

PANJARADAGI LAPLAS OPERATORLARNING BA'ZI XOSSALARI

Abdullayev J.I., Usmonov X.Z.

Samarqand, SamDU professori, Samarqand, SamDU magistranti

Bu ishda ikki o'lchamli panjarada erkin harakatlanayotgan zarraga mos Hamiltonianning chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma ekanligi ko'rsatilib, spektri haqida to'la ma'lumot keltirilgan.

Ikki o'lchamli panjara Z^2 da erkin harakatlanayotgan zarraning holati odatda $\ell_2(Z^2)$ Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi quyidagi Laplasian yordamida beriladi

$$(\Delta\psi)(x) = \frac{1}{m} \sum_{s \in Z^2} \varepsilon(s) \psi(x-s). \quad (1)$$

Bu yerda m zarrachaning massasi. ε dispersiya (sochilish) funksiyasi deyiladi. Bu funksiyani Z^2 da aniqlangan haqiqiy qiymatli juft va finit funksiya deb faraz qilamiz.

Ma'lumki, Z^2 da aniqlangan ixtiyoriy φ finit funksiya $\ell_2(Z^2)$ fazoga qarashli bo'ladi va ular uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{x \in Z^2} |\varphi(x)|^2 = \sum_{x \in D_\varphi} |\varphi(x)|^2. \quad (2)$$

Bu yerda D_φ bilan φ finit funksiyaning tasuvchisi (nositeli) belgilangan. Ravshanki, istalgan kompakt to'plam chegaralangan bo'ladi ([1] ga qarang), Z^2 fazoda esa ixtiyoriy chegaralangan to'plam chekli sondagi elementlardan iborat bo'ladi. $D(D \subset Z^2)$ to'plam elementlari sonini N_D bilan belgilaymiz, ya'ni $N_D = \text{card} D$.

1-tasdiq. (1) tenglik bilan aniqlangan Laplasian chegaralangan operatoridir.

Isbot. $\ell_2(Z^2)$ fazodagi norma ta'rifidan foydalansak

$$\|\Delta\psi\|^2 = \sum_{x \in Z^2} \left| \frac{1}{2} \sum_{s \in D_\varepsilon} \varepsilon(s) \psi(x-s) \right|^2 \leq \sum_{x \in Z^2} \frac{1}{4m^2} \sum_{s \in D_\varepsilon} |\varepsilon(s)|^2 \sum_{s \in D_\varepsilon} |\psi(x-s)|^2 \quad (3)$$

ga ega bo‘lamiz. Biz bu yerda Kosh-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalandik. (2)

tenglikka ko‘ra $\sum_{s \in D_\varepsilon} |\varepsilon(s)|^2 = \|\varepsilon\|^2$ bo‘ladi. Ixtiyoriy $\psi \in \ell_2(Z^2)$ uchun

$$\sum_{x \in Z^2} |\psi(x-s)|^2$$

qator yaqinlashuvchi, uning yig‘indisi $s(s \in Z^2)$ ga bog‘liq emas va u $\|\psi\|^2$ ga teng.

Shunday ekan quyidagi yig‘indilar o‘zaro teng:

$$\sum_{x \in Z^2} \sum_{s \in D_\varepsilon} |\psi(x-s)|^2 \quad \text{va} \quad \sum_{s \in D_\varepsilon} \sum_{x \in Z^2} |\psi(x-s)|^2.$$

Oxirga yig‘indi uchun

$$\sum_{s \in D_\varepsilon} \sum_{x \in Z^2} |\psi(x-s)|^2 = \sum_{s \in D_\varepsilon} \|\psi\|^2 = N_{D_\varepsilon} \|\psi\|^2.$$

Olingan natijalardan foydalanib (3) tengsizlikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\|\Delta\psi\|^2 \leq \frac{1}{4m^2} \|\varepsilon\|^2 \cdot N_{D_\varepsilon} \cdot \|\psi\|^2. \quad (4)$$

(4) tengsizlikdan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\|\Delta\psi\| \leq \frac{1}{2m} \|\varepsilon\| \cdot \sqrt{N_{D_\varepsilon}} \cdot \|\psi\|, \quad \|\Delta\| \leq \frac{1}{2m} \|\varepsilon\| \cdot \sqrt{N_{D_\varepsilon}}.$$

1-tasdiq isbotlandi.

2-tasdiq. ε funksiyaga qo‘yilgan shartlarda Δ simmetrik operator bo‘ladi.

Isbot. Operatorning simmetriklik sharti bo‘lgan $(\Delta\psi, \varphi) = (\psi, \Delta\varphi)$ tenglikni ixtiyoriy φ va $\psi \in \ell_2(Z^2)$ lar uchun bajarilishini tekshiramiz:

$$(\Delta\psi, \varphi) = \sum_{x \in Z^2} (\Delta\psi)(x) \overline{\varphi(x)} = \sum_{x \in Z^2} \sum_{s \in Z^2} \frac{1}{2m} \varepsilon(s) \psi(x-s) \overline{\varphi(x)} =$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{2m} \sum_{t \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon(x-t) \psi(t) \overline{\varphi(x)} = \sum_{t \in \mathbb{Z}^2} \psi(t) \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{2m} \varepsilon(x-t) \overline{\varphi(x)} \right). \quad (5)$$

Bu yerda biz $x-s=t$ almashtirishdan foydalandik. Oxirgi tenglikni hosil qilishda absolyut yaqinlashuvchi qatorlarda yig'indilarni o'rinlarini almashtirish haqidagi tasdiqdan foydalandik. Endi ε funksiyaning juftligidan hamda haqiqiy qiymatlar qabul qilishidan foydalanib, (5) tenglikning o'ng tomonidagi qavs ichidagi ifodani quyidagicha yozib olamiz:

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{2m} \varepsilon(x-t) \overline{\varphi(x)} = \frac{1}{2m} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon(-s) \overline{\varphi(t-s)} = \frac{1}{2m} \overline{\sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon(-s) \varphi(t-s)} = \overline{(\Delta\varphi)(t)}. \quad (6)$$

(5) va (6) dan

$$(\Delta\psi, \varphi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} (\Delta\psi)(x) \overline{\varphi(x)} = \sum_{t \in \mathbb{Z}^2} \psi(t) \overline{(\Delta\varphi)(t)} = (\psi, \Delta\varphi)$$

tenglikni olamiz. 2-tasdiq isbot bo'ldi.

Istalgan simmetrik A operator uchun

$$m_A = \inf_{\|f\|=1} (Af, f), \quad M_A = \sup_{\|f\|=1} (Af, f)$$

sonlarni kiritamiz. m_A va M_A sonlari A operator spektrining quyi va yuqori chegaralari ([2] ga qarang) deyiladi.

1-ta'rif. A simmetrik operator spektrining kengligi deb $\omega(A) = M_A - m_A$ ga aytiladi.

2-ta'rif. Biror U unitar operator hamda A va B operatorlar uchun $A = UBU^*$ tenglik o'rinli bo'lsa A va B lar unitar ekvivalent operatorlar deyiladi.

Faraz qilaylik sochilish funksiyasi

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} a, & |s| \leq 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

bo'lsin, ν esa ikki o'lchamli tor $T^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ dagi Xaar o'lchovi bo'lsin. $L_2(T^2)$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi h operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(hf)(p) = \frac{a}{2m}(1 + 2\cos p_1 + 2\cos p_2)f(p).$$

3-tasdiq. Agar sochilish funksiyasi ε , (7) tenglik bilan aniqlangan bo'lsa, u holda h va Δ operatorlar unitar ekvivalent bo'ladi.

Agar $a > 0$ bo'lsa, $m_h = -\frac{3a}{2m}$, $M_h = \frac{5a}{2m}$ bo'ladi.

Teorema. Sochilish funksiyasi (7) tenglik bilan aniqlangan bo'lib, $a > 0$ bo'lsin. U holda Δ operatorning spektri $\left[-\frac{3a}{2m}, \frac{5a}{2m}\right]$ kesmani tutash to'ldiradi. Δ operator spektrining kengligi $\omega(\Delta)$ zarraning massasiga teskari proporsional, a parametrga to'g'ri proporsional.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. J.I.Abdullayev, R.N.G'anixo'jayev, M.H.Shermatov, O.I. Egamberdiyev. Funktsional analiz va integral tenglamalar. Toshkent, LIGHT-GROUP. 2015. 460.
2. Ф.Рис., Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. Москва. Мир. 1979. 588.