақиқатдан,

$$c=ec=\left(a^{-1}a\right)c=a^{-1}\left(ac\right)=a^{-1}b,\ c=a^{-1}b$$

бўлади.

Худди шу усулда $y\cdot a=b$ тегламанинг ечими $y=ba^{-1}$ дан иборатлигини бевосита кўрсатиш мумкин.

3-*хосса.* Исталган группада элементларни чап ва ўнг томондан қисқартириш қонуни ўринли.

4-*хосса.* Группанинг a^{-1} элементига тескари элемент a нинг ўзидан иборат.

Исбот. a^{-1} га тескари элементни $\left(a^{-1}\right)^{-1}$ деб олсак, группа таърифининг 3-аксиомасига биноан $\left(a^{-1}\right)\left(a^{-1}\right)^{-1}=e$ бўлади. 1-хоссанинг иккинчи қисмига асосан $a^{-1}\cdot a=e$. Охирги икки тенгликдан $\left(a^{-1}\right)\left(a^{-1}\right)^{-1}=a^{-1}\cdot a$. Ҳосил бўлган тенгликка ўнгдан қисқартириш қонуни қўлласак, $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$ келиб чиқади.

Шундай қилиб $a\cdot b=e$ бўлганда a ва b лар бир-бирига тескари элементлар бўлиб, бу ерда $a=b^{-1}$ ва $b=a^{-1}$ бўлар экан.

5-*хосса.* $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$ кўпайтмани a^n кўринишида ёзиб, уни a элементнинг $n-$даражаси деб юритилади. Шунингдек, $a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot\ldots\cdot a^{-1}=\left(a^{-1}\right)^n=a^{-n}$ орқали ёзамиз. Бу ҳолда a^{-1} нинг $n-$дараж.асига эга бўламиз. Энди $\forall a\in\langle G,\circ,*\rangle$ учун $a^0=e\left(a\neq 0\right)$ деб қабул қиламиз. Демак, $\langle G, \circ, * \rangle$ группанинг исталган элементининг бутун даражаси яна $\langle G, \circ, * \rangle$ группанинг элементини ифодалайди.

Элементларининг сони чекли бўлган группалар *чекли группа*, элементларининг сони чексиз бўлган группалар *чексиз группа* дейилади. Элементларининг сонига группанинг *тартиби* дейилади.

3. Ҳалқа ва унинг хоссалари

1-таъриф. Ихтиёрий R тўпламнинг элементлари учун иккита бинар алгебраик амал, яъни “+”, “$\circ$” амаллари аниқланган бўлиб, бу тўпламда қуйидаги аксиомалар бажарилса R *ҳалқа* дейилади.

1) $a+(b+c)=(a+b)+c \quad (\forall a,b,c \in R)$;

2) $a+b=b+a \ (\forall a,b,\in R)$;

3) $a+x=b$ тенглама R да ягона ечимга эга;

4) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \ (\forall a,b,c \in R)$;

5) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c \ (\forall a,b,c \in R)$.

Агар R да юқоридагилар билан биргаликда

6) $a\cdot b=b\cdot a \quad \forall a,b \in R.$

бажарилса комутатив ҳалқа дейилади.

Хоссалари

1. R ҳалқа ягона ноль элементга ва ҳар бир элемент учун ягона қарама-қарши элементга эга. $a+x=b$ R да ягона элементга эга.

2. Ассоциативлик қонуни исталган n та элемент учун ёзиш мумкин

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

3. Агар $a_1=a_2=a_3=...=a_n=a$ бўлса (1) ни a элементнинг n каррралиси кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин: $a+a+a+...+a=na$

Бундан фойдаланиб, $na+ma=(n+m)a$ кўринишида ёзилади.

Агар R ҳалқа бирлик элементга эга, яъни $\forall a\in R$ $ae=ea=a$ бўлса, у ҳолда $na=nea$ тенглик бажарилгани сабабли, $ne\in R$ бўлади.

2-таъриф. $a\neq 0$ $b\neq 0$ бўлганда $a\cdot b=0$ бўлса**,** a ва b лар *нолнинг бўлувчилари* дейилади.

Нолнинг бўлувчиларига эга бўлмаган ҳалқада кўпайтма ноль бўлиши учун кўпайтувчилардан бири нолга тенг бўлиши зарур.

Қисм ҳалқа ва ҳалқа ҳарактеристикаси

3-таъриф. R ҳалқанинг бирор M қисм тўплами R да аниқланган иккита бинар алгебраик амалга нисбатан ҳалқа ташкил этса, M тўплам R га *қисм ҳалқа* дейилади.

1-теорема. R ҳалқанинг бирор бўш бўлмаган M тўплами ҳалқа бўлиши учун бу тўплам ихтиёрий a ва b элементлар билан биргаликда уларнинг йиғиндиси, айирмаси ва уларнинг кўпайтмасини ўзида сақлаши зарур ва етарли.

Исбот. Етарлилиги**.** M ҳалқа бўлсин, у ҳолда M да теоремадаги шартлар бажарилади ва $M\subset R$ бўлгани учун M ҳалқа бўлади.

Зарурлиги. Фараз қилайлик, $\forall a,b\in M$ бўлганда $a+b\in M,\ a-b\in M,$ $a\cdot b\in M$ бўлсин. Бу ҳол учун M нинг ҳалқа эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун M да $a+x=b$ тенглама ягона ечимга эканлигини кўрсатиш кифоя. Теорема шартидан $a\in M, b\in M\Rightarrow b-a=c\in M$ ва R тўпламда аниқланган айириш амали хоссасига асосан, $a+\left(b-a\right)=b,$ $a+c=b$ тенгликлар ўринли бўлади. Бу ерда $c=b-a$. Бу эса $a+x=b$ тенгламани ечимидир. Демак, M тўплам R ҳалқанинг қисм ҳалқаси бўлади.

e бирлик элементнинг бутун карралилари тўплами R ҳалқадаги e ни ўз ичига олувчи энг кичик ҳалқа бўлади.

4-таъриф. Агар $m\neq 0$ да $me\neq 0$ бўлса R_1 ҳалқа ноль характеристикали, $m\neq 0$ да $me=0$ бўлса, R_1 га m характеристикали ҳалқа дейилади.

Гомоморф ва изоморф ҳалқалар

5-таъриф. Агар шундай $\phi: R\to R'$ акслантириш учун қуйидаги икки шарт бажарилса, яъни

$$\phi(a+b)=\phi(a)\oplus\phi(b) \quad (\forall a,b\in R);$$

$$\phi(a\times b)=\phi(a)\otimes\phi(b) \quad (\forall a,b\in R)$$

тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда R ҳалқа R' ҳалқага *гомоморф* дейилади.

$\phi: R\to R'$ акслантиришда R нинг барча элементлари образини $\phi(R)$ орқали белгилаймиз $\phi(R)\subset R'$ тўплам одатда $\phi: R\to R'$ гомоморфликнинг образи деб юритилади.Қуйидаги теорема ўринли:

2-теорема. R ҳалқа R' ҳалқага гомоморф акслантирилади, яъни $\phi: R\to R'$ бўлса,

1) Rнинг ноль элементи R' нинг ноль элементига;

2) R даги ихтиёрий а элементга қарама-қарши бўлган $–a$ элемент R' даги a' га қарама-қарши бўлган -(a') элементга;

3) агар С ҳалқа e бирлик элементга эга бўлса, бу элемент R' нинг e' бирлик элементига гомоморф аксланади.

Исбот. 1) $R\ni a\xrightarrow{\phi}\bar{a}\in R'$ бўлсин. У ҳолда, R ҳалқада ноль элемент мавжудлигидан $a+0=a$, бўлади. Лекин R ҳам ҳалқа бўлгани учун унда $a+x=b$ тенглама ягона ечимга эга . Демак, R' да

$$\bar{a} \oplus \bar{u} = \bar{a}$$

тенглама ҳам ягона ечимга эга бўлади. Юқоридаги тенгламани қаноатлантирувчи ечим R' ҳалқа учун ноль элемент бўлади.

2) Энди $-a \in R$ элементнинг $-a$ га аксланишини кўрсатамиз:-*a*+*a*=*0* учун $\phi(-a+a) = \phi(-a) \oplus \phi(a) = 0$.

3) Агар R бирлик элементга эга бўлса, $\phi(a \cdot e) = \phi(a) \otimes \phi(e)$, $a \cdot e = a$ ҳамда $\phi(a \cdot e) = \phi(a) = \bar{a}$ шартларга асосан $\bar{a} \otimes \bar{e} = \bar{a}$ бўлиб, $\bar{e}$ бирлик элементдир.

3-теорема. Исталган ҳалқанинг гомоморфлик образи яна ҳалқа бўлади.

6-таъриф. R ҳалқанинг R' ҳалқага гомоморф акслантирувчи $\phi: R \to R'$ акслантириш R нинг хар-ҳил элементларини R' нинг хар-ҳил элементларига акслантирса , яъни $\forall a,b \in R$ учун $a \neq b \Rightarrow \phi(a) \neq \phi(b)$ бўлса, ϕ акслантириш R ҳалқанинг R' га *изоморф акслантириш* дейилади ва уни $R \cong R'$ кўринишда белгилаймиз.

R ҳалқанинг ўз-ўзига гомоморф аксланиши R ҳалқанинг *автоморфизми* дейилади.

4. **Майдон ва унинг содда хоссалари**

1-таъриф. Камида иккита хар-хил элементга эга бўлган F комутатив ҳалқа элементлари учун $a \neq 0$ бўлганда

$$a \cdot x = b \qquad (1)$$

(1) тенглама ягона ечимга эга бўлса, бундай ҳалқа *майдон* дейилади.

Майдон таърифидан қуйидаги ҳоссалари келиб чиқади.

1) Исталган майдон комутатив ҳалқа бўлганидан, комутатив ҳалқа элементлари учун ўринли бўлган барча ҳоссалари ўринли бўлади.

2) Исталган майдонда бирлик элемент мавжуд ва ягонадир.

3) Майдоннинг нолдан фарқли a элементи учун тескари a^{-1} элемент мавжуд ва ягонадир.

4) Майдон нолнинг бўлувчиларига эга эмас.

Ўз-ўзидан маълумки, майдонда e бирлик элемент ноль элемент билан устма-уст тушмайди.Лекин ҳалқаларда бўлгани каби майдонлар ҳам ноль ва p характеристикали бўлиши мумкин.

2-таъриф. Агар $n \in N$ бўлганда $ne = 0$ тенглик хар қандай n учун бажарилмаса, бундай майдон *ноль характеристикали майдон* дейилади.

Агар $n \neq 0$ бўлганда $ne = 0$ тенглик бажарилса, у ҳолда $p = \min n$ деб белгилаймиз ва қаралаётган майдон *p характеристикали майдон* дейилади.

Қисм майдон

3-таъриф. P майдоннинг камида иккита ҳар хил элементга эга бўлган Q қисм тўплами P да аниқланган қўшиш ва кўпайтириш аммалларига нисбатан майдон ташкил этса, Q га P нинг *қисм майдони* дейилади.

1-теорема. P майдоннинг камида иккита ҳар хил элементига эга бўлган Q қисм тўплами P да қисм майдон хосил қилиши учун,

$$\begin{aligned} &a)\, a-b \in Q, \quad a \cdot b \in Q \ \ (\forall a,b \in Q); \\ &b)\, a^{-1} \in Q \ \ \left(0 \neq a, \quad \forall a \in Q\right) \end{aligned} \qquad (2)$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. 1) Q қисм майдон бўлса, (2) шарт албатта бажарилади.

2) (2) шарт бажарилган ҳолда, Q нинг майдон ҳосил қилишини исботлаймиз.

a) шартга асосан $a \in Q$ бўлгани учун $a - a = 0 \in Q$ бўлиб, Q да ноль элемент мавжуд. Яна шу а) шартга асосан $\forall a \in Q$, $0 - a = -a \in Q$ дан a га қарама- қарши элемент мавжуд. Энди $\forall a,b\in Q$ ни олсак $-b\in Q$ бўлганидан $a-(-b)=a+b$ га келамиз. Шундай қилиб, $\forall a,b\in Q$ учун $a+b\in Q$ ва $a\cdot b\in Q$, яъни Q тўплам элементлари учун иккита бинар амаллар аниқланган.

b) шартга асосан $\forall a\in Q$ ($a\neq 0$) учун $a^{-1}\in Q$ бўлганидан, яна $a\cdot a^{-1}=e\in Q$ келиб чиқади. Натижада $\langle Q,+,\cdot,0\rangle$ нинг майдон эканлиги келиб чиқади.

Ҳар бир P майдон ўзига қисм майдон эканлиги равшан**.** Шу сабабли, P майдонга шу P майдоннинг хос қисм майдони дейилади. P дан фарқли барча қисм майдонлар P нинг хосмас қисм майдони дейилади.

4-таъриф. Исталган P майдоннинг барча қисм майдонлари кесишмаси минимал қисм майдони дейилади.

Тартибланган майдонлар

Фараз қилайлик $>-$ тартиб муносабати бўлсин.

Агар $\langle P,+,\cdot,\ 0,1,>\rangle$ тартибланган майдоннинг a элементи учун $a+a\neq 0$ ва $a+a>a$ шартлар бажарилса, у ҳолда a элементнинг шу майдоннинг мусбат элементи дейилади.

5-таъриф. Агар P майдон элементлари учун мусбат бўлишлилик хоссаси аниқланган бўлиб, унинг учун қуйидаги шартлар ўринли бўлса**,** $\langle P,+,\cdot,\ 0,1,>\rangle$ системага *тартибланган майдон* дейилади:

1**)** P майдоннинг исталган a элементи учун $a>0,\ a=0,\ -a>0$ шартлардан фақат биттаси бажарилади;

2) $a>b,\ b>c\ (\forall a,b,c\in P)$ бўлса, у ҳолда $a>c$ бўлади;

3) агар $a>0,\ b>0$ бўлса**,** $a+b>0$ ва $a\cdot b>0$ бўлади.

6-таъриф. Агар $-a>0$ бўлса, a га манфий элемент дейилади.

7-таъриф. $a,b\in P$ нинг $a-b$ айирмаси мусбат бўлса**,** a элемент bэлементдан *катта* дейилади ва $a>b$ орқали белгиланади**,** бундай ҳолда bэлемент aдан *кичик* деб юритилади ва у $b<a$ орқали ёзилади.

1-теорема. Тартибланган майдоннинг a мусбат элементи 0 дан катта ва манфий b элементи 0 дан кичикдир.

8-таъриф. Агар P майдон элементлари учун Архимед аксиомаси деб аталувчи, яъни исталган a ва $b>0$ сонлар учун шундай $n\in N$ сон топиладики, натижада $nb>a$ бўлади, деб аталувчи аксиома бажарилса, P майдонга Архимед маъносида тартибланган бўлади.

Комплекс сонлар майдони

Бизга $\forall a,b\in R,$ (a,b) тартибланган жуфтликлар тўплами берилган бўлсин. Биз уни С деб белгилаб қуйидаги аксиомаларни киритамиз:

1)$(a;b)=(c;d)\Leftrightarrow(a=c)\wedge(b=d)$ $\left(\forall(a;b),(c;d)\in C\right);$

2)$(a;b)+(c;d)\Leftrightarrow(a+c;b+d)$ $\left(\forall(a;b),(c;d)\in C\right);$

3) $(a;b)\cdot(c;d)=(ac-bd;ad+bc)$ $\left(\forall(a;b),(c;d)\in C\right)$

3-теорема. $\left\{(a;b)\ a,b\in R\right\}$ тўплам комутатив ҳалқа бўлади.

Исбот. Аввало $C=\left\{(a;b)\ a,b\in R\right\}$ тўпламнинг аддитив группа бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, бу тўпламда

a) $(a;b)+(c;d)=(c;d)+(a;b);$

b) $((a;b)+(c;d))+(e;f)=(a;b)+((b;d)+(e;f));$

c) $(a;b)+(0;0)=(a;b);$

d) $(a;b)+(-a;-b)=(0;0)$

шартлар бажарилгани учун $\langle C,\ +\rangle$ алгебра аддитив группа бўлади. Бу тўпламнинг элементлари учун

$$(a;b)((c;d)+(e;f))=(a;b)(c;d)+(a;b)(e;f)$$

Тенгликни ўринли эканини текшириш қийин эмас. Демак $\langle C,\ +,\cdot\rangle$ алгебра комутатив ҳалқа экан.

4-теорема. $\langle C,\ +,\cdot\rangle$ алгебра майдон бўлади.

Исбот. 2-теоремани исботлаш учун $\langle C,\ +,\cdot\rangle$ нинг бирлик элементга эга эканини ҳамда унинг ҳар қандай нолдан фарқли элементлари тескариланувчи эканини кўрсатиш кифоя. Исталган $(a;b)$ жуфтлик учун $(a,b)(1,0)=(a-0;b+0)=(a,b)$ бўлганидан $(1,0)$ жуфтлик $\langle C,\ +,\cdot\rangle$ ҳалқанинг бирлик элементидир.

Энди $a\neq 0$ ёки $b\neq 0$ учун $(a;b)$ элементнинг тескариланувчилигини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$(a;b)(x;y)=(1;0)$$

тенгламани ечиш кифоя. Бу тенгламани ечиб $\left(\frac{a}{a^2+b^2};-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ жуфтликни ҳосил қиламиз. Демак $\langle C,\ +,\cdot,0,1\rangle$ алгебра майдон экан. Ана шу майдон комплекс сонлар майдони дейилади ва уни C ҳарфи билан белгилаймиз. $\alpha=(a;b)$ жуфтликни 2) аксиомадан фойдаланиб,

$$\alpha=a(1;0)+b(0;1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. $(0;1)=i$ десак, $\alpha=a+ib$ кўринишни олади. Бу ерда a сон α нинг ҳақиқий қисми, b сон α нинг мавҳум қисми, i мавҳум бирлик дейилади.

5. Вектор фазо тушунчаси

Математика фанида шундай тўпламлар мавжудки, бу тўпламнинг ихтиёрий биттасидан олинган ҳар қандай иккита элементларнинг йиғиндиси ва бирор P майдон элементларининг берилган тўплам элементларига кўпайтмаси яна қаралаётган тўплам элементлари бўлади.

Элементлари юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи тўпламлар *векторлар фазоси* дейилади.

Айтайлик бизга бўш бўлмаган V тўплам ва P майдон берилган бўлсин. V тўпламнинг элементларини $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$, P майдон элементларини $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ кўринишида белгилаймиз. V тўплам элементлари учун “+” амали ва битта унар алгебраик амал аниқланган бўлсин.

1-таъриф. Агар қуйидаги аксиомалар бажарилса, яъни:

1) V - аддитив абель группа;

2) $(\alpha \cdot \beta)\overline{x} = \alpha\left(\beta\overline{x}\right) \quad \left(\forall\overline{x} \in V, \ \forall\alpha, \beta \in P\right)$;

3) $\alpha\left(\overline{x} + \overline{y}\right) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y} \quad \left(\forall\overline{x}, \overline{y} \in V, \ \forall\alpha, \in P\right)$;

4) $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \quad \left(\forall\overline{x} \in V, \ \forall\alpha, \beta \in P\right)$;

5) $1 \cdot \overline{x} = \overline{x} \qquad \left(\forall\overline{x} \in V, \ 1 \in P\right)$

бажарилса, у ҳолда V тўплам P майдон устида қурилган *вектор фазо* дейилади.

Вектор фазо элементлари *векторлар*, P майдон элементлари эса *скаляр* дейилади.

2-таъриф. P майдон устида аниқланган V вектор фазонинг бирор L қисм тўплами Vда аниқланган алгебраик амалларга нисбатан вектор фазони ташкил этса, L га V фазонинг қисм фазоси дейилади.

1-теорема. V вектор фазонинг бирор L қисм тўплами қисм фазо бўлиши учун , иккита шартнинг баж.арилиши зарур ва етарли:

a) $(\forall\overline{x}, \overline{y} \in L)\ \overline{x} - \overline{y} \in L$;

b) $\left(\forall\overline{x} \in L, \ \forall\alpha \in P\right)\alpha\overline{x} \in L.$

V фазонинг ўзи ва $\{0\}$ тўпламлар V фазонинг хос қисм фазоси, қолган қисм фазолари эса V нинг хосмас қисм фазолари дейилади.

3-таъриф. P майдон устида аниқланган V вектор фазонинг чекли сондаги

$$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, ..., \overline{a_n} \qquad (1)$$

векторлар учун учун камида биттаси нольдан фарқли шундай $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ сонлар топилсаки, улар учун ушбу

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + ... + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда (1) система *чизиқли боғланган* система дейилади, акс ҳолда *чизиқли эркли* система дейилади.

4-таъриф. Агар исталган $n_i \left(i = \overline{1, m}\right)$ сонлар учун

$$\overline{a} = k_1 \overline{a_1} + k_2 \overline{a_2} + ... + k_m \overline{a_m} \qquad (2)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\overline{a}$ вектор $\overline{a_i} \left(i = \overline{1, m}\right)$ векторлар орқали *чизиқли ифодаланади* дейилади.

5-таъриф. P сонлар майдони устида қурилган чизиқли фазонинг бирор чекли бўлмаган K векторлар системаси ўзида камида битта чекли сондаги чизиқли боғланган векторлар системасини сақласа, K векторлар системаси ҳам ўзаро *чизиқли боғланган* дейилади. Агар K системанинг барча чекли сондаги векторлар системаси чизиқли боғланмаган бўлса, система ҳам *чизиқли боғланмаган система* дейилади.

6-таъриф. Векторларнинг K системаси баъзиси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи K' қисм системасига айтилади:

1. K'-чизиқли боғланмаган векторлар системаси;

2. K системанинг ҳар бир вектори K' система векторларининг чизиқли комбинацияси бўлади.

7-таъриф. Агар V векторлар фазосининг ўзаро чизиқли боғланамаган шундай

$$\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}, ..., \overline{x_n} \qquad (3)$$

векторлар системаси мавжуд бўлсаки, V нинг қолган барча векторлари (3) система орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда (3) векторлар системаси V вектор *фазонинг базиси* дейилади.

$$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, ..., \overline{a_n} \qquad (4)$$

векторлар системаси V вектор фазонинг базиси бўлса V нинг ихтиёрий элементини (4) базис орқали чизиқли ифодалаш мумкин, яъни шундай $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ сонлар топиладики, натижада

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + ... + \alpha_n \overline{a_n} \qquad (5)$$

тенглик бажарилади.

V фазонинг (4) базис векторлари учун (5) тенглик ўринли бўлса $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ кортежга $\overline{a}$ векторнинг (3) базисга нисбатан *координаталар сатри* дейилади.

8-таъриф. Чекли векторлар системасининг ранги деб ундаги чизиқли боғланмаган векторларнинг максимал сонига айтилади.

Агар V вектор фазонинг ихтиёрий вектори (3) базис векторлар системаси орқали ягона усулда чизиқли ифодаланади.

Изоморф вектор фазолар

Бизга P майдон устидаги чекли ўлчовли иккита V ва V' вектор фазолар берилган бўлсин.

9-таъриф. Агар V ва V' вектор фазолар орасида шундай ϕ акслантириш мавжуд бўлиб, у V нинг ҳар бир $\overline{x}$ векторини V' нинг битта $\overline{x'}$ векторига ўзаро бир қийматли акслантирса ва қуйидаги шартлар бажарилса

1) $\overline{x} \xrightarrow{\phi} \overline{x'}$ ва $\overline{y} \xrightarrow{\phi} \overline{y'}$ бўлса, $\overline{x} + \overline{y} \xrightarrow{\phi} \overline{x'} + \overline{y'}$ бўлади. Бунда $\overline{x} + \overline{y} \in V$ ва $\overline{x'} + \overline{y'} \in V'$;

2) $\overline{x} \xrightarrow{\phi} \overline{x'}$ бажарилганда $\alpha\overline{x} \xrightarrow{\phi} \alpha\overline{x'}$ бажарилади, бунда $\alpha\overline{x} \in V$, $\alpha\overline{x'} \in V'$ $\left(\forall \alpha \in P,\ \overline{x} \in V,\ \overline{x'} \in V'\right)$.

V ва V' нинг изоморфлиги $\cong$ орқали белгиланади.

6. Матрица тушунчаси ва унинг ҳоссалари

1-таъриф. P майдоннинг mn та a_{ij} $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ сонларидан тузилган

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишидаги жадвал P *майдон устидаги матрица* дейилади. Матрица $A, B, C,...$ ҳарфлар орқали белгиланади, a_{ij} сонлар матрицанинг элементлари дейилади.

Матрица элементларининг горизонтал қаторлари унинг сатрлари, вертикал қаторлари унинг устунлари дейилади.

a_{ij} элементнинг биринчи i индекси бу элемент турган сатр номерини, j индекси бу элемент турган устун номерини билдиради.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицада сатрлар сони устунлар сонидан кичик, тенг ёки катта бўлиши мумкин. Агар $m=n$ бўлса, бу ҳолда бундай матрица n-тартибли квадрат матрица дейилади. Квадрат матрицада $a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn}$ элементлар матрицанинг бош диоганали, $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2},..., a_{n1}$ элементлар эса иккинчи диоганал элементлари дейилади.

Агар A ва B матрицалар берилган бўлиб, уларнинг сатрлари ва устунлари сони мос равишда тенг бўлса, бундай матрицалар номдош матрицалар деб юритилади. A нинг ҳар бир a_{ij} элементи B нинг унга мос

b_{ij} элементига тенг бўлса, бу иккита номдош матрицалар тенг, яъни $A=B$ бўлади.

A матрицанинг сатрлари m та n ўлчовли горизонтал

$$\overline{a_1}=\left(a_{11},a_{12},...,a_{1n}\right);$$
$$\overline{a_2}=\left(a_{21},a_{22},...,a_{2n}\right);$$
$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$
$$\overline{a_m}=\left(a_{m1},a_{m2},...,a_{mn}\right)$$

векторларни, устунлари эса n та m ўлчовли вертикал векторларни ташкил этади.

2-таъриф. Матрицадаги сатр векторлар системасининг рангига *матрицанинг рангги* дейилади.

Матрицалар устида амаллар

Биз ушбу параграфда матрицалар устида бажариладиган амаллар, берилган матрицага тескари матрица мавжудлиги ҳақидаги таъриф ва теоремаларни келтирамиз.

Матрицаларни қўшиш амали фақат номдош матрицалар учун аниқланган. P майдон устида аниқланган икки номдош матрицани қўшиш қуйидаги қоида бўйича аниқланади:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m2}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Демак, йиғинди матрицанинг элементлари қўшилувчи матрицаларнинг мос элементлари йиғиндисига тенг. Бундан кўринадики, матрицаларни қўшиш амали комутатив ва ассоциатив бўлади. Шундай қилиб, исталган матрицалар учун

$$A+B=B+A,\quad A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$$

тенгликлар бажарилади. Ҳамма элементлари ноллардан иборат матрица *ноль матрица* деб аталади ва у 0 орқали белгиланади. Матрицани (-1) сонга кўпайтириш амали қуйидагича аниқланади:

$$\left(-1\right)A=-A=-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & ... & -a_{2n} \\ . & . & . & . \\ -a_{m2} & -a_{m2} & ... & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Бу матрица A матрицага қарама-қарши матрица дейилади ва $A+\left(-A\right)=0$ бўлади.

Ҳусусий ҳолда $A-A=0,\ A-0=A,\ 0-A=-A$ бўлади.

1-*Натижа.* Номдош матрицалар тўплами аддитив группа бўлади.

Энди матрицаларни кўпайтириш қоидасини кўрайлик.

Фақат $m\times n$ кўринишидаги матрицани $n\times k$ кўринишидаги матрицага кўпайтириш мумкин, бошқача айтганда, фақат n устунли матрица n сатрли матрицага кўпайтирилади.Кўпайтмада $m\times k$ кўринишли матрица ҳосил бўлади, яъни

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=C_{m\times k}.$$

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2k} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nk} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l2} & \dots & \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{lk} \\ \sum_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l2} & \dots & \sum_{l=1}^{n} a_{2l}b_{lk} \\ . & . & . & . \\ \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l2} & \dots & \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{lk} \end{pmatrix} = C_{m\times k}$$

1-теорема. Учта A, B, C матрица учун AB ва BC кўпайтмалар матрицалар бўлса, у ҳолда $(AB)C$ ва $A(BC)$ кўпайтмалар ҳам матрицалар бўлиб, $(AB)C = A(BC)$ тенглик бажарилади.

Матрицаларни кўпайтириш амали коммутатив эмас.

Берилган $\alpha \in P$ сонни

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицага кўпайтириш деб, бу сонни A нинг ҳамма элементларига кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган матрицага айтилади, яъни

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Номдош матрицалар учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B;$$

$$\alpha(A-B)=\alpha A-\alpha B;$$

$$(\alpha\pm\beta)A=\alpha A\pm\beta A;$$

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$$

2-*Натижа*. Номдош матрицалар тўплами берилган сонлар майдони устида вектор фазони ташкил этади.

Тескари матрица

n-тартибли квадрат матрицанинг бош диагонали элементлари 1 дан ва қолган ҳамма элементлари 0 лардан иборат ушбу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

кўринишидаги матрица *бирлик матрица* дейилади ва у E орқали белгиланади.

n тартибли исталган A квадрат матрица учун $AE = EA = A$ эканлигини текшириш қийин эмас.

3-таъриф. Барча сатр векторлари чизиқли эркли матрица ҳосмас (айнимаган) матрица, барча сатр векторлари чизиқли боғланган матрица хос (айниган) матрица деб аталади.

4-таъриф. A матрица учун $AB = BA = E$ тенгликни қаноатлантирувчи B матрица мавж.уд бўлса, у ҳолда B ни A **га** *тескари матрица* дейилади ва у A^{-1} кўринишида белгиланади.

Таърифдаги B ўрнига A^{-1} қўйсак, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ бўлади.
Тескари матрица фақат хосмас квадрат матрицалар учунгина мавжуд ва ягона бўлади.

Элементлари бирор P майдонга тегишли бўлган барча $n \times n$ тартибли турли квадрат матрицалар тўпламини $GL(n, P)$ орқали белгилаймиз.

2-теорема. $\langle GL(n, P), \cdot \rangle$ алгебра группа бўлади.

Исбот. Аввалги мавзуларимизда кўриб ўтганимиздек, а) учта A, B, C матрицаларнинг кўпайтмаси ассоциатив; б) иккита $n \times n$ тартибли хосмас матрицаларнинг кўпайтмаси яна $n\times n$ тартибли хосмас матрица бўлади; в) 1-теоремага кўра хосмас матрица учун ягона тескари хосмас матрица мавжуд; г) ҳар қандай бирлик матрица хосмас бўлади. Теорема исботланди.

$\langle GL(n,P),\cdot\rangle$ группанинг детерминанти 1га тенг элементларидан иборат тўплам ҳам юқорида критилган матрицаларни кўпайтириш амалига нисбатан группа хосил қилади ва бу группа махсус чизиқли группа деб номланиб, *SL(n,C)* кўринишида белгиланади, бу ерда $n\geq 2$.

Квадрат матрицаларнинг детерминанти.

5-таъриф. $n-$тартибли

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадрат матрицанинг детерминанти деб $n!$ та ҳадларнинг

$$\sum^{n!}(-1)^{\nu}a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}a_{3\beta_3}\dots a_{n\beta_n} \tag{1}$$

кўринишидаги йиғиндига айтилиб, бу йиғинди қуйидаги талабларни қаноатлантиради

(1) йиғиндидаги ҳар бир

$$(-1)^{\nu}a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}a_{3\beta_3}\dots a_{n\beta_n} \tag{2}$$

ҳад матрицанинг ҳар бир сатри ва ҳар бир устунидан фақат биттадан олинган $a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}a_{3\beta_3}\dots a_{n\beta_n}$ элементлар кўпайтмасига тенг.

(1) йиғинди $n-$тартибли детерминанти дейилади, у

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

кўринишида белгиланиади ва унинг горизонтал қаторлари сатрлари, вертикал қаторлар устунлар дейилади. a_{ij} ларни детерминантни элементлари дейилади.

Детерминантни асосий ҳоссалари

1-*ҳосса*. Детерминантни тронспонирлаш яъни устунларини сатр қилиб, сатрларини устун қилиб ёзиш уни қийматини ўзгартирмайди.

2-*ҳосса*. Детерминантда исталган икки сатр ёки икки устунларини ўринларини алмаштирсак уни фақат ишораси ўзгаради.

3-*ҳосса*. Детерминантнинг бирор сатрдаги элементлари m умумий кўпайтувчига эга бўлса, уни детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

3-*натижа*. Детерминантнинг бирор сатри бошқа сатрга пропорционал бўлса, бу детерминант нолга тенг.

4-*ҳосса.* $n-$тартибли детерминантда бирор сатри mта қўшилувчиларнинг йиғиндисидан иборат бўлса, яъни

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ \sum\limits_{k=1}^{m} a_{i1}^{(k)} & \sum\limits_{k=1}^{m} a_{i2}^{(k)} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m} a_{in}^{(k)} \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

бўлса, $|A|$ детерминант mта $n-$тартибли $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|,...,|A_n|$ детерминантнинг йиғиндисига тенг.

Минор ва алгебраик тўлдирувчилар

Тартиби 3 дан катта бўлган детерминантни ҳисоблашни тайёр формуласи мавжуд эмас. Шунинг учун юқори тартибли детерминантни ҳиссоблаш пайтида унинг тартибини пасайтириш муҳим.

7-таъриф. $n-$тартибли детерминантнинг исталган r та сатри ва r та устунини ўчириб, уларнинг ўчирилган жойларидаги кесишган элементларни берилган детерминантдагидек тартибда олиб, r-тартибли детерминант тузсак, бу детерминант берилган детерминантнинг $r-$*тартибли минори* деб аталади.

9-**таъриф.** $|A|$ детерминантдаги r-тартибли M минорнинг шу детерминантда иштирок этган сатр ва устун номерларини мос равишда $k_1,k_2,k_3,...,k_r$ ва $l_1,l_2,l_3,...,l_r$ деб белгиласак у ҳолда , $(-1)^{k_1+k_2+k_3+...+k_r+l_1+l_2+l_3+...+l_r}$ даражаларини $\bar{M}$ қўшимча минорга кўпайтмаси M минорнинг *алгебраик тўлдирувчиси* дейилади.

Алгебраик тўлдирувчини A орқали белгиласак, таърифга кўра

$$A=(-1)^{k_1+k_2+k_3+...+k_{rr}+l_1+l_2+l_3+...l_r}\bar{M}$$

бўлади.

3-теорема. (Лаплас теоремаси) $n-$ тартибли $|A|$ детерминантда танланган r та ихтиёрий сатр (ихтиёрий устун) ларлардан ҳамма $r-$ тартибли минорларни тузиб ва уларга мос алгебраик тўлдирувчиларга кўпайтириб, бу кўпайтмалмр қўшилса, ҳосил бўлган йиғинди $|A|$ детерминантга тенг бўлади.

I боб бўйича хулоса.

Ушбу бобда берилган барча маълумотлар, таърифлар, теоремалар, хоссалар кейинги икки бобда қилинган ишлар учун ёрдамчи тушунчалар бўлиб, бунда 3-4 да кўрсатилган адабиётлардан фойдаландик.

II Боб.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ *SL(n,C)* ГРУППА АМАЛИГА НИСБАТАН ЭКВИВАЛЕНТ ЕЧИМЛАРИ.

1. *SL(n,C)* ГРУППА АМАЛИГА НИСБАТАН ЭКВИВАЛЕНТ ЙЎЛЛАР

Комплекс сонлар майдони устида $V = C^n - n$ ўлчовли вектор фазо ва *SL(n,C)* – махсус чизиқли группа берилган бўлсин. C^n фазонинг ҳар бир элементи n – ўлчовли сатр кўринишида тасвирланган векторлардан, *SL(n,C)* группанинг ҳар бир элементи детерминанти 1 га тенг бўлган квадрат матрицалардан иборат. Бу группанинг C^n фазодаги амали сифатида, матрицаларни кўпайтириш амалини киритамиз:

$$\left(x,g\right)\to xg=\left(x_1,x_2,x_3,...,x_n\right)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ . & . & . & . \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i g_{i1}\ \sum_{i=1}^{n}x_i g_{i2}\ \sum_{i=1}^{n}x_i g_{i3}\ \ldots \sum_{i=1}^{n}x_i g_{in}\right)$$

1-таъриф. $[0,1]$ да аниқланган $x:[0,1]\to C^n$ узлуксиз акслантириш *x(t) узлуксиз йўлни* ифодалайди.

Агар $x_i(t),\ i=\overline{1,n}$ координаталарда *x(t)* чексиз дифференциалланувчи функциядан иборат бўлса, $C^\infty - x(t)$ йўлни ифодалайди.

$M\left(x\right)$ орқали $\left(x', x'', x''', ..., x^{(n-1)}\right)$ лардан тузилган матрицани белгилаймиз:

$$M(x)=\begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

бу ерда $x^{(i)}-x$ нинг t бўйича олинган $i-$тартибли ҳосиласи.

2-таъриф. Агар барча $t\in[0,1]$ учун $\det M(x)(t)\neq 0$ бўлса $C^{\infty}-x(t)$ чексиз узлуксиз дифференциалланувчи йўл *регуляр* дейилади.

3-таъриф. Агар шундай $g\in SL(n,C)$ мавжуд бўлсаки, барча $t\in[0,1]$ учун $y(t)=x(t)\cdot g$ тенглик ўринли бўлса, *x(t)* ва *y(t)* йўллар *SL(n,C)* группа амалига нисбатан *эквивалент* дейилади.

4-таъриф. $x(t)=\{x_i(t)\}_{i=1}^{n}$ нинг f функцияси ва унинг чекли сондаги хосилалари *SL(n,C)* группа амалига нисбатан *инвариант* дейилади, агар унинг қийматлари *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалент йўлларга мос келса, яъни *f(x(t)g)=f(x(t))*.

1-**хосса.** Агар $x(t)$ ва $y(t)$ йўллар эквивалент бўлса, уларга мос $M(x)$ ва $M(y)$ матрицалар учун

$$M(y)=M(x)g,\ \ g\in SL(n,C) \tag{1}$$

тенглик ўринли.

Исбот. Агар $x(t)$ ва $y(t)$ йўллар *G*-эквиалент бўлса, $y(t)=x(t)\cdot g$, $g\in SL(n,C)$ тенглик бажарилади. Бу ҳолда,

$$M\left(y\right)=M\left(x\cdot g\right)=\begin{pmatrix} \sum_{j,i=1}^{n} x_i g_{ij} \\ \frac{d}{dt}\left(\sum_{j,i=1}^{n} x_i g_{ij}\right) \\ \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{j,i=1}^{n} x_i g_{ij}\right) \\ \vdots \\ \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\left(\sum_{j,i=1}^{n} x_i g_{ij}\right) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i g_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_i g_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i g_{in} \\ \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{i1}\right) & \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{i2}\right) & \cdots & \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{in}\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{i1}\right) & \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{i2}\right) & \cdots & \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{in}\right) \end{pmatrix}$$

$$M\left(x\right)g=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i g_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_i g_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i g_{in} \\ \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{i1}\right) & \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{i2}\right) & \cdots & \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{in}\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{i1}\right) & \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{i2}\right) & \cdots & \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{in}\right) \end{pmatrix}$$

$M(xg)$ ва $M(x)g$ матрицаларнинг ҳар бир элементи тенглигидан бу матрицаларнинг ҳам тенглиги келиб чиқади.

1-эслатма. Ушбу бобдаги барча масалаларни $SL(n,C)$, $n \geq 2$ бўлган холда ўргандик. Яъни олинган барча натижалар $n = 2$ яъни $SL(2,C)$ бўлган хол учун ҳам ўринли. Шу сабабдан, умумийликни чегарамаслик мақсадида $SL(n,C)$, $n \geq 2$ бўлган холда текширдик.

$M(x)$ ва $M(y)$ матрицалар V фазода тескариланувчи бўлгани учун уларнинг детерминанти нолдан фарқли бўлади. Уларга мос тескари матрицаларни қуйидагича киритамиз:

$$M^{-1}(x) = \frac{1}{\det M(x)} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \cdots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \cdots & M_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ M_{1n} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix};$$

бу ерда $M_{ij},\, i, j - \overline{1,n}$ мос ҳолдаги x_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларини ифодалайди, $\det M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i M_{in} \neq 0$,

$$M^{-1}(y) = \frac{1}{\det M(y)} = \begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{21} & \cdots & M'_{n1} \\ M'_{12} & M'_{22} & \cdots & M'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ M'_{1n} & M'_{n2} & \cdots & M'_{nn} \end{pmatrix};$$

бу ерда $M'_{ij}, i, j-\overline{1,n}$ мос ҳолдаги y_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларини ифодалайди, $\det M(y)=\sum_{i=1}^{n} y_i M'_{in} \neq 0$,

$$g^{-1}=\begin{pmatrix} G_{11} & G_{21} & \dots & G_{n1} \\ G_{12} & G_{22} & \dots & G_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{1n} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det g = 1 \in SL(n,C).$$

Тескари матрицанинг таърифидан $M(x)M^{-1}(x)=E$ тенглик ўринли, бу ерда E бирлик матрица. У ҳолда қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$M(x)M^{-1}(x)=$$

$$=\frac{1}{\det M(x)}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{1n} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\det M(x)}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i M_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_i M_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i M_{in} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i' M_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_i' M_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i' M_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)} M_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)} M_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)} M_{in} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=E$$

Хосил бўлган матрицаларнинг хар бир ҳадларини тенгласак

$$\sum_{j,i=1}^{n} x_i^{(j-1)} M_{ij} = \det M(x), \ \sum_{i=1}^{n} x_i M_{ik} = 0, \ k = \overline{2,n}, \ \ \sum_{i=1}^{n} x_i' M_{ik} = 0, \ k = \overline{1,n}, \ k \neq 2,$$

(2)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'' M_{ik} = 0, \ k = \overline{1,n}, \ \ k \neq 3 \ , ..., \ \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)} M_{ik} = 0, \ k = \overline{1,(n-1)}$$

кўринишидаги тенгликларга эга бўламиз.

2-хосса. Агар $x(t)$ ва $y(t)$ йўллар $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлса, қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$1) \ M^{-1}(y) = g^{-1} M^{-1}(x), \ g^{-1} \in SL(n,C);$$

(3)

$$2) \ \det M(x) = \det M(y).$$

Исбот. Агар $x(t)$ ва $y(t)$ йўллар *G*-эквивалент бўлса, $y(t) = x(t) \cdot g$, $g \in$ *SL(n,C)* тенглик бажарилади, қолаверса 1-хоссага кўра $M(y) = M(x) g$ тенглик ҳам ўринли. $g \in SL(n,C)$-детерминанти 1 га тенг бўлган квадрат матрица. Демак, g га тескари элемент мавжуд. Уни g^{-1} деб белгиласак, группа таърифига кўра $g^{-1} \in SL(n,C)$, яъни $\det g^{-1} = 1$.

$M(y) = M(x) g$ тенгликка g^{-1} ни ўнгдан кўпайтирамиз, натижада

$$M(y) g^{-1} = M(x) g g^{-1} = M(x) E = M(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу тенгликка $M^{-1}(x)$ ўнгдан кўпайтирамиз:

$$M(y) g^{-1} M^{-1}(x) = M(x) M^{-1}(x) = E.$$

Юқоридаги тенгликка $M^{-1}(y)$ чапдан кўпайтирсак,

$$M^{-1}(y) M(y) g^{-1} M^{-1}(x) = M^{-1}(y) E = M^{-1}(y)$$
$$g^{-1} M^{-1}(x) = M^{-1}(y)$$

бу ерда E - бирлик матрица, $g^{-1} \in SL(n,C)$.

Энди 2) тенгликни исботлашга ўтамиз. Агар $x(t)$ ва $y(t)$ йўллар *G*-эквиалент бўлса, 1-леммага кўра

$$M(y)=M(x)g\,,\quad g\in SL(n,C).$$

тенглик бажарилади. Бу ҳолда,

$$\det M(y)=\det\big(M(x)g\big)=\det M(x)\det g=\det M(x)1=\det M(x).$$

2-хосса исботланди.

1 ва 2- хоссалардан фойдаланиб қуйидаги теоремани исботлаймиз.

1-теорема. *x(t)* ва *y(t)* йўллар *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалент бўлиши учун қуйидаги шартларни бажарилиши зарур ва етарли.

$$1)\ M'(x)M^{-1}(x)=M'(y)M^{-1}(y);$$

$$2)\ \det M(x)=\det M(y) \tag{4}$$

бу ерда $M^{-1}(x)$ ва $M^{-1}(y)$ матрицалар мос ҳолда *M(x)* ва *M(y)* матрицаларни тескари матрицалари, $M'(x), M'(y)$ матрицалар *M(x),M(y)* матрицаларни *t* бўйича олинган ҳосилаларидан иборат.

Исбот.1) *Зарурлиги:*

Агар *x(t)* ва *y(t)* йўллар *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалент бўлса, *y(t)=x(t)g* шартни қаноатлантирувчи *g*∈*SL(n,C)* элемент мавжуд. У ҳолда, $M(y)=M(x)\cdot g,\ \ g\in SL(n,C)$ тенглик ҳам ўринли ва (3) муносабатни қаноатлантиради. Ҳақиқатдан ҳам,

$$1)\ \ M'(y)M^{-1}(y)=M'(x\cdot g)M^{-1}(x\cdot g)=$$

$$=M'(x)g\cdot g^{-1}M^{-1}(x)=M'(x)M^{-1}(x);$$

$$2)\ \det M(y)=\det M(x\cdot g)=\det M(x)\det g=\det M(x)\cdot 1=\det M(x).$$

2) *Етарлилиги:*

x(t) ва *y(t)* йўллар учун (3) муносабат бажарилса, *x(t)* ва *y(t)* йўллар *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалент бўлади.

Буни кўрсатиш учун қуйидаги тенгликдан фойдаланамиз. Агар *A(t)* – матрица тескариланувчи бўлса

$$(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1} \tag{5}$$

тенглик ўринли.

Бу тенгликдан фойдаланиб қуйидагиларни исботлаймиз.

$$1)\ M'(x)M^{-1}(x) = M'(y)M^{-1}(y)$$

тенгликни аввал *M(y)* га ўнгдан, кейин – $M^{-1}(x)$ га чапдан кўпайтирамиз. Натижада

$$(M^{-1}(x)M(y))' = 0$$

келиб чиқади. Бундан қуйидагилар келиб чиқади.

$$M^{-1}(x)M(y) = g \text{ ва } M(y) = M(x)\cdot g, \quad g \in SL(n,C).$$

2-хоссага кўра

$$2)\ \det M(y) = \det M(x) = \det M(x)\cdot 1 = \det M(x)\cdot \det g = \det(M(x)g)$$

$$M(y) = M(x)\cdot g, \quad g \in SL(n,C).$$

Теорема исботланди.

1-теореманинг 1-шартидаги $M'(x)M^{-1}(x)$ кўпайтма $n\times n$ тартибли квадрат матрица хосил бўлади. Бу матрицани $A(t)$ деб белгилаб уни кўринишини аниқлаймиз:

$$M^{-1}(x)M(y) = A(t) =$$

$$= \frac{1}{\det M(x)} \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$
=\frac{1}{\det M(x)}\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{n} x_i' M_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_i' M_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i' M_{in} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i'' M_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_i'' M_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i'' M_{in} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^{(n)} M_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n)} M_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n)} M_{in}
\end{pmatrix}
$$

Ушбу матрицада (2) тенгликларни эътиборга олсак, $A(t)$ матрицани кўриниши қуйидагича бўлади:

$$
A(t)=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \dots. & a_{nn}(t)
\end{pmatrix}
$$

бу ерда $a_{ni}(t)=\sum_{i=1}^{n} x_i^{(n)} M_{ik},\ i,k=\overline{1,n}$ -чексиз марта дифференциалланувчи, узлуксизфункция.

Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$
A(t)=M'(x)M^{-1}(x),\quad c(x)=\det M(x).
$$

Бу ҳолда *A(t)* матрицавий функция ва *c(x)* функциялар *SL(n,C)* группа амалига нисбатан инвариант.

1-теорема шартларига кўра

$$
\begin{cases}
M'(x)M^{-1}(x)=A(x) \\
\det M(x)=\det M(y)=c(x)
\end{cases} \tag{6}
$$

матрицавий дифференциал тенгламалар системасини хосил қиламиз.

(3) ни 1-тенгламасини $M'(x)=A(t)M(x)$ кўринишида ёзиб, *A(t)* ни кўринишини юқоридагидек олсак:

$$M'(x)=A(t)M(x)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_1^{(i-1)} a_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_2^{(i-1)} a_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_n^{(i-1)} a_{i1} \end{pmatrix}$$

Биринчи ва охирги матрицаларни ҳар бир ҳадларини тенгласак

$$\begin{cases} x_1^{(n)} = a_{nn}x_1^{(n-1)} + a_{nn-1}x_1^{(n-2)} + \dots + a_{n1}x_1 \\ x_2^{(n)} = a_{nn}x_2^{(n-1)} + a_{nn-1}x_2^{(n-1)} + \dots + a_{n1}x_2 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ x_n^{(n)} = a_{nn}x_n^{(n-1)} + a_{nn-1}x_n^{(n-1)} + \dots + a_{n1}x_n \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} x_1^{(n)} - a_{nn}x_1^{(n-1)} - a_{nn-1}x_1^{(n-2)} - \dots - a_{n1}x_1 = 0 \\ x_2^{(n)} - a_{nn}x_2^{(n-1)} - a_{nn-1}x_2^{(n-1)} - \dots - a_{n1}x_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(n)} - a_{nn}x_n^{(n-1)} - a_{nn-1}x_n^{(n-1)} - \dots - a_{n1}x_n = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

кўринишидаги бир жинсли, чизиқли, n-тартибли n та оддий дифференциал тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу дифференциалтенгламалар системасини $x(t)$ йўл сифатида қараш мумкин.

2. $\det M(x) = C(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i M_{1i}$ га тенг, бу ерда $M_{1i} - i = (1,n)$ 1-сатр ва i - устунларга мос ҳолдаги минорлардан иборат.

3. $C'(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i M_{1i}\right]_x' = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i' M_{1i} + x_i M_{1i}'\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i' M_{1i} + \sum_{i=1}^{n} x_i M_{1i}$

Ушбу йиғиндининг биринчи қўшилувчиси (2) тенгликларга кўра нолга тенг. Демак, $C'(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i M_{1i}'$ тенглик ўринли. Бу йиғиндида $n-$тартибли ҳосила қатнашмаган барча ҳадлари (2) тенгликларга кўра нолга тенг бўлиб, фақат $n-$тартибли ҳосила қатнашган ҳадларгина қолади. Бундай ҳадларнинг сони $(n-1)!$ га тенг, қолаверса бу ҳадларда $(n-1)$-тартибли ҳосилали кўпайтувчи мавжуд эмас. Хар бир қўшилувчидаги $x_i^{(n)}$-элемент ўрнига (4) системадаги тенгликларни олиб бориб қўямиз. Натиж.ада қуйидагиларга эга бўламиз:

$$C'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i M_{1i}' = a_{n1}\sum_{j,i=1}^{n} x_i M_{ji} + a_{n2}\sum_{j,i=1}^{n} x_i' M_{ji} +$$

$$+a_{n3}\sum_{j,i=1}^{n} x_i'' M_{ji} + \ldots + a_{n\,n-1}\sum_{j,i=1}^{n} x_i^{(n-1)} M_{ji} + a_{nn}\sum_{j,i=1}^{n} x_i^{(j-1)} M_{ji}$$

(2) тенгликларни эътиборга олсак

$$C'(t) = a_{nn}\sum_{j,i=1}^{n} x_i^{(j-1)} M_{ji} = a_{nn}\det M(x) = a_{nn} C(t)$$

тенглик хосил бўлади.

Юқоридаги келиб чиққан натижалардан фойдаланиб (8) дифференциал тенгламалар системасининг *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалент ечими мавжуд ва ягоналиги кўрсатилган теоремани келтириб ўтамиз.

2-теорема. Агар $A = A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$, матрица ва $c=c(t)$ функция қуйидаги

$$1)\ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \ldots. & a_{nn}(t) \end{pmatrix};$$

бу ерда $a_{n1}(t),\ i = \overline{1,n}$ n – марта дифференциалланувчи функция (9)

$$2)\ c_t' = a_{nn}(c);$$

$$3)\ c(t) \neq 0, \quad t \in (0,1)$$

шартларни қаноатлантирса, (8) дифференциал тенгламалар системасининг ечими *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалентгача аниқликда мавжуд ва ягона.

Исбот. *Мавжудлиги.* $M'(x)M^{-1}(x) = A(t)$ тенгликдан *A(t)* матрицани кўриниши келиб чиқади. Бу тенгликни $M'(x) = A(t)M(x)$ кўринишида ёзиб, ҳисоблашларни бажарсак.

$$\begin{cases} x_1^{(n)} - a_{nn}x_1^{(n-1)} - a_{nn-1}x_1^{(n-2)} - \ldots - a_{n1}x_1 = 0 \\ x_2^{(n)} - a_{nn}x_2^{(n-1)} - a_{nn-1}x_2^{(n-1)} - \ldots - a_{n1}x_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(n)} - a_{nn}x_n^{(n-1)} - a_{nn-1}x_n^{(n-1)} - \ldots - a_{n1}x_n = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

n-тартибли, n та номаълумли, n та бир жинсли, чизиқли оддий дифференциал тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Дифференциал тенгламалар системаси назариясида маълумки, дифференциал тенгламаларнинг чизиқли, бир жинсли системаси учун фундаментал система мавжуд [1]. Демак, (5) системанинг $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ ечимлари

$$y^{(n)} - a_{nn}(t)y^{(n-1)} - \ldots - a_{n1}(t)y = 0 \qquad (11)$$

дифференциал тенгламанинг ечимларини фундаментал системасини ташкил қилади.

Маълумки, барча $t\in[0,1]$ учун $\det M(x^0)(t)\neq 0$ бўлган ҳолда, (11) тенглама учун $x_i^0(t),\quad i=\overline{1,n}$ чизиқли боғланмаган ечимлари мавжуд.

(11) системадаги тенгликлардан фойдалансак $c_t'=a_{nn}(c)$ тенглик ўз-ўзидан келиб чиқади.

Ягоналиги. $x(t)=(x_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ (3) системанинг биринчи тенгламасини бошқа ечими бўлиб, $x'(t)=x(t)A(t)$ бўлса, A ни кўринишини аввалгидек олиб $M(x)$ ни ҳосил қиламиз. Натижада,

$$(M^{-1}(x^0)M(x))'=0 \text{ яъни } M(x)=M'(x)g,\quad g\in SL(n,C)$$

келиб чиқади, хусусий ҳолда $x=gx^0$.

(6) ни биринчи тенгламасидан ва (4) муносабатни 1), 2) шартларидан

$$a_{11}(t)=\frac{\det M'(y_0)(t)}{\det M(y_0)(t)}=\frac{c'(t)}{c(t)}$$

келиб чиқади. $\omega(t)=(\det M(y_0))(t)$ - белгилаш киритиб, ω^2 га бўлиб, $\frac{\omega}{c}$ га кўпайтирсак, $c(t)=\omega_0(\det M(y_0))(t),\ \omega_0=\frac{c}{\omega}-const$ келиб чиқади.

Агар $x=g,y_0,\ g\in SL(n,C),\ \det g_1=\omega_0$ бўлса, (3) системанинг барча тенгламаси бажарилади, яъни (3) системанинг махсус бўлмаган ечими мавжуд. Агар z_0 – ечимларидан биттаси бўлса (3) системанинг умумий ечими $z=gz_0$ бўлади, агар $g\in SL(n,C)$ бўлса.

Теорема исботланди.

2. *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалент йўллар ситемаси

Биз юқоридаги ишларимизда $n-$ўлчовли комплекс фазода аниқланган $x(t)$ йўллар учун *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалентлик муносабатини киритдик ва қандай шартлар бажарилганда иккита $x(t)$ ва $y(t)$ йўллар эквивалент бўлишини текширдик.

C^n фазода $\{x^i(t),\ i=\overline{1.k}\}$ йўллар системаси учун *SL(n,C)* группа амалини

$$V=\bigoplus_{i=\overline{1,k}} C^n : \left(g,\left(x^i\right)\right)\rightarrow\left\{x^i g\right\}\ ,\quad i=\overline{1,k}$$

кўринишида киритамиз.

1-Таъриф.Иккита йўллар системаси, яъни $\{x^i(t),\ i=\overline{1,k}\},\ \{y^i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ C^n – фазода *SL(n,C)* га нисбатан *эквивалент* дейилади, агар шундай $g\in$ *SL(n,C)* мавжуд бўлиб, барча $t\in[0,1],\ i=\overline{1,k}$ учун $y^i(t)=x^i(t)g$ тенглик ўринли бўлса.

$\{x^i(t),\ i=\overline{1.k}\}$ йўллар системасида битта $i_0\in\overline{1,k}$ индексли $\{x^{i_0}(t)\}$ йўл регуляр бўлса, $\{x^i(t),\ i=1,k\}$ система ҳам регуляр бўлади. Умумийликни чегараламай $i_0=1$ деб оламиз. $x^1(t)$ регуляр йўл учун $\{x^i(t),\ i=\overline{1.k}\}$ система $M(x^1)$ тескариланувчи матрицани ифодалайди. Қуйида иккита $\{x^i(t),\ i=\overline{1.k}\}$ ва $\{y^i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ йўллар системасини *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалент бўлиши тўғрисидаги теоремалар киритилган.

3-теорема. $\{x^i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ ва $\{y^i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ регуляр йўллар системаси *SL(n,C)* га нисбатан эквивалент бўлади, агар $i_0=1$ индекс учун $M(x^1)$ ва $M(y^1)$ матрицалар қуйидаги тенгликларни бажарса

$$1)\ M'(x^1)(M(x^1))^{-1}=M'(y^1)(M(y^1))^{-1};$$

$$2)\ \det M(x^1)=\det M(y^1); \tag{12}$$

$$3)\ x^i(M(x^1))^{-1}=y^i(M(y^1))^{-1},\quad i=\overline{2,k}$$

Теорема исботи. Айтайлик, $\{x^i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ ва $\{y^i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ йўллар системаси *SL(n,C)* га нисбатан эквивалент бўлсин, яъни шундай $g\in$*SL(n,C)* мавжудки, барча $i=\overline{1,k}$ учун $y^i(t)=x^i(t)g$ тенглик ўринли. Бу ҳолда (12) муносабатни 1), 2) шартлари 1-теоремадан келиб чиқади, 3) тенгликни эса текшириш қийин эмас.

$$y^i(M(y^1))^{-1} = x^i g(M(x^1)g)^{-1} = x^i g \cdot g^{-1}(M(x^1))^{-1} = x^i(M(x^1))^{-1}, \ \ i=\overline{1,k}$$

Тескаридан фараз қиламиз, яъни $\{x^i(t), \ i=\overline{1,k}\}$ ва $\{y^i(t), \ i=\overline{1,k}\}$ системалар учун $i_0=1$ да (12) муносабат ўринли бўлсин. 1-теоремадан $(M(x^1))^{-1}(M(y^1)) \in SL(n,C)$, яъни $M(y^1)=M(x^1)g, \ g \in SL(n,C)$. Хусусий ҳолда $y^1 = x^1 g$ деб ҳисоблаймиз ва 3) тенгликдан

$$x^i(M(x^1))^{-1} = y^i(M(y^1))^{-1} = y^i g^{-1}(M(x^1))^{-1},$$

яъни $y^i = x^i g, \ i=\overline{2,k}$ келиб чиқади. Теорема исботланди.

4-теорема. 2-теореманинг 1), 2) шартларини қаноатлантирувчи $A=\{a_{ij}\}, \ c=\{c_{ij}\}, \ \ i=\overline{1,n}$ матрицалар ва 3) муносабатни қаноатлантирувчи $D_i \in C^n \ (i=\overline{2,k})$ ихтиёрий вектор-сатр берилган бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} &1) \ M'(x^1)(M(x^1))^{-1} = A; \\ &2) \ \det M(x^1) = C; \\ &3) \ x^i(M(x^1))^{-1} = D_i, \quad i=\overline{2,k}. \end{aligned} \tag{13}$$

тенгликларни қаноатлантирувчи *SL(n,C)* группага нисбатан эквивалентикгача аниқликдаги $\{x^i(t), \ i=\overline{1,k}\}$ йўллар системаси мавжуд ва ягона.

Исбот. 1§ нинг 2-теоремасига кўра (12) муносабатни 1), 2) шартларни қаноатлантирувчи *SL(n,C)* – эквивалентликгача аниқликда ягона $x^1 = x^1(t)$ йўл мавжуд. 3) тенгликни текширамиз.Бу ҳол учун, $x^i = D_i M(x^1)$ деб олсак, $\{x^i(t), \ i=\overline{1,k}\}$ 3) шартни қаноатлантиради. $\{y^i(t), \ i=\overline{1,k}\}$ бошқа йўллар сисемаси бўлсин ва (12) муносабатни қаноатлантирсин. Ихтиёрий $g \in SL(n,C)$ учун $M(y^1)=M(x^1)g$ ўринли бўлса,

$$D_i = y^i(M(y^1))^{-1} = y^i(M(x^1)g)^{-1} = y^i g^{-1}(M(x^1))^{-1} = x^i(M(x^1))^{-1}.$$

Бундан $y^i = x^i g$ келиб чиқади. Яъни (8) муносабатни қаноатлантирувчи ҳар қандай $\{x^i,\ i=\overline{1,k}\}$ йўллар системаси *SL(n,C)* га нисбатан эквивалент бўлади. Теорема исботланди.

3. *SL(n,C)* ГРУППА АМАЛИГА НИСБАТАН СИРТЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ЭКВИВАЛЕНТЛИГИ

Комплекс сонлар майдони устида $V = C^n - n$ ўлчовли вектор фазо ва *SL(n,C)* – махсус чизиқли группа берилган бўлсин. C^n фазонинг ҳар бир элементи n – ўлчовли сатр кўринишида тасвирланган векторлардан, *SL(n,C)* группанинг ҳар бир элементи детерминанти 1 га тенг бўлган квадрат матрицалардан иборат. Бу группанинг C^n фазодаги амали сифатида, матрицаларни кўпайтириш амалини киритамиз:

$$(x,g)\to xg = (x_1,x_2,x_3,...,x_n)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i g_{i1}\ \sum_{i=1}^{n} x_i g_{i2}\ \sum_{i=1}^{n} x_i g_{i3}\ \dots \sum_{i=1}^{n} x_i g_{in} \right)$$

1-**таъриф.** $x:(0,1)\times(0,1)\to C^n$ силлиқ акслантириш $x(t,s)$ *элементар сирт* дейилади. Бу ерда силлиқ акслантириш деб $(s,t)\in(0,1)\times(0,1)$ ўзгарувчили, етарлича узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган акслантиришни тушунамиз.

2-**таъриф**. Агар f функция ва унинг ҳосилалари учун

$$f\left(x(s,t)g\right) = f\left(x(s,t)\right) \qquad (1)$$

тенглик ўринли бўлса f функция ва унинг ҳосилалари берилган группа амалига нисбатан *инвариант* дейилади.Бу ерда $g\in G$, $G-$берилган группа.

Биз сиртлар учун эквивалентлик муносабатини инвариантлар тилида баён қиламиз.

3-**таъриф**. $y(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртлар учун

$$y(s,t)=x(s,t)g,\ g\in SL(n,C) \qquad (2)$$

тенглик ўринли бўлса $y(s,t)$ ва $x(s,t)$сиртлар $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалент дейилади.Бу ерда $(s,t)\in(0,1)\times(0,1)$.

Қандай шартлар бажарилганда $y(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртлар $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлади? Каби саволлар туғилиши таъбиий. Биз юқоридаги ишларимизда ушбу саволга $x(t)$ ва $y(t)$ йўллар, ҳамда $\{x^i(t)\}_{i\in I}$ ва $\{y^i(t)\}_{i\in I}$ йўллар системаси учун жавоб бердик. Энди сиртлар учун ҳам шу саволга жавоб беришни олдимизга мақсад қилиб қўяйлик. Бунинг учун аввало $M(x)$ орқали $\left(x,x_s,x_{s^2},\ldots,x_{s^{n-1}}\right)$ лардан тузилган матрицани белгилаймиз. Бу ерда $x_{s^i},\ i=\overline{0,n-1}$ -$x(s,t)$ сиртдан i-тартибли s бўйича олинган ҳосилалари. Демак, $M(x)$ ни кўриниши қуйидагича бўлади:

$$M(x)=\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{n-1}x}{\partial s^{n-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial s} & \dfrac{\partial x_2}{\partial s} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial s} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \dfrac{\partial^{n-1}x_1}{\partial s^{n-1}} & \dfrac{\partial^{n-1}x_2}{\partial s^{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial^{n-1}x_n}{\partial s^{n-1}} \end{pmatrix},\ \det M(x)\neq 0. \qquad (3)$$

Агар $y(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртлар $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлса, уларга мос $M(x)$ ва $M(y)$ матрицалар учун

$$M(y)=M(x)g,\ \ g\in SL(n,C) \qquad (4)$$

тенглик ўринли.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $y(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртлар $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлса, $y(s,t)=x(s,t)\cdot g$, $g\in$ *SL(n,C)* тенглик бажарилади. Бу ҳолда,

$$M\left(y(s,t)\right)=M\left(x(s,t)g\right)=M\left(x(s,t)\right)g,\ g\in SL(n,C).$$

$M(xg)$ ва $M(x)g$ матрицаларнинг ҳар бир элементи тенглиги авалги мавзуларимизда кўрсатилган.

$M(x)$ ва $M(y)$ матрицалар *V* фазода тескариланувчи бўлгани учун уларнинг детерминанти нолдан фарқли бўлади ва уларга тескари матрицалар мавж.уд. Уларга мос тескари матрицаларни қуйидагича киритамиз:

$$M^{-1}(x)=\frac{1}{\det M(x)}\begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{1n} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}; \qquad (5)$$

Бу ерда $M_{ij},\, i,\, j-\overline{1,n}$ мос ҳолдаги x_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларини ифодалайди, $\det M(x)=\sum_{i=1}^{n}x_iM_{in}\neq 0$,

$$M^{-1}(y)=\frac{1}{\det M(y)}=\begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{21} & \dots & M'_{n1} \\ M'_{12} & M'_{22} & \dots & M'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M'_{1n} & M'_{n2} & \dots & M'_{nn} \end{pmatrix};$$

Бу ерда $M'_{ij},\, i,\, j-\overline{1,n}$ мос ҳолдаги y_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларини ифодалайди, $\det M(y)=\sum_{i=1}^{n}y_iM'_{in}\neq 0$,

$$g^{-1}=\begin{pmatrix} G_{11} & G_{21} & \dots & G_{n1} \\ G_{12} & G_{22} & \dots & G_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{1n} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det g = 1 \in SL(n,C).$$

Тескари матрицанинг таърифидан $M(x)M^{-1}(x)=E$ тенглик ўринли, бу ерда E бирлик матрица. У ҳолда қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$M(x)M^{-1}(x)=\frac{1}{\det M(x)}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^{n-1} x_1}{\partial s^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1} x_2}{\partial s^{n-1}} & \dots & \frac{\partial^{n-1} x_n}{\partial s^{n-1}} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{1n} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\det M(x)}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i M_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_i M_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i M_{in} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial s} M_{i1} & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial s} M_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial s} M_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{n-1} x_i}{\partial s^{n-1}} M_{i1} & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{n-1} x_i}{\partial s^{n-1}} M_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{n-1} x_i}{\partial s^{n-1}} M_{in} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=E$$

бу ерда $i=\overline{1,n}$.

Хосил бўлган матрицаларнинг хар бир ҳадларини тенгласак

$$\sum_{j,i=1}^{n}\frac{\partial^{j-1}x}{\partial s^{j-1}}M_{ij}=\det M\left(x\right),\ \sum_{i=1}^{n}x_iM_{ik}=0,\ k=\overline{2,n},\ \ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial s}M_{ik}=0,\ k=\overline{1,n},\ k\neq 2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2}x}{\partial s^{2}}M_{ik}=0,\ k=\overline{1,n},\ k\neq 3\ ,\ ...,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{n-1}x}{\partial s^{n-1}}M_{ik}=0,\ k=\overline{1,(n-1)} \tag{*}$$

кўринишидаги тенгликларга эга бўламиз.

1-хосса. Агар $y\left(s,t\right)$ ва $x\left(s,t\right)$ сиртлар $SL\left(n,C\right)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлса, қуйидаги тенгликлар бажарилади.

$$1)\ M^{-1}(y)=g^{-1}M^{-1}(x),\ g^{-1}\in SL\left(n,C\right);$$

(6)

$$2)\ \det M(x)=\det M(y).$$

Исбот. Агар $y\left(s,t\right)$ ва $x\left(s,t\right)$ сиртлар $SL\left(n,C\right)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлса , $y(s,t)=x(s,t)\cdot g$, $g\in$ *SL(n,C)* тенглик бажарилади, қолаверса $M\left(y\right)=M\left(x\right)g$ тенглик ҳам ўринли. $g\in SL\left(n,C\right)$-детерминанти 1 га тенг бўлган квадрат матрица. Демак, g га тескари элемент мавжуд. Уни g^{-1} деб белгиласак, группа таърифига кўра $g^{-1}\in SL(n,C)$, яъни $\det g^{-1}=1$.

$M\left(y\right)=M\left(x\right)g$ тенгликка g^{-1} ни ўнгдан кўпайтирамиз, натижада

$$M\left(y\right)g^{-1}=M\left(x\right)gg^{-1}=M\left(x\right)E=M\left(x\right)$$

Тенгликни ҳосил қиламиз, бу тенгликка $M^{-1}\left(x\right)$ ўнгдан кўпайтирамиз:

$$M^{-1}(x)M\left(y\right)g^{-1}=M^{-1}(x)M\left(x\right)gg^{-1}=M^{-1}\left(x\right)M\left(x\right)=E$$

Юқоридаги тенгликка $M^{-1}\left(y\right)$ чапдан кўпайтирсак,

$$M^{-1}(y)M\left(y\right)g^{-1}M^{-1}(x)=M^{-1}\left(y\right)E=M^{-1}\left(y\right)$$
$$g^{-1}M^{-1}(x)=M^{-1}\left(y\right)$$

бу ерда E - бирлик матрица, $g^{-1} \in SL(n,C)$.

Энди 2) тенгликни исботлашга ўтамиз. Агар $y(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртлар $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлса, уларга мос $M(x)$ ва $M(y)$ матрицалар учун

$$M(y) = M(x)g\,, \quad g \in SL(n,C).$$

Тенглик бажарилади. Бу ҳолда,

$$\det M(y) = \det\big(M(x)g\big) = \det M(x)\det g = \det M(x)1 = \det M(x).$$

Лемма исботланди.

Қуйида $y(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртлар $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлиши учун зарур ва етарли шартларни кўрсатамиз.

1-теорема. $y(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртлар $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлиши учун уларга мос $M(y)$ ва $M(x)$ матрицалар учун қуйидаги муносабатларни баж.арилиши зарур ва етарли.

$$1)\ M_s(x)M^{-1}(x) = M_s(y)M^{-1}(y)\,;$$

$$2)\ M_t(x)M^{-1}(x) = M_t(y)M^{-1}(y)\,;$$

$$3)\ \det M(x) = \det M(y)$$

бу ерда $M^{-1}(x)$ ва $M^{-1}(y)$ матрицалар мос ҳолда *M(x)* ва *M(y)* матрицаларни тескари матрицалари, $M_s(x), M_s(y)$ матрицалар *M(x),M(y)* матрицаларни s ўзгарувчи бўйича олинган ҳосилаларидан, иборат. $M_t(x), M_t(y)$ матрицалар *M(x),M(y)* матрицаларни t ўзгарувчи бўйича олинган ҳосилаларидан иборат.

Исбот.1) *Зарурлиги:*

Агар $y(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртлар $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалент бўлса , $y(s,t) = x(s,t)\cdot g$, $g \in$ *SL(n,C)* тенглик бажарилади. У ҳолда, $M(y) = M(x)\cdot g,\ \ g \in SL(n,C)$ тенглик ҳам ўринли ва 1). 2), 3) муносабатни қаноатлантиради. Ҳақиқатдан ҳам,

1) $M_s(y)M^{-1}(y)=M_s(x\cdot g)M^{-1}(x\cdot g)=M_s(x)g\cdot g^{-1}M^{-1}(x)=M_s(x)M^{-1}(x);$

2)

$M_t(y)M^{-1}(y)=M_t(x\cdot g)M^{-1}(x\cdot g)=M_t(x)g\cdot g^{-1}M^{-1}(x)=M_t(x)M^{-1}(x);$

3) $\det M(y)=\det M(x\cdot g)=\det M(x)\det g=\det M(x)\cdot 1=\det M(x).$

Етарлилиги:

$y(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртлар учун 1), 2), 3) муносабатлар бажарилса, $y(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртлар *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалент бўлади.

Буни кўрсатиш учун қуйидаги тенгликдан фойдаланамиз. Агар *A(t)* – матрица тескариланувчи бўлса

$$(A^{-1})'=-A^{-1}A'A^{-1} \qquad (**)$$

тенглик ўринли.

Бу тенгликдан фойдаланиб қуйидагиларни исботлаймиз.

1) $M_s(x)M^{-1}(x)=M_s(y)M^{-1}(y)$

тенгликка *M(y)* ни ўнгдан, кейин кўпайтирамиз:

$$M_s(y)M^{-1}(y)M(y)=M_s(x)M^{-1}(x)M(y)$$

$$M_s(y)E=M_s(x)M^{-1}(x)M(y)$$

$$M_s(y)=M_s(x)M^{-1}(x)M(y)$$

келиб чиқади. Ҳосил бўлган тенгликка $-M^{-1}(x)$ ни чапдан кўпайтирамиз:

$$-M^{-1}(x)M_s(y)=-M^{-1}(x)M_s(x)M^{-1}(x)M(y)$$

$$-M^{-1}(x)M_s(y)=\left[M^{-1}(x)\right]'_s M(y)$$

$$\left[M^{-1}(x)\right]'_s M(y)+M^{-1}(x)M_s(y)=0$$

$$\left(M^{-1}(x)M(y)\right)=g,\ \ g\in SL(n,C)$$

$$M(y)=M(x)\cdot g,\qquad g\in SL(n,C).$$

Бундан $y(s,t)=x(s,t)g,\ \ g\in SL(n,C)$ тенглик келиб чиқади.

2) $M_t(x)M^{-1}(x)=M_t(y)M^{-1}(y)$

Бу тенгликни иккала тарафига $M\left(y\right)$ ни чапдан кўпайтирамиз:

$$M_t\left(y\right)M^{-1}\left(y\right)M\left(y\right)=M_t\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)M\left(y\right)$$

$$M_t\left(y\right)M^{-1}\left(y\right)M\left(y\right)=M_t\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)M\left(y\right)$$

$$M_t\left(y\right)E=M_t\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)M\left(y\right)$$

$$\left[M^{-1}\left(x\right)M\left(y\right)\right]'_t=0\;M_t\left(y\right)=M_t\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)M\left(y\right)$$

Охирги тенгликка $-M^{-1}\left(x\right)$ чапдан кўпайтирамиз:

$$-M^{-1}\left(x\right)M_t\left(y\right)=-M^{-1}\left(x\right)M_t\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)M\left(y\right)$$

$$-M^{-1}\left(x\right)M_t\left(y\right)=\left[M^{-1}\left(x\right)\right]'_t M\left(y\right)$$

$$\left[M^{-1}\left(x\right)\right]'_t M\left(y\right)+M^{-1}\left(x\right)M_t\left(y\right)=0$$

$$\left[M^{-1}\left(x\right)M\left(y\right)\right]'_t=0$$

$$M^{-1}\left(x\right)M\left(y\right)=g,\; g\in SL\left(n,C\right)$$

$$M(y)=M(x)\cdot g,\quad g\in SL(n,C)$$

Демак, $y\left(s,t\right)=x\left(s,t\right)g,\; g\in SL\left(n,C\right)$

3) $\det M(y)=\det M(x)=\det M(x)\cdot 1=\det M(x)\cdot\det g=\det(M(x)g)$

$$M(y)=M(x)\cdot g,\quad g\in SL(n,C).$$

Теорема исботланди.

Энди 1-теореманинг шартларини текширайлик.

1) $M_s(x)M^{-1}(x)$ кўпайтмани t ўзгарувчи бўйича ҳосиласини аниқлаймиз:

$$\left[M_s(x)M^{-1}(x)\right]'_t=M_{st}\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)-M_{st}\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)M_t\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)$$

Бу тенгликка $M_{st}\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)M_t\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)$ кўпайтмани қўшсак $M_{st}\left(x\right)M^{-1}\left(x\right)$ ни ўзи қолади.

2) $M_t(x)M^{-1}(x)$ кўпайтмани s ўзгарувчи бўйича дифференциалласак:

$$\left[M_t(x)M^{-1}(x)\right]'_s = M_{ts}(x)M^{-1}(x) - M_{ts}(x)M^{-1}(x)M_s(x)M^{-1}(x)$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликка $M_{ts}(x)M^{-1}(x)M_s(x)M^{-1}(x)$ кўпайтмани қўшсак $M_{ts}(x)M^{-1}(x)$ кўпайтмани ўзи қолади.

Бизга математик анализ курсидан маълумки икки ўзгарувчили функциялар ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиз бўлса, уларнинг аралаш ҳосилалари тенг бўлади. $M(x)$ матрицанинг хар бир элементи силлиқ акслантиришдан , яъни етарли тартибдаги узлуксиз ҳосилаларига эга узлуксиз функциялардан иборат. Демак

$$M_{st}(x)M^{-1}(x) = M_{ts}(x)M^{-1}(x)$$

тенглик ўринли. Бу ҳол учун, $M_s(x)M^{-1}(x) = A(s,t)$, $M_t(x)M^{-1}(x) = B(s,t)$ белгилашларни киритсак, (бу ерда $A(s,t)$ ва $B(s,t)$ $G-$инвариант матрицавий функциялар) юқоридагилардан қуйидаги тенглик келиб чиқади.

$$a)\ A_t + AB = B_s + BA.$$

$M_s(x)M^{-1}(x) = A(s,t)$ тенгликдан $A(s,t)$ матрицанинг кўринишини аниқлаш қийин эмас:

$$b)\ A(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n1}(s,t) & a_{n2}(s,t) & a_{n3}(s,t) & \dots & a_{nn}(s,t) \end{pmatrix}$$

бу ерда $a_{ni}(s,t) - i = \overline{1,n},\ (s,t) \in (0,1)\times(0,1)$ ўзгарувчиларнинг функцияси.(II боб. 1§ га қаранг)

1-теорема шартларини , белгилашлар ёрдамида ёзсак

$$\begin{cases} M_s(x)M^{-1}(x)=A(s,t) \\ M_t(x)M^{-1}(x)=B(s,t) \\ \det M(x)=C(s,t) \end{cases} \tag{7}$$

кўринишдаги матрицавий дифференциал тенгламалар системасига эга бўламиз, бу ерда $C(s,t)$-сонли функция.

(7) системанинг биринчи тенгламасини $M_s(x)=A(s,t)M(x)$ кўринишида ёзиб $A(s,t)$ ни кўринишини юқоридагидек олсак қуйидагиларга эга бўламиз:

$$M_s(x)=A(s,t)M(x)\Rightarrow\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial s^2} & \dots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial s^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^n x_1}{\partial s^n} & \frac{\partial^n x_2}{\partial s^n} & \dots & \frac{\partial^n x_n}{\partial s^n} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \frac{\partial\ x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^{n-1} x_1}{\partial s^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1} x_2}{\partial s^{n-1}} & \dots & \frac{\partial^{n-1} x_n}{\partial s^{n-1}} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial s^2} & \dots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial s^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{i-1} x_1}{\partial s^{i-1}}a_{i1} & \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{i-1} x_2}{\partial s^{i-1}}a_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{i-1} x_n}{\partial s^{i-1}}a_{i1} \end{pmatrix}$$

Биринчи ва охирги матрицаларни ҳар бир ҳадларини тенгласак

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^n x_1}{\partial s^n} = a_{nn}\dfrac{\partial^n x_1}{\partial s^n} + a_{nn-1}\dfrac{\partial^{n-1} x_1}{\partial s^{n-1}} + ... + a_{n1}\dfrac{\partial^{n-1} x_1}{\partial s^{n-1}} \\ \dfrac{\partial^n x_2}{\partial s^n} = a_{nn}\dfrac{\partial^n x_2}{\partial s^n} + a_{nn-1}\dfrac{\partial^{n-1} x_2}{\partial s^{n-1}} + ... + a_{n1}\dfrac{\partial^{n-1} x_2}{\partial s^{n-1}} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \dfrac{\partial^n x_n}{\partial s^n} = a_{nn}\dfrac{\partial^n x_n}{\partial s^n} + a_{nn-1}\dfrac{\partial^{n-1} x_n}{\partial s^{n-1}} + ... + a_{n1}\dfrac{\partial^{n-1} x_n}{\partial s^{n-1}} \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^n x_1}{\partial s^n} - a_{nn}\dfrac{\partial^n x_1}{\partial s^n} - a_{nn-1}\dfrac{\partial^{n-1} x_1}{\partial s^{n-1}} - ... - a_{n1}\dfrac{\partial^{n-1} x_1}{\partial s^{n-1}} = 0 \\ \dfrac{\partial^n x_2}{\partial s^n} - a_{nn}\dfrac{\partial^n x_2}{\partial s^n} - a_{nn-1}\dfrac{\partial^{n-1} x_2}{\partial s^{n-1}} - ... - a_{n1}\dfrac{\partial^{n-1} x_2}{\partial s^{n-1}} = 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \dfrac{\partial^n x_n}{\partial s^n} - a_{nn}\dfrac{\partial^n x_n}{\partial s^n} - a_{nn-1}\dfrac{\partial^{n-1} x_n}{\partial s^{n-1}} - ... - a_{n1}\dfrac{\partial^{n-1} x_n}{\partial s^{n-1}} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

кўринишидаги бир жинсли, чизиқли, n-тартибли n та хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу дифференциал тенгламалар системасини ечимини $x(s,t)$ элементар сирт сифатида қараш мумкин.

C) $c_s = a_{nn}c$ тенгликни ўринли бўлишини аввалги ишларимизда текширганмиз.(II боб 1§ га қаранг)

d) $c_t = (b_{11} + b_{22} + b_{33} + ... + b_{nn})C$. Ушбу тенгликни тўғрилигини бевосита $n = 2,\ n = 3,\ n = 4$ бўлган ҳоллар учун бевосита текшириб кўриш мумкин.

e) $c \neq 0$

Қуйидаги теорема юқоридаги шартлар ўринли бўлганда G группа амалига нисбатан ягона сиртни мавжудлиги учун зарурий ва етарли шартларни кўрсатади.

2-теорема. $\|A(s,t)\|,\|B(s,t)\|$ матрицавий функциялар ва $C(s,t)$ сонли функция учун a), b), c), d), e) шартлар бажарилса (7) матрицавий дифференциал тенгламалар системасининг ечими $SL(n,C)$-эквивалентликгача аниқликда мавжуд ва ягона.

Исбот. *Мавжудлиги.*

3) системанинг 1-тенглиги ва а) шартни эътиборга олсак 5) хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасига эга бўламиз. $x_{ij}-(i,j=\overline{1,n})$ функциялар ўз аргументларига нисбатан узлуксиз функциялар бўлиб, 5) дифференциал тенгламалр системасининг хар-бир тенглигидаги ҳосилалар фақат бир аргументга нисбатан олинган. Шу сабабдан бу системани оддий дифференцил тенгламалар системаси сифатида қараш мумкин. Дифференциал тенгламалар курсидан маълумки, бир жинсли, n-тартибли оддий дифференциал тенгламалар системасининг ечимлари фундаментал ситемани ташкил қилади. Демак, 5) системанинг ечимлари мавж.уд ва фундаментал системани ташкил қилади. 3) ситеманинг 2-тенгламаси учун ҳам шу фикрларни айтиш мумкин. Демак 3) системани 1- ва 2- тенгламаларини эквивалент бўлишини кўрсатишимиз етарли. Бунинг учун 3) системани 2-тенгламасини $M_t(x)=B(s,t)M(x)$ кўриинишида ёзиб, тенгликни иккала тарафини s ўзгарувчи бўйича дифференциаллаймиз. Натижада қуйидаги

$$M_{ts}(x)=B_s(s,t)M(x)+B(s,t)M_s(x)$$

тенгликка эга бўламиз. В) шартни эътиборга олиб қуйидагиларни ёза оламиз:

$$M_{ts}(x)=(A_t+AB-BA)M(x)+B(s,t)M_s(x)=$$

$$=A_t(s,t)M(x)+A(s,t)M_t(x)M^{-1}(x)M(x)-$$

$$-B(s,t)M_s(x)M^{-1}(x)M(x)+B(s,t)M_s(x)=$$

$$A_t(s,t)M(x)+A(s,t)M_t(x)-B(s,t)M_s(x)+$$

$$+B(s,t)M_s(x)=\left[A(s,t)M(x)\right]_t.$$

Математик анализ курсидан маълумки узлуксиз функцияларнинг аралаш ҳосилалари тенг бўлади. Бундан кўринадики

$$\left[M_s(x)\right]_t=\left[A(s,t)M(x)\right]_t \Rightarrow M_s(x)=A(s,t)M(x),$$

Яъни (3) системанинг 1-ва 2-тенгликлари эквивалент. 1- ва 2-тенгликларни ечимларини фундаментал системасини $x(s,t)$ сирт сифатида қараш маънога эга. У ҳолдда, $x(s,t)$ сирт учун унга мос $M(x)$ матрица мавжуд ва (3) системани 3-тенглигини қаноатлантиради.

Ягоналиги. Фараз қилайлик $x_0(s,t)$ сирт (3) системанинг $x(s,t)$ сиртдан фарқли ечими бўлсин. У ҳолда, $x_0(s,t)$ сирт учун $M(x_0)$ матрица мавжуд бўлиб, $M_s(x_0)M^{-1}(x_0)=A(s,t)$ тенглик ўринли. $A(s,t)$ матрицани кўринишини аввалгидек танласак

$$M_s(x_0)M^{-1}(x_0)=M(x)M^{-1}(x)$$

тенгликка эга бўламиз. $x_0(s,t)$ (3) системани ечими бўлгани учун у 2-тенгликни ҳам қаноатлантиради. Бундан $B(s,t)$ ни кўринишини аввалгидек танласак

$$M_t(x_0)M^{-1}(x_0)=M_t(x)M^{-1}(x)$$

тенглик келиб чиқаади. 1-теорема шартига кўра юқоридаги тенгликлар $x_0(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртларни G-эквивалент бўлишини кўрсатади.

$x_0(s,t)$ сиртни (3) системани 3-тенглигини қаноатлантиришини хисобга олсак , $\det M(x_0)=C_0(s,t)$ тенгликка эга бўламиз. C) , d) шартларни эътиборга олсак

$$\begin{cases} a_{nn}=\dfrac{c_s}{c}=\dfrac{\left[x_0,x_{0s},x_{0s^2},\dots,x_{0s^{n-1}},\right]_s}{\left[x_0,x_{0s},x_{0s^2},\dots,x_{0s^{n-1}},\right]} \\ b_{11}+b_{22}+b_{33}+\dots+b_{nn}=\dfrac{c_t}{c}=\dfrac{\left[x_0,x_{0t},x_{0t^2},\dots,x_{0t^{n-1}},\right]_t}{\left[x_0,x_{0t},x_{0t^2},\dots,x_{0t^{n-1}},\right]} \end{cases}$$

муносабатларга эга бўламиз. Бу ҳолда $c_0 \neq 0$ учун

$c = \left[x_0, x_{0s}, x_{0s^2}, ..., x_{0s^{n-1}}, \right] c_0$ тенглик бажарилади. Агар $x = x_0 g_0$, бу ерда $g_0 \in GL(n,C)$, деб олсак $\det g_0 = c_0$ бўлса x учун c) ,d), e) шартларни баж.арилишини кўрсатиш қийин эмас.Демак, 3) системани қаноатлантирувчи $x(s,t)$ ечим $SL(n,C)$ группа амалига нисбатан эквивалентликгача аниқликда мавжуд ва ягона. Теорема исботланди.

SL(n,C) группа амалига нисбатан эквивалент сиртлар ситемаси

C^n фазода $\{x^i(s,t),\ i = \overline{1.k}\}$ сиртлар системаси учун *SL(n,C)* группа амалини

$$V = \bigoplus_{i=\overline{1,k}} C^n : \left(g, \left(x^i\right)\right) \to \left\{x^i g\right\}\ ,\quad i = \overline{1,k}$$

кўринишида киритамиз.

$\{x^i(s,t),\ i = \overline{1.k}\}$ сиртлар системасида битта $i_0 \in \overline{1,k}$ индексли $\{x^{i_0}(t)\}$ сирт регуляр бўлса, $\{x^i(t),\ i = 1,k\}$ система ҳам регуляр бўлади. Умумийликни чегараламай $i_0=1$ деб оламиз. $\{x^i(t),\ i = \overline{1.k}\}$ системада $x^1(s,t)$ регуляр сирт учун $M(x^1)$ тескариланувчи матрицани ифодалайди. Қуйида иккита $\{x^i(s,t),\ i = \overline{1.k}\}$ ва $\{y^i(s,t),\ i = \overline{1,k}\}$ сиртлар системасини *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалент бўлиши тўғрисидаги теоремалар киритилган.

5-теорема. $\{x^i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ ва $\{y^i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ регуляр сиртлар системаси *SL(n,C)* га нисбатан эквивалент бўлади, агар $i_0=1$ индекс учун $M(x^1)$ ва $M(y^1)$ матрицалар қуйидаги тенгликларни бажарса

$$1)\ M_s(x^1)(M(x^1))^{-1} = M_s(y^1)(M(y^1))^{-1}; 2)$$

$$2)\ M_t(x^1)(M(x^1))^{-1} = M_t(y^1)(M(y^1))^{-1}; \qquad (10)$$

3) $\det M(x^1) = \det M(y^1);$

4) $x^i (M(x^1))^{-1} = y^i (M(y^1))^{-1}, \quad i = \overline{2,k}$

Теорема исботи.

Айтайлик, $\{x^i(s,t),\ i = \overline{1,k}\}$ ва $\{y^i(s,t),\ i = \overline{1,k}\}$ сиртлар системаси *SL(n,C)* га нисбатан эквивалент бўлсин, яъни шундай $g \in SL(n,C)$ мавжудки, барча $i = \overline{1,k}$ учун $y^i(s,t) = x^i(s,t)g$ тенглик ўринли. Бу ҳолда (10) муносабатни 1), 2), 3) шартлари 3-§нинг 1-теоремасидан келиб чиқади, 4) тенгликни эса текшириш қийин эмас.

$$y^i (M(y^1))^{-1} = x^i g (M(x^1)g)^{-1} = x^i g \cdot g^{-1}(M(x^1))^{-1} = x^i (M(x^1))^{-1},\ i = \overline{1,k}$$

Тескаридан фараз қиламиз, яъни $\{x^i(s,t),\ i = \overline{1,k}\}$ ва $\{y^i(s,t),\ i = \overline{1,k}\}$ системалар учун $i_0=1$ да (7) муносабат ўринли бўлсин. 1-теоремадан $(M(x^1))^{-1}(M(y^1)) \in SL(n,C)$, яъни $M(y^1) = M(x^1)g,\ g \in SL(n,C)$. Хусусий ҳолда $y^1 = x^1 g$ деб ҳисоблаймиз ва 4) тенгликдан

$$x^i (M(x^1))^{-1} = y^i (M(y^1))^{-1} = y^i g^{-1} (M(x^1))^{-1},$$

яъни $y^i = x^i g,\ i = \overline{2,k}$ келиб чиқади. Теорема исботланди.

6-теорема. A), b), c), d), e) шартларни қаноатлантирувчи $A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}, C = \{c_{ij}\},\ i = \overline{1,n}$ матрицалар ва (10) муносабатни қаноатлантирувчи $D_i \in C^n\ (i = \overline{2,k})$ ихтиёрий вектор-сатр берилган бўлсин. У ҳолда

1) $M_s(x^1) M^{-1}(x^1) = A(s,t);$

2) $M_t(x^1) M^{-1}(x^1) = B(s,t);$

3) $\det M(x^1) = C;$

4) $x^i (M(x^1))^{-1} = D_i, \quad i = \overline{2,k}.$

тенгликларни қаноатлантирувчи *SL(n,C)* группага нисбатан эквивалентикгача аниқликдаги $\{x^i(s,t),\ i=\overline{1,k}\}$ сиртлар системаси мавжуд ва ягона.

Исбот. 2-теоремага кўра (8) муносабатни 1), 2) шартларни қаноатлантирувчи *SL(n,C)* – эквивалентликгача аниқликда ягона $x^1 = x^1(s,t)$ сирт мавжуд. 3) тенгликни текширамиз.Бу ҳол учун, $x^i = D_i M(x^1)$ деб олсак, $\{x^i,\ i=\overline{1,k}\}$ 3) шартни қаноатлантиради. $\{y^i,\ i=\overline{1,k}\}$ бошқа сиртлар сисемаси бўлсин ва (8) муносабатни қаноатлантирсин. Ихтиёрий $g\in$ *SL(n,C)* учун $M(y^1) = M(x^1)g$ ўринли бўлса,

$$D_i = y^i(M(y^1))^{-1} = y^i(M(x^1)g)^{-1} = y^i g^{-1}(M(x^1))^{-1} = x^i(M(x^1))^{-1}.$$

Бундан $y^i = x^i g$ келиб чиқади. Яъни (8) муносабатни қаноатлантирувчи ҳар қандай $\{x^i,\ i=\overline{1,k}\}$ сиртлар системаси *SL(n,C)* га нисбатан эквивалент бўлади. Теорема исботланди .

II боб бўйича хулоса

Ушбу бобда n-ўлчовли вектор фазода берилган йўллар, сиртлар ва уларнинг системалари учун *SL(n,C)* группа амалига нисбатан эквивалентлик масаласи матрицавий функциялар тилида хал қилинди. Бундан ташқари, ўрганиш жараёнида хосил бўлувчи оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасининг ечимини мавжудлиги ва ягоналиги топилган инвариантлар ёрдамида исботланди. Бу ббда ўрганилган масалаларни бошқа группа амалига нисбатан ҳам қўйиш ва ўрганиш мумкин.

III боб.

ЙЎЛЛАР ВА СИРТЛАРНИНГ $G=\{O(4,C)\cap Sp(4,C\}$ ГРУППА АМАЛИГА НИСБАТАН ЭКВИВАЛЕНТЛИГИ

1. Йўлларнинг $G=\{O(4,C)\cap Sp(4,C\}$ группа амалига нисбатан эквивалентлиги

Комплекс сонлар майдони устида $V=C^4-4$ ўлчовли вектор фазо ва $G=\{GL(4,C),\, gIg^T=I, gg^T=E\}$ группа берилган бўлсин, бу ерда

$$I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C^4 фазонинг ҳар бир элементи *4* – ўлчовли сатр кўринишида тасвирланган векторлардан, G группанинг ҳар бир элементи 4×4 тартибли квадрат матрицалардан иборат.

Ушбу ишда регуляр йўллар ва сиртларнинг эквивалентлик критерийси G группа амалига нисбатан қаралади.

G группанинг C^4 фазодаги амали сифатида, матрицаларни кўпайтириш амалини киритамиз.

$[0,1]$ да аниқланган $x:[0,1]\to C^n$ узлуксиз акслантириш *x(t)* узлуксиз йўл дейилади.Агар $x_i(t),\ i=\overline{1,n}$ координаталарда *x(t)* чексиз дифференциалланувчи функциядан иборат бўлса,C^∞- йўлни ифодалайди. Агар шундай $g\in G$ мавжуд бўлсаки, барча $t\in[0,1]$ учун $y(t)=x(t)\cdot g$

тенглик ўринли бўлса, *x(t)* ва *y(t)* йўллар G группа амалига нисбатан *эквивалент* дейилади. Қуйида фақат $C^{\infty}-$йўлларни ўрганамиз.

$x(t)=\{x_i(t)\}_{i=1}^{n}$ нинг f функцияси ва унинг чекли сондаги хосилалари G группа амалига нисбатан *инвариант* дейилади, агар унинг қийматлари G группа амалига нисбатан эквивалент йўлларга мос келса, яъни

f(x(t)g)=f(x(t)).

$x(t)=\{x_i(t)\}_{i=1}^{n}$ йўл учун $M\left(x\right)$ орқали $\left(x,x',x'',x'''\right)$ лардан тузилган матрицани белгилаймиз, бу ерда $i-$сатр $x_j^{(i-1)}(t)$ нинг $(i-1)$-тартибли ҳосиласи, $i,j=\overline{1,4}$. $M'(x)$ орқали $\left(x',x'',x''',x^{(4)}\right)$ матрицани белгилаймиз. Агар барча $t\in[0,1]$ учун $\det M(x)(t)\neq 0$ бўлса $C^{\infty}-x(t)$ чексиз узлуксиз дифференциалланувчи йўл регуляр дейилади. Қуйида фақат регуляр йўллар ўрганилган.

Ушбу теоремада иккита йўлни $G-$эквивалент бўлишини зарурий ва етарли шартлари берилган.

1-теорема. $x\left(t\right)$ ва $y\left(t\right)$ йўллар $G-$эквивалент бўлиши учун

$$1)\ M'(x)M^{-1}(x)=M'(y)M^{-1}(y);$$

$$2)\ M(x)M^{T}(x)=M(y)M^{T}(y); \qquad (1)$$

$$3)\ M(x)IM^{T}(x)=M(y)IM^{T}(y)$$

шартларни бажарилиши зарур ва етарли.

Бу ерда, $M^{-1}(x),M^{-1}(y)$ матрицалар мос ҳолда $M(x)$ ва $M(y)$ матрицага тескари матрицалар, $M^{T}(x)$ ва $M^{T}(y)$ матрицалар эса $M(x)$ ва $M(y)$ матрицаларнинг тронспонирланган матрицаси.

Исбот.Агар *x(t)* ва *y(t)* йўллар *G* группа амалига нисбатан эквивалент бўлса, *y(t)=x(t)g* шартни қаноатлантирувчи $g\in G$ элемент мавжуд. У ҳолда, $M(y)=M(x)\cdot g,\ \ g\in SL(n,C)$ тенглик ҳам ўринли ва муносабатни қаноатлантиради. Ҳақиқатдан ҳам,

$$1)\ M'(y)M^{-1}(y)=M'(x\cdot g)M^{-1}(x\cdot g)=M'(x)g\cdot g^{-1}M^{-1}(x)=M'(x)M^{-1}(x);$$

2) $M(y)M^T(y)=M(x\cdot g)M^T(x\cdot g)=M(x)g\cdot g^{-1}M^{-1}(x)=M'(x)M^T(x);$

3) $M(y)IM^T(y)=M(x\cdot g)IM^T(x\cdot g)=M(x)gIg^TM^T(x)=M(x)IM^T(x).$

Тескариси ҳам ўринли бўлишини кўрсатамиз, яъни *x(t)* ва *y(t)* йўллар учун 1), 2), 3) шартлар бажарилса, *x(t)* ва *y(t)* йўллар *G* группа амалига нисбатан эквивалент бўлади.

Бунинг учун қуйидаги тенгликдан фойдаланамиз. Агар *A(t)* – матрица тескариланувчи бўлса

$$(A^{-1})'=-A^{-1}A'A^{-1} \qquad (2)$$

тенглик ўринли.[2]

Бу тенгликдан фойдаланиб қуйидагиларни исботлаймиз.

1) $M'(x)M^{-1}(x)=M'(y)M^{-1}(y)$

тенгликни аввал *M(y)* га ўнгдан, кейин – $M^{-1}(x)$ га чапдан кўпайтирамиз. Натижада

$$(M^{-1}(x)M(y))'=0$$

келиб чиқади. Бундан

$$M^{-1}(x)M(y)=g \text{ ва } M(y)=M(x)\cdot g, \quad g\in GL(4,C).$$

2) $M(x)M^T(x)=M(y)M^T(y)$

тенгликга $M^{-1}(x)$ ни чапдан, $\left[M^T(x)\right]^{-1}$ни ўнгдан кўпайтирамиз:

$$M^{-1}(x)M(y)M^T(y)\left[M^T(x)\right]^{-1}=E,$$

$$M^{-1}(x)M(y)\left[M^{-1}(x)M(y)\right]^T=E=gg^T, \quad g\in O(4,C),$$

$$M^{-1}(x)M(y)=g, \quad M(y)=M(x)g, \quad g\in O(4,C).$$

3) $M(x)IM^T(x)=M(y)IM^T(y)$

тенгликга $M^{-1}(x)$ ни чапдан, $\left[M^T(x)\right]^{-1}$ни ўнгдан кўпайтирамиз:

$$M^{-1}(x)M(y)IM^T(y)\left[M^T(x)\right]^{-1}=I,$$

$$M^{-1}(x)M(y)I\left[M^{-1}(x)M(y)\right]^T = I = gIg^T \ , \ g \in Sp(4,C) \ ,$$
$$M^{-1}(x)M(y) = g \ , \ \ M(y) = M(x)g, \ \ g \in Sp(4,C).$$
Теорема исботланди.

2. Сиртларнинг $G = \{O(4,C) \cap Sp(4,C\}$ группа амалига нисбатан эквивалентлиги

V фазода беоилган $x:(0,1)\times(0,1)\to C^4$ силлиқ акслантириш $x(s,t)$ - элементар сирт дейилади.

Агар шундай $g \in G$ мавжуд бўлсаки, барча $(s,t) \in (0,1)\times(0,1)$ учун $y(s,t) = x(s,t)\cdot g$ тенглик ўринли бўлса, $x(s,t)$ ва $y(s,t)$ элементар сиртлар G группа амалига нисбатан эквивалент дейилади.

Хар бир $x = x(s,t) = (x_j(s,t))_{j=1}^4$ сирт учун $M(x)$ орқали $(x\, x_s\, x_{ss}\, x_{sss})$ матрицани белгилаймиз, бу ерда $i-$сатр

$$x_j^{(i-1)}(s,t) = \left(\frac{\partial^{i-1}x_1(s,t)}{\partial s^{i-1}}\frac{\partial^{i-1}x_2(s,t)}{\partial s^{i-1}}\frac{\partial^{i-1}x_3(s,t)}{\partial s^{i-1}}\frac{\partial^{i-1}x_4(s,t)}{\partial s^{i-1}}\right)$$

координаталарга эга, яъни $x_j^{(i-1)}(s,t)$ - $x_j(s,t)$ дан s бўйича олинган ҳосила, $(i, j = \overline{1,4})$ $M_s(x)$ орқали $(x_s\, x_{ss}\, x_{sss}\, x_{ssss})$ матрицани, $M_t(x)$ орқали $(x_t\, x_{st}\, x_{s^2t}\, x_{s^3t})$ матрицани белгилаймиз. Агар барча $(s,t) \in [0,1]\times[0,1]$ учун $\det M(x)(t) \neq 0$ бўлса, элементар сиртлар регуляр дейилади. Қуйида фақат регуляр сиртлар қаралади.

Агар $x(s,t) = \{x_i(s,t)\}_{i=1}^4$ элементар сиртнинг *f(x)* функцияси ва унинг чекли сондаги хосилаларининг қийматлари G группа амалига нисбатан эквивалент сиртларга мос келса, яъни $f\left(x(s,t)g\right) = f\left(x(s,t)\right)$бўлса, G группа амалига нисбатан инвариант дейилади.

$M_s(x)M^{-1}(x),\ M(x)IM^T(x),\ M(x)M^T(x)$ матрицаларни G-инвариант эканлигини текшириш қийин эмас.

Маълумки, сиртларнинг эквивалентлик критерийсини инвариант функциялар тилида ифодалаш дифференциал геометрияни муҳим масаласи бўлиб, бундай масала дифференциал геометрия усуллари ёрдамида ечилади.

Бизнинг ишимизда қўйилган масала дифференциал алгебра терминлари ва алгебраик усуллар ёрдамида ҳал қилинган.

Қуйидаги теоремада иккита сиртни G-эквивалент бўлишини зарурий ва етарли шартлари берилган.

2-теорема. V фазода $x(s,t)$ ва $y(s,t)$ сиртлар $G-$эквивалент бўлади, фақат ва фақат қуйидаги шартлар ўринли бўлса:

$$1)\ M_s(x)M^{-1}(x)=M_s(y)M^{-1}(y);$$

$$2)\ M_t(x)M^{-1}(x)=M_t(y)M^{-1}(y);$$

$$3)\ M(x)IM^T(x)=M(y)IM^T(y);$$

$$4)\ M(x)M^T(x)=M(y)M^T(y).$$

Исбот.Агар $x(s,t)$ ва $y(s,t)$ сиртлар G группа амалига нисбатан эквивалент бўлса, $y(s,t)=x(s,t)g$ шартни қаноатлантирувчи $g\in G$ элемент мавжуд. У ҳолда, $M(y)(s,t)=M(x)(s,t)\cdot g,\ \ g\in G$ тенглик ҳам ўринли ва 12 муносабатни қаноатлантиради. Ҳақиқатдан ҳам,

$$1)\ M_s(y)M^{-1}(y)=M_s(x\cdot g)M^{-1}(x\cdot g)=M_s(x)g\cdot g^{-1}M^{-1}(x)=M_s(x)M^{-1}(x);$$

$$2)\ M_t(y)M^{-1}(y)=M_t(x\cdot g)M^{-1}(x\cdot g)=M_t(x)g\cdot g^{-1}M^{-1}(x)=M_t(x)M^{-1}(x);$$

$$3)\ M(y)M^T(y)=M(x\cdot g)M^T(x\cdot g)=M(x)g\cdot g^{-1}M^{-1}(x)=M(x)M^T(x);$$

$$4)\ M(y)IM^T(y)=M(x\cdot g)IM^T(x\cdot g)=M(x)gIg^TM^T(x)=M(x)IM^T(x).$$

Тескариси ҳам ўринли бўлишини кўрсатамиз, яъни $x(s,t)$ ва $y(s,t)$ сиртлар учун 1), 2), 3), 4) шартлар бажарилса, $x(s,t)$ ва $y(s,t)$сиртлар G группа амалига нисбатан эквивалент бўлади.

Бунинг учун қуйидаги тенгликдан фойдаланамиз. Агар *A(t)* – матрица тескариланувчи бўлса

$$(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1} \tag{2}$$

тенглик ўринли.[2]

Бу тенгликдан фойдаланиб қуйидагиларни исботлаймиз.

$$1)\ M_s(x)M^{-1}(x) = M_s(y)M^{-1}(y)$$

тенгликни аввал *M(y)* га ўнгдан, кейин – $M^{-1}(x)$ га чапдан кўпайтирамиз. Натижада

$$(M^{-1}(x)M(y))'_s = 0$$

келиб чиқади. Бундан

$$M^{-1}(x)M(y) = g \text{ ва } M(y) = M(x)\cdot g, \quad g \in GL(4,C).$$

$$2)\ M_t(x)M^{-1}(x) = M_t(y)M^{-1}(y)$$

тенгликга *M(y)* ни чапдан, – $M^{-1}(x)$ ни ўнгдан кўпайтирсак

$$(M^{-1}(x)M(y))'_t = 0$$

тенглик хосил бўлади. Бу тенгликдан

$$M(y) = M(x)\cdot g, \quad g \in GL(4,C)$$

тенгликга эга бўламиз. Бу эса $\acute{o}(s,t)$ ва $x(s,t)$ сиртларнинг $GL(4,C)$ группа амалига нисбатан эквивалентлигини кўрсатади.

$$3)\quad M(x)M^T(x) = M(y)M^T(y)$$

тенгликга $M^{-1}(x)$ ни чапдан, $\left[M^T(x)\right]^{-1}$ ни ўнгдан кўпайтирамиз:

$$M^{-1}(x)M(y)M^T(y)\left[M^T(x)\right]^{-1} = E,$$

$$M^{-1}(x)M(y)\left[M^{-1}(x)M(y)\right]^T = E = gg^T, \quad g \in O(4,C),$$

$$M^{-1}(x)M(y) = g, \quad M(y) = M(x)g, \quad g \in O(4,C).$$

$$4)\quad M(x)IM^T(x) = M(y)IM^T(y)$$

тенгликга $M^{-1}(x)$ ни чапдан, $\left[M^T(x)\right]^{-1}$ ни ўнгдан кўпайтирамиз:

$$M^{-1}(x)M(y)IM^{T}(y)\left[M^{T}\left(x\right)\right]^{-1}=I\ ,$$

$$M^{-1}(x)M(y)I\left[M^{-1}(x)M(y)\right]^{T}=I=gIg^{T}\ ,\ \ g\in Sp(4,C)\ ,$$

$$M^{-1}(x)M(y)=g\ ,\ \ M(y)=M(x)g,\ \ g\in Sp(4,C).$$

Булардан кўринадики $x\left(s,t\right)$ ва $y\left(s,t\right)$ сиртлар учун (2) муносабат ўринли бўлса улар $G=\left\{O(4,C)\cap Sp(4,C\right\}$ группа амалига нисбатан эквивалентбўлади .

Теорема исботланди.

III боб бўйича хулоса.

Юқорида йўллар ва сиртларнинг эвивалентлик масаласини икки классик группаларни кесишмасидан хосил бўлувчи янги группа амалига нисбатан ўргандик. Шуни айтиш мумкинки, иккинчи бобда олинган барча натижаларни $G=\left\{O(4,C)\cap Sp(4,C\right\}$ группа амалига нисбатан ҳам олиш мумкин.

Хулоса

Инвариантлар назаряси геометрия, алгебра, дифференцил тенглама масалаларрини хал қилишда мухим ахамият касб этади.

Юқоридаги ишларда дифференциал геометрия масалаларига янгича ёндашув ва уларни инвариантлар назаряси усуллари орқали хал қилиниши мумкин бўлган масалалар текширилди. Қолаверса дифференциал тенгламалар назарясининг мухим масалаларидан бири бўлган дифференциал тенгламалар системасининг эквивалент ечимларини қуриш усуллари кўрсатиб берилди.

1-изох. Юқоридаги эквивалентлик масаласини $G=\{O(4,C)\cap Sp(4,C\}$ группа амалига нисбатан йўллар системаси ва сиртлар системаси учун ҳам қўйиш мумкин.

2-изох. 1-ва 2-теорема шартларидан ҳосил бўлган дифференциал тенгламалар системасининг $G=\{O(4,C)\cap Sp(4,C\}$ группа амалига нисбатан эквивалент ечимларини мавжудлиги ва ягоналигини $G-$инвариант функциялар ёрдамида кўрсатиш мумкин.

Физика-математика фанлари доктори, профессор Ж. Хожиев бошлаб берган ушбу ишларнинг ривожи фақат мустақил Ўзбекистонимизнинг равнақи учун хизмат қилади деб ўйлаймиз.

Адабиётлар рўйхати

1. И.А. Каримов. Бунёдкорлик йўлидан. 4 том. “Ўзбекистон “ нашриёти, 1996 йил.

2. И.А. Каримов Биздан озод ва обод Ватан қолсин.2 том . “Ўзбекистон “ нашриёти, 1996 йил.

3. Р.Н. Назаров, Б.Т. Тошпўлатов, А.Д. Дўсумбетов. Алгебра ва сонлар назаряси. I қисм Тошкент. Ўқитувчи.1993.

4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1977.

5. Хаджиев Дж. Приложение теории инвариантов к дифференциалной геометрии кривых. Ташкент: ФАН. 1998. 136 с.

6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.

7. Салохиддинов М.С. Математика физика тенгламалари. Тошкент “Ўзбекистон”, 2002 448 б

8. Муминов К.К. Эквивалентность путей для действия симплектической групп. //Известия вузов. Математика-2002. - № 97- С.27-38.

9. Муминов К.К. Эквивалентность путей и поверхностей для действия псевдоортогональной группы. Узб. мат. жур. 2005. № 2. С. 35-43.

10. Муминов К.К. Гаффоров Р. Эквивалентность путей для действия псевдоортогонал группы. //Известия вузов. Математика-2002. - № 97- С.27-38.

11. Шикин Е.В. Линейные пространства и отображения. – М.: Изд-во МГУ. 1987.

12. Капланский. И. Ввдений в дифференциалная алгебра.

13. Муминов.К.К. Журабаев С.С. Эквивалентность решений систем дифференциалних уравнений. Современный проблемы комплексного анализа.Респуликанской научной конфренции.Нукус.2012.

14. Мўминов Қ. Қ. Жўрабоев С.С . Йўллар ва сиртларнинг $G=\{O(4,C)\cap Sp(4,C\}$ группа амалига нисбатан эквивалентлиги. “ Илм заковатимиз сен учун она ватан” Фарғона.2013 йил.
15. www.google.uz
16. www.arxiv.uz
17. www. Math. net.ru.