# О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

***Рустамов Рустам Алишерзода***
***Специальность: Математика(йуналишлар буйича)***
***(2-курс)***

**Аннотация**

*Задача определения хотя бы одной фундаментальной системы решений системы линейных однородных неравенств имеет большой практический интерес. К этой задаче сводится нахождение общей формулы решений исходной системы. В данной работе описан способ построения фундаментального набора решений для произвольной системы однородных линейных неравенств.*

В настоящей работе рассматривается однородная система $m$ линейных неравенств с $n$ неизвестными:

$$L_i(X) \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq 0 \qquad (1)$$

Каждое решение системы можно рассматривать как некоторый вектор $X$ из $R^n$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Набор из конечного числа решений

$$X_1,\ X_2, ... ,X_p \qquad (2)$$

однородной системы (1) называется фундаментальным набором решений, если любое решение системы является неотрицательной линейной комбинацией векторов (2).

Если нам известен фундаментальный набор решений для системы (1), то общее решение системы может быть задано формулой:

$$X = k_1X_1 + k_2X_2 + ... + k_pX_p \qquad (3)$$

где $k_1, k_2, ... , k_p$ - любые неотрицательные числа. Можно поэтому считать, что, располагая каким-нибудь фундаментальным набором решений системы (1), мы имеем исчерпывающее описание всех решений системы (1).

Ниже приводится алгоритм вычисления фундаментального набора решений системы (1). Сначала построим фундаментальный набор решений для неравенства

$$ox_1 + ox_2 + ox_3 + ... + ox_n \geq 0, \qquad (4)$$

Решением этого неравенства является, очевидно, любой вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ допустим с неотрицательными координатами. В качестве фундаментального набора можно взять набор из векторов:

$$e_1 = (1,\ 0, ..., 0),$$
$$e_2 = (1,\ 1, ..., 0),$$
$$...\ ...\ ...\ ...$$
$$e_4 = (1,\ 0, ..., 1),$$

Действительно, каждый из этих векторов является решением, и любое решение $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ представимо в виде $X = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$, т.е. в виде неотрицательной линейной комбинации векторов $e_1, e_2, ... , e_n$.

Чтобы научиться строить фундаментальные наборы решений, рассмотрим в начале такую задачу:

Задача. Предположим, что задан фундаментальный набор решений $X_1, X_2, ..., X_p$ для системы (1). Требуется построить фундаментальный набор решений для системы, полученной добавлением к (1) еще одного неравенства

$L(X) \geq 0.$ (5)

Решения системы (1) – это в точности все неотрицательные линейные комбинации векторов $X_1, X_2, ..., X_p$. Среди этих комбинаций нам нужно выбрать такие, которые удовлетворяли бы также неравенству (5) и, более того, которые составили бы фундаментальный набор решений для системы (1), (5).

По отношению к функции $L(X)$ левой части неравенства (5) – все векторы $X_1, X_2, ..., X_p$ можно разбить на три группы: векторы, для которых $L(X) > 0$ векторы, для которых $L(X) < 0$ и, наконец, векторы, для которых $L(X) = 0$. Векторы первой группы обозначим $X_1^+, X_2^+, ..., X_k^+$, векторы второй группы $X_1^-, X_2^-, ..., X_i^-$, векторы третьей группы $X_1^0, X_2^0, ..., X_5^0$. Таким образом, $X_1^+, ..., X_k^+$, $X_1^-, ..., X_i^-, X_1^0, ..., X_5^0$- это те же самые векторы $X_1, X_2, ..., X_p$, но только расположенные, может быть, в другом порядке.

Разумеется, все векторы $X_\alpha^+(\alpha = 1, ..., k)$ удовлетворяют неравенству (4). То же самое относится и к $X_\gamma^o(\gamma = 1, ..., s)$ . Что же касается векторов $X_\beta^o(\beta = 1, ..., l)$, то из них ни один не является решением неравенства (5). Однако из каждой пары $X_\alpha^+, X_\beta^-$ можно образовать неотрицательную линейную комбинацию

$$aX_\alpha^+ + bX_\beta^- \qquad (5)$$

так, чтобы она удовлетворяла условию $L(X) = 0$. Для этого следует взять

$a = -L(X_\beta^-), \quad b = -L(X_\alpha^+)$

Действительно, числа $a$ и $b$ положительны и, кроме того,

$L(aX_\alpha^+ + bX_\beta^-) = aL(X_\alpha^+) + bL(X_\beta^-) = -L(X_\beta^-)L(X_\alpha^+) + L(X_\beta^-)L(X_\alpha^+) = 0$

Обозначим вектор (6) с указанным выше значениями $a$ и $b$ через $X_{\alpha\beta}^0$

$X_{\alpha\beta}^0 = -L(X_\beta^-)X_\alpha^+ + L(X_\alpha^+)X_\beta^-.$

Ответ к поставленной нами задаче дает следующая теорема.

Теорема. (см. [1]) Векторы

$X_1^+, ..., X_k^+, X_1^0, ..., X_s^0, X_{11}^0, X_{12}^0, ..., X_{kl}^0$

(всего здесь $k + s + kl$ векторов) образуют фундаментальный набор решений для системы (1), (5).

Способ построения фундаментального набора решений таков (см. [2], [3]): рассмотрим произвольную систему однородных линейных неравенств. Для первого неравенства системы можно построить фундаментальный набор решений присоединяя к ней неравенство (4). Присоединив к полученной системе второе неравенство, можно, построить фундаментальный набор решений для системы, состоящей из первых двух неравенств. Далее присоединяем третье неравенство и т.д., пока не получим фундаментальный набор решений для всей исходной системы неравенств. Этим доказано существование и одновременно указан способ построений фундаментального набора решений.

Пример: Для системы

$$\left.\begin{aligned} L_1(X) &= -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 \geq 0 \\ L_2(L) &= 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

требуется найти все неотрицательные решения.

Мы уже знаем, что для неравенства (4) в качестве фундаментального набора можно взять набор из векторов:

$X_1 = (1,0,0,0)$, $X_2 = (0,1,0,0)$, $X_3 = (0,0,1,0)$, $X_4 = (0,0,0,1)$

Присоединим к неравенству (4) первое из неравенств (7). Тогда единственным вектором типа $X_\alpha^+$ является $X_3$, векторы типа $X_\beta^-$ суть $X_1, X_2, X_4$, а векторов типа $X_j^0$ нет.

Находим векторы типа $X_{\alpha\beta}^0$:

$Y_1 = X_{31}^0 = 2X_3 + 4X_1 = (4, 0, 2, 0)$, $Y_2 = X_{32}^0 = 3X_3 + 4X_2 = (0, 4, 3, 0)$

$Y_4 = X_{34}^0 = 5X_3 + 4X_4 = (0, 0, 5, 4)$, $Y_1 = X_3$.

Векторы $Y_3, Y_1, Y_2, Y_4$ образуют фундаментальный набор решений для системы, состоящей из (4) и первого из неравенств (7). Присоединяем к этой системе второе из неравенств (7) и находим, что роль векторов $Y_\alpha^+$ играют $Y_1, Y_2$, роль векторов $Y_\beta^-$ играют $Y_3$, $Y_4$, а $Y_j^0$ нет. Находим векторы типа $Y_{\alpha\beta}^0$:

$Y_{13}^0 = 2Y_1 + Y_3 = (8,0,5,0)$, $Y_{14}^0 = 6Y_1 + 4Y_4 = (24,0,32,16)$

$Y_{23}^0 = 2Y_2 + 6Y_3 = (0,8,12,0)$, $Y_{24}^0 = 6Y_2 + 4Y_4 = (0,24,48,24)$

Векторы $Y_1, Y_2, Y_{13}^0, Y_{14}^0, Y_{23}^0, Y_{24}^0$ образуют фундаментальный набор решений для системы (4), (7).

Общее решение имеет вид:

$X = aY_1 + bY_2 + cY_{13}^0 + dY_{14}^0 + eY_{23}^0 + fY_{24}^0,$

где $a, b, c, d, e, f$ - произвольные неотрицательные числа.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А.С.Солодовников «Система линейных неравенств» ИЗД. «Наука», Москва,1977
2. А.С.Черников «Линейные неравенства» М.Наука, 1968.
3. А.Солеев, Э.Сеттарова «Алгоритм Моцкина-Бургера нахождения решений системы однородных неравенств» - Карши: Труды научной конференции «Проблемы современной математики» 2011. – с.231-234.


***Д.ф.-м.н. проф. А.С.Солеев***