

Butun sonli panjaralar bilan bog'liq masalalar

Rahmatullayeva Nozima

Mutaxassislik: 5A130101-Matematika (yo'nalishlar bo'yicha)

2-bosqich

Kirish

Qadimgi zamon matematikasida masalalarni geometrik usul bilan yechish ko'p qo'llanilgan usullardan biri hisoblangan. Algebra va geometriyaning ko'pgina masalalari tekislikda va fazoda koordinatalari butun nuqtalardan iborat bo'lgan to'plamlarni o'rganishga olib kelinadi. Jumladan, juda ko'p hollarda bunday to'plamlar uchlari butun nuqtalarda bo'lgan ko'pburchak va ko'pyoqlardan iborat. Bunday ko'rinishdagi to'plamlarning xossalari keng o'rganilgan bo'lib, ular bilan ishlash qulaydir. Mazkur ilmiy ishda uchlari butun nuqtalarda bo'lgan ko'pburchaklar yuzalarini hisoblash bilan bog'liq bo'lgan masalalar o'rganilgan.

Uchlari panjara tugunlarida joylashgan ko'pburchaklarning yuzlarini hisoblashning har xil usullari mavjud.

Tekislikni teng parallelogrammlarga bo'luvchi parallel to'g'ri chiziqlardan ikki oilasini qaraymiz. L bilan bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalari to'plamini belgilaymiz va nuqtali panjara yoki panjara deb ataymiz. Panjaraning nuqtalari tugunlar deb ataladi.

Parallelogrammlarning har biri fundamental parallelogramm yoki panjarani hosil qiluvchi parallelogramm deyiladi. Fundamental parallelogramm yuzasini $\Delta(L)$ bilan belgilaymiz. Panjara faqat tugun nuqtalardan iborat bo'lib, to'g'ri chiziqlar panjaraga tegishli emas. Agar to'g'ri chiziqlar oilalari o'zaro ortogonal bo'lsa, ortogonal butun nuqtali panjara deyiladi.

Uchlari panjara tugunlarida joylashgan ko'pburchaklarning yuzalari uchun Pik formulasi deb ataluvchi formula mavjud.

Pik formulasi bo'yicha ko'pburchakning yuzasi ko'pburchakning ichidagi va chegarasidagi tugunlar soni orqali hisoblanadi. Agar B orqali ko'pburchakning ichida yotgan tugunlar sonini va I orqali ko'pburchakning chegarasida yotgan tugunlar sonini belgilasak, Pik formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$S = B + \frac{I}{2} - 1$$

Bu formulaning uchlari panjara tugunlarida joylashgan ko'pburchaklarning yuzalari uchun o'rinli ekanligi 1899-yilda **Georg Pik** tomonidan ko'rsatilgan.

Murakkab ko'rinishdagi figuralarning yuzalarini hisoblashda Pik formulasidan foydalanish ancha qulaydir. Bu formula ko'pburchaklar uchun o'rinli bo'lganligi bilan u bevosita ko'pyoqlar uchun analogga ega emas, lekin fazoda uning har xil umumlashmalarini qarab chiqish mumkin.

Agar uchlari panjara tugunlarida bo'lgan uchburchakning tomonlarida va ichida tugun nuqtalar bo'lmasa, bunday uchburchak **sodda uchburchak** deyiladi. Har bir fundamental parallelogramm diagonal yordamida ikkita sodda uchburchakka ajraladi. Tekislikda sodda uchburchaklar juda ko'p, lekin hech biri o'tkir burchakli emas. Fundamental parallelogramm va sodda uchburchaklar uchun quyidagi teoremlar o'rinli:

Teorema. *Berilgan panjaradagi barcha fundamental parallelogrammlar (demak, sodda uchburchaklar ham)teng yuzalarga ega.*

Agar panjara ortogonal bo'lsa, u holda sodda uchburchaklarning yuzalari $\frac{1}{2}$ ga teng bo'ladi.

Teorema. *L panjaraning tugunlari orasidagi eng kichik masofa $d=d(L)$ shu panjaraning fundamental parallelogrammning yuzasi $\Delta=\Delta(L)$ uchun*

$$d \leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}} \Delta$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, bu tengsizlikda tenglik o'tkir burchagi 60^0 ga teng romblardan tuzilgan yagona panjarada erishiladi.

Uchlari panjara tugunlarida joylashgan ko'pburchakning yuzalari uchun Pik formulasining analogini beruvchi quyidagi formula o'rinli

$$S = \left(B + \frac{\Gamma}{2} - 1 \right) \Delta(L)$$

bo'lib, bunda B-ko'pburchakning ichidagi tugun nuqtalar soni, Γ -ko'pburchak chegarasidagi tugunlar soni, $\Delta(L)$ -fundamental parallelogramm yuzasi.

Panjara nuqtalari bilan bog'liq masalalar turli ko'rinishda bo'lib, juda ko'pchiligini hatto maktab o'quvchisi tushunadigan shaklda sodda qilib aytish mumkin. Lekin ularni yechish ancha murakkab bo'lib, masalaga har tomonlama yondashishni talab qiladi. Bunday masalalarga masalan, tekislikda uchlari panjara nuqtalarida bo'lgan ko'pburchaklar, fazoda bo'lsa ko'pyoqlar bilan bog'liq

masalalarni keltirish mumkin. Bu masalalarda ko'pburchak yuzalarini topish, ularning tomonlarini aniqlash, ularga tashqi va ichki chizilgan aylanalarnin graduslari bilan bog'liq masalalarni, ko'pyoqlarning hajmlari, yoqlarning yuzalari va shu kabi masalalar uchraydi. Masalan bunday masalalardan quyidagilarni keltiramiz:

1. R^3 fazoda

$$ax + by + cz + d = 0$$

tekislikda Z^3 panjaraning uchta har xil nuqtasi faqat a, b, c, d sonlar ratsional bo'lgandagina yotishini va aksincha ekanligini ko'rsating.

2. Uchlari Z^2 panjara nuqtalarida joylashgan eng kichik burchagi α ga teng parallelogramm uchun faqat uchta hol bo'lishi mumkinligini ko'rsating: yoki $\frac{\alpha}{\pi}$ irratsional son, yoki $\alpha = \frac{\pi}{2}$ yoki $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Adabiyotlar

1. Вавилов В. В., Устинов А. В. Многоугольники на решетках.-М.: МЦНМО, 2006.-72 с.
2. Васильев Н. Б. Вокруг формулы Пика.// Квант.-1974.-№ 12. с. 39-43.
3. Эгоров А. А. Решетки и правильные многоугольники // Квант. — 1974. № 12. с. 26–33.
4. Кушниренко А. Г. Целые точки в многоугольниках и многогранниках.// Квант. -1977.-№ 4. с. 13–20.
5. Жарковская Н. М., Рисс Е. А. Геометрия клетчатой бумаги. Формула Пика. // Математика, 2009, № 17, с. 24-25.

Ilmiy rahbar:dots.H.Nosirova

Magistrantlarning XIV ilmiy konferensiyasi materiallari-2014