

## TO'LA UZLUKSIZ OPERATORLARNING BA'ZI XOSSALARI

Abdullayev J.I., Xudoyqulov J.X.

*Samarqand, SamDU*

Hilbert yoki Banax fazosida berilgan chiziqli operatorlarni tekshirish jarayonida uchraydigan eng sodda masalalardan biri - bu invariant elementlarni topish yoki bu operator ta'sirida yo'nalishini saqlovchi elementlarni topish masalasidir, ya'ni shunday elementlarki, ular

$$Tf = \mu f \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradi. (1) tenglamani qanoatlantiruvchi har qanday nolmas  $f$  element  $T$  operatorning *xos elementi*, unga mos  $\mu$  qiymat  $T$  operatorning *xos qiymati* deyiladi. Xususan  $\mu=0$  soni ham *xos qiymat* bo'lishi mumkin. (1) tenglamaning biror  $\mu$  *xos qiymatga* mos yechimlari to'plami  $f$  chiziqli ko'pxillilik tashkil qiladi,  $T$  operatorning uzluksizligidan bu to'plamning yopiqqligi kelib chiqadi. Demak, (1) tenglamaning yechimlari to'plami qism fazo tashkil qiladi. Bu qism fazo  $\mu$  *xos qiymatga* mos *xos qism fazo* deyiladi.  $\mu$  *xos qiymatning karraligi* deb, unga mos *xos qism fazoning o'lchamiga* aytiladi, ya'ni  $\dim \text{Ker}(T - \mu I) = n$  soniga  $\mu$  *xos qiymatning karraligi* deyiladi. Xususan  $n=1$  bo'lsa  $\mu$  *xos qiymat oddiy* ([1] ga qarang) deyiladi.

Endi  $\Gamma$  Hilbert fazosida ixtiyoriy  $f, g \in \Gamma$  lar uchun

$$(Tf, g) = (f, Tg)$$

o'rinli bo'ladigan  $T: \Gamma \rightarrow \Gamma$  operatorni qaraymiz. Bunday operatorlar *simmetrik operatorlar* deyiladi. Bu tipdagi operatorlar  $T = T^*$  sharti qanoatlantiradi, shuning uchun ular *o'z-o'ziga qo'shma* operatorlar ham deyiladi. Bu ikki tushuncha chegaralangan chiziqli operatorlar uchun ekvivalentdir. Agar  $T$  simmetrik operator barcha  $f \in \Gamma$  lar uchun  $(Tf, f) \geq 0$  shartni qanoatlantirsa  $T$  ga musbat operator ([1] ga qarang) deyiladi.

**1-ta'rif.** Agar  $T: \Gamma \rightarrow \Gamma$  chiziqli chegaralangan operator har qanday kuchsiz yaqinlashuvchi  $\{x_n\}$  ketma-ketlikni kuchli yaqinlashuvchi  $y_n = Tx_n$

ketma-ketlikka akslantirsa,  $T$  ga to'la uzluksiz operator deyiladi.

**1-teorema.** Hilbert fazosini chekli o'lchamli fazoga akslantiruvchi har qanday chiziqli operator to'la uzluksizdir ([2] ga qarang).

Endi biz faqat to'la uzluksiz simmetrik operatorlarni qaraymiz. To'la uzluksiz simmetrik operatorlar uchun diogonal ko'rinishga keltirish haqidagi teorema chekli o'lchamli fazolarda qanday bayon qilinsa, cheksiz o'lchamli fazolarda ham deyarli xuddi shunday bayon qilinadi. Xususan to'la uzluksiz simmetrik operatorlar har doim xos qiymatga ega bo'ladi.

**2-teorema.** Agar  $A: \Gamma \rightarrow \Gamma$  musbat to'la uzluksiz operator bo'lsa, u holda ekstrimal masala

$$(Af, f) = \text{maksimum}, \quad \|f\| = 1 \text{ shartda}$$

yechimga ega. Bu masalaning ixtiyoriy  $f = \varphi$  yechimi  $A$  operatorning xos elementi bo'ladi. Bu elementga mos  $\mu_1$  xos qiymat uchun  $\mu_1 = \|A\|$  tenglik o'rinli.

To'la uzluksiz operatorlarning panjaradagi Shryodinger operatorlarining xos qiymatlarini topishga tadbiqu.

Bir o'lchamli panjara  $Z$  da harakatlalhayotgan ikki fermionli sistema Hamiltoniani  $H$  Hilbert fazosi  $\ell_2^{as}(Z \times Z) = \{\hat{\psi} \in \ell_2(Z \times Z) : \hat{\psi}(n, m) = -\hat{\psi}(m, n)\}$  da o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator sifatida aniqlanadi ([3] ga qarang):

$$(H\hat{\psi})(n, m) = \sum_{|s|=1} [2\hat{\psi}(n, m) - \hat{\psi}(n+s, m) - \hat{\psi}(n, m+s)] - \hat{v}(n-m)\hat{\psi}(n, m), \quad \hat{\psi} \in \ell_2^{as}(Z \times Z).$$

Bu yerda  $\hat{v}(n) \geq 0$  haqiqiy qiymatli  $Z$  da aniqlangan juft funksiya. Ko'p hollarda  $\hat{v}$  ni finit funksiya deb faraz qilishadi. Biz ham  $\hat{v}$  ni  $|n| > 2$  bo'lganda  $\hat{v}(n) = 0$  deb faraz qilamiz. Ma'lumki, sistema Hamiltoniani  $H$  ning bog'langan holatlarini o'rganish Shryodinger operatorlari deb nomlanuvchi  $H(k)$ ,  $k \in T = [-\pi, \pi]$  operatorlar oilasining xos qiymatlarini o'rganish masalasiga keltiriladi. Har bir  $k \in T$  da  $H(k) = H_0(k) - V$  operator  $L_2^-(T) = \{f \in L_2(T) : f(-p) = -f(p)\}$  Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi operator sifatida aniqlanadi:

$$(H_0(k)f)(p) = \left(2 - 2\cos\frac{k}{2}\cos p\right)f(p),$$

$$(V f)(p) = \frac{1}{\pi} \int_T [a \sin p \sin q + b \sin 2p \sin 2q] f(q) dq.$$

Bu yerda  $a = \hat{v}(1)$ ,  $b = \hat{v}(2)$  bo'lib,  $a > b \geq 0$  deb faraz qilamiz.  $H(k) = H_0(k) - V$  o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'lib, uning muhim spektri  $[m(k), M(k)]$  kesmadan iborat, bu yerda

$$m(k) = 2 - 2 \cos \frac{k}{2}, \quad M(k) = 2 + 2 \cos \frac{k}{2}.$$

Ma'lumki,  $V$  musbat operator, uning musbat kvadrat ildizini  $V^{\frac{1}{2}}$  orqali belgilaymiz.  $V^{\frac{1}{2}}$  ham integral operator bo'ladi va  $L_2^-(T)$  fazoda quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$(V^{\frac{1}{2}} f)(p) = \frac{1}{\pi} \int_T [\sqrt{a} \sin p \sin q + \sqrt{b} \sin 2p \sin 2q] f(q) dq.$$

Shryodinger operatori  $H(k)$  ning muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlarini o'rganish Faddeev tipidagi  $G(k, z) = V^{\frac{1}{2}} r_0(k, z) V^{\frac{1}{2}}$ ,  $z \leq m(k)$  operatorning xossalari o'rganishga keltiriladi. Bu yerda  $r_0(k, z) = (H_0(k) - zI)^{-1}$  qo'zg'almas  $H_0(k)$  operatorning rezolventasi.

**1-lemma.** Har bir  $k \in T$  va  $z \leq m(k)$  uchun  $G(k, z)$  to'la uzluksiz musbat va simmetrik operator bo'ladi.

**2-lemma.** Biror  $z < m(k)$  soni  $H(k)$  operatorning xos qiymati bo'lishi uchun  $\lambda = 1$  soni  $G(k, z)$  operatorning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarli. Bundan tashqari ularning karalliklari ham teng, ([3] ga qarang) ya'ni

$$\dim \text{Ker}(H(k) - zI) = \dim \text{Ker}(G(k, z) - I).$$

**3-teorema.**  $H(k)$  operatorning  $z$  ( $z \leq m(k)$ ) dan kichik xos qiymatlari soni  $G(k, z)$  operatorning birdan katta xos qiymalari soniga teng ([4] ga qarang).

Biz qarayotgan holda limitik operator  $G(k, m(k))$  to'la uzluksiz musbat operator sifatida aniqlanadi. Uning  $f \in L_2^-(T)$  elementga ta'sirini topamiz:

$$(G(k, m(k)) f)(p) = \frac{1}{\pi \cos \frac{k}{2}} \int_0^{\pi} [a \sin p \sin q + \sqrt{ab}(\sin p \sin 2q + \sin 2p \sin q) + b \sin 2p \sin 2q] f(q) dq.$$

**4-teorema.** a) Agar  $a > b = 0$  bo'lsa, u holda  $G(k, m(k))$  operator noldan farqli yagona oddiy  $\lambda = a : \cos \frac{k}{2}$  xos qiymatga ega bo'ladi.

b) Agar  $a > b > 0$  bo'lsa, u holda  $G(k, m(k))$  operator noldan farqli ikkita oddiy xos qiymatga ega bo'ladi, ular:

$$\lambda_1 = \frac{a + 2b + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2 \cos \frac{k}{2}}, \quad \lambda_2 = \frac{a + 2b - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2 \cos \frac{k}{2}}.$$

4-teoremadan foydalanib Shryodinger operatori  $H(k)$  ning  $m(k)$  dan kichik nechta xos qiymati borligini aytib berish mumkin. Masalan a) holda  $a > \cos \frac{k}{2}$  bo'lsa  $H(k)$  operatorning  $m(k)$  dan kichik yagona oddiy xos qiymati bo'ladi.

#### Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ф.Рис., Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. Москва. Мир. 1979. 588.
2. J.I.Abdullayev, R.N.G'anixo'jayev, M.H.Shermatov, O.I. Egamberdiyev. Funksional analiz va integral tenglamalar. Toshkent, Light-Group. 2015.
3. Абдуллаев Ж.И. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 147, № 1. 36-47.
4. Panjaradagi Shryodinger operatori uchun Birman-Shvinger prinsipi. SamDU Ilmiy tadqiqotlar axborotnomasi. 2014. N 5.