

Talablar yig'iladigan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi.

Sistema talablarni to'plovchi va bu talablarga xizmat ko'rsatuvchi asbobdan tashkil topgan bo'lsin. To'plovchiga vaqtning tasodifiy momentlarida λ (vaqt birligi ichida keluvchi talablarning o'rtacha soni) parametrlı Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan talablar keladi. To'plovchining hajmi chegaralangan va n ta talabga teng. Agar talab to'plovchi to'la bo'lgani ustiga kelasa, u holda bu talab yo'qotiladi. Xizmat ko'rsatuvchi asbob biron tasodifiy vaqt momentidan so'ng to'plovchidan shu vaqt momentigacha yig'ilgan talablarni xizmat ko'rsatishga oladi. Asbobning bu talablar massiviga xizmat ko'rsatish vaqti μ parametrlı ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor. Massiv talablari to'la xizmat qilinib bo'lishi bilan to'plovchiga talablarni olish uchun yangi chaqiriq keladi va hokaz.

Qo'yidagi belgilashlarni kiritamiz:

$P_0(t)$ – t momentda to'plovchida bitta ham talab bo'lmasligi ehtimoli;

$P_k(t)$ – t momentda to'plovchida k ta talab bo'lishi ehtimoli.

Endi bizning masalamiz $P_k(t)$ ehtimollar qanoatlantiradigan differensial tenglamalar tuzish va stasionar yechimlarni topishdan iborat .

$P_k(t + \Delta t)$ ehtimolni topamiz. U quyidagi ehtimollar yig'indisiga teng*):

$-t$ momentda to'plovchida bitta ham talab bo'lmagan va Δt vaqt ichida talab kelmagan bo'lishi ehtimoli

$$P_0(t)(1 - \lambda\Delta t);$$

$-t$ momentda to'plovchida k ta talab bo'lgan va Δt vaqt ichida asbob ularni xizmat qilish uchun olgan bo'lish ehtimoli

$$\sum_{k=1}^n P_k(t) \cdot \mu \Delta t$$

Bunda

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda \Delta t) + \mu \Delta t \sum_{k=1}^n P_k(t)$$

$P_0(t)$ ni tenglikning chap tomoniga o'tkazib,

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -\lambda P_0(t) \Delta t + \mu \Delta t \sum_{k=1}^n P_k(t)$$

ni hosil qilamiz.

Bu tenglikning har ikkala tomonini Δt ga bo'lib, so'ng $\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu \sum_{k=1}^n P_k(t)$$

Agar

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = P'_0(t)$$

ekanligini hisobga olsak, unda yuqoridagi tenglikdan

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu \sum_{k=1}^n P_k(t)$$

differensial tenglamaga ega bo'lamiz.

Endi qolgan $P_k(t)$ ehtimollar uchun differensial tenglamalar tuzishga o'tamiz. $1 \leq k \leq n$ bo'lsin. $P_k(t + \Delta t)$ ehtimolni topamiz. U quyidagi ehtimollar yig'indisiga teng:

- t momentda to'plovchida k ta talab bo'lgan va Δt vakt ichida talab kelmagan, asbob oldingi talablarga xizmat ko'rsatib bo'lmagan bo'lish ehtimoli

$$P_k(t)[1 - (\lambda + \mu)\Delta t]$$

- t momentda to'plovchida $k - 1$ ta talab bo'lgan va Δt vaqt ichida bitta talab kelgan bo'lishi ehtimoli

$$P_{k-1}(t)\lambda\Delta t,$$

bundan

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t)[1 - (\lambda + \mu)\Delta t] + P_{k-1}(t)\lambda\Delta t \quad .$$

$P_k(t)$ ni tenglikning chap tomoniga o'tkazib, hosil bo'lgan tenglikning har ikkala tomonini Δt ga bo'lsak,

$$\frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -(\lambda + \mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)$$

tenglik hosil bo'ladi.

Bu tenglikda $\Delta t \rightarrow 0$ da limitni o'tsak, $P_k(t)$ ehtimoli uchun

$$P'_k(t) = -(\lambda + \mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) \quad (1 \leq k \leq n)$$

differensial tenglama hosil bo'ladi.

$P_n(t + \Delta t)$ ehtimolni topamiz. Bu ehtimol quyidagi ehtimollar yig'indisiga teng bo'ladi:

- t momentda to'plovchida n ta talab bo'lgan va Δt vaqt ichida asbob oldingi talablarni xizmat qilib bo'lmaganligi ehtimoli

$$P_n(t)(1 - \mu\Delta t) ;$$

- t momentda to'plovchiga $n - 1$ ta talab bo'lgan va Δt vaqt ichida bitta yangi talab kelgan bo'lishi ehtimoli

$$P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

Bizning masalamizda bu limit mavjud bo'ladi [1],[2]. Yozishning qulayligi uchun

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

belgilash kiritamiz. Unda (2) sistema quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha P_0 + \sum_{k=1}^n P_k = 0, \\ -(\alpha + 1)P_1 + \alpha P_0 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ -(\alpha + 1)P_{n-1} + \alpha P_{n-2} = 0, \\ -P_n + \alpha P_{n-1} = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Bu sistemaning tenglamalarini ketma – ket yechib, P_k ehtimollarning ifodalarini topamiz. Ma'lumki,

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1 \quad ,$$

U xolda

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1 - P_0$$

bo'ladi. Buni hisobga olib, (3) sistemaning birinchi tenglamasidan P_0 ni topamiz:

$$-\alpha P_0 + 1 - P_0 = 0$$

bundan

$$P_0 = \frac{1}{\alpha + 1} \quad (4)$$

bo'ladi.

Ikkinchi tenglamasidan (4) ni hisobga olib, P_1 ni topamiz:

$$-(\alpha + 1)P_1 + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha + 1} = 0 \quad ,$$

Bundan

$$P_1 = \frac{\alpha}{(\alpha + 1)^2}$$

Xuddi shunga o'xshash, quyidagilarni topamiz:

$$P_2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^3}, \quad P_3 = \frac{\alpha^3}{(\alpha+1)^4},$$

$$P_4 = \frac{\alpha^4}{(\alpha+1)^5}, \dots, P_{n-1} = \frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha+1)^n}.$$

P_n ni esa oxirgi tenglamadan topamiz:

$$P_n = \alpha P_{n-1} = \alpha \cdot \frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha+1)^n} = \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^n}.$$

Shunday qilib, dastlabki (2) algebraik tenglamalar sistemasining yechimi

$$P_k = \frac{\alpha^k}{(\alpha+1)^{k+1}}, \quad 0 \leq k < n,$$

$$P_n = \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^n}$$

ko'rinishida bo'ladi. Bu formulalar to'plovchidagi talablar sonining matematik kutilmasi, rad qilish ehtimoli va to'plovchining hajmi kabi muhim ko'rsatkichlarni topish imkonini beradi. Masalaning shartiga ko'ra kelgan talab rad javobini faqat to'plovchida n ta talab bo'lganda olishi mumkin. U holda rad qilish ehtimoli

$$P_{rad} = P_n = \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^n}$$

ga teng. To'plovchidagi talablarning o'rtacha soni

$$M = \sum_{k=1}^n k p_k = \sum_{k=1}^{n-1} k p_k + n p_n = \frac{1}{\alpha+1} \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^k + n \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^n$$

munosabatdan topiladi. To'plovchida n ta talab bo'lish ehtimolini topish formulasidan foydalanib, berilgan xizmat ko'rmatish ishonchililigi $(1 - P_{rad})$ va asbobning unumdorligida (μ), zarur bo'ladigan to'plovchi hajmini aniqlash mumkin:

$$n = \frac{\ln P_{rad}}{\ln \alpha - \ln(\alpha+1)}$$

Foydalanilgan adabiyotlar.

- 1.Гнеденко “Введение в теорию массового обслуживания”. М.”Наука”
1989 й
- 2.Хинчин А.Я.”Работы по математической теорию массового
обслуживание ”. Физматгиз,М.1963.