

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКА УЗБЕКИСТАН  
ТАШКЕНТСКИЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ**

на правах рукописи

**АЗИЗОВ ЗАФАР ШАВКАТОВИЧ**

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ И МЕТОДА МОНТЕ-  
КАРЛО ДЛЯ РАСЧЕТА НОРМ ТОЧНОСТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ  
ПОСТРОЕНИЙ**

**Специальность: 5А540101 «Прикладная геодезия»**

**ДИССЕРТАЦИЯ**

**На соискание степени магистра**

**Работа рассмотрена и  
допускается к защите**

**Научный руководитель  
к.э.н доц. Бобожанов А.Р.**

**Зав. кафедрой  
«Геодезия и кадастр»**

**Б. Назаров**

**«\_\_»\_\_\_\_\_2011г.**

**ТАШКЕНТ-2011**

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ Назаров Б.Р.

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

## **Задание по подготовке и написанию магистерской диссертации**

Магистерская диссертация по теме: **Применение теории размерных цепей и метода монте-карло для расчета норм точностей геодезических построений**

утвержденная приказом ректора института от **03.03. 2010г.**

за номером **2/51** по кафедре **"Геодезия и кадастр"**

за магистрантом **Азизов Зафар Шавкатович**

научный руководитель **к.э.н. доц. Бобожонов А.Р.**

Ф.И.О., занимаемая должность, ученая степень, ученое звание

Должна быть подготовлена и представлена к предварительной защите на кафедре

**"Геодезия и кадастр» 02 июня 2011года.**

число, месяц, год

1. В работе будут использованы: **Архивные материалы, статьи, ГОСТ 16263-70.**

**Метрологическая аттестация средств измерений, Научно-технический отчет по теме универсальный измерительный комплекс.**

результаты экспериментов, стат. данные публикации, труды и т. д.  
законодательные и нормативные акты, инструкции и положения

В работе предусматриваются: **Применение теории размерных цепей и метода монте-карло для расчета норм точностей геодезических построений**

В работе предусматривается изложение следующих групп вопросов:

**1-ая группа.** **Определение длины мостового перехода. Закрепление опорных пунктов.**

**2-ая группа.** **Современные геодезические приборы применяющиеся при строительстве мостов**

**3-ая группа.** **Применение современных геодезических приборов для разбивки и контроля центров опор мостовых сооружений.**

Задание выдано \_\_\_\_\_  
дата, месяц, год

Научный руководитель: **К. э. н. Доц. Бобожанов А.Р.**

подпись, Ф. И. О.

Задание приняла магистрант **Азизов Зафар Шавкатович**  
подпись, Ф. И. О., дата



## ОГЛАВЛЕНИЕ

### В В Е Д Е Н И Е

|           |   |
|-----------|---|
| Глава I   | ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ СБОРНЫХ СООРУЖЕНИЙ.....  |
| 1.1.      | Виды размерных цепей и принцип их составления.....  |
| 1.2.      | Расчет пространственной размерной цепи.....   |
| 1.3.      | Расчет точности возведения сборного сооружения по размерным цепям.....  |
| 1.4.      | Некоторые примеры расчета размерных цепей.....  |
| Глава II  | МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО И УРАВНОВЕШИВАНИЕ ЕЕ НА ЭВМ..... |
| 2.1.      | Основы метода Монте-Карло.....  |
| 2.2.      | Точность решения метода.....  |
| 2.3.      | Построение вероятностной модели пространственной линейно-угловой геодезической сети методом Монте-Карло.....          |
| 2.4.      | Уравнивание пространственной геодезической сети.....  |
| Глава III | Статистическая обработка экспериментальных данных .....   |
| 3.1.      | Анализ изменения погрешности пунктов повышением этажности.....  |
| 3.2.      | Сравнительный анализ расчета допусков методами  |

теории размерных цепей и статистических испытаний....

3.3. Дисперсионный анализ результатов на ЭВМ.....

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

## ЛИТЕРАТУРА

## ВВЕДЕНИЕ

Осуществление большой программы строительства возможно только на основе новейших достижений науки техники, широкой индустриализации и автоматизации строительного процесса. При этом существенное место занимают геодезические работы, выполняемые на всех стадиях изыскания, проектирования, возведения и эксплуатации сооружений.

Для решения различных задач выполняют специальные геодезические построения. Они осуществляются в процессе инженерных изысканий, трассировочных и разбивочных работ, контрольно-монтажных измерений, кинематических и динамических наблюдений. Во всех этих случаях возникает необходимость проектирования геодезических построений так, чтобы обеспечивались заданная точность элементов их.

В настоящее время для расчета точности геодезических измерений при производстве геодезических построений при возведении зданий или сооружений повышенной этажности применяется теория размерных цепей [16,19,67,77 и др.]. Однако, эта теория нуждается в практической проверке.

Практически, в ходе производства геодезических построений при возведении сборных зданий или сооружений повышенной этажности получить достаточного количестве точных данных натурных исследований невозможно в связи с большими затратами на их выполнение. Для решения

этой задачи более приемлем метод статистических испытаний (Монте-Карло) [5,6,7,22,27 и др.].

Таким образом, выполняя геодезические построения на ЭВМ многократно, можно получить большое количество ценной информации об их результатах.

Вопросы построения пространственных многоярусных геодезических сетей как главная геодезическая основа при строительстве высотных сборных зданий и сооружений, накопления погрешностей в них, методы уравнивания рассматривались в работах [1, 18, 24, 57, 68, 78 и др.], но требует дальнейших исследований.

В связи с вышесказанным возникла необходимость следующего структурного построения исследований по магистерской диссертационной работе:

1. Расчет точности возведения сборных сооружений применением теории размерных цепей.
2. Составление алгоритма проигрывания пространственной геодезической сети по методу статистических испытаний и уравнение на ЭВМ.
3. Проигрывание и уравнивание пространственной многоярусной геодезической сети с наращиванием секций.
4. На основании исследований, выполненных в п.п. 1,2, 3 определить:
  - а) среднеквадратические погрешности узловых пунктов пространственных сетей;
  - б) характер накопления погрешностей;
  - в) проверка формул полученных теорией размерных цепей для расчета точности геодезических разбивочных работ;
  - г) расчет допусков на производство геодезических разбивочных работ.

# **Глава 1. Теоретические основы расчёта размерной цепи сборного сооружения**

## **1.1. Виды размерных цепей и принцип их составления**

Размеры элементов, как и сами элементы, сборного инженерного сооружения взаимосвязаны и взаимозависимы. Изменение размера одного элемента строительной конструкции вызывает изменение положение других. Такая взаимная связь размеров, расположенных по замкнутому контуру, образует размерную цепь. Каждый из размеров называют звеном размерной цепи. Одно из звеньев цепи считается исходным или замыкающим, а остальные – составляющими. Основное требование к точности изготовления и монтажа строительной конструкции предъявляется по отношению замыкающего звена. Влияния изменений составляющих звеньев на замыкающее звено характеризуется передаточным отношением.

Размерные цепи классифицируются по различным признакам [30] и приведены в таблице 1.1.

Сборное инженерное сооружение не может быть возведено абсолютно точно. Размеры частей сооружения часто отклоняются от проектных – номинальных. Это объясняется неизбежными погрешностями изготовления строительных конструкций или их элементов, производства монтажных работ, выполнения геодезических построений на всех этапах возведения сооружений.

Заданная точность возведения сборного сооружения обеспечивается методом взаимозаменяемости и методом компенсации.

В сборном строительстве для условий обеспечения взаимозаменяемости элементов, правильной организации разбивочных и монтажных работ, не обходима теория строительных допусков.

Таблица 1.1.

| Классификационный признак           | Название размерной цепи     | Характеристика  |
|-------------------------------------|-----------------------------|---|
| В зависимости от сопряжённых частей | Подетальные                 | Определяют относительное положение и точность поверхностей или осей одного элемента |
|                                     | Сборочная                   | Определяют относительное положение и точность какого либо параметра в сооружении    |
| По методу достижения точности       | Без компенсатора            | Требуемая точность замыкающего звена обеспечивается взаимозаменяемыми деталями      |
|                                     | С компенсатором             | Требуемая точность замыкающего звена обеспечивается за счёт применения компенсатора |
| По характеру взаимной связи         | Независимая                 | Все звенья входят в одну размерную цепь   |
|                                     | Зависимые (взаимосвязанные) | Одно или несколько звеньев входят в две или более размерные цепи                    |

|                         |                  |   |
|-------------------------|------------------|---|
| По расположению звеньев | Линейная         | Звенья цепи расположены на взаимно параллельных линиях                  |
|                         | Плоская          | Звенья цепи расположены на одной или нескольких параллельных плоскостях |
|                         | Пространственная | Звенья размерной цепи расположены в непараллельных плоскостях           |

Методика расчёта допусков и задачи возникающие при этом, относятся к строительной метрологии, развитие которой связано с переходом к многоэтажному сборному строительству. Значительные исследования по этому вопросу проведены советскими учёными А.С. Авиромом [2], Н.Г.Видуевым [17,19,20 и др.], В.С.Сытником [65,66,67] и др.

Расчёт размерных цепей – наиболее современный способ для решения задач на выполнение процессов, связанных с возведением сборных зданий и сооружений.

Задача расчёта точности возведения сборных зданий и сооружений заключается в определении возможных погрешностей размеров сооружений или их элементов при заданных допусках на размеры отдельных конструкций или их элементов.

В теории размерных цепей рассматриваются поверочный и проектный расчёты точности размерных цепей [19]. Поверочный расчёт сводится к определению точности замыкающего звена по заданным погрешностям составляющих звеньев. Проектный расчёт

заключается в определении составляющих звеньев по заданной погрешности замыкающего звена.

Для каждой строительной конструкции составляются такие размерные цепи, которые обеспечивают изготовление и монтаж их в проектное положение. Размерные цепи формируются в проектах производства строительных работ по строительным процессам и в этапах их выполнения.

Построение размерных цепей определяется конструктивной схемой сооружения, которая может быть различной. Например, в крупноэлементном строительстве и в заводском домостроительстве остов здания образуют коробочные элементы – пространственные коробки в виде готовой комнаты. Здание может монтироваться из таких блоккомнат и комбинации их с плоскими элементами.

Рассмотрим составление размерных цепей выполнения геодезических разбивочных работ. В первую очередь осуществляется конструирование размерных цепей основных геодезических разбивочных работ, определяющие взаимное положение осей сооружений (главных, основных, рабочих, монтажных, вспомогательных). Эти размерные цепи называют рсевыми. Перенос в натуру осей сооружений выполняют путем непосредственного выбора на местности одной из них по результатам привязки осей сооружений к предметам местности и к пунктам геодезической основы. В первом случае осевые размерные цепи называют трассировочными, а в остальных случаях привязочными.

Для детальных геодезических разбивочных работ строят размерные цепи, определяющие положение маяков, на основе которых ведётся монтаж строительных конструкций. Такие размерные цепи называют конструктивными. Они включают в себя размеры между геометрическими осями деталей конструкций и швов. Конструктивные размерные цепи привязываются к осевым.

При такой привязке приводятся размеры, указывающие положение маяков относительно осей сооружения.

Для выполнения строительно – монтажных работ создают размерные цепи, показывающие положение строительных конструкций относительно маяков. Эти размерные цепи делят на технологические, обеспечивающие установку конструкций в проектное положение, и монтажные, создающие возможность наблюдения и контроля при выполнении монтажных работ. Технологические размерные цепи строят на основе конструктивных, а монтажные на основе технологических.

## 1.2. Расчёт пространственной размерной цепи

Как известно, сборные здания и инженерные сооружения состоят из взаимно – сопрягаемых по вертикали и по горизонтали и элементов. Поэтому их размерные цепи являются пространственными. Составляющие звенья таких размерных пространственных цепей совпадают с габаритными осями здания или сооружения, а в качестве замыкающего звена может быть выбрано ребро параллелепипеда на последнем монтажном горизонте, где завершается технологическая последовательность монтажа сборных элементов.

Рассмотрим методику расчёта на примере пространственной размерной цепи высотного сборного здания (рис.1.1.). примем погрешность положения вершины  $A_1$  размерной цепи сборного сооружения  $\mathfrak{S}(A_1) = 0$ . Тогда предельные средние квадратические погрешности вершин  $B_1, C_1, D_1$  будут

$$\Delta^2(B') = \Delta^2(S'_1) + qS_1'^2$$

$$\Delta^2(C') = \Delta^2(S'_1) + \Delta^2(S'_1) + q(S_1'^2 + S_2'^2) \quad (1.2.1)$$

$$\Delta^2(D) = \Delta^2(S'_1) + \Delta^2(S'_1) + \Delta^2(S'_3) + q(S_1'^2 + S_2'^2 + S_3'^2)$$

Где:  $\Delta(S'_1), \Delta(S'_2), \Delta(S'_3)$  - предельные продольные сдвиги элементов;

$q$  - предельные поперечные сдвиги элементов;

$S'_1 S'_2 S'_3$  - размеры составляющих звеньев.

Точность монтажа элементов с ряду считается удовлетворительной, если

$$\frac{\Delta(S'_1)}{S'_1} = \frac{\Delta(S'_2)}{S'_2} = \frac{\Delta(S'_3)}{S'_3} = \frac{\Delta(S_0)}{S_0} = q \quad (1.2.2)$$

Если принять число монтируемых элементов вдоль продольной оси -  $n_1$ , а вдоль поперечной оси -  $n_2$ , то

$$S'_1 = S'_3 = S_0 n_2 \quad (1.2.3)$$

$$S'_2 = S'_4 = S_0 n_1$$

Где:  $S_0$  - размер монтируемого элемента в плане.

С учётом формул (1.2.2) и (1.2.3) продольные погрешности планового положения плоской размерной цепи  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  определяются по формуле

$$\Delta_1^2 (A') = 0$$

$$\Delta_1^2 (B') = 2n_1^2 \Delta^2 (S_0)$$

$$\Delta_1^2 (C') = 2(n_1^2 + n_2^2) \Delta^2 (S_0) \quad (1.2.4)$$

$$\Delta_1^2 (D') = 2(2n_1^2 + n_2^2) \Delta^2 (S_0)$$

Для получения предельной погрешности замыкающего звена  $S_4^5$  пространственной цепи необходимо выполнить развертку ее плоскую цепь (рис.1.2.).

Приняв вертикальные сдвиги вершин  $\Delta^2 (h_i) = \mathcal{N} \Delta^2 (h)$  (где:  $\mathcal{N}$  – число этажей) и с учётом (1.2.4) получаем предельные сдвиги вершин  $A^5, B^5, C^5, D^5$  по вертикали

$$\Delta_2^2 (A^5) = \mathcal{N} \Delta^2 (h)$$

$$\Delta_2^2 (B^5) = 2n_1^2 \Delta^2 (S_0) + \mathcal{N} \Delta^2 (h)$$

$$\Delta_2^2 (C^5) = 2(n_1^2 + n_2^2)\Delta^2(S_0) + \mathcal{N}\Delta^2(\mathcal{h}) \quad (1.2.5)$$

$$\Delta_2^2 (D^5) = 2(2n_1^2 + n_2^2)\Delta^2(S_0) + \mathcal{N}\Delta^2(\mathcal{h})$$

Так как  $\Delta(\mathcal{h}) \approx \Delta(S_0)$ , то получим

$$\Delta_2^2 (A^5) = \mathcal{N}\Delta^2(S_0)$$

$$\Delta_2^2 (B^5) = 2(2n_1^2 + \mathcal{N})\Delta^2(S_0)$$

$$\Delta_2^2 (C^5) = [2(n_1^2 + n_2^2) + \mathcal{N}]\Delta^2(S_0) \quad (1.2.6)$$

$$\Delta_2^2 (D^5) = [2(2n_1^2 + n_2^2) + \mathcal{N}]\Delta^2(S_0)$$

Для нахождения плановых перемещений вершин  $A^5, B^5, C^5, D^5$  потребуем, чтобы максимальное отклонение от вертикали по всей высоте сооружения не превышало относительной погрешности установки каждого элемента, т.е.

$$\frac{\Delta_2^2(A)}{S_1} = \frac{\Delta_2^2(B)}{S_2} = \frac{\Delta_2^2(C)}{S_3} = \frac{\Delta_2^2(D)}{S_4} = \frac{\Delta_2^2}{S} = \frac{\Delta^2(S_0)}{S_0} \quad (1.2.7)$$

Отсюда

$$\Delta_2^2 = \mathcal{N}\Delta(S_0) \quad (1.2.8)$$

С учётом (1.2.7) и (1.2.8) предельные отклонения вершин  $A^5, B^5, C^5, D^5$  от вертикали и будут

$$\Delta_3^2 (A^5) = \mathcal{N}\Delta^2(S_0)$$

$$\Delta_3^2 (B^5) = 2(2n_1^2 + \mathcal{N})\Delta^2(S_0)$$

$$\Delta_3^2 (C^5) = [2(n_1^2 + n_2^2) + \mathcal{N}]\Delta^2(S_0) \quad (1.2.9)$$

$$\Delta_3^2 (D^5) = [2(2n_1^2 + n_2^2) + \mathcal{N}]\Delta^2(S_0)$$

Допуск замыкающего звена  $S_4^5$  определяется

$$\Delta^2(S_4^5) = \Delta_2^2(A^5) + \Delta_2^2(D^5) + \Delta_3^2(A^5) + \Delta_3^2(D^5) \quad (1.2.10)$$

$$\Delta^2(S_4^5) = 4(2n_1^2 + n_2^2 + \mathcal{N})\Delta^2(S_0).$$

Средняя квадратическая погрешность замыкающего звена при условии, что погрешности составляющих звеньев подчиняются нормальному закону распределения и поле допуска соответствуют полю рассеивания отклонений выразится формулой

$$\sigma(S_4^5) = \frac{(2n_1^2 + n_2^2 + N)\Delta^2(S_0)}{4} \quad (1.2.11)$$

### 1.3. Расчёт точности возведения сборного сооружения по размерным цепям

На практике чаще всего приходится иметь дело не со среднеквадратическими отклонениями, а с допусками и на основе координации элементарных (изготовительных, разбивочных и строительно-монтажных) допусков в расчётной размерной цепи определить размеры и допуски [2]. Наиболее допустимые отклонения размера строительного изделия от установленного расположения этого изделия в строительной конструкции от предусмотренного в проекте, т.е. допуски определяются для изготовления строительных деталей и конструкций, выполнения разбивочных и монтажных работ, сдачи построенного сооружения в эксплуатацию.

Если некоторый фактический или натурный размер будет  $x$ , а установленный размер  $\alpha$ , то погрешность изготовления конструкции, разбивочных или монтажных работ выражается в виде отклонения

$$\Delta = x - \alpha \quad (1.3.1)$$

При заданном допуске считается, что конструкция изготовлена правильно, разбивочные и монтажные работы осуществлены верно, если

$$|\Delta| \leq |\Delta_0| \quad (1.3.2)$$

При выполнении такого подсчёта предполагается, что установленный размер является истинным или действительным значением измеряемой величины. При этом установленный размер может быть номинальным, относящимся к осям сооружения, и конструктивным, учитывающим предусмотренные конструктивные зазоры. Все такие размеры являются проектными. Они моделируются, т.е. приводятся в соответствии с ЕМС.

Погрешности  $\Delta$  могут быть грубыми, систематическими и случайными. К грубым погрешностям или ошибкам относят такие, для которых  $|\Delta| > |\Delta_0|$ . Систематическими считают погрешности, функционально зависимые от условия изготовления конструкций и выполнения разбивочных и монтажных работ. Всегда стремятся к исключению этих погрешностей или учету их в величине допуска. В последнем случае устанавливается двухсторонний допуск

$$\Delta' \leq \Delta < \Delta'' \quad (I.3.3)$$

Полностью исключить систематические погрешности очень трудно. Поэтому содержат в себе остаточные систематические погрешности, влияние которых доводят до практически незначительной величины, либо учитывают по формуле (I.3.3). Случайные погрешности стохастически зависят от условий изготовления строительных конструкций и выполнения разбивочных и монтажных работ. Они являются неизбежными, но при определенных условиях не превосходят некоторой предельной погрешности. Для отыскания этой погрешности нужно знать закон распределения случайных погрешностей. Его находят теоретическим путем или в результате статистических исследований. Чаще всего действие случайных погрешностей характеризуют стандартом  $\mathcal{E}$ .

Предельная погрешность  $\Delta_{\text{макс}}$  оказывается зависимой от стандарта и находится по формуле

$$|\Delta_{\text{макс}}| = \gamma \mathcal{E} \quad (1.3.4)$$

Коэффициент  $\gamma$  зависит от закона распределения случайных погрешностей. Обычно на возникновения случайных погрешностей влияют много факторов и условий их образования подчиняются в центральной предельной теореме теории вероятностей. Этим объясняется, что случайные погрешности чаще всего обладают нормальным распределением согласно которому коэффициент становится зависимым от вероятности  $P$ . Если  $P=0,999; 0,995; 0,99; 0,95; 0,90$  то  $\gamma=3,29; 2,81; 2,58; 1,96; 1,64$ . В строительных нормах и правилах (СНиП) руководствуются  $P=0,997$  и принимают  $\gamma = 3$  тогда

$$|\Delta_{\text{макс}}| = 3\mathfrak{S} \quad (1.3.5)$$

Строительный допуск вычисляют по формуле

$$|\Delta_0| = |\Delta_{\text{макс}}| + C = 3\mathfrak{S} + C \quad (1.3.6)$$

где  $C$  - остаточная систематическая погрешность.

При двухстороннем допуске имеем

$$\Delta'_{\circ} = -|\Delta_{\text{макс}} + C|$$

$$\Delta''_{\circ} = |\Delta_{\text{макс}} + C|$$

Строительные конструкции изготавливаются по размерам с некоторыми погрешностями, стандарт которых равен  $\mathfrak{S}_1$ , и систематическими погрешностями, остаточное значение которых равно  $C_1$ .

На строительной площадке они устанавливаются в проектное положение, зафиксированное в результате разбивочных работ, выполняемых со случайными погрешностями, стандарт которых равен  $\mathfrak{S}_2$ , и с систематическими погрешностями, остаточное значение которых равно  $C_2$ . Монтаж сооружения ведется со случайными погрешностями, стандарт которых равен  $\mathfrak{S}_3$ , и систематическими погрешностями, остаточное значение которых

равно  $C_3$ . Погрешности изготовления строительных конструкций заводским способом независимы от погрешностей разбивочных работ, но влияют на погрешности монтажных работ. Погрешности разбивочных и монтажных работ зависимы друг от друга. Если строительные конструкции создаются в процессе возведения сооружения, то погрешности их изготовления зависимы от погрешностей разбивочных работ. Все указанные зависимости относятся к случайным и остаточным систематическим погрешностям. Зависимость случайных погрешностей имеет корреляционный характер, а остаточных систематических погрешностей функциональный [12].

Во всех случаях возведения сооружений контролируемый размер выражается функцией, обусловленный размерами  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , полученными в результате изготовления конструкций, выполнения разбивочных и монтажных работ. В общем виде имеем

$$Y = f(x_1, x_2, x_3) \quad (1.3.7)$$

Систематическая погрешность с этой функции будет зависит от систематических погрешностей параметров  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , т.е. от величин  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Находится она обычным путем:

$$C = \frac{dy}{dx_1} C_1 + \frac{dy}{dx_2} C_2 + \frac{dy}{dx_3} C_3 \quad (1.3.8)$$

При этом взаимная связь остаточных систематических погрешностей часто не учитывается вследствие малости таких погрешностей. Если же возникает необходимость принят во внимание связь величин  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , то ее стремятся отразить в функции (1.3.7). Случайная погрешность функции  $Y$  выражается стандартом  $\mathfrak{S}$  или дисперсией

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_y^2 = & a_1^2 \mathfrak{S}_1^2 + a_2^2 \mathfrak{S}_2^2 + \mathfrak{S}_3^2 a_3^2 + 2r_{13} \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_3 a_1 a_3 + 2r_{23} a_2 a_3 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 + \\ & + 2r_{12} a_1 a_2 \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

В этой формуле

$$a_1 = \frac{dy}{dx_1}, \quad a_2 = \frac{dy}{dx_2}, \quad a_3 = \frac{dy}{dx_3} \quad (1.3.10)$$

При заводском изготовлении строительных конструкций  $r_{12} = 0$  Следовательно,

$$\mathfrak{S}_y^2 = a_1^2 \mathfrak{S}_1^2 + a_2^2 \mathfrak{S}_2^2 + \mathfrak{S}_3^2 a_3^2 + 2r_{13} a_1 a_3 \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_3 + 2r_{23} a_2 a_3 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \quad (1.3.11)$$

Если строительные конструкции создаются в процессе возведения сооружения, то  $\mathfrak{S}_3 = 0$ , отсюда

$$\mathfrak{S}_y^2 = a_1^2 \mathfrak{S}_1^2 + a_2^2 \mathfrak{S}_2^2 + 2r_{12} a_1 a_2 \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \quad (1.3.12)$$

В формулах (1.3.9) - (1.3.12) корреляционная связь погрешностей изготовления, разбивки и монтажа строительных конструкций, выражена коэффициентами корреляции  $r_{12}$ ,  $r_{13}$  и  $r_{23}$ , определение которых является более трудным, чем построение функции (1.3.7) и отыскание стандартов  $\mathfrak{S}_1$ ,  $\mathfrak{S}_2$  и  $\mathfrak{S}_3$ . Поэтому всегда стремятся построить более или менее простую модель действия корреляционно зависимых погрешностей, позволяющую найти коэффициент корреляции теоретическим путем. Схематизируя процесс действия погрешностей, определяют этот коэффициент приближенно. Однако поиск его статическим методом также приводит к не очень точному значению коэффициента корреляции объясняется это небольшим числом наблюдений, которые можно использовать для оценки действия погрешностей изготовления разбивки и монтажа, конструкций в примерно одинаковых условиях.

При теоретическом определении коэффициента корреляции часто исходят из того, что погрешности становятся корреляционно-зависимыми, если обладают некоторыми общими источниками возникновения, помимо других источников их образования. Например, в случае формулы (1.3.12) полагают, что

$$x_1 = x_{10} + x_0 \text{ и } x_2 = x_{20} + x_0 \quad (1.3.13)$$

Дисперсии этих величин будут

$$\mathfrak{S}_1^2 = \mathfrak{S}_{10}^2 + \mathfrak{S}_0^2 \text{ и } \mathfrak{S}_2^2 = \mathfrak{S}_{20}^2 + \mathfrak{S}_0^2 \quad (1.3.14)$$

Подставляя их в формулу (1.4.12), найдем

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_y = & a_1^2 \mathfrak{S}_{10}^2 + a_2^2 \mathfrak{S}_{20}^2 + \mathfrak{S}_0^2 (a_1^2 + a_2^2) + \\ & + 2r_{12} a_1 a_2 \sqrt{(\mathfrak{S}_{10}^2 + \mathfrak{S}_0^2)(\mathfrak{S}_{20}^2 + \mathfrak{S}_0^2)} \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

При возведении независимых величин  $x_{10}, x_{20}$  и  $x_0$  со стандартами  $\mathfrak{S}_{10}, \mathfrak{S}_{20}$  и  $\mathfrak{S}_0$  представляется возможность найти обычным путем стандарт функции

$$y = f(x_{10}, x_{20}, x_0) \quad (1.3.16)$$

Частные производные этой функции будут

$$a_{10} = \frac{dy}{dx_{10}}, \quad a_{20} = \frac{dy}{dx_{20}}, \quad a_0 = \frac{dy}{dx_0} \quad (1.3.17)$$

Следовательно

$$\mathfrak{S}_y^2 = a_{10}^2 \mathfrak{S}_{10}^2 + a_{20}^2 \mathfrak{S}_{20}^2 + a_0^2 \mathfrak{S}_0^2 \quad (1.3.18)$$

Приравнивая правые части формулы (1.3.15) и (1.3.18) и после некоторых преобразований имеем

$$r_{12} = - \frac{(a_1^2 - a_{10}^2) \mathfrak{S}_{10}^2 + (a_2^2 - a_{20}^2) \mathfrak{S}_{20}^2 + (a_1^2 + a_2^2 - a_0^2) \mathfrak{S}_0^2}{2a_1 a_2 \sqrt{(\mathfrak{S}_{10}^2 + \mathfrak{S}_0^2)(\mathfrak{S}_{20}^2 + \mathfrak{S}_0^2)}} \quad (1.3.18)$$

Такая модель заметно упрощается, если  $a_1 = a_2 = a_{10} = a_{20} = 1$ . Тогда

$$r_{12} = - \frac{\mathfrak{S}_0^2}{2 \sqrt{(\mathfrak{S}_{10}^2 + \mathfrak{S}_0^2)(\mathfrak{S}_{20}^2 + \mathfrak{S}_0^2)}} \quad (1.3.19)$$

Коэффициент корреляции оказался зависимым от доли общего источника погрешностей в образовании частных погрешностей.

Допустим, что  $\mathfrak{S}_{10} = \mathcal{K}_1 \mathfrak{S}_0$  и  $\mathfrak{S}_{20} = \mathcal{K}_2 \mathfrak{S}_0$

Тогда

$$r_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{(K_1^2+1)(K_2^2+1)}} \quad (1.3.20)$$

Известно, что  $-1 \leq r_{12} \leq 1$  или  $0 \leq |r_{12}| \leq 1$ .

Следовательно

$$2\sqrt{(K_1^2+1)(K_2^2+1)} \geq 1 \quad (1.3.21)$$

Или

$$(K_1^2+1)(K_2^2+1) \geq 0,25 \quad (1.3.22)$$

По условию  $K_1 \geq 0$  и  $K_2 \geq 0$

Поэтому в рассматриваемой модели

$$(K_1^2+1)(K_2^2+1) \geq 1 \quad (1.3.23)$$

И  $|r_{12}| \geq 0,5$

Если принять, что  $K_2 = \mathcal{U} K_1$  где  $\mathcal{U} = \frac{\sigma_{10}}{\sigma_{20}} \geq 0$

То воспользовавшись неравенством (1.3.23) получим

$$\mathcal{U} \geq \sqrt{\frac{1}{K_1^2+1}}. \quad (1.3.24)$$

Возможны другие модели образования корреляционно зависимых погрешностей, позволяющие теоретическим путем находить коэффициент корреляции.

#### 1.4. Некоторые примеры расчёта размерных цепей

а) В начале рассмотрим расчёт наиболее простой вид размерной цепи – полигонометрический аналог плоской размерной цепи применяется в том случае, если размерная цепь состоит из угловых и линейных звеньев.

Рис.1.3.

Например, для размерной цепи, изображенной в рис.1.3. примем за замыкающее звено – сторону  $s_4^1$ .

Средняя квадратическая погрешность координат пункта определяется [16] по формуле

$$\mathfrak{S}(x_{d'}) = \sqrt{\mathfrak{S}^2(x_{a'}) + \mathfrak{S}^2\left(\sum_{i=1}^3 \Delta x_i\right)} \quad (1.4.1)$$

$$\mathfrak{S}(y_{d'}) = \sqrt{\mathfrak{S}^2(y_{a'}) + \mathfrak{S}^2\left(\sum_{i=1}^3 \Delta y_i\right)}$$

Где:  $\Delta x_i = S_i \cdot \cos \alpha_i$

$\Delta y_i = S_i \cdot \sin \alpha_i$

$\alpha$  – дирекционные углы хода.

Принимая  $\alpha_{A'B'} = 0^0 00' 00''$ ,  $\mathfrak{S}(\alpha_{A'B'})=0$

И  $\mathfrak{S}(\beta_i) = \mathfrak{S}(\beta)$

И после некоторых преобразований имеет

$$\mathfrak{S}^2\left(\sum_{i=1}^3 \Delta x_i\right) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\Delta x_i}{S_i}\right)^2 \mathfrak{S}^2(S_i) + \{(y_{d'} - y_{b'})^2 + (y_{d'} - y_{c'})\} \mathfrak{S}^2(\beta) \quad (1.4.2)$$

$$\mathfrak{S}^2\left(\sum_{i=1}^3 \Delta y_i\right) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\Delta y_i}{S_i}\right)^2 \mathfrak{S}^2(S_i) + \{(x_{d'} - x_{b'})^2 + (x_{d'} - x_{c'})^2\} \mathfrak{S}^2(\beta)$$

Если  $\sigma(x_{d'}) = 0$ ,  $\sigma(y_{d'}) = 0$ , то ср.кв. погрешност замыкающего звена определяется

$$\sigma(S_4^1) = \sqrt{\sigma^2(x_{d'}) + \sigma^2(y_{d'})} = \sqrt{\sum \sigma^2(S_i) + \sigma^2(\beta) \sum_{i=1}^2 d_{d''_i}^2} \quad (1.4.3)$$

Где:  $\sum_{i=1}^2 d_{d''_i}^2 = (x_{d'} - x_{b'})^2 + (x_{d'} - x_{c'})^2 + (y_{d'} - y_{b'})^2 + (y_{d'} - y_{c'})^2$ .

Так как в нашем случае  $x_{b'} = x_{c'}$  и  $y_{d'} = y_{b'}$ ,

То тогда

$$d_{d''_i}^2 = 2S_1^2 + S_2^2 \quad (1.4.4)$$

Учитывая (1.4.4) формуле (1.4.3) примет вид

$$\sigma(S_4^1) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sigma^2(S_i) + \sigma^2(\beta)(2S_1^2 + S_2^2)} \quad (1.4.5)$$

Принимая  $\sigma(S_1) = \sigma(S_3)$  имеем

$$\sigma(S_4^1) = \sqrt{2\sigma^2(S_1) + \sigma^2(S_2) + \sigma^2(\beta)(2S_1^2 + S_2^2)} \quad (1.4.6)$$

Допуск замыкающего звена будет

$$\Delta_0(S_4^1) = 2t\sigma(S_4^1) \quad (1.4.7)$$

По заданному значению допуска замыкающего звена  $\Delta_0(S_4^1)$  определяется допуск составляющего звена

$$\Delta_0(S_i) = \frac{\Delta_0(S_4^1)}{3} \quad (1.4.8)$$

Если принять  $\sigma(\beta) = 5 \cdot 10^{-4}$ ;  $\sigma(S_1) = 1.9 \text{ мм}$ ;

$\sigma(S_2) = 2.4 \text{ мм}$ ;  $S_1 = 14220 \text{ мм}$ ;  $S_2 = 41680 \text{ мм}$ , то получим

$$\sigma(S_4^1) = 3.64 \text{ мм}.$$

Допуск замыкающего звена  $S_4^1$  будет

$$\Delta_0(S_4^1) = 2t\mathfrak{S}(S_4^1) = 12.30\text{мм.}$$

б) Рассмотрим расчёт средней квадратической погрешности замыкания конструкции пространственной геодезической сети 20-этажного односекционного сборного здания  $[\Delta(\mathcal{S}_0) = 2\text{мм}; n_1 = 14; n_2 = 4; \mathcal{N} = 20]$  [1.2].

Погрешность замыкания конструкций является результатом влияния случайных и систематических погрешностей сборных элементов, производства разбивочных и строительно – монтажных, а также деформационных сдвигов, возникающих в процессе работы сооружения.

Если названные погрешности обозначим через  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4$ , то средняя квадратическая погрешность замыкания конструкций будет

$$\mathfrak{S}^2(\mathcal{S}_{\text{зам}}) = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4 \quad (1.4.9)$$

Погрешности изготовления и монтажа конструкций и их деформационные сдвиги в несколько раз превышает погрешности геодезических разбивочных работ. Поэтому может принять  $\mathcal{M}_1 = 3\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_4 = 2\mathcal{M}_2$ .

Тогда принимая во внимание формулу (1.2.11) имеем

$$\mathcal{M}_2 = \frac{\Delta^2(\mathcal{S}_0)(2n_1^2 + n_2^2 + \mathcal{N})}{8.46} \quad (1.4.10)$$

В свою очередь общая погрешность геодезических разбивочных работ состоит из погрешности наблюдений при установке сборных элементов относительно монтажных рисков  $m_1$ , погрешности нанесения рисков относительно монтажных осей  $m_2$ , погрешности монтажных осей  $m_3$ , погрешности ортогонального проектирования пунктов пространственной геодезической сети относительно базисной фигуры  $m_4$  и погрешности определения базисной фигуры  $m_5$ . Следовательно,

$$\mathcal{M}_2^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 \quad (1.4.11)$$

Если примем

$$m_1 = 3m_5, m_2 = 2m_5\sqrt{n_2}, m_3 = 2m_5\sqrt{n_1}, m_4 = 2m_5\sqrt{\mathcal{N}}.$$

Тогда

$$\mathcal{M}_2^2 = 4m_5^2(n_1 + n_2 + \mathcal{N} + 2,5) \quad (1.4.12)$$

На основании расчётных формул (78) точности отдельных видов геодезических работ определяем

$$\mathcal{M}_5^2 = \frac{\Delta^2(\mathcal{S}_0)(2n_1^2 + n_2^2 + \mathcal{N})}{324 [5 + 2(n_1 + n_2 + \mathcal{N})]} = 0.06 \text{ мм} \quad (1.4.13)$$

На основании формулы (1.4.12) имеем

$$\mathcal{M}_2 = 3,62 \text{ мм}, \quad \mathcal{M}_1 = 1,21 \text{ мм}, \quad \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_4 = 1,81 \text{ мм}.$$

Средняя квадратическая погрешность замыкания конструкции будет

$$\mathfrak{S}^2(\mathcal{S}_{\text{зам}}) = \sqrt{19,30} = 4,94 \approx 5,0 \text{ мм}.$$

в) Расчёт линейной размерной цепи.

Расчёт линейной размерной цепи рассмотрим на примере расчёта точности разбивки продольного уклона канала.

Продольный уклон  $i$  дна канала на некотором участке, длина горизонтального положения которого равна  $\mathcal{S}$ , определяется по формуле

$$i = \frac{h}{\mathcal{S}} \quad (1.4.14)$$

Где:  $h$  - превышение одной конечной точки участка дна канала над другой, логарифмируя, дифференцируя формулу (1.4.14) и переходя к стандартам (средним квадратическим погрешностям)  $\mathfrak{S}(h)$  и  $\mathfrak{S}(\mathcal{S})$ , характеризующим случайные погрешности определения превышения  $h$  и расстояния  $\mathcal{S}$ , вычислим стандарт уклона по формуле

$$\frac{\mathfrak{S}^2(i)}{i^2} = \frac{\mathfrak{S}^2(h)}{h^2} + \frac{\mathfrak{S}^2(\mathcal{S})}{\mathcal{S}^2} \quad (1.4.15)$$

При небольших уклонах  $i$  и заметных расстояниях  $\mathcal{S}$  практически имеем

$$\frac{\mathfrak{S}(\mathcal{S})}{\mathcal{S}} \ll \frac{\mathfrak{S}(h)}{h} \quad (1.4.16)$$

Поэтому

$$\frac{\mathfrak{S}(i)}{i} \approx \frac{\mathfrak{S}(h)}{h} \quad (1.4.17)$$

Учитывая, что  $h = \mathcal{S}_i$ , получим

$$\mathfrak{S}(i) \approx \frac{\mathfrak{S}(h)}{\mathcal{S}} \quad (1.4.19)$$

Случайные погрешности определения превышения  $h$ , как правило обладают нормальным распределением. Поэтому с вероятностью  $P=0,95$  предельная погрешность уклона будет

$$\mathcal{S}(i) = 2 \mathfrak{S}(i) = 2 \frac{\mathfrak{S}(h)}{\mathcal{S}}. \quad (1.4.19)$$

Если систематические погрешности определения превышения  $h$  и расстояния  $\mathcal{S}$   $\lambda(h)$  и  $\lambda(\mathcal{S})$ , то систематическая погрешность уклона составит

$$\frac{\lambda(i)}{i} = \frac{\lambda(h)}{h} - \frac{\lambda(\mathcal{S})}{\mathcal{S}} \quad (1.4.20)$$

Вновь принимаем, что

$$\frac{\lambda(\mathcal{S})}{\mathcal{S}} \ll \frac{\lambda(h)}{h} \quad (1.4.21)$$

Тогда

$$\frac{\lambda(i)}{i} \approx \frac{\lambda(h)}{h} \quad (1.4.22)$$

Отсюда

$$\lambda(i) \approx \frac{\mathfrak{S}(h)}{\mathcal{S}}. \quad (1.4.23)$$

Случайные и систематические погрешности определения превышений зависят от расстояния  $\mathcal{S}$ . для случайных погрешностей эта зависимость имеет следующий вид

$$\mathfrak{S}(h) \approx \alpha \sqrt{\mathcal{S}} \quad (1.4.24)$$

Для систематических погрешностей она будет

$$\lambda(h) = \beta S$$

Поэтому формула (1.4.18) приобретает следующий вид

$$\mathfrak{S}(i) = \frac{\alpha}{\sqrt{S}} \quad (1.4.25)$$

Отсюда

$$\mathfrak{S}(i) = 2 \frac{\alpha}{\sqrt{S}} \quad (1.4.26)$$

Формула (1.4.23) будет

$$\lambda(i) = \beta \quad (1.4.27)$$

Максимальная погрешность определения уклона дна канала при совместном действии случайных и систематических погрешностей составит

$$\Delta(i) = \beta(i) + \lambda(i) \quad (1.4.28)$$

Или

$$\Delta(i) = 2 \frac{\alpha}{\sqrt{S}} + \beta \quad (1.4.29)$$

Геодезические и строительные работы выполняют так, чтобы

$$\lambda(i) < \mathfrak{S}(i) \quad (1.4.30)$$

Допустим, что

$$\lambda(i) = \gamma \mathfrak{S}(i) \quad (1.4.31)$$

Где:  $\gamma < 1$ .

Тогда ,

$$\Delta(i) = 2 \mathfrak{S}(i) + \gamma \mathfrak{S}(i) = \mathfrak{S}(i)(2 + \gamma). \quad (1.4.32)$$

Практически принимают, что

$$0,1 \leq \gamma \leq 0,2 \quad (1.4.33)$$

Поэтому с погрешностью не более 10% можно считать, что

$$\Delta(i) \approx 2 \zeta(i) = 2 \frac{\alpha}{\sqrt{S}} \quad (1.4.34)$$

Коэффициент  $\alpha$  характеризует точность геодезических и строительных работ при возведении канала. Длина разбивочного участка канала принимается равной 20 м, т.е.  $\sqrt{20} \approx 4,47$ .

Тогда

$$\Delta(i) \approx 0,447 \alpha. \quad (1.4.35)$$

Если предельные погрешности геодезических и строительных работ будут  $\Delta_1(i)$  и  $\Delta_2(i)$ , то

$$\Delta^2(i) = \Delta_1^2(i) + \Delta_2^2(i) + 2r\Delta_1(i)\Delta_2(i) \quad (1.4.36)$$

Такую запись предельной погрешности мы вправе сделать по двум обстоятельствам. Систематические погрешности исключены и корреляционная связь геодезических и разбивочных работ вытекает из совместного действия одних и тех же погрешностей, коэффициент корреляции  $r$  может быть найден теоретическим путем, если учесть, что

$$\Delta_2^2(i) = \Delta_1^2(i) + \Delta_3^2(i) \quad (1.4.37)$$

Где:  $\Delta_3(i)$  - технологические погрешности.

Если учесть независимые источники погрешностей, то

$$\Delta^2(i) = \Delta_1^2(i) + \Delta_3^2(i) \quad (1.4.38)$$

Отсюда имеем уравнение

$$\Delta_1^2(i) + \Delta_2^2(i) + 2r\Delta_1(i)\Delta_2(i) = \Delta_1^2(i) + \Delta_3^2(i) \quad (1.4.39)$$

Или

$$2\Delta_1^2(i) + \Delta_2^2(i) + 2r\Delta_1(i)\sqrt{\Delta_1^2(i) + \Delta_3^2(i)} = \Delta_1^2(i) + \Delta_3^2(i) \quad (1.4.40)$$

Следовательно

$$r = -\frac{\Delta_1(i)}{2\sqrt{\Delta_1^2(i)+\Delta_3^2(i)}} . \quad (1.4.41)$$

Практически геодезические работы обладают большей точностью, чем строительные, т.е.

$$\Delta_1(i) < \Delta_3(i) \quad (1.4.42)$$

Примем, что

$$\Delta_3(i) = 2\Delta_1(i) \quad (1.4.43)$$

Тогда

$$r = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 0,22 \quad (1.4.44)$$

При условии (1.4.43) имеем

$$\Delta_1(i) = \frac{\Delta(i)}{2\sqrt{5}} \approx 0,2 \alpha \quad (1.4.45)$$

Очевидно,

$$\Delta_3(i) \approx 0,4 \alpha \quad (1.4.46)$$

Кроме того,

$$\Delta(i) = \Delta_2(i) \quad (1.4.47)$$

Для отыскания коэффициента  $\alpha$  возникает необходимость найти погрешность расчёта гидравлического уклона  $i$ . такой расчёт ведется исходя из закономерностей равномерного движения потока в открытых руслах. При заданном расходе воды  $Q$  и площади живого сечения  $\omega$  средняя скорость потока будет

$$v = \frac{Q}{\omega} \quad (1.4.48)$$

Если коэффициент Шези равен  $C$  и гидравлический радиус сечения  $\mathcal{R}$ , то

$$v = C\sqrt{\mathcal{R}i} \quad (1.4.49)$$

Отсюда

$$i = \frac{v^2}{Rc^2} \quad (1.4.50)$$

Допустим, что случайные погрешности определения скорости потока и коэффициент Шези будут характеризоваться стандартами  $\mathfrak{S}(v)$  и  $\mathfrak{S}(c)$ .

Логарифмируя, дифференцируя формулу (1.4.50) и переходя к стандартам имеем

$$\frac{\mathfrak{S}^2(i)}{i^2} = 4 \left( \frac{\mathfrak{S}^2(v)}{v^2} + \frac{\mathfrak{S}^2(c)}{c^2} \right) \quad (1.4.51)$$

В этом точностном анализе, учитывая равномерность движения в открытом русле, считаем, что гидравлический уклон совпадает с уклоном дна канала и поверхностью потока в нем. Из точностного анализа исключен параметр  $\mathcal{R} = \frac{w}{x}$ , где:  $x$ -смоноченный периметр. Объясняется это тем, что при проектировании канала создается запас над горизонтом воды в пределах от 0,2 до 2 м(в зависимости от размеров поперечного сечения, колебаний уровня воды и других эксплуатационных условий). Не учитываем по тем же соображениям погрешности определения площади живого сечения  $w$ . Поэтому при анализе точности определения средней скорости потока принимаем, что

$$\frac{\mathfrak{S}(v)}{v} = \frac{\mathfrak{S}(Q)}{Q} \quad (1.4.52)$$

Коэффициент Шези определяется по формуле Н.Н.Павловского (74)

$$c = \frac{1}{n} \mathcal{R}^y \quad (1.4.53)$$

где:  $n$  -коэффициент шереховатости, зависящий от материала и состояния русла.

Показатель степени  $y$  зависит от  $\mathcal{R}$  и  $n$ . Находится он по формуле

$$y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0,1). \quad (1.4.54)$$

Логарифмируя выражения (1.4.53) получим

$$\ell n C = y \ell n R - \ell n n \quad (1.4.55)$$

Дифференцируя это равенство по переменным  $y$  и  $n$ , найдём

$$\frac{dc}{c} = \ell n R dy - \frac{dn}{n} \quad (1.4.56)$$

Формула (1.4.54) рассчитана для  $0,1 \text{ м} < R < 3\text{м}$ . Для упрощения расчета при  $0,1 \text{ м} < R < 1\text{м}$  полагают, что

$$y \approx 1,5\sqrt{n} \quad (1.4.57)$$

Если  $1 \text{ м} < R < 3\text{м}$ , то

$$y \approx 1,3\sqrt{n} \quad (1.4.58)$$

Погрешность определения  $C$  по сокращенной формуле Н.Н.Павловского менее 2%. В дальнейших вычислениях примем, что

$$dy = \frac{1,5}{2} \cdot \frac{dn}{n} = 0,75 \frac{dn}{n} \quad (1.4.59)$$

Таким образом,

$$\frac{dc}{c} = 0,75 \ell n R \frac{dn}{\sqrt{n}} - \frac{dn}{\sqrt{n}} = (0,75 \ell n R \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}) dn \quad (1.4.60)$$

Или

$$\frac{dc}{c} = (0,75 \ell n R \sqrt{n} - 1) \frac{dn}{n} \quad (1.4.61)$$

Если  $R = 1\text{м}$ , то  $\ell n R = 0$  и

$$\frac{dc}{c} = \frac{dn}{n} \quad (1.4.62)$$

Отсюда

$$\frac{\mathfrak{S}(c)}{c} = \frac{\mathfrak{S}(n)}{n} \quad (1.4.63)$$

Следовательно формула (1.4.51) может быть записана в следующем виде

$$\frac{\xi^2(i)}{i^2} = 4\left(\frac{\xi^2(Q)}{iQ^2} + \frac{\xi^2(n)}{n^2}\right) \quad (1.4.64)$$

При выводе этой формулы мы пошли путем казалось бы существенных упрощений. Однако такие упрощения оказывают малое влияние на стандарт уклона ввиду того, что

$$\frac{\delta(n)}{n} \ll \frac{\delta(Q)}{Q} \quad (1.4.65)$$

По этому

$$\frac{\delta(i)}{i} \approx 2 \frac{\delta(Q)}{Q} \quad (1.4.66)$$

Анализ точности определения расхода  $Q$  является самостоятельной и очень большой проблемой. Практически полагают, что расчетный расход находится с относительной погрешностью до 10%. Следовательно с вероятностью  $P=0,95$  можно считать, что

$$\frac{\delta(Q)}{Q} = \frac{1}{20} \quad (1.4.67)$$

Отсюда необходимая точность определения уклона канала, выраженная в виде предельной погрешности  $\Delta_2(i)$  будет

$$\frac{\Delta_0(i)}{i} = 2 \frac{\delta(i)}{i} \approx 4 \frac{\delta(Q)}{Q} = \frac{1}{5} \quad (1.4.68)$$

Однако к выводу такой погрешности можно подойти иначе. Расчетная скорость течения воды в канале должна находиться в пределах между допустимой минимальной скоростью, определяемой условиями незарастания канала водолюбивой растительностью, незаиляемости русла и работой в зимний период, и допустимой максимальной скоростью, определяемой особенностями работы канала и неразмываемостью русла его. Заиляющая скорость обычно принимается не ниже 0,5 м/сек.

Если воспользоваться рядом формул, предложенных для вычисления критической незаилающей скорости (Е.Л.Замарина, И.И.Леви, В.Н.Гончарова и др.), то получим ее колебания в пределах  $\pm 0,1$  м/сек. Примерно так же обстоит дело, если учитывать скорость течения по условиям зимнего режима. Поэтому вновь получим значение предельной погрешности такое же, как по формуле (1.4.68). допускаемые (неразмывающие) скорости течения указаны в нормах на проектирование гидротехнических сооружений. Они даются в зависимости от грунта и его характеристики, средней глубины потока, типа крепления. Указываются такие скорости в некотором интервале. Если длину этого интервала разделить на среднюю скорость, то

$$\frac{\Delta_0(i)}{i} > \frac{1}{10} \quad (1.4.69)$$

Таким образом, реализация проекта канала в натуре должна быть осуществлена так, чтобы

$$\frac{\Delta_0(i)}{i} \leq 0,2 \quad (1.4.70)$$

Практически примем, что

$$\Delta_0(i) = 0,2 \quad (1.4.71)$$

Геодезические и строительные работы должны осуществляться так, чтобы

$$\Delta(i) \leq \Delta_0(i) \quad (1.4.72)$$

или

$$\Delta(i) \leq 0,2 i$$

Учитывая формулу (1.4.35), получим

$$0,447 \alpha \leq 0,2 i$$

или

$$\alpha \leq 0,447 i \quad (1.4.73)$$

Переходя в этом выражении к равенству, найдём по формуле допустимую погрешность геодезической разбивки продольного уклона канала в следующем виде

$$\Delta_1(i) \approx 0,09 i \approx 0,1 i \quad (1.4.73)$$

Предельная погрешность технологического характера, рассчитанная по формуле (1.4.46), будет

$$\Delta_3(i) \approx 0,2 i \quad (1.4.75)$$

Обратимся к независимой застройке участка канала, протяженность которого равна  $\mathcal{S}$ . Сохраняя прежнюю доверительную вероятность 0,95, примем, что

$$\begin{aligned} \Delta_1(i) &= 2\mathfrak{S}_1(i) \\ \Delta_3(i) &= 2\mathfrak{S}_3(i) \end{aligned} \quad (1.4.76)$$

Следовательно,

$$\mathfrak{S}_1(i) = 0,05 i \quad (1.4.77)$$

Из формулы (1.4.15) получим

$$\mathfrak{S}(h) = \frac{h}{i} \mathfrak{S}(i) = \mathcal{S} \mathfrak{S}(i) \quad (1.4.78.)$$

Отсюда

$$\mathfrak{S}_1(h) = \mathcal{S} \mathfrak{S}_1(i) = 0,05 h \quad (1.4.79)$$

Аналогично

$$\mathfrak{S}_3(i) = 0,1 i \quad (1.4.80)$$

Следовательно

$$\mathfrak{S}_3(h) = \mathcal{S} \mathfrak{S}_3(i) = 0,1 h.$$

Для разбивочного участка, протяженностью 20 м, получим величину  $h$ , см:

$$h = i S = 2000 i \quad (1.4.81)$$

Если  $i = 0,001; 0,005$  и  $0,01$ ; то  $h=2,10$  и  $20$  см.

Отсюда  $\mathfrak{S}_1(h) = 0,1; 0,5$  и  $1$  см;  $\mathfrak{S}_3(i) = 0,2; 1,0$  и  $2$  см. Очевидно создание канала с заданным малым уклоном требует весьма высокой точности производства геодезических и строительных работ. Например, для  $i = 0,0002$  и  $S = 20$  м получим  $h=0,4$  см,  $\mathfrak{S}_1(h) = 0,2$ мм и  $\mathfrak{S}_3(h) = 0,04$  см =  $0,4$ мм. Любопытно отметить, что в практике гидротехнического строительства такие высокие допуски на производство геодезических и строительных работ не соблюдается, но существенных нарушений в работе гидротехнических сооружений не наблюдается. Поэтому сразу же возникает сомнение в справедливости выполненного расчёта и многих других примерно таких же подходов к оценке необходимой точности геодезических и строительных работ. Заметим, что в этом смысле нет необходимости упрекать автора методов расчёта допусков в каких – либо упрощениях при выводе тех или иных формул. Повышение строгости выводов приведёт к ещё более высоким требованиям. Это объясняется тем, что при повышении точности выводов усиливается стремление создать в натуре ту расчётную модель, которую проектировщик лежит в основу конструирования канала. Сама такая модель является упрощением действительности.

Практически речь идёт о некотором среднем продольном уклоне  $J$  канала. На различных участках его, протяженностью  $S_1, S_2, \dots S_n$ , уклоны будут  $i_1, i_2, \dots i_n$ . Эти частные уклоны неодинаковы, не более или менее близки к расчётному общему уклону  $J$ . Такой средний уклон составит

$$\bar{i} = J = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^n i_j S_j \quad (1.4.82)$$

Где:  $\mathcal{S} = \sum_{j=1}^n \mathcal{S}_j$

Допустим, что  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \dots = \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$  тогда

$$\mathcal{J} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n i_j \quad (1.4.83)$$

Если частные уклоны найдены равнозначные со стандартами  $\mathfrak{S}(i)$ , то стандарт среднего уклона будет

$$\mathfrak{S}(\mathcal{J}) = \frac{\mathfrak{S}(i)}{\sqrt{n}} \quad (1.4.84)$$

При отсутствии заметных систематических погрешностей в определении частных уклонов и нормальном распределении случайных погрешностей можно с доверительной вероятностью 0,95 перейти к предельной погрешности среднего уклона

$$\Delta(\mathcal{J}) = r \mathfrak{S}(\mathcal{J}) = 2 \frac{\mathfrak{S}(i)}{\sqrt{n}} = \frac{\Delta(i)}{\sqrt{n}} \quad (1.4.85)$$

Введём условие

$$\Delta(\mathcal{J}) \leq \Delta_0(\mathcal{J}) \quad (1.4.86)$$

Где:  $\Delta_0(\mathcal{J})$  – допустимая погрешность среднего уклона.

Тогда

$$\Delta(i) \leq \Delta_0(\mathcal{J}) \sqrt{n} \quad (1.4.87)$$

Пологая, что выполненный расчёт относится к допустимой погрешности определения среднего уклона, получим

$$\Delta_0(\mathcal{J}) \leq 0,2 \mathcal{J} \quad (1.4.88)$$

Следовательно,

$$\Delta(i) \leq 0,2 \mathcal{J} \sqrt{n} \approx 0,2 i \sqrt{n} \quad (1.4.89)$$

При такой точности создания канала не получают однорежимного гидротехнического сооружения. Однако и при более высокой точности также не создаётся однорежимный канал.

Есть много других обстоятельств, помимо уклона, которые влияют на режим работы гидротехнического сооружения. Вновь примем

$$\Delta(i) = \sqrt{\Delta_1^2(i) + \Delta_3^2(i)} \quad (1.4.90)$$

Если

$$\begin{aligned} \Delta_3(i) &= 2\Delta_1(i) \text{ , то} \\ \Delta_1(i) \frac{\Delta(i)}{\sqrt{3}} &\approx 0.45\Delta(i) \end{aligned} \quad (1.4.91)$$

Отсюда

$$\Delta_3(i) = 0,9\Delta(i) \quad (1.4.92)$$

Таким образом, геодезические и строительные работы нужно выполнять с предельными погрешностями

$$\Delta_1(i) \leq 0,09i\sqrt{n} \text{ и } \Delta_3(i) \leq 0,18i\sqrt{n} \quad (1.4.93)$$

Обратим внимание на то, что

$$n = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{s}} \quad (1.4.94)$$

Где:  $\mathcal{S}$  -длина канала и  $\mathcal{s}$  -длина разбивочного (строительного участка) его.

Следовательно,

$$\frac{\Delta_1(i)}{i} \leq 0,09\sqrt{\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{s}}} \text{ и } \frac{\Delta_3(i)}{i} \leq 0,18\sqrt{\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{s}}} \quad (1.4.95)$$

Из формулы (1.4.17), имеем

$$\frac{\Delta_1(i)}{i} \approx \frac{\Delta(h)}{h} \quad (1.4.96)$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_1(h)}{h} \leq 0,09 \sqrt{\frac{S}{s}} \quad (1.4.97)$$

Или

$$\Delta_1(h) \leq 0,09 i \sqrt{S s} \quad (1.4.98)$$

Аналогично

$$\Delta_3(h) \leq 0,18 i \sqrt{S s} \quad (1.4.99)$$

Эти расчетные формулы дают возможность при заданных значениях  $i$  и  $S$  определять по  $S$  допуски  $\Delta_1(h)$  или  $\Delta_3(h)$  или по заданным  $\Delta_1(h)$  находить

Контролируемый участок канала  $S$ . Примем, что  $S = 20$  м. Тогда

$$\Delta_1(h) \leq 0,40 i \sqrt{S} \quad (1.4.100)$$

$$\Delta_3(h) \leq 0,80 i \sqrt{S}$$

Где:  $S, \Delta_1(h), \Delta_3(h)$  в.м.

Если в этих формулах выразить  $S$  в км, а значения  $\Delta_1(h)$  и  $\Delta_3(h)$  в см, то

$$\Delta_1(h) \leq 1300 i \sqrt{S} \quad (1.4.101)$$

$$\Delta_3(h) \leq 2600 i \sqrt{S}$$

Эти допуски для ряда значений  $i$  и  $S$  приведены в табл. 1.

Не следует удивляться тому, что допуски для разбивки по высоте участков канала (20 м) с большим уклоном оказались чрезвычайно широкими. Эти – допуски как бы однородности режима канала по уклону его отдельных участков. Нет смысла ими руководствоваться в практике геодезических и строительных работ хотя бы потому, что элементарное ведение этих работ осуществляется со значительно.

Таблица 1.2

Значения  $\Delta_1(h)$  (в числителе) и  $\Delta_3(h)$  (в знаменателе) для каналов различной протяженности и в разным уклоном большой точностью.

| $S, \text{км} / i$ | <b>0,0001</b> | <b>0,0005</b> | <b>0,001</b> | <b>0,005</b> | <b>0,01</b> | <b>0,05</b> |
|--------------------|---------------|---------------|--------------|--------------|-------------|-------------|
| 1                  | 0.1/0.3       | 0.6/1.3       | 1.3/2.6      | 6/13         | 13/26       | 65/130      |
| 2                  | 0.2/0.4       | 0.9/1.7       | 1.8/3.7      | 9/18         | 18/37       | 92/185      |
| 3                  | 0.2/0.4       | 1.1/2.2       | 2.2/4.5      | 11/22        | 22/45       | 112/225     |
| 5                  | 0.3/0.6       | 1.4/2.9       | 2.9/5.8      | 14/29        | 29/58       | 145/290     |
| 10                 | 0.4/0.8       | 2.0/4.1       | 4.1/8.2      | 20/41        | 41/82       | 205/412     |
| 15                 | 0.5/1.0       | 2.5/5.0       | 5.0/10.1     | 25/50        | 50/101      | 251/505     |
| 20                 | 0.6/1.2       | 2.9/5.8       | 5.8/11.6     | 29/58        | 58/116      | 290/580     |

Табл.1 можно пользоваться лишь в пределах, где  $\Delta_1(h) < 5$  см и  $\Delta_3(h) < 10$  см. Более важное значение имеет то, что при малых уклонах возникает необходимость весьма высокой точности разбивки каналов по высоте небольшой протяженности. Поэтому имеет смысл рассчитать величины разбивочных участков для разных классов точности возведения каналов. Задавшись значением  $\Delta_3(h)$  соответствующим такому классу и воспользовавшись формулой (1.4.99), получим

$$S = \frac{\Delta_3^2(h)}{(0,18)^2 \cdot i^2 S} = 30,9 \frac{\Delta_3^2(h)}{i^2 S} \quad (1.4.102)$$

Выражая  $S$  в м,  $S$  в км,  $\Delta_3(h)$  в см и  $i$  в тысячных найдем

$$S = 309 \cdot 10^6 \cdot \frac{\Delta_3(h)}{i^2 S} \quad (1.4.103)$$

Для разных классов точности примем  $\Delta_3(h) = 1, 2, 5$  и 10 см. Отсюда

$$\begin{aligned} S_1 &= 10^6 \cdot \frac{309}{i^2 S}; & S_3 &= 10^6 \cdot \frac{7630}{i^2 S}; \\ S_2 &= 10^6 \cdot \frac{1240}{i^2 S}; & S_4 &= 10^6 \cdot \frac{30900}{i^2 S}; \end{aligned} \quad (1.4.104)$$

Разбивка на классы может быть выполнена по разным критериям, например, по типу одежды и облицовки.

## ГЛАВА II. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ МЕОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

### 2.1. Основы метода Монте-карло

При выполнении геодезических построений обычно используется такая математическая модель, которая позволяет установить аналитическую связь между определяющими величинами и результатами геодезических измерений. Эта математическая модель как бы описывает случайный процесс образования погрешностей, неизбежных для любых геодезических построений. Такое описание является приближенным в смысле влияния погрешностей измерений на определяемые величины. Поэтому вместе аналитического моделирования процесса воздействия случайных погрешностей измерений на определяемые величины, в последнее время прибегает к статическому моделированию. Такой прием решения задач проектирования геодезических построений, расчета точности их, уравнивания геодезических измерений, исследования процесса образования погрешностей измерений и прогнозирования развития того или иного физического процесса, изучаемого путем выполнения геодезических измерений, называется методом статических испытаний.

Нельзя сказать, что в геодезии этот метод является новым. Почти все исследования точности выполнения геодезических измерений велись методом статических испытаний. Такой метод использовался для оценки вариантов геодезических построений, вычисления площадей фигур и объемов тел [6,7 и др]. Широко известен метод статических испытаний и в других областях научных знаний, когда вместе алгоритма решения задачи, обеспечивающего определение какой-либо величины  $f$  путем последовательного отыскания ее значений  $f_1, f_2, \dots, f_n$  и вычисления предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ , прибегали к вероятностным приемам. При этом детерминированный процесс вычисления заменялся недетерминированным. Решение задачи осуществлялось в виде математико-статической обработки

многократных случайных испытаний. Такая обработка приводила к оценкам  $f_1, f_2, \dots, f_n$  искомой величины  $f$ . Решение приобретало вероятностный характер и осуществлялось при условии, что  $f_n$  при  $n \rightarrow \infty$  по вероятности сходится к  $f$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  соблюдается предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f - f_n| < \varepsilon) = 1. [22,23,36 \text{ и др}].$$

Тем не менее с течением времени метод статических испытаний наполнялся новым содержанием и существенно видоизменялся. В такой современной трактовке этот метод начал применяться в геодезии совсем недавно. Его использование пока не вышло за пределы анализа точности построения геодезических сетей путем «проигрывания» возможных искажений таких сетей вследствие неизбежного действия погрешностей измерений [40, 42, 50 и др.]. Этот прием получил название метода искаженных моделей и является лишь одной из форм приложения метода статических испытаний в геодезии. Из дальнейшего будет видно, что такие приложения весьма обширны. Они относятся ко всем тем случаям, когда построение алгоритма строгого детерминированного решения геодезической задачи практически невозможно или сам алгоритм оказывается чрезмерно сложным. Например, метод статических испытаний применим в решении систем линейных уравнений, обращению матриц, отысканию собственных значений и собственных векторов матриц, вычислению кратных интегралов, решению функциональных уравнений различных типов и т.д.т.е. к тому кругу задач, которые нередко встречаются в геодезии. Довольно часто метод статических испытаний называют методом Монте-Карло.

Первая работа, в которой систематически излагается современный метод Монте-Карло, была опубликована в 1949 г. [82]. Отечественные исследования этого метода появились в печати в 1955 г. Ныне имеется обширная библиография по методу статических испытаний [35]. Область применения такого метода непрерывно расширяется. В геодезию метод Монте-Карло проникает одновременно с использованием в ней различных

ветвей прикладной теории вероятностей, теории вероятностных процессов, математической статистики теории информации, математической теории исследования операций, кибернетики и др. Он выступает там, где традиционные методы численного анализа оказываются мало пригодными.

Основной вычислительной задачей, решаемой методом Монте-Карло является определение математического ожидания некоторой случайной величины, т.е. отыскание интеграла типа Лебега по некоторой вероятностной мере. Такая задача может быть весьма сложной и задаваться в виде композиции простых, распределений. Наиболее часто для эмпирического определения вероятности появления случайного события или расчета математического ожидания производят «розыгрыш», иначе, моделирование случайного явления при помощи своеобразной процедуры, дающей случайный результат. Этот «розыгрыш» осуществляют большое число раз и получают множество реализаций случайного явления, которые подвергаются математико-статической обработке.

В общем виде типичная «монте - карловская» задача заключается в определении некоторой скалярной величины  $A$ . Для отыскания ее выбирают такую одновременную случайную величину  $X$ , которая обладает математическим ожиданием, равным  $A$ , т.е.

$$M(X) = A \quad (2.1.1)$$

Затем осуществляют «розыгрыш» и получают ряд значений этой случайной величины:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если эти измерения равноточные, то вычисляют простую арифметическую среднюю

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.1.2)$$

И согласно закона больших чисел принимают, что

$$\bar{x} \approx M(X) = A \quad (2.1.3)$$

Определяют флюктуации

$$\delta x_i = x_i - \bar{x}$$

и находят несмещенную статическую оценку дисперсии

$$\tilde{D}(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\delta x_i)^2 \approx M[(\delta x)^2] = D(x) \quad (2.1.4)$$

или эмпирический стандарт

$$\tilde{\sigma}(x) = \sqrt{\tilde{D}(x)} \approx \sigma(x) \quad (2.1.5)$$

Точечной оценкой стандарта арифметической средней будет

$$\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \quad (2.1.6)$$

С определенной вероятностью строят доверительные интервалы, накрывающие  $M(X)$  и  $\sigma(x)$ . Таким образом в методе Монте-Карло сама случайность непосредственно включается в процесс моделирования. Это моделирование представляется в виде обычного эксперимента в котором устойчивые закономерности обнаруживаются лишь в результате многократных наблюдений. Отсюда метод Монте-Карло считают итеративным. Этим подчеркивается, что с увеличением числа испытаний возрастает правдоподобность (точность) полученного результата. Погрешности, возникшие в одном из испытаний, не очень сильно исказят результат. Они, в крайнем случае, потребуют увеличения числа наблюдений.

Основным элементом монте-карловской модели является одна случайная реализация того или иного процесса, иначе, единичный жребий. Это – элементарный опыт, в результате которого определяется появление или неоявление случайного события  $A$ , появление одного из возможных событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , появление какого-либо значения случайной величины  $X$ , появления какой-либо совокупности значений системы случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Для осуществления такого опыта нужен случайный механизм розыгрыша и определенная организация цепи единичных жребиев, сочетающаяся с соответствующими обычными

расчетами, учитывающими влияние каждого единичного жребия на ход изучаемого процесса. Ныне имеется много видов осуществления единичного жребия, начиная от бросания игральной кости или нескольких монет, запуска юлы и фиксации времени ее вращения, вынимания жетона из вращающегося барабана, выбора из таблиц случайных чисел до применения специальных генераторов случайных чисел и электронных вычислительных машин. Однако все они могут быть представлены стандартным механизмом случайного розыгрыша, обеспечивающим получение случайной величины  $R$ , обладающей равномерной плотностью распределения в пределах от 0 до 1.

Такой стандартный прием используется для построения алгоритмов, позволяющих получить случайные величины или случайные вектора с практически любым законом распределения. Применение для единичного жребия «случайного числа от 0 до 1» иногда называют рандомизацией (от английского слова «random» - случайный). Более часто вычисление любой случайной величины путем рандомизации называют моделированием этой величины, формированием реализаций ее или разыгрыванием случайной величин. Преобразование случайных чисел в заданную случайную величину составляет основное содержание техники метода Монте-Карло.

Метод Монте-Карло состоит в решении задачи вычислительной математики путем построения для нее случайного процесса с параметрами, равными искомым величинам. Приближенное определение этих величин происходит путем наблюдений за случайным процессом и вычисления его статических характеристик. Случайный процесс строится искусственно и реализуется с помощью не сложных вычислительных средств. Основные затруднения возникают в создании модели случайного процесса. Большой круг задач, решаемых методом Монте-Карло, часто заставляет говорить не об одном, а о ряде методов Монте-Карло. Этим стремятся подчеркнуть своеобразие использования такого метода, например, в задачах теории массового обслуживания (теории очередей), теории игр, математической экономике, стохастических приближений, осуществлении случайного поиска

и т.д. В то же время для решения каждой конкретной задачи схема применения метода Монте-Карло может быть различной. Поэтому в интегральном изложении метода Монте-Карло выделяют три главных составных части: моделирование случайных величин с заданным законом распределения, построение вероятностных моделей реальных процессов или систем и статическую оценку параметров их. Во всех случаях при использовании метода Монте-Карло нет необходимости знать точные соотношения между исходными и определяемыми величинами, а достаточно выяснить лишь комплекс условий, при которых возникает исследуемое явление. Это дает возможность применять метод Монте-Карло для решения не только аналитических, но и логических задач.

Для демонстрации применения метода Монте-Карло, произведем розыгрыш 10 ти нормального распределенных измерений.

При исследовании погрешностей измерения в инженерной геодезии часто приходится производить розыгрыш случайных величин, которые распределены по нормальному закону.

Предположим, что стандарт и математическое ожидание случайных величин нам заданы, т.е.  $\sigma = 2''$  и  $m_x = 0$ .

Случайные величины определяются [22] по формуле:

$$X = \sigma\sqrt{2}(\sum_{i=1}^6 R_i - 3) + m_x \quad (2.1.7)$$

где,  $R_i$  - случайные числа, которые набираются по таблицам случайных чисел [49].

Для случайной величины набирается шесть случайных чисел в определенном порядке, например, берем каждое второе, каждое третье или каждое четвертое случайное число. Затем эти числа суммируются и вычисляются по формуле (2.1.7) случайная величина.

- I. Производим набор случайных чисел; берем каждое второе с двумя цифрами:

|             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |
| 0,15        | 0,98        | 0,83        | 0,93        | 0,88        | 0,65        | 0,62        | 0,54        | 0,55        | 0,21        |
| 0,60        | 0,07        | 0,66        | 0,65        | 0,71        | 0,87        | 0,58        | 0,66        | 0,31        | 0,14        |
| 0,99        | 0,67        | 0,42        | 0,57        | 0,85        | 0,37        | 0,63        | 0,50        | 0,28        | 0,63        |
| 0,92        | 0,38        | 0,68        | 0,23        | 0,82        | 0,62        | 0,20        | 0,49        | 0,86        | 0,03        |
| 0,99        | 0,76        | 0,99        | 0,16        | 0,12        | 0,10        | 0,74        | 0,06        | 0,45        | 0,73        |
| 0,81        | 0,39        | 0,89        | 0,87        | 0,23        | 0,28        | 0,71        | 0,60        | 0,43        | 0,07        |
| <b>4,46</b> | <b>3,25</b> | <b>4,47</b> | <b>3,41</b> | <b>3,61</b> | <b>2,89</b> | <b>3,48</b> | <b>2,85</b> | <b>2,88</b> | <b>1,61</b> |

II. Вычисляем нормально распределенные случайные величин:

|               |                 |   |
|---------------|-----------------|---|
| $x_1 = 4''13$ | $x_6 = -0''31$  | $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{[x^2]}{n-1}} = 2''42$ |
| $x_2 = 0,71$  | $x_7 = 1,36$    |   |
| $x_3 = 4,16$  | $x_8 = 0,42$    |   |
| $x_4 = 1,16$  | $x_9 = 0,34$    |   |
| $x_5 = 1,73$  | $x_{10} = 3,38$ |   |
|               |                 |   |

## 2.2. Точность решения задач методом Монте-Карло

Вырабатываемые ЭЦВМ случайные числа  $R_i$  являются реализациями случайной величины  $R$ , которая отличается от равномерно распределенной случайной величины  $\varepsilon$ . Если случайными цифрами будут 0 и 1, появляющейся с одинаковой вероятностью, равной 1/2, то возможные дискретные значения  $R_i$  случайной величины представляются К –

разрядными случайными числами  $R_i$ , имеющими следующий вид  $0, 1/2^k, 2/2^k, \dots, 2^{k-1}/2^k$ . Вероятность появления каждого из этих чисел будет

$$P = 1/2 \quad (2.2.1)$$

Математическое ожидание составляет

$$M(R) = \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{i}{2^k} \cdot \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \quad (2.2.2)$$

Случайные числа могут быть записаны в виде

$$R = \sum_{i=1}^k \gamma_i 2^{-i} \quad (2.2.3)$$

Где:  $\gamma$ - независимые бернуллиевы величины, принимающие с равной вероятностью значения 0 и 1.

Поэтому дисперсия случайной величины R находится по формуле:

$$D(R) = \sum_{i=1}^k 2^{-2i} D(\gamma_i) = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{4^k}\right) \quad (2.2.4)$$

Если число k разрядов невелико, то  $M(R)$  может сказаться существенно смещенным относительно  $1/2$ . Поэтому удобно рассматривать случайную величину

$$\eta = \frac{2^k}{2^{k-1}} \quad (2.2.5)$$

Которая примет значение  $0, \frac{1}{2^{k-1}}, \frac{2}{2^{k-1}-1} \dots \dots \dots, 1$

Математическое ожидание ее будет

$$M(\eta) = \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{i}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \quad (2.2.6)$$

Дисперсия составит

$$\sigma(\eta) = \sum_{i=0}^{2^k-1} \left(\frac{i}{2^{k-1}} - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{12} \cdot \frac{2^{k+1}}{2^{k-1}} \quad (2.2.7)$$

Стандарт будет

$$\sigma(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2^{k+1}}{2^{k-1}}} \quad (2.2.8)$$

Если  $k \rightarrow \infty$ , то

$$\sigma(\eta) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Заметим, что  $D(\varepsilon) = \frac{1}{12} \approx 0,08333$  и  $\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,28868$ . Для  $k = 2; 4; 8; 10; 15; 20$  получим  $\sigma(\eta) = 0,3727; 0,3073; 0,2898; 0,28870; 0,2886$ . Таким образом, при большой разрядности перерабатываемых в ЭЦВМ чисел можно не считаться с тем, что последовательность  $R_i$  отличается от равномерно распределенных случайных чисел.

Использование псевдослучайных чисел, обладающих почти равномерным распределением, иначе, квазиравномерным распределением, для решения Монте-Карловских задач является исключительно удобным потому, что оно допускает контроль этого решения путем повторного набора комбинации тех же чисел. Все другие способы формирования случайных чисел такой возможностью не обладают. Воспроизводство чисел у них отсутствует. Тем не менее специализированные электронные вычисленные машины, снабженные датчиками случайных чисел, обеспечивают более быстрое получение таких чисел, по сравнению с универсальными ЭЦВМ. Однако и на универсальных машинах, не требующих внешних устройств, эта скорость превышает скорость решения самой задачи. Все же имеется сторонников специализированных генераторов случайных чисел, не требующих места в накопителе, экономия рабочего времени большой ЭЦВМ за счет использования времени небольшой приставки. Какое то значение имеет тот факт, что датчики вырабатывают случайные числа, а универсальные ЭЦВМ псевдослучайные числа.

Оценка точности статистических характеристик, определяемых методом Монте-Карло, и расчет необходимого числа наблюдений/опытом, случайных реализаций, единичных жребиев/ выполняется на основе центральной предельной теоремы теории вероятностей. Согласно этой теореме при большом числе  $N$  опытов все средние результаты имеют почти нормальное распределение. Например, частота появления какого-то

события имеет приближенно нормальное распределение с математическим ожиданием

$$M(\tilde{p}) = P \quad (2.2.9)$$

И стандартом

$$\sigma(\tilde{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \quad (2.2.10)$$

Поэтому

$$P(|\tilde{P} - P| < \varepsilon) = 2\Phi\left[\frac{\varepsilon}{\sigma(\tilde{P})}\right] \quad (2.2.11)$$

Где:  $\varepsilon > 0$

Если  $N=1000$ ,  $\tilde{p} = 0,3$  и  $\varepsilon > 0,02$  то

$$P(|\tilde{P} - P| < \varepsilon) \approx 0,83$$

Для заданного значения вероятности

$$P(|\tilde{P} - P| < \varepsilon) = 2\Phi\left[\frac{\varepsilon}{\sigma(\tilde{P})}\right] = Q$$

получим

$$N = \frac{P(1-P)}{\varepsilon^2} [\Phi^{-1}(0,5Q)]^2 \quad (2.2.12)$$

Для ряда уровней доверия  $Q$  квадраты обратных функций Лапласа приведены /22/ в таблице 2.1

таблица 2.1

|                       |      |      |      |      |      |       |       |        |
|-----------------------|------|------|------|------|------|-------|-------|--------|
| Q                     | 0,80 | 0,85 | 0,90 | 0,95 | 0,99 | 0,995 | 0,999 | 0,9995 |
| $[\Phi^{-1}(0,5Q)]^2$ | 1,64 | 2,08 | 2,71 | 3,84 | 6,61 | 7,90  | 10,9  | 12,25  |

Если  $P = 0,2$  ,  $Q = 0,95$  ,  $\varepsilon = 0,01$  , то  $N = 6140$ . Аналогично решается задача «розыгрыша» случайные величины  $X$ . Вновь полагаем, что  $\bar{x}$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием

$$M(\bar{x}) = M(x) \quad (2.2.13)$$

и стандартом

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} \quad (2.2.14)$$

поэтому

$$P = [\bar{x} - M(x) < \varepsilon] = 2\Phi\left[\frac{\varepsilon}{\sigma(x)}\right] \quad (2.2.15)$$

Например, для  $N = 1600$ ,  $M(x) = 2$ ,  $G(x) = I$  и  $\varepsilon = 0,05$  получим

$$P = [\bar{x} - M(x) < \varepsilon] = 0,954$$

Если принять, что  $2\Phi\left[\frac{\varepsilon}{\sigma(x)}\right] = Q$ ,

то

$$N = \left[\frac{\sigma(x)}{\varepsilon}\right]^2 [\Phi^{-1}0,5Q]^2 \quad (2.2.16)$$

Например, для  $Q = 0,99$ ,  $\sigma(x) = 0,1$  и  $\varepsilon = 0,01$  и получим  $N = 661$ .

Изложенные соображения показывают, что точность решения задач методом Монте-Карло существенно зависит от числа статистических испытаний/наблюдений. Для повышения точности нужно значительное увеличение этого числа и, следовательно, затраты времени на вычисление. Например, увеличение точности на один порядок приводит к стократному возрастанию этого времени. Отсюда нужно прийти к выводу, что метод Монте-Карло применим тогда, когда требуется сравнительно небольшая точность решения задачи. Такое требование характерно для многомерных задач. Однако если специальные методы повышения точности решения задач или, как принято в Монте-Карловской терминологии ускорения сходимости. Действительно, при отыскании стандарта по формуле (2.2.14) на величину его оказывает влияние не только число наблюдений, но и  $\sigma(x)$ . С уменьшением  $\sigma(x)$ . предоставляется возможность либо повысить точность при заданном  $N$ , либо уменьшить  $N$  при заданном  $\sigma(\bar{x})$ . Представление  $\theta$  уточняется с повышением надежности определения закона распределения случайной величины  $X$ .

Для сопоставления между собой различных алгоритмов метода Монте-Карло пользуются представлением трудоемкости алгоритма в виде, где:  $t$  – время расчета одного значения случайной величины  $X$ . тогда общее время счета, необходимого для достижения заданной дисперсии, скажется пропорциональным трудоемкости алгоритма. Более эффективным является менее трудоемкий алгоритм. При таком сравнительном анализе алгоритмом предполагается использование одних и тех же вычисленных средств.

### **2.3. Построение вероятностей модели пространственной линейно-угловой сети методом Монте-Карло**

Для применения количественных методов исследования в геодезии требуется математическая модель. С помощью того или другого математического аппарата можно описать геодезические построения.

Общих способов построения математических моделей, как правило, не существует.

Построение математической модели – наиболее важная и ответственная часть исследования, требующая глубоких знаний не только и не сколько математики, сколько существа моделируемых геодезических построений. При построении математической модели может быть использован математический аппарат различной сложности. В самых простых случаях модель описывается простыми алгебраическими уравнениями. В более сложных, когда требуется рассмотреть процесс в динамике, применяется аппарат дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и частными производными [5,6,7,22,35,36 и др.].

К методу Монте-Карло прибегают тогда, когда аналитическое моделирование затруднительно. Это относится к сложным системам с большим числом случайно взаимодействующих элементов. Такие вероятностные ситуации характерны для геодезических систем. Однако необходимость выполнения многократных наблюдений делает метод Монте-

Карло довольно громоздким и трудоемким. Поэтому использование его является рациональным лишь в условиях сочетания, хотя бы с приближенным предварительным аналитическим решением задачи. Во всяком случае возникает необходимость выбора величины  $X$  их бесконечного множества различных случайных величин, математическим ожиданием которых является искомая скалярная величина  $A$ , а также разработка процедуры «розыгрыша», обеспечивающей получение значений случайной величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Этот «розыгрыш» должен имитировать исследуемый физический процесс, обладающий случайным характером.

Для обеспечения необходимой точности возведения зданий и инженерных сооружений создаются пространственные геодезические сети [18,57,70,79]. Точность определения положения пунктов таких сетей обуславливается допуском на установку сборного элемента в проектное положение, геометрическими свойствами геодезических построений и способом уравнивания их базисных фигур.

Построение пространственных сетей зданий и инженерных сооружений повышенной этажности состоит из:

1. Построение базисной фигуры на исходном горизонте, обычно в виде геодезических четырехугольников и центральных систем.

2. Проектирования по вертикали пунктов базисной фигуры на монтажные горизонты, которое может быть сквозным или последовательным. В первом случае вертикальный луг проектируется от вершины базисной фигуры на уровень данного монтажного горизонта, а во втором – вертикальное проектирование осуществляется последовательно с одного горизонта на другой.

3. Контрольных измерений по проекциям пунктов базисной фигуры на монтажном горизонте с последующим редуцированием к проектному положению (в случае необходимости).

Пространственная геодезическая сеть – своеобразный жесткий каркас, относительно которого выполняется установка строительных конструкций в проектное положение.

При строительстве уникальных зданий и инженерных сооружений повышенной этажности предъявляются высокие требования к точности проектного положений конструкций и геодезических построений. В этих случаях необходимо уравнивать пространственные геодезические сети [1,70].

Для определения возможных среднеквадратических погрешностей пунктов, характера их накопления, для проверки методики расчета допусков и определения диапазона действия формул по расчету точности целесообразно произвести многократное уравнивание пространственной многоярусной сети, параметры которой подвергаются методу статистических испытаний. Необходимо отметить, что затраты рабочего времени и материальных средств на реализацию статических моделей оказываются незначительными по сравнению с затратами, связанными с натурным экспериментом.

Таким образом, путем случайного внесения в заданные точные измеряемые величины истинных погрешностей, равномерно распределенных в интервале  $(0,1)$ , метод статических испытаний позволяет имитировать угловые и линейные измерения пространственной многоярусной геодезической сети.

Известно три основных принципа получения случайных чисел: использование таблиц случайных чисел; применение специального метода. Неймана; использование аналитических методов, основанных на функциональных соотношениях [29].

Большинство расчетов по методу Монте-Карло в настоящее время осуществляется с использованием псевдослучайных чисел. Чаще всего розыгрыш случайных чисел  $R$  осуществляется с помощью электронной цифровой вычислительной машин (ЭЦВМ). Вообще говоря, в такую машину

может быть введена таблиц случайных чисел. Однако это не делают, так как внутренний накопитель современных ЭЦВМ сравнительно мал, а обращение к внешним запоминающим устройствам заметно замедляет вычисления. Практически используют либо электронные вычислительные машины, оборудованные специальными датчиками случайных чисел, либо универсальные- неспециализированные ЭЦВМ, вырабатывающие псевдослучайные числа. Физические датчики основаны на преобразованного происхождения. Обычно используют «шумящие» радиоэлектронные приборы (диоды, тиратроны, газотроны и др. со счетчиком, подсчитывающим число флюктуаций напряжения, превышающих заданный уровень зафиксированный интервал времени, или вырабатывающим цифру 0 и 1 с одинаковой вероятностью. Применяя датчиков подобного типа, работающих независимо, получают приближенное случайное число, записанное в виде  $n$  – разрядной двоичной дроби. Для случайных чисел в накопителе отведена специальная ячейка. Скорость генерирования случайных чисел очень большая. При каждом такте работы машины получается новое случайное число. Запас таких чисел практически неограничен. Тем не менее датчики случайных чисел нашли применение лишь в системах автоматического регулирования и аналоговых вычислительных машинах. Для решения задач методом Монте-Карло они оказались неудобными. Числа, выработанные датчиком, нельзя воспроизвести. Это затрудняет контроль вычислений. Кроме того возникает необходимость эксплуатационного ухода за дополнительными устройствам и регулярной проверки их с помощью специальных тестов.

Заметим, что пригодность случайных чисел определяется не процессом их получения, а рядом требований, предъявляемых к этим числам при решении задач методом Монте-Карло. Такие числа, например, могут быть вычислены по той или иной формуле. При этом свойство случайности они приобретают лишь потому, что удовлетворяют некоторым тестам. Есть различные алгоритмы, позволяющие вычислить такие случайные числа,

нужные для решения задач методом Монте-Карло. Эти алгоритмы обладают небольшой связанностью, сравнительно легко программируются и допускают решения таких задач, которые не под силу классическому численному анализу. Числа, вычисляемые по какой-либо формуле и используемые вместо случайных чисел при решения задач методом Монте-Карло, называют псевдослучайными числами. Способ генерации называется псевдовероятностным.

Псевдослучайные числа вычисляются самой машиной по алгоритму, построенному так, чтобы цифры 0 и 1 встречались одинаково часто и зависимость между ними, а также сформированными из них многозначными числами, практически отсутствовала. Еще нет общей теории псевдослучайных чисел. Моделируя естественные процессы, можно указать бесконечное множество заведомо не случайных чисел, которые гарантируют сходимость алгоритмов метода Монте-Карло не по вероятности, а в обычном смысле. Эти числа называют квазислучайными.

#### **2.4. Уравнивание пространственной геодезической сети**

В основу решения задачи использования методика уравнивания изложена в работе [1].

Положение пункта пространственной геодезической сети определяется тремя координатами  $XYZ$ , оси которых параллельны основным осям сооружения. Пространственная сеть отличается от обычной плановой сети тем, что изменения выполняются в нескольких горизонтальных и вертикальных плоскостях.

Наиболее целесообразным методом уравнивания пространственной сети представляется метод координат с определением трех поправок («монтажных отклонений»)  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  к приближенным координатам нетвердого пункта.

Преимущества этого метода состоит в следующем:

-во-первых, определяемые из решения нормальных уравнений значения  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  непосредственно используются для редуцирования пунктов в проектное положение;

-во-вторых, обращение обратной матрицы дает весовые коэффициенты, достаточные для подробной оценки точности всех элементов сети по данным уравнивания;

-в третьих, пространственные сети содержат большое количество избыточных измерений, чем плановые сети, и следовательно, большое число условных уравнений. На рис. 2.1., изображена пространственная сеть с четырьмя твердыми точками  $A^\circ, B^\circ, C^\circ, D^\circ$  и четырьмя точками определяемыми поэтапно на каждом ярусе 0-5, 0-10, 0-15, 0-20. В каждом ярусе измерено – углов двадцать, сторон восемь.

В зависимости от того, в какой плоскости лежат углы и учитывая, что стороны пространственных сетей параллельны координатным осям, уравнения погрешностей углов определяются: в плоскости XY

$$V_1 = \frac{\rho}{s_{t3}} (\Delta X_t - \Delta X_2) - \frac{\rho}{s_{t1}} (\Delta Y_t - \Delta Y_1) + l_1 \quad (2.4.1)$$

Плоскости YZ

$$V_2 = \frac{\rho}{s_{t3}} (\Delta Y_t - \Delta Y_3) - \frac{\rho}{s_{t2}} (\Delta Z_t - \Delta Z_2) + l_2 \quad (2.4.2)$$

Плоскости XZ

$$V_3 = \frac{\rho}{s_{t3}} (\Delta X_t - \Delta X_3) - \frac{\rho}{s_{t1}} (\Delta Z_t - \Delta Z_1) + l_3 \quad (2.4.3)$$

Где,  $t$  – определяемый пункт

1,2,3 – нетвердые пункты в плоскостях XY, YZ, XZ

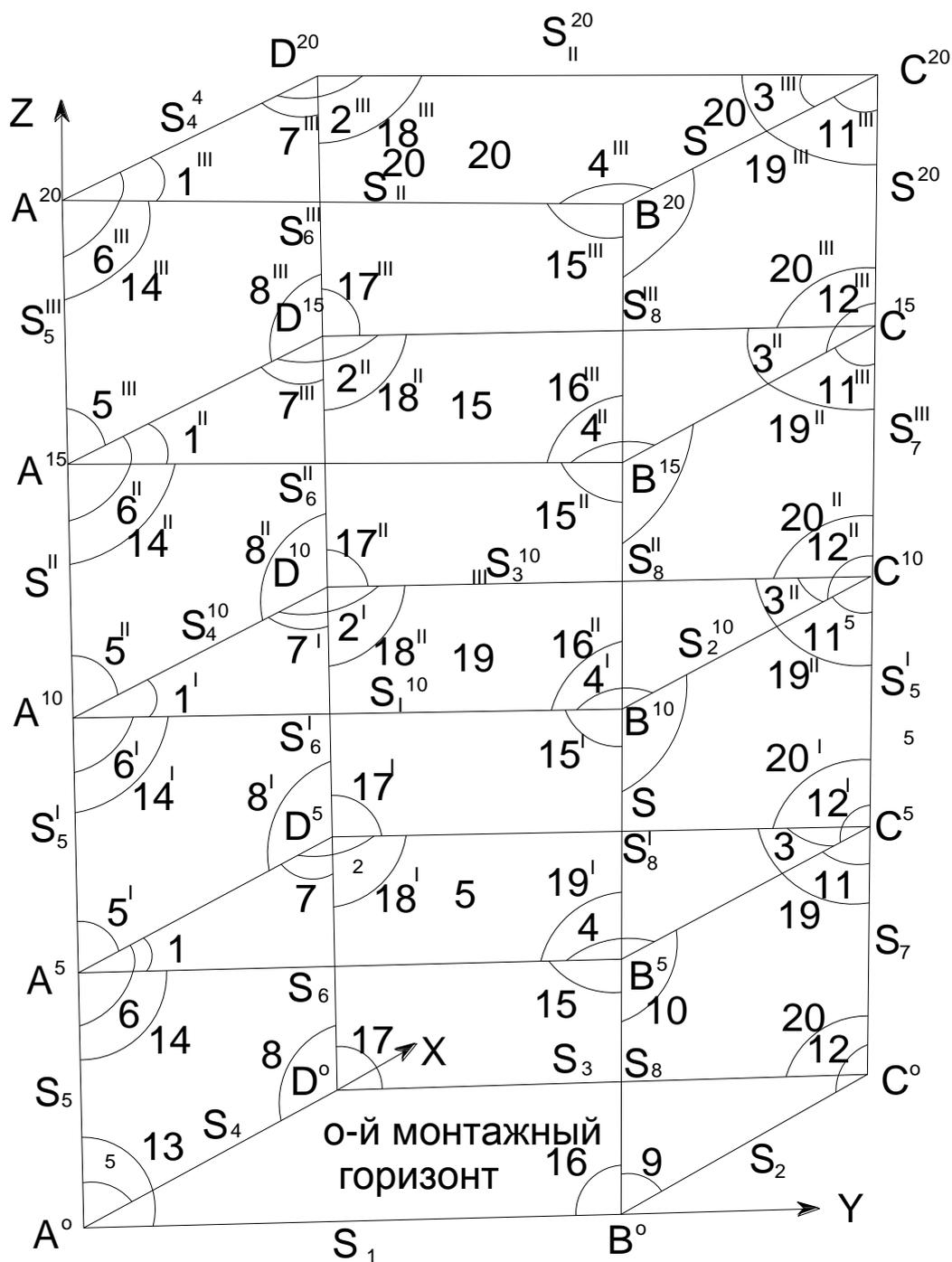


Рис 2.1.

$S_{t1}, S_{t2}, S_{t3}$  - измеренные расстояния;

$$l = (\beta_{\text{выч}} - \beta_{\text{изм}})$$

$l$ -свободный член

Уравнения (2.4.1), (2.4.2) и (2.4.3) выражают изменения координат, соответствующие увеличению угла: левое направление поворачиваются против, а правое по ходу часовой стрелки. Имея в виду это правило, можно

написать уравнение погрешностей для любого из двенадцати возможных углов на определяемом пункте: четырех горизонтальных и четырех вертикальных углов, лежащих выше и ниже горизонтальной плоскости.

Уравнения погрешностей для измеренного расстояния в плоскостях ХУ, УZ, ХZ определяются:

для расстояний, параллельных направлению оси Х

$$V_{ti}^S = -\Delta x_t + \Delta x_i + l_{ti}^S \quad (2.4.4)$$

для расстояний, параллельных направлению оси У

$$V_{ti}^S = -\Delta y_t + \Delta y_i + l_{ti}^S \quad (2.4.5)$$

для расстояний, параллельных направлению оси Z

$$V_{ti}^S = -\Delta Z_t + \Delta Z_i + l_{ti}^S \quad (2.4.6)$$

Таким образом, в уравнениях погрешностей сторон, параллельных осям, участвуют поправки координат только одной рассматриваемой оси. Изменения координат соответствуют увеличению сторон.

Для сторон и углов, отражающихся на твердые пункты, уравнения погрешностей упрощаются ввиду равенства нулю поправок твердых пунктов.

В качестве твердых в сети могут быть приняты два или большее число пунктов, определенных с высокой точностью, например, в нижней плоскости ху.

На основании формул (2.4.1)-(2.4.6) уравнения погрешностей на каждом ярусе (рис. 2.1) геодезической сети будут:

$$\begin{aligned} V_1 &= k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_2 x_5 - k_1 x_{10} + l_1 \\ V_2 &= k_2 x_2 + k_2 x_5 - k_1 x_4 + k_1 x_7 + l_2 \\ V_3 &= k_1 x_4 - k_1 x_1 - k_2 x_8 + k_2 x_{11} + l_3 \\ V_4 &= -k_1 x_1 + k_2 x_8 + k_1 x_{10} - k_2 x_{11} + l_4 \\ V_5 &= -k_3 x_1 + l_5 \\ V_6 &= k_3 x_1 - k_2 x_3 + k_2 x_6 + l_6 \\ V_7 &= k_2 x_3 - k_3 x_4 - k_2 x_6 + l_7 \\ V_8 &= k_3 x_4 + l_8 \\ V_9 &= -k_3 x_{10} + l_9 \\ V_{10} &= k_2 x_9 + k_3 x_{10} - k_2 x_{12} + l_{10} \\ V_{11} &= -k_3 x_7 - k_2 x_9 + k_2 x_{12} + l_{11} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned}
V_{12} &= k_3 x_7 + l_{12} \\
V_{13} &= k_3 x_2 + l_{13} \\
V_{14} &= k_2 x_2 - k_1 x_3 + k_1 x_{12} + l_{14} \\
V_{15} &= k_1 x_3 - k_3 x_{11} - k_1 x_{12} + l_{15} \\
V_{16} &= k_3 x_{11} + l_{16} \\
V_{17} &= -k_3 x_5 + l_{17} \\
V_{18} &= -k_3 x_5 - k_1 x_6 + k_1 x_9 + l_{18} \\
V_{19} &= k_1 x_6 - k_3 x_8 - k_1 x_9 + l_{19} \\
V_{20} &= k_3 x_8 + l_{20} \\
V_{21}^S &= x_9 + l_{21} \\
V_{22}^S &= x_{12} + l_{22} \\
V_{23}^S &= x_7 - x_{10} + l_{23} \\
V_{24}^S &= -x_5 + x_8 + l_{24} \\
V_{25}^S &= -x_1 + x_4 + l_{25} \\
V_{26}^S &= -x_2 + x_{11} + l_{26} \\
V_{27}^S &= x_6 + l_{27} \\
V_{28}^S &= x_3 + l_{28}
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

где,

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\rho}{S_1} = \frac{\rho}{S_2} = \frac{\rho}{S_1^i} = \frac{\rho}{S_3^i} \\
k_2 &= \frac{\rho}{S_2} = \frac{\rho}{S_4} = \frac{\rho}{S_2^i} = \frac{\rho}{S_4^i} \\
k_3 &= \frac{\rho}{S_5^i} = \frac{\rho}{S_6^i} = \frac{\rho}{S_7^i} = \frac{\rho}{S_8^i}
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \Delta x_{A_1^i}, \quad x_4 = \Delta x_{D_1^i}, \quad x_7 = \Delta x_{C_1^i}, \quad x_{10} = \Delta x_{B_1^i} \\
x_2 &= \Delta y_{A_1^i}, \quad x_5 = \Delta y_{D_1^i}, \quad x_8 = \Delta y_{C_1^i}, \quad x_{11} = \Delta y_{B_1^i} \\
x_3 &= \Delta z_{A_1^i}, \quad x_6 = \Delta z_{D_1^i}, \quad x_9 = \Delta z_{C_1^i}, \quad x_{12} = \Delta z_{B_1^i}
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

И учтено, что

$$\begin{aligned}
\Delta x_{A_1} &= 0, \quad \Delta x_{B_1} = 0, \quad \Delta x_{C_1} = 0, \quad \Delta x_{D_1} = 0, \\
\Delta y_{A_1} &= 0, \quad \Delta y_{B_1} = 0, \quad \Delta y_{C_1} = 0, \quad \Delta y_{D_1} = 0, \\
\Delta z_{A_1} &= 0, \quad \Delta z_{B_1} = 0, \quad \Delta z_{C_1} = 0, \quad \Delta z_{D_1} = 0,
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

*i*- Номер монтажного горизонта

Веса уравнений погрешностей определяются как числа обратно - пропорциональные средним квадратическим погрешностям измерений:

$$P = \frac{C}{m_i^2} \tag{2.4.11}$$

В матричной форме систему нормальных уравнений можно записать:

$$A \cdot x = -L \quad (2.4.12)$$

где,

A-квадратная матрица коэффициентов;

x-матрица-столбец неизвестных;

L- матрица-столбец свободных членов.

В развернутом виде формуле (2.4.12) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} A_1 & , & \dots & A_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & , & \dots & A_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_m \end{bmatrix} \quad (2.4.13)$$

При уравнивании параметрическим способом число уравнений равно числу необходимых величин т.е.  $m = r$ .

Коэффициенты нормальных уравнений в параметрическом способе уравнивания определяются по формуле:

$$A_{ij} = [P_i a_i a_j] \quad (2.4.14)$$

$$L_i = [P_i a_i l] \quad (2.4.15)$$

Из (2.4.9) имеем

$$X = -A^{-1}L$$

Обозначим

$$A^{-1} = Q \quad (2.4.16)$$

И соответственно элементы обратной матрицы через  $L$ . Тогда

$$X = -QL \quad (2.4.17)$$

Или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}, \dots & Q_{12} \\ Q_{21}, \dots & Q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -L_1 \\ \dots \\ -L_2 \end{bmatrix}$$

Для любого неизвестного можно записать

$$x_i = -Q_{i1}L_1 - Q_{i2}L_2 - \dots - Q_{ir}L_r \quad (2.4.18)$$

Элементы обратной матрицы в параметрическом способе – весовые коэффициенты. Неизвестные нормальные уравнения – поправки (2.4.9) являются величинами, с помощью которых определяемые пункты редуцируются в натуре в проектное положение. Если при уравнивании были приняты в качестве приближенных проектные значения координат, то поправки  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  откладываются с противоположными знаками. Средняя квадратическая погрешность координат пунктов и поправок определяется по формуле

$$M_i = \sqrt{\frac{[PVV]}{n-t}} Q_{ii} \quad (2.4.19)$$



### 0-10. Монтажный горизонт

Таблица 2.3

|                             | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | X <sub>5</sub> | X <sub>6</sub> | X <sub>7</sub> | X <sub>8</sub> | X <sub>9</sub> | X <sub>10</sub> | X <sub>11</sub> | X <sub>12</sub> | X <sub>13</sub> | P <sub>i</sub> |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| V <sub>1</sub>              | +0,49          | +1,45          |                |                | -1,45          |                |                |                |                | -0,49           |                 |                 | 1,0             |                |
| V <sub>2</sub>              |                | -1,45          |                | -0,49          | +1,45          |                | +0,49          |                |                |                 |                 |                 | 1,0             |                |
| V <sub>3</sub>              |                |                |                | +0,49          |                |                | -0,49          | -1,45          |                |                 | +1,45           |                 | 1,0             |                |
| V <sub>4</sub>              | -0,49          |                |                |                |                |                |                | +1,45          |                | +0,49           | -1,45           |                 | 1,0             |                |
| V <sub>5</sub>              | -0,76          |                |                |                |                |                |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>6</sub>              | +0,76          |                | -1,45          |                |                | +1,45          |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>7</sub>              |                |                | +1,45          | -0,76          |                | -1,45          |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>8</sub>              |                |                |                | +0,76          |                |                |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>9</sub>              |                |                |                |                |                |                |                |                |                | -0,76           |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>10</sub>             |                |                |                |                |                |                |                |                | +1,45          | +0,76           |                 | -1,45           | 0,25            |                |
| V <sub>11</sub>             |                |                |                |                |                |                | -0,76          |                | -1,45          |                 |                 | +1,45           | 0,25            |                |
| V <sub>12</sub>             |                |                |                |                |                |                | +0,76          |                |                |                 |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>13</sub>             |                | -0,76          |                |                |                |                |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>14</sub>             |                | +0,76          | -0,49          |                |                |                |                |                |                |                 |                 | +0,45           | 0,25            |                |
| V <sub>15</sub>             |                |                | +0,49          |                |                |                |                |                |                |                 | -0,76           | +0,49           | 0,25            |                |
| V <sub>16</sub>             |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 | +0,76           |                 | 0,25            |                |
| V <sub>17</sub>             |                |                |                | -0,76          |                |                |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>18</sub>             |                |                |                | +0,76          | -0,49          |                |                | +0,49          |                |                 |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>19</sub>             |                |                |                |                | +0,49          |                | -0,76          | -0,49          |                |                 |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>20</sub>             |                |                |                |                |                |                | +0,76          |                |                |                 |                 |                 | 0,25            |                |
| V <sub>7</sub> <sup>S</sup> |                |                |                |                |                |                |                |                | +1             |                 |                 |                 | 0,58            |                |
| V <sub>8</sub> <sup>S</sup> |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 | -               | +1              | 0,58            |                |
| V <sub>2</sub> <sup>S</sup> |                |                |                |                |                |                | +1             |                |                | -1              |                 |                 | 2,10            |                |
| V <sub>3</sub> <sup>S</sup> |                |                |                |                | -1             |                |                | +1             |                |                 |                 |                 | 0,24            |                |
| V <sub>4</sub> <sup>S</sup> | -1             |                |                | +1             |                |                |                |                |                |                 |                 |                 | 2,10            |                |
| V <sub>1</sub> <sup>S</sup> |                | -1             |                |                |                |                |                |                |                |                 | +1              |                 | 0,24            |                |
| V <sub>6</sub> <sup>S</sup> |                |                |                |                |                | +1             |                |                |                |                 |                 |                 | 0,58            |                |
| V <sub>5</sub> <sup>S</sup> |                |                | +1             |                |                |                |                |                |                |                 |                 |                 | 0,58            |                |

### 0-15. Монтажный горизонт

Таблица 2.4

|                 | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | X <sub>5</sub> | X <sub>6</sub> | X <sub>7</sub> | X <sub>8</sub> | X <sub>9</sub> | X <sub>10</sub> | X <sub>11</sub> | X <sub>12</sub> | P <sub>i</sub> |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| V <sub>1</sub>  | +0,49          | +1,45          |                |                | -1,45          |                |                |                |                | -0,49           |                 |                 | 1,0            |
| V <sub>2</sub>  |                | -1,45          |                | -0,49          | +1,45          |                | +0,49          |                |                |                 |                 |                 | 1,0            |
| V <sub>3</sub>  |                |                |                | +0,49          |                |                | -0,49          | -1,45          |                |                 | +1,45           |                 | 1,0            |
| V <sub>4</sub>  | -0,49          |                |                |                |                |                |                | +1,45          |                | +0,49           | -1,45           |                 | 1,0            |
| V <sub>5</sub>  | -0,50          |                |                |                |                |                |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25           |
| V <sub>6</sub>  | +0,50          |                | -1,45          |                |                | +1,45          |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25           |
| V <sub>7</sub>  |                |                | +1,45          | -0,50          |                | -1,45          |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25           |
| V <sub>8</sub>  |                |                |                | +0,50          |                |                |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25           |
| V <sub>9</sub>  |                |                |                |                |                |                |                |                |                | -0,50           |                 |                 | 0,25           |
| V <sub>10</sub> |                |                |                |                |                |                |                | +1,45          | -              | +0,50           |                 | -1,45           | 0,25           |
| V <sub>11</sub> |                |                |                |                |                |                | -0,50          |                | -1,45          |                 |                 | +1,45           | 0,25           |
| V <sub>12</sub> |                |                |                |                |                |                | +0,50          |                |                |                 |                 |                 | 0,25           |
| V <sub>13</sub> |                | -0,50          |                |                |                |                |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25           |
| V <sub>14</sub> |                | +0,50          | -0,49          |                |                |                |                |                |                |                 |                 | +0,49           | 0,25           |
| V <sub>15</sub> |                |                | +0,49          |                |                |                |                |                |                |                 | -0,50           | +0,49           | 0,25           |
| V <sub>16</sub> |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 | +0,50           |                 | 0,25           |
| V <sub>17</sub> |                |                |                |                | -0,50          |                |                |                |                |                 |                 |                 | 0,25           |
| V <sub>18</sub> |                |                |                |                | +0,50          | -0,49          |                |                | +0,49          |                 |                 |                 | 0,25           |
| V <sub>19</sub> |                |                |                |                |                | +0,49          |                |                | -0,50          | -0,49           |                 |                 | 0,25           |
| V <sub>20</sub> |                |                |                |                |                |                |                | +0,50          |                |                 |                 |                 | 0,25           |



## Глава III. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ

### ДАННЫХ

#### 3.1. Анализ изменения погрешностей координат пунктов с повышением этажности и определение уравнений регрессий их.

На основе материалов уравнивания (2.3), выполненной на ЭВМ «М-222» по программе (2.4), рассмотрим изменение погрешностей пунктов пространственной 4-ярусной геодезической сети с повышением этажности.

Средняя квадратическая погрешность определения координат пунктов из 140 испытаний (2.2.) вычисляются по формуле:

$$M_i = \sqrt{\frac{[m^2]}{140}} \quad /3.1.1/$$

Значения весовых коэффициентов  $Q_{ii}$  и погрешностей, вычисленных по формуле /3.1.1/ приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

| Монтажные горизонты |          | Точки А <sup>К</sup> , В <sup>К</sup> , С <sup>К</sup> , Д <sup>К</sup> |       |       |
|---------------------|----------|---|-------|-------|
|                     |          | /x/   | /y/   | /z/   |
| 0 - 5               | $Q_{ii}$ | 0,598   | 0,446 | 0,344 |
|                     | $M_i$    | 1,20  | 1,03  | 0,91  |
| 0 – 10              | $Q_{ii}$ | 2,574   | 1,505 | 1,057 |
|                     | $M_i$    | 1,95  | 1,51  | 1,26  |
| 0 – 15              | $Q_{ii}$ | 6,164   | 3,316 | 1,745 |
|                     | $M_i$    | 2,94  | 2,16  | 1,56  |
| 0 - 20              | $Q_{ii}$ | 11,063  | 6,066 | 3,101 |
|                     | $M_i$    | 3,88  | 2,91  | 2,04  |

На рис. 3.1. приведен график изменения средних квадратических погрешностей определения координат пунктов с повышением этажности

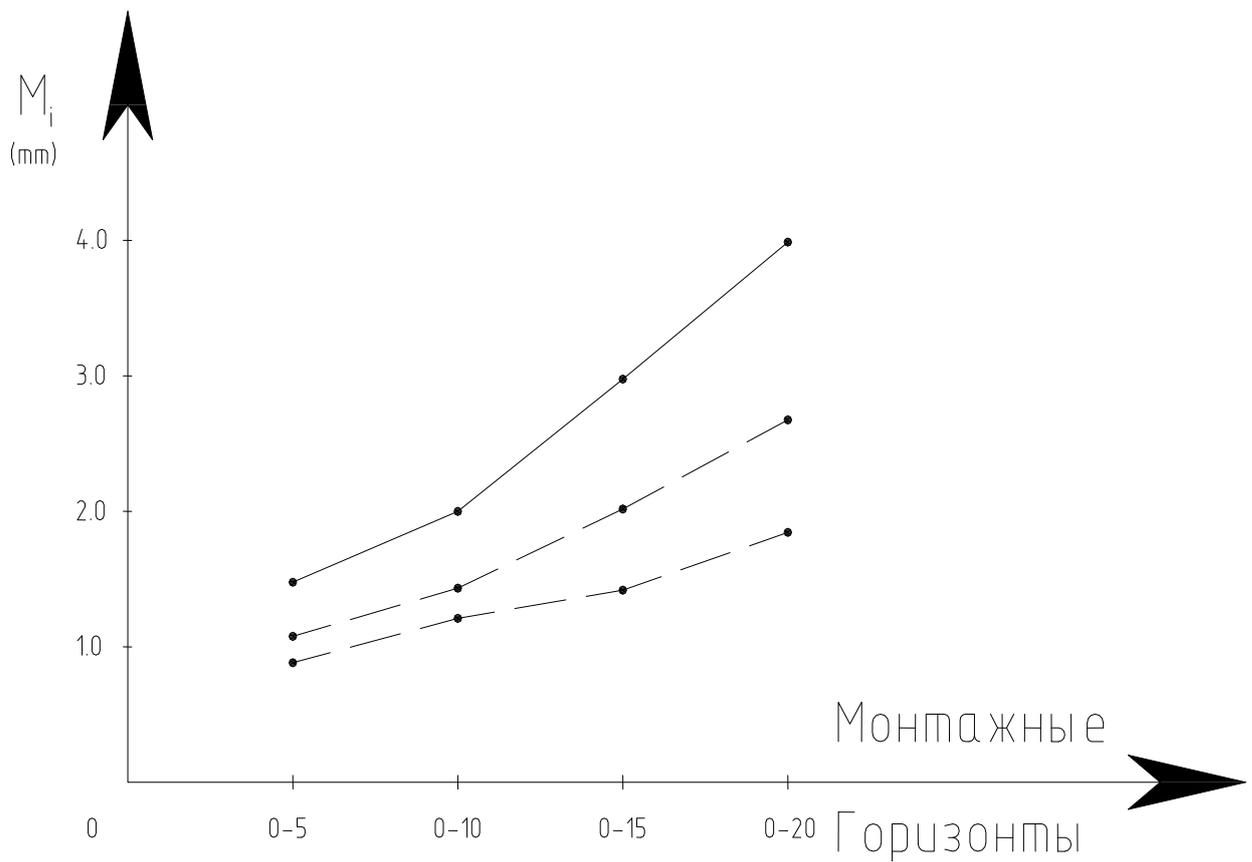


Рис. 3.1.

Этот график показывает, что средние квадратические погрешности  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  возрастают с повышением этажности. Но средние квадратические погрешности  $M_x$  увеличиваются намного больше, чем  $M_y$  и  $M_z$ .

По значениям найденных средние квадратические погрешностей пунктов выполнена аппроксимация их прямыми регрессии (Таблица 3.2.).

График прямой регрессии представлены на рис.3.2.

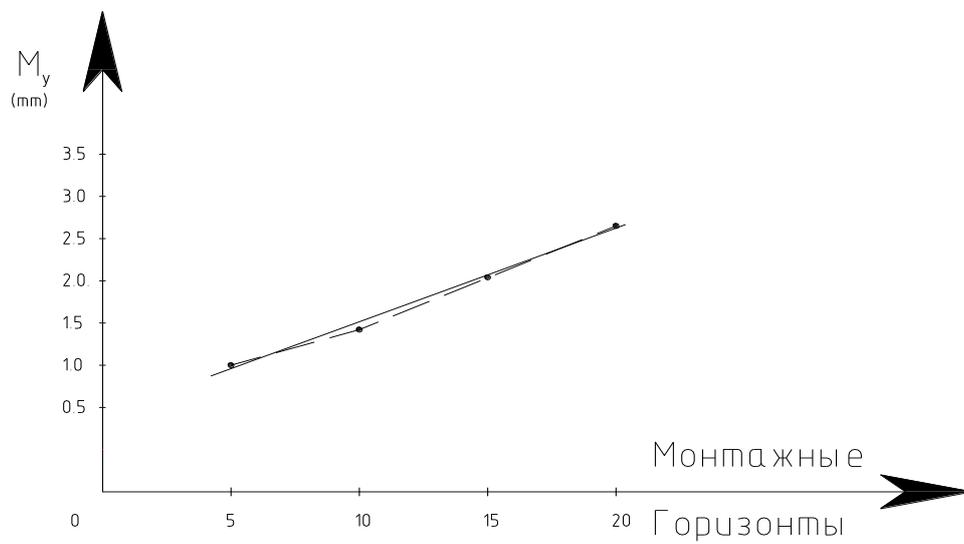
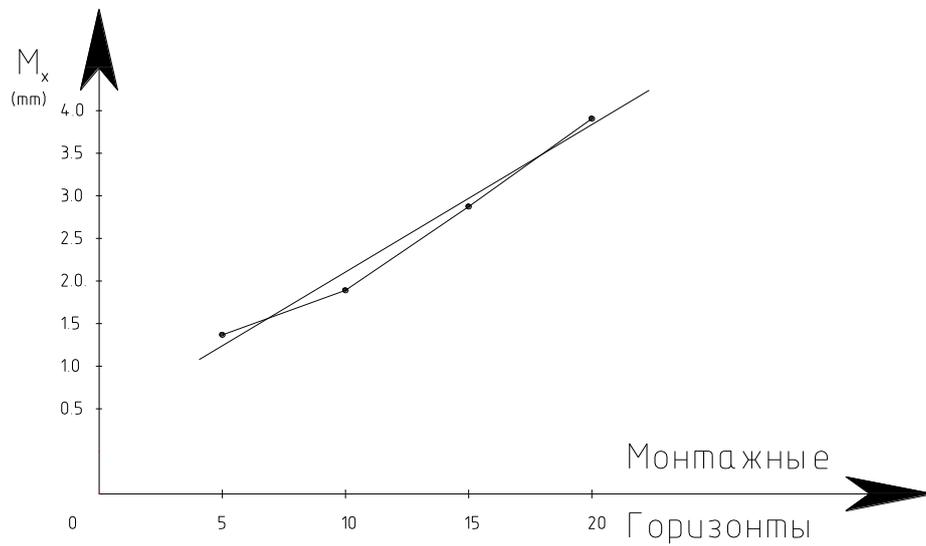
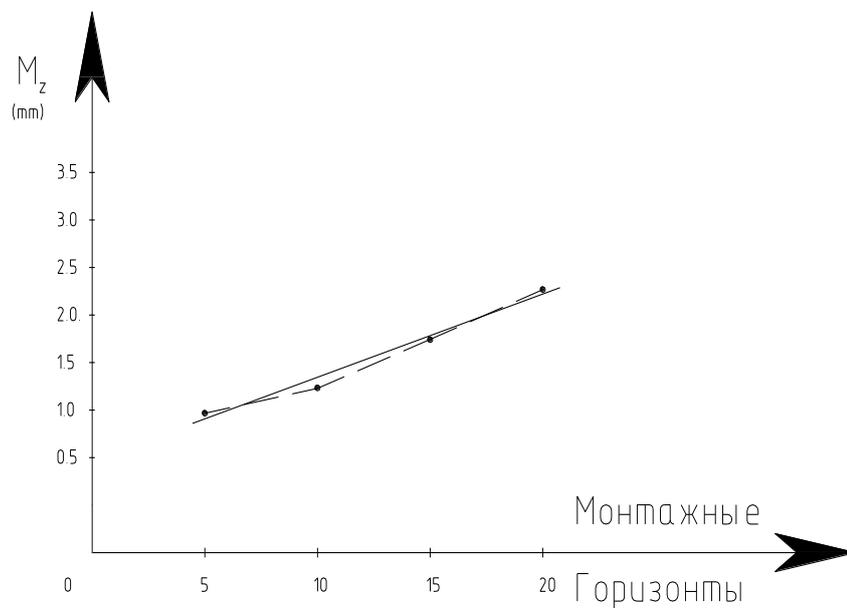


Рис.3.2.

Таблица 3.2.

|       | № №<br>ПП | x     | y     | $\delta_x$ | $\delta_y$ | $\delta_x$ | $\delta_y$ | $\delta_x \delta_y$ |
|-------|-----------|-------|-------|------------|------------|------------|------------|---------------------|
| $M_x$ | $A^5$     | 13.5  | 12.00 | -20.25     | -12.91     | 410.06     | 166.67     | 261.43              |
|       | $A^{10}$  | 27.0  | 19.54 | -6.75      | - 5.37     | 45.56      | 28.84      | 36.25               |
|       | $A^{15}$  | 40.5  | 29.36 | +6.75      | + 4.45     | 45.56      | 19.80      | 30.04               |
|       | $A^{20}$  | 54.0  | 38.75 | +20.25     | +13.84     | 410.06     | 191.55     | 280.87              |
|       | $\Sigma$  | 135.0 | 99.65 | 0.0        | +0.01      | 911.24     | 406.86     | 608.59              |
| $M_y$ | $A^5$     | 13.5  | 10.30 | -20.25     | -8.69      | 410.06     | 75.51      | 175.97              |
|       | $A^{10}$  | 27.0  | 15.07 | -6.75      | -3.92      | 45.56      | 15.36      | 26.46               |
|       | $A^{15}$  | 40.5  | 21.56 | +6.75      | +2.57      | 45.56      | 6.60       | 17.35               |
|       | $A^{20}$  | 54.0  | 29.06 | +20.25     | +10.07     | 410.06     | 101.40     | 203.92              |
|       | $\Sigma$  | 135.0 | 75.99 | 0.0        | +0.03      | 911.24     | 198.88     | 423.70              |
| $M_z$ | $A^5$     | 13.5  | 9.13  | -20.25     | -5.29      | 410.06     | 27.98      | 107.12              |
|       | $A^{10}$  | 27.0  | 12.55 | -6.75      | -1.87      | 45.56      | 3.50       | 12.62               |
|       | $A^{15}$  | 40.5  | 15.62 | +6.75      | +1.20      | 45.56      | 1.44       | 8.10                |
|       | $A^{20}$  | 54.0  | 20.40 | +20.25     | +5.98      | 410.06     | 35.76      | 121.10              |
|       | $\Sigma$  | 135.0 | 57.70 | 0.0        | +0.02      | 911.24     | 68.58      | 248.94              |

Примечание: X-выражен в метрах;

Y- в десятых долях миллиметра

$$\delta_{x_i} = x_i - \bar{x}; \quad \delta_{y_i} = y_i - \bar{y}; \quad [\delta_x] = [\delta_y] = 0$$

В таблице 3.3. приведена последовательность определения коэффициента корреляции и уравнений прямых регрессий средне квадратических погрешностей пунктов пространственной геодезической сети. При вычислении были использованы формулы из работы [12].

Для проверки этих вычислений выполнялись контрольные вычисления /таблица 3.4/ и определены коэффициенты корреляции [12] по формуле

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_y^2}} \quad (3.1.2)$$

где:  $\sigma_v = \sqrt{\frac{[v v]}{n}}$  - вычисляется из таблицы 3.4.

Таблица 3.3

| Определяемые величины                | формулы   | Для $M_x$            | Для $M_y$            | Для $M_z$            |
|--------------------------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|
| Арифметические средние               | $\bar{x} = \frac{[x]}{n}$   | 33.750               | 33.750               | 33.750               |
|                                      | $\bar{y} = \frac{[y]}{n}$   | 24.912               | 18.997               | 14.422               |
| Стандартные отклонения               | $\sigma_x = \sqrt{\frac{[\delta_x^2]}{n}}$                                  | 15.09                | 15.09                | 15.09                |
|                                      | $\sigma_y = \sqrt{\frac{[\delta_y^2]}{n}}$                                  | 10.09                | 7.05                 | 4.14                 |
| Коэффициенты корреляции              | $r = \frac{[\delta_x \cdot \delta_y]}{n \cdot \delta_x \cdot \delta_y}$     | 0,999                | 0,996                | 0,996                |
| Параметры уравнений прямых регрессий | $b = \frac{[\delta_x \cdot \delta_y]}{[\delta_x^2]}$                        | 0.668                | 0.465                | 0.273                |
|                                      | $\alpha = \bar{y} - \bar{x} \frac{[\delta_x \cdot \delta_y]}{[\delta_x^2]}$ | 2.365                | 3.304                | 5.206                |
| Уравнения прямых регрессии           | $y = \alpha + bx$   | $y = 2.365 + 0.688x$ | $y = 3.304 + 0.465x$ | $y = 5.206 + 0.233x$ |

Коэффициенты корреляции определенные по формуле (3.1.2) оказались

для  $M_x$   $r = 0,9998$

$M_y$   $r = 0,9980$

$M_z$   $r = 0,9970$

Так как эти коэффициенты корреляции оказались одинаковыми с приведенными в таблице 3.3 значениями коэффициента корреляции можем сделать вывод, что погрешности достаточно хорошо аппроксимируются уравнениями

$$\text{По оси X} - y = 2,365 + 0,688 x$$

$$\text{По оси Y} - y = 3,304 + 0,465 x$$

$$\text{По оси Z} - y = 5,206 + 0,273 x$$

Таблица 3.4.

### Контрольные вычисления

| M              | № №<br>ПП       | x     | a     | vx     | -y     | v      | v v   |
|----------------|-----------------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|
| M <sub>x</sub> | A <sup>5</sup>  | 13.5  | 2.365 | 9.018  | -12.00 | -0.617 | 0.381 |
|                | A <sup>10</sup> | 27.0  | 2.365 | 18.036 | -19.54 | +0.861 | 0.741 |
|                | A <sup>15</sup> | 40.5  | 2.365 | 27.054 | -29.36 | +0.059 | 0.004 |
|                | A <sup>20</sup> | 54.0  | 2.365 | 36.072 | -38.75 | -0.313 | 0.098 |
|                | Σ               | 135.0 |       |        |        | 0.00   | 1.224 |
| M <sub>y</sub> | A <sup>5</sup>  | 13.5  | 3.304 | 6.278  | -10.30 | -0.718 | 0.516 |
|                | A <sup>10</sup> | 27.0  | 3.304 | 12.555 | -15.07 | +0.789 | 0.622 |
|                | A <sup>15</sup> | 40.5  | 3.304 | 18.832 | -21.56 | +0.576 | 0.332 |
|                | A <sup>20</sup> | 54.0  | 3.304 | 25.110 | -29.06 | -0.646 | 0.417 |
|                | Σ               | 135.0 |       |        |        | +0.001 | 1.887 |
| M <sub>z</sub> | A <sup>5</sup>  | 13.5  | 5.206 | 3.686  | -9.13  | -0.238 | 0.057 |
|                | A <sup>10</sup> | 27.0  | 5.206 | 7.371  | -12.55 | +0.027 | 0.001 |
|                | A <sup>15</sup> | 40.5  | 5.206 | 11.056 | -12.62 | +0.642 | 0.412 |
|                | A <sup>20</sup> | 54.0  | 5.206 | 14.742 | -20.40 | -0.452 | 0.204 |
|                | Σ               | 135.0 |       |        |        | -0.001 | 0.674 |

### 3.2. Сравнительный анализ расчета допусков методами теории размерных цепей и статистических испытаний

Рассмотренная в I-ой главе теория размерных цепей позволяет выполнить расчет допусков при строительстве сборных многоярусных сооружений. Эта теория в настоящее время проверена на ряде объектов /25/. Однако, она нуждается в дальнейшем практической проверке. Целью этой проверки заключается прежде всего в определении оптимальных допусков. Задача оптимизации допусков, рассчитанных с применением теории

размерных цепей является на сегодняшний день актуальной, в связи с тем, что этажность сборных сооружений непрерывно растет. При их возведении применяются тонкостенные конструкции, требующие высокоточных установок в проектное положение.

Одним из способов изучения распределения погрешностей при возведении сборных сооружений является метод статистических испытаний.

Воспользуемся результатами статистического моделирования пространственной многоярусной геодезической сети /2.3/ для практической аргументации основных положений теории размерных цепей.

В работе /25/ установлены нормативы точности построения базисной фигуры пространственной сети – и ортогонального проектирования пунктов базисной фигуры на монтажные горизонты – следовательно, предельные погрешности положения пункта пространственной сети на --- ярусе рассчитанные по теории размерных цепей характеризуются ср.кв. погрешностью:

$$M_i = 2\sqrt{m_4^2 + m_5^2} \quad (3.2.1)$$

С другой стороны предельная погрешность положения пункта пространственной геодезической сети, найденная методом статистических испытаний равна для соответствующего яруса:

$$M_i = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (3.2.2)$$

Сравнение величин вычисленных по формулам (3.2.1) и (3.2.2) и определяет степень достоверности расчета допусков методами теории размерных цепей.

Так в рассматриваемом случае для 4-х ярусной, вычисленные по теории размерных цепей и метода статистических испытаний оказались равными (при  $\Delta(S_0) = 2$  мм,  $n_1=14$ ,  $n_2=4$ ) и приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5

| Монтажные горизонты | $M_i$ , мм | $M_i^1$ , мм |
|---------------------|------------|--------------|
| 0 – 5               | 2,90       | 1,82         |
| 0 – 10              | 3,72       | 2,77         |
| 0 – 15              | 4,24       | 3,97         |
| 0 – 20              | 4,60       | 5,26         |

Как видно из таблицы 3.5, эти величины оказываются практически одинаковыми. Следовательно, теория размерных цепей может быть широко применяться для расчета допусков в сборном строительстве.

### 3.3. Дисперсионный анализ результатов на ЭВМ

Дисперсионный анализ служит в геодезии главным образом для обнаружения систематических погрешностей [11,14]. Исследование систематических погрешностей всегда производится в условиях действия случайных погрешностей.

Выполним дисперсионный анализ полученных данных в результате статистического моделирования пространственной многоярусной сети [2.3]. в качестве влияющего фактора  $\alpha$  возьмем – повышение этажности и рассмотрим его влияние на плановые и высотные положения пунктов этой сети.

Допустим, что при различных вариациях фактора  $\alpha$  получены ряды равноточных измерений

$$\begin{array}{ll}
 \alpha_1 & X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{1j}, \dots, X_{1S_1} \\
 \alpha_2 & X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots, X_{2j}, \dots, X_{2S_2} \\
 \dots & \dots \\
 \alpha_i & X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{i3}, \dots, X_{ij}, \dots, X_{iS_i} \\
 \alpha_n & X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{n3}, \dots, X_{nj}, \dots, X_{nS_n}
 \end{array} \quad (3.3.1)$$

Общее число измерений вычисляется по формуле

$$N = \sum_{i=1}^n S_i \quad (3.3.2)$$

Среднее  $\bar{x}_i$  вычисляются

$$\bar{x}_i = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^{S_i} x_{ij}, \quad (3.3.3)$$

а общее среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i S_i \quad (3.3.4)$$

В таком случае считают, что вариации  $\alpha$  называются систематическое погрешности. Сопоставляем флюктуации  $\bar{x}_i$  от  $\bar{x}$  и  $x_{ij}$  от  $\bar{x}_i$ .

В начале вычисляем факториальную или межрядную эмпирическую дисперсию по формуле

$$m_\alpha^2 = \frac{1}{n-1} Q_\alpha \quad (3.3.5)$$

где:  $Q_\alpha = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 S_i$  – девиата характеризующая рассеивание по значениям фактора, которая возрастает по мере увеличения систематического сдвига значений  $\bar{x}_i$ ,

$$\delta_i = \bar{x}_i - \bar{x}, \sum_{i=1}^n \delta_i S_i = 0.$$

Случайная или внутрирядная эмпирическая дисперсия определяются

$$m_r^2 = \frac{1}{N-n} Q_r \quad (3.3.6)$$

где:  $Q_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{S_i} \delta_{ij}^2$  – девиата показывающая рассеивание случайных погрешностей,

$$\delta_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i, \sum_{j=1}^{S_i} \delta_{ij} = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{S_i} \delta_{ij} = 0$$

Критерием влияния фактора  $\alpha$  служит оценка, называемая дисперсионным отношением и вычисляется

$$F = \frac{m_\alpha^2}{m_r^2} \quad (3.3.7)$$

С учетом формул (3.3.5) и (3.3.6) формула (3.3.7) имеет вид

$$F = \frac{Q_\alpha \cdot k_r}{Q_r \cdot k_\alpha} \quad (3.3.8)$$

где:  $k_\alpha = n - 1$  и  $k_r = N - n$  – число степеней свободы.

Общая эмпирическая дисперсия, выражающая весь комплекс условий измерений вычисляется

$$m^2 = \frac{Q}{N-1} \quad (3.3.9)$$

где:  $Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{S_i} \delta_{ij}^{*2}$  –общая девиата

$$\delta_{ij}^* = x_{ij} - \bar{x}$$

$N-1$  - число степеней свободы.

На основе вышеприведенных формул составлен алгоритм решения задачи (рис. 3.3) и выполнен дисперсионный анализ погрешностей координат пунктов пространственной многоярусной сети на ЭВМ «Днепр». Программа дисперсионного анализа приведена в приложении 2.

Например для пункта С по оси X, при  $S_i = 140$ ,  $n=4$ ,  $k_\alpha = 3$ ,  $k_r = 556$ , получено

Таблица 3.6

| $m_\alpha^2$ | $m_r^2$ | $Q_\alpha$ | $Q_r$  | Q      | m     | F     |
|--------------|---------|------------|--------|--------|-------|-------|
| 1,310        | 4,120   | 3,942      | 2290,6 | 2308,7 | 5,130 | 0,319 |

Так как  $F=0,314 < 4,28 = F_{(3,556; 0,05)}$ , то нет оснований для отклонения нульгипотезы: все четыре средних значений принадлежат одной и той же генеральной совокупности.

Дисперсионный анализ накопления погрешностей показал, что при условии случайного характера распределения, факторов влияющих на накопления погрешностей, систематический сдвиг монтажные отклонений отсутствует.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе теоретических и экспериментальных исследований выполненных в диссертационной работе, можно сделать следующие обобщающие выводы:

1. Допуски на возведение зданий и инженерных сооружений повышенной этажности необходимо учитывать коррелированные погрешности технологических процессов.
2. За исключением зданий или сооружений возводимых из монолитного железобетона и кирпича, для расчета допусков на возведение сборных

зданий и инженерных сооружений следует применять теорию размерных цепей.

3. Так как главная геодезическая разбивочная основа современных сборных сооружений (зданий) представляется в виде сложных пространственных сетей, то для расчета их точности целесообразно применять методы статистического моделирования с использованием ЭВМ.
4. Методы уравнивания пространственных геодезических сетей пока недостаточно изучены. Строго уравнивание таких сетей с применением обычных вычислительных средств приводит к большому объему вычисления, поэтому для уравнивания целесообразно применять ЭВМ с использованием алгоритма уравнивания составлений автором.
5. Представленные в первой главе теоретические исследования размерных цепей сборных сооружений подвергнуты экспериментальной проверке методами статистических испытаний. Результате такой проверки подтвердили выводы теории о том, что накопление погрешностей возрастает с повышением этажности.
6. В третьей главе представлены результаты анализа характеризующего накопления погрешностей при возведении сборных сооружений. Для проведения такого анализа был разработан алгоритм решения задачи для ЭВМ».
7. Дисперсионный анализ накопления погрешностей показал, что при условии случайного характера распределения факторов влияющих на накопление погрешностей, систематический сдвиг монтажных отклонений отсутствует.
8. Результаты контрольных измерений должны выполняться более высокой точностью, чем геодезические разбивочные работы.
9. Контрольные и поэтажные исполнительные съемки должны составлять неотъемлемую часть геодезических работ при возведении зданий и сооружений повышенной этажности.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Антоноженко В.Ф. Уравновешивание пространственной линейно-угловой сети сооружения. Сб. «Инженерная геодезия». Вып.7. К., «Будивельник», 1970.
- 2 Авирам А.С. Допуски в крупноэлементном жилищном строительстве. М.-Л., Стройиздат, 1963.
- 3 Бльшакова В.Д. Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей. М., «Недра», 1965.
- 4 Бурмистров Г.А. Основы способа наименьших квадратов. М., Госгеоолтехиздат, 1963.
- 5 Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на цифровых вычислительных машинах. Физматгиз, М., 1961.
- 6 Бусленко Н.П. Метод статистического моделирования. Статистика, М., 1970.
- 7 Бусленко Н.П. и др. Метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло). Физматгиз, СМБ, 1962.
- 8 Брандт З. Статистические методы анализа наблюдений. М., «Мир», 1975.
- 9 Большаков В.Д. и др. Методы и приборы высокоточных геодезических измерений в строительстве. М.. «Недра», 1975.
- 10 Бендат Дж., Пирсол А. Изменение и анализ случайных процессов. М., «Мир», 1974.
- 11 Вилуев Н.Г., Кондра Г.С. Дисперсионный анализ геодезических измерений. М., «Недра», 1968.
- 12 Вилуев Н.Г., Кондра Г.С. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений. М., «Недра», 1969.
- 13 Вилуев Н.Г. Применение метода Монте-Карло для проектирования и расчета точности геодезических построений. Сб. «Инженерная геодезия». Вып.14. К., «Будивельник», 1973
- 14 Вилуев Н.Г., Кавунец Д.Н. Дисперсионный анализ в геодезических исследованиях. К.. литограф.изд.. 1959
- 15 Вилуев Н.Г., Мамин А.П. Уравнение осадки инженерного сооружения. К.. литограф.изд.. 1969
- 16 Вилуев Н.Г., Чмнян Т.Т. Теория размерных цепей. К., литограф.изд., 1965.
- 17 Вилуев Н.Г., Ракитов Д.И. Приложение геодезии в инженерно-строительном деле. М., «Недра», 1965.
- 18 Вилуев Н.Г. Пространственные геодезические сети в промышленном и гражданском строительстве. Сб. «Инженерная геодезия». Вып.8. Киев, «Будильник», 1970.
- 19 Вилуев Н.Г. Теория размерных цепей и ее применение для

- расчета точности разбивочных работ. Сб. «Инженерная геодезия»,. Вып.3., К., «Будильник», 1966.
- 20 Вилуев Н.Г. и др. Геодезические разбивочные работы. М., «Недра», 1973.
- 21 Вилуев Н.Г. Теория коррелированных случайных ошибок измерений. К., литограф.изд., 1965.
- 22 Вентцель Е.С. Исследование операций. М., «Советское радио», 1972.
- 23 Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1973
- 24 Войтенко С.П. Расчет точности пространственного положения узлов сборных инженерных сооружений. Сб. «Инженерная геодезия». Вып. 10. К., «Будильник»1973
- 25 Григоренко А.Г. Сердюков В.М., Чмчян Т.Т. Геодезическое обслуживание строительного-монтажных работ. К., «Будильник» 1973.
- 26 Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. М., «Недра», 1969
- 27 Голенко Д.И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на ЭВМ. М., «Наука», 1965
- 28 Горлеев А.В. Действие погрешностей при различных методах обработки опорных геодезических сетей. М., МИИЗ, 1965.
- 29 Галушко В.Г. Вероятно-статистические методы на автотранспорте. К., «Вища Школа», 1976.
- 30 Дунаев П.Ф. Размерные цепи. М., Машгиз, 1963
- 31 Дарский М.М., Злотников Г.З., Хинчин В.П. Влияние способа монтажа на точность возведения крупнопанельных зданий повышенной этажности. Сб. «Строительное производство». Вып.6. К., 1967.
- 32 Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М., Гостехиздат, 1955.
- 33 Даниленко Т.С. Организация и производство геодезических работ в крупном строительстве. М., «недра», 1975.
- 34 Даниленко Т.С. Геодезическое обеспечение монтажных работ. М., «Недра», 1971
- 35 Ермаков С.М. Метод монте-Карло и смежные вопросы. М., «Наука», 1975
- 36 Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М., «Наука», 1976.
- 37 Закс Л. Статистическое оценивание. М., «Статистика», 1976
- 38 Завадский Ю.В. Моделирование случайных процессов. (Метод Монте- Карло и его применение для решения

- инженерных и экономических задач). М., литограф.изд., 1974.
- 39 Зенцов А.С. Геодезия при строительстве крупных гидростанций и их туннелей. М., Госгеолтехиздат, 1963.
- 40 Кисилев М.И. О влиянии способа угловой привязки и соотношения точностей угловых и линейных измерений на корреляцию координат узлового пункта полигонометрической сети. «Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1975, №3.
- 41 Киселов М.И., Маркузе Ю.И., Чесноков ю.М. О программе уравнивания полигонометрических сетей на ЭЦВМ «БЭСМ-6». «Геодезия и картография», 1975, №2.
- 42 Киселов М.И. Исследование точности некоторых типовых полигонометрических построений методом статистического моделирования. РХ, 1976, №2. Деп. В ВИНТИ 8 января 1976.
- 43 Киселов М.И. Исследование методом статистического моделирования надежности оценки стандарта при помощи средней дквдратической ошибки. РЖ. 1976, №2. Деп. ВВИНТИ 8января 1976
- 44 Крамер Г. Математические методы статистики. М., «Мир», 1975
- 45 Кузнецов Г.И. Геодезические работы при проектировании и строительстве гидротехнических сооружений. М.. Геодезидат. 1960.
- 46 Кемниц Ю.В. Теория ошибок измерений. М., «Недра», 1967.
- 47 Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., физматгиз, 1962.
- 48 Лютц А.Ф. Разбивка крупных сооружений. М., «Недра», 1969.
- 49 Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М., «Наука», 1971.
- 50 Никитин В.И. Оценка точности комбинированной сети методом статистических испытаний. Труды Новосибирского института ж.-д. транспорта. Вып.149. Новосибирск, 1973.
- 51 Новожилов Б.В. Метод Монте-Карло. М., «Знание», 1966.
- 52 Нурмухамедов Б.Д. Корреляционно-зависимые погрешности при возведении сборных сооружений. Сб. «Инженерная геодезия». Вып.19. К., «Будильник», 1976.
- 53 Нурмухамедов Б.Д. Расчет точности разбивки продольного уклона канала. Сб. «Инженерная геодезия». Вып.18.К., «Будильник», 1975.
- 54 Нурмухамедов Б.Д., Видуев Н.Г. Тексты лекций по теории математической обработке геодезических измерений методом Монте-карло. Вып. 1. К.. литограф.изд., 1976.

- 55 Нурмухамедов Б.Д., Чмчян Т.Т. Исследование точности построения пространственных сетей методом монте-карло. Тезисы Семинара «Проблемы и практические вопросы инженерной фотограмметрии». К. Общество «Знание» УССР, 1976.
- 56 Нурмухамедов Б.Д. Исследование точности возведения сборных сооружений методом Монте –Карло с использованием ЭВМ. Тезисы семинара «Проблемы и практические вопросы инженерной фотограмметрии». К., общество «Будильник», 1975.
- 57 Пастух В.В. О точности построения пространственных сетей высотных сборных сооружений. Сб. «Инженерная геодезия». Вып.17. К., «Будильник», 1975
- 58 Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. М., «Наука», 1971.
- 59 Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М., «Наука», 1973.
- 60 Соболев И.М. Метод Монте – Карло. М., «Наука»1972
- 61 Смирнов Н.В., Белугин Д.А. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. М., «Недра», 1969.
- 62 Сердюков В.М., Григоренко А.Г., Кривелев Л.И. Испытание сооружений. К., «Будильник», 1976.
- 63 Сундаков Я.А. Геодезические работы при возведении крупных сооружений и высотных зданий. М., «Недра», 1972
- 64 Большакова В.Д. и Левчука Г.П. Справочник геодезиста. Ч. 1и 2 М., «Недра», 1975.
- 65 Сытник В.С. Строительная геодезия. М., «Недра», 1974.
- 66 Сытник В.С. и др. Геодезические работы на строительной площадке. М., Стройиздат, 1973.
- 67 Сытник В.С. Основы расчета и анализа точности геодезических измерений в строительстве. М., Стройиздат, 1974
- 68 Сытник В.С., Мубаракوف Х. Анализ результатов осадки зданий повышенной этажности, возводимых в сейсмоактивных районах. Сб. «Инженерная геодезия». Вы.13. К., «Будильник», 1973.
- 69 Сытник В.С. Применение дисперсионного анализа при обработке результатов геодезических разбивочных работ. Сб. «Геодезия,»
- 70 Сытник В.С. Контроль и обеспечения точности при возведении зданий и инженерных сооружений. М., Стройиздат, 1977.
- 71 Сытник В.С. К вопросу точности геодезических построений при возведении многоэтажных промышленных зданий. «Промышленное строительство», 1972, №11
- 72 Телеганов Н.А. О статистическом исследовании влияния ошибок

- исходных данных на моделях триангуляционных сетей. Труды новосибирского института инженерной геодезии и картографии. Вып.30,
- 73 Татевян А.Ш. Исследования о построении опорной геодезической сети. М., «Недра», 1967.
- 74 Угинчус А.А. Гидравлические и технико-экономические расчеты каналов. М., Стройиздат, 1965
- 75 Черемисин М.С., Ниязов Ч.Г. Развития геодезически-маркшейдерских работ при строительстве транспортных и гидротехнических подземных сооружений в СНГ. «Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1973, №6
- 76 Чмчян Т.Т. Анализ точности геодезических работ при строительстве крупнопанельных зданий повышенной этажности. Сб. «Инженерная геодезия». Вып.5. К., «Будильник», 1968.
- 77 Чмчян Т.Т. Трехфакторный дисперсионный анализ точности возведения высотных крупнопанельных зданий. Сб. «Инженерная геодезия». Вып.12. К., «Будильник», 1972
- 78 Чмчян Т.Т. О нормировании точности геофизических работ в высотном крупнопанельном строительстве. Сб. «Инженерная геодезия». Вып.13., К., «Будильник», 1973.
- 79 Чмчян Т.Т. Опыт применения пространственных сетей при строительстве высотных крупнопанельных зданий. Сб. «Инженерная геодезия». Вып.10. К., «Будильник», 1972