

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
УЗБЕКИСТАН
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА
КАФЕДРА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА»**

Сибукаев Ш.М.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

**ПО ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН
(КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ)**

Тошкент – 2014

Лекция 1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

1. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ И ФОРМУЛЫ.

В этой главе рассматриваются поперечные колебания главным образом однородных пластинок постоянной толщины h , ограниченных простым контуром (прямоугольных или круглых). При этом в основу исследования кладутся следующие допущения.

- Изгибные деформации пластинки при колебаниях предполагаются малыми упругими деформациями, подчиняющимися закону Гука.

- Предполагается, что в пластинке существует нейтральный слой, расстояния между точками которого при малых прогибах пластинки не изменяются. В однородной пластинке этот слой совпадает со срединной поверхностью, разделяющей высоту пластинки пополам. Плоскость, совпадающую с нейтральным слоем в недеформированном состоянии пластинки, примем за координатную плоскость Oxy , от которой будем отсчитывать отклонения отдельных элементов пластинки. Ось Oz направляем вниз, как показано на рис. 1.

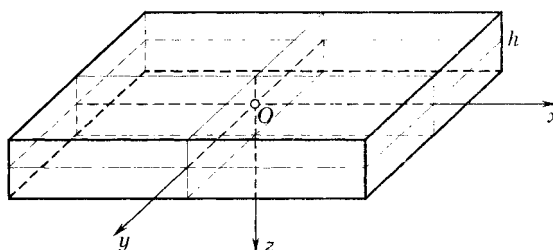


Рис. 1

Далее, предполагается, что при прогибе пластинки все точки нейтрального слоя перемещаются параллельно оси Oz и что частицы, лежащие на одной нормали MN к нейтральному слою Ox (рис. 2), остаются на этой нормали и при прогибе пластинки, поворачиваясь вместе с нормалью вокруг точки A пересечения ее с нейтральным слоем (на рис. 1 точки M, N, A переходят соответственно в M', N', A').

- Предполагается, наконец, что перемещения всех точек, лежащих на одной нормали к нейтральному слою, параллельные оси Oz , одинаковы и равны перемещениям соответствующих (т. е. лежащих на той же нормали) точек нейтрального слоя.

Из приведенных допущений следует, что если обозначить через u, v, w составляющие перемещения точки $M(x, y, z)$ соответственно по осям Ox, Oy, Oz через u_0, y_0, z_0 — составляющие по тем же осям перемещения соответствующей точки A нейтрального слоя, то

$$u_0 = v_0 = 0, \quad w = w_0, \quad (1)$$

где $w = w_0 = f(x, y, t)$ не зависит от координаты z . Что касается u и v , то, как видно из рис. 2,

$$\left. \begin{aligned} u &= z \sin \varphi = z \varphi = -z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v &= z \sin \psi = z \psi = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

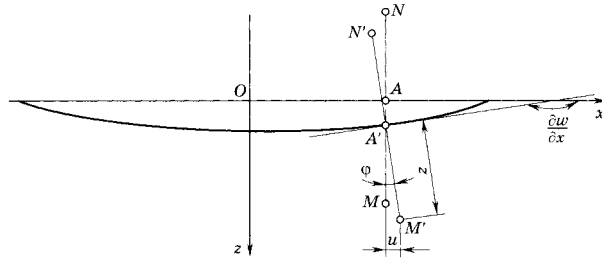


Рис. 2

(здесь φ и ψ — углы наклона касательных в точке A' соответственно к осям x и y). По известным из теории упругости формулам составляющие деформации

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, & e_{zz} &= 0, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, & e_{xz} &= e_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Соответствующие компоненты напряжения X_x , Y_y , $X_y=Y_x$ равны

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{xx} + \sigma e_{yy}) = -\frac{Ez}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right), \\ Y_y &= \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{yy} + \sigma e_{xx}) = -\frac{Ez}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right), \\ X_x = Y_y &= -\frac{Ez}{1+\sigma} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = G e_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где E — модуль упругости, G — модуль сдвига, σ — коэффициент Пуассона.

Лекция 2 КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК.

Рассматривая функционал-действие по Остроградскому — Гамильтону

$$S = \int_{t_A}^{t_B} (T - \Pi) dt \quad (1)$$

на совокупности главных колебаний одного и того же периода $2\pi/p$ и выполнив на промежутке $t_B - t_A = 2\pi/p$ интегрирование по времени, приходим к уравнению

$$\delta(T_{\max} - \Pi_{\max}) = 0, \quad (2)$$

которому должны удовлетворять собственные формы действительных главных колебаний пластинки. Подставим в это уравнение максимальную кинетическую и потенциальную энергию

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{\max} &= \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy, \\ T_{\max} &= \frac{\gamma h p^2}{2g} \iint w^2 dx dy. \end{aligned} \right\}$$

и вычислим вариацию их разности.

Начинаем с вычисления вариации потенциальной энергии

$$\delta \Pi_{\max} = D \iint \left\{ \Delta w \left[\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - \right. \\ \left. - (1-\sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\} dx dy$$

где через Δ обозначен оператор Лапласа.

Выполнив дважды интегрирование по частям в каждом слагаемом подынтегральной функции, получим:

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w dx + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy, \quad (3)$$

где первые два интеграла в правой части являются контурными интегралами, взятыми по внешнему контуру пластинки.

По аналогии с (3):

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \delta w dy + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) путем простой перемены обозначений находим:

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w dx + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy \quad (5)$$

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dy - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \delta w dy + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w dx dy. \quad (6)$$

Точно так же

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy = \\ = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dy - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w dx + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy \quad (7)$$

это выражение можно было бы получить, исходя из равенства

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy = \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy.$$

С помощью вышеприведенных формул находим

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left[\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy = \oint \Delta w \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy - \\ - \oint \Delta w \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx - \oint \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} dy - \frac{\partial \Delta w}{\partial y} dx \right) \delta w + \iint \Delta^2 w \delta w dx dy, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \quad (9)$$

Подставим теперь (8), (3), (4) и (7) в выражение для $\delta \Pi_{max}$. После перегруппировки членов получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \delta \Pi_{max} = \oint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dy - (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right] \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x} \right) + \\ + \oint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right] \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y} \right) - \\ - \oint \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} dy - \sigma \frac{\partial \Delta w}{\partial y} dx \right) \delta w + \iint \Delta^2 w \delta w dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим через θ угол между внешней нормалью n и осью Ox и направим касательную l к контуру, как показано на рис. 1.

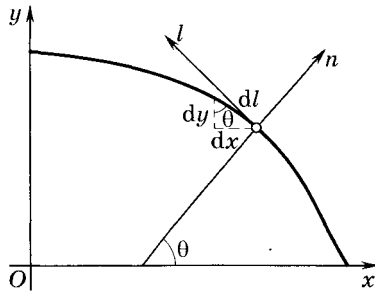


рис. 1

Тогда на контуре пластинки

$$\left. \begin{aligned} dx &= -dl \sin \theta, \quad dy = dl \cos \theta, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial n} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial l}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial n} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial l}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

При помощи этих формул выражение (10) может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \delta \Pi_{max} = \iint_{(S)} \Delta^2 w \delta w ds - \oint \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \delta w dl + \oint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) dl + \\ \left. + \oint (1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos 2\theta \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial l} \right) dl, \end{aligned}$$

где S – поверхность пластинки, ds – элемент поверхности нейтрального слоя.

Как известно из теории упругости, выражение

$$-D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \right] = 2M_L \quad (12)$$

представляет собой изгибающий момент на контуре пластинки. Выражение, стоящее под знаком третьего контурного интеграла, умноженное на D

$$D(1 - \sigma) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos 2\theta \right] = H_L, \quad (13)$$

есть крутящий момент на контуре пластинки. Наконец,

$$-D \frac{\partial \Delta w}{\partial n} = N_L \quad (14)$$

означает поперечную силу на контуре пластинки.

Выполнив интегрирование по частям в третьем контурном интеграле, приведем его к виду

$$\oint H_L \frac{\partial}{\partial l} (\delta w) dl = - \oint \frac{\partial H_L}{\partial l} \delta w dl. \quad (15)$$

После всех преобразований представим вариацию потенциальной энергии в следующем окончательном виде:

$$\delta \Pi_{\max} = D \iint_{(S)} \Delta^2 w \delta w \delta s - \oint M_L \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) dl + \oint \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial l} \right) \delta w dl. \quad (16)$$

Вариация кинетической энергии имеет вид

$$\delta \Gamma_{\max} = \frac{\mathcal{M} p^2}{g} \iint_{(S)} w \delta w ds. \quad (17)$$

Теперь, принимая во внимание формулы (16) и (17), запишем вариационное уравнение собственных форм поперечных колебаний пластинки

$$\iint_{(S)} \left(D \Delta^2 w - \frac{\mathcal{M}}{g} p^2 w \right) \delta w ds - \oint M_L \frac{\partial}{\partial n} (\delta w) dl + \oint \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial l} \right) \delta w dl = 0. \quad (18)$$

Лекция 3. ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН.

Условие

$$\iint_{(S)} \left(D\Delta^2 w - \frac{\mathcal{M}}{g} p^2 w \right) \delta w ds - \oint M_L \frac{\partial}{\partial n} (\delta w) dl + \oint \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial l} \right) \delta w dl = 0 \quad (1)$$

обращения в нуль первой вариации действия по Остроградскому – Гамильтону будет выполнено для формы $w(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \frac{\mathcal{M}}{g} p^2 w = 0 \quad (2)$$

и обращающей в нуль контурные интегралы, входящие в (1), т. е. удовлетворяющей также условию

$$\oint M_L \frac{\partial}{\partial n} (\delta w) dl - \oint \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial l} \right) \delta w dl = 0. \quad (3)$$

Уравнение (2), как легко в этом убедиться, является уравнением Эйлера для функционала

$$\iint_{(S)} \left[\frac{\mathcal{M} p^2}{g} w^2 - D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2(1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\} \right] ds$$

и, следовательно, представляет собой уравнение поперечных колебаний пластинки.

Равенство (3) выражает в самой общей форме краевые условия задачи. Оно будет выполнено:

- ◆ если края пластинки жестко закреплены, так как на таких краях

$$(\delta w)_{(L)} = \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{(L)} = 0; \quad (4)$$

- ◆ если края пластинки свободно оперты; в этом случае $(\delta w)_{(L)} = 0; M_L = 0;$

- ◆ наконец, если края пластинки свободны, так как тогда

$$M_L = 0, \quad N_L - \frac{\partial H_L}{\partial l} = 0.$$

Условия, налагающие ограничения на вариации δw и $\delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)$, называются

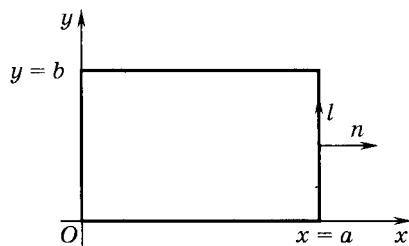


Рис. 1

геометрическими; условия, налагающие ограничения на краевые моменты и поперечные силы, т. е. на величины M_L и $N_L - \frac{\partial H_L}{\partial l}$, будем называть динамическими.

Для прямоугольной пластинки с краями, параллельными осям Ox и Oy (рис. 1), на краях, параллельных оси Oy :

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial n}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial l}$$

и

$$M_L = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad H_L = D(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad N_L = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right).$$

Если поэтому края, параллельные Oy , свободно оперты, то на этих краях

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

Если эти края жестко закреплены, то

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Если края, параллельные оси Oy , свободны, то на этих краях

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (7)$$

Условия для краев, параллельных оси Ox , получаются из приведенных заменой x на y и наоборот.

Когда на пластинку действует внешняя гармоническая нагрузка интенсивностью

$$F(x, y; t) = f(x, y) \sin pt,$$

уравнение форм вынужденных поперечных колебаний пластинки запишется следующим образом:

$$D\Delta^2 w - \frac{\mathcal{M}p^2}{g} w - f(x, y) = 0. \quad (8)$$

Лекция 4. СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ.

Уравнение форм поперечных колебаний пластинки

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \frac{\gamma h}{g} p^2 w = 0$$

можно истолковать как уравнение статического прогиба пластинки под действием собственной нагрузки

$$\mu(x, y) p^2 w(x, y). \quad (1)$$

Основываясь на принципе взаимности перемещений, можно установить одно из важнейших свойств собственных форм пластинки – их ортогональность. Предположим, что под действием собственной нагрузки $\mu p_i^2 w_i$ пластинка получает прогиб w_i , под действием нагрузки $\mu p_k^2 w_k$ — прогиб w_k . Тогда работа нагрузки $p_k^2 \mu w_k$ на перемещении w_i должна быть равна работе нагрузки $p_i^2 \mu w_i$ на перемещении w_k , что можно записать следующим образом:

$$\iint_{(S)} \mu p_i^2 w_i w_k ds = \iint_{(S)} \mu p_k^2 w_i w_k ds.$$

Отсюда

$$(p_i^2 - p_k^2) \iint_{(S)} \mu w_i w_k ds = 0$$

и если $p_i^2 \neq p_k^2$, то

$$\iint_{(S)} \mu w_i w_k ds = 0. \quad (2)$$

Для форм поперечных колебаний пластинки также имеет место теорема о разложении в ряд по собственным формам однородной задачи, т. е. по функциям $w_i(x, y)$, удовлетворяющим уравнениям

$$D \Delta^2 w_i - p_i^2 \mu w_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Этот ряд имеет вид

$$w(x, y) = \sum a_i w_i(x, y), \quad (3)$$

где коэффициенты a_i – равны

$$a_i = \frac{\iint_{(S)} \mu w(x, y) w_i(x, y) ds}{\iint_{(S)} \mu w_i^2(x, y) ds} \quad (4)$$

Для собственных форм, нормированных по правилу

$$\iint_{(S)} \mu w_i^2(x, y) ds = 1,$$

коэффициенты a_i будут иметь выражения

$$a_i = \iint_{(S)} \mu w_i(x, y) w(x, y) ds. \quad (5)$$

Для прямоугольных пластинок собственные формы $w_i(x, y)$ обычно представляют собой произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , другая – от y :

$$w_{ik}(x, y) = X_i(x) Y_k(y).$$

Ряд (3) будет в этом случае иметь вид

$$w(x, y) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} X_i(x) Y_k(y). \quad (6)$$

В главных колебаниях поверхность пластинки разделяется линиями $w_i(x, y) = 0$ на участки, колеблющиеся в одной или в противоположных фазах. Эти линии носят название узловых линий. На квадратной пластинке, закрепленной в одной точке (обычно в центре), посыпанной тонким песком и приведенной в колебательное движение, узловые линии образуют хорошо известные фигуры Хладни.

Лекция 5. СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФОРМ.

При любых условиях на двух других противоположных краях. Эта задача является, по-видимому, единственной, для которой существует точное решение уравнения

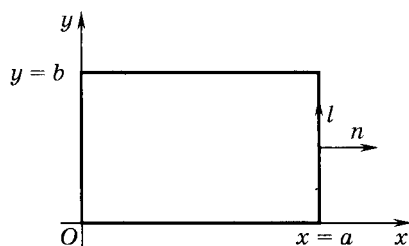


Рис. 1

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \frac{\mu h}{g} p^2 w = 0.$$

Предположим, что опертые края ($x=0$, $x=a$) параллельны оси Oy (рис. 1).

Будем искать решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - k^4 w = 0, \quad (1)$$

где $k^4 = \mu h p^2 / Dg$, в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(y) \sin \frac{i\pi x}{a}, \quad (2)$$

где $F_i(y)$ – неизвестные функции, подлежащие определению из уравнения (1). Легко видеть, что функция $w(x, y)$ удовлетворяет условиям на опертых краях, так как на этих краях (при $x=0$ и $x=a$)

$$w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Подставив (2) в (1), получим для $F_i(y)$ уравнение

$$F_i^{(iv)} - \frac{2i^2 \pi^2}{a^2} F_i'' + \left(\frac{i^4 \pi^4}{a^4} - k^4 \right) F_i = 0. \quad (3)$$

Для его решения составляем характеристическое уравнение

$$z^4 - \frac{2i^2 \pi^2}{a^2} z^2 + \left(\frac{i^4 \pi^4}{a^4} - k^4 \right) = 0 \quad (4)$$

вычислив корни которого

$$z_1 = -z_3 = \sqrt{i^2 \pi^2 / a^2 - k^2}, \quad z_2 = -z_4 = \sqrt{i^2 \pi^2 / a^2 + k^2}$$

найдем общий интеграл

$$F_i(y) = A_i \operatorname{sh} z_1 y + B_i \operatorname{ch} z_1 y + C_i \operatorname{sh} z_2 y + D_i \operatorname{ch} z_2 y.$$

Постоянные A_i, B_i, C_i, D_i определяются из условий на краях, параллельных оси Ox , где $y=0$, $y=b$.

Пусть, например, край $y=0$ свободно или шарнирно оперт, а край $y=b$ жестко закреплен. Тогда для $y=0$

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

откуда получаем

$$B_i = D_i = 0.$$

Для $y=b$

$$w(x, b) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

из чего следует

$$A_i \operatorname{sh} z_1 b + C_i \operatorname{sh} z_2 b = 0,$$

$$A_i z_1 \operatorname{ch} z_1 b + C_i z_2 \operatorname{ch} z_2 b = 0,$$

и

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sh} z_1 b & \operatorname{sh} z_2 b \\ z_1 \operatorname{ch} z_1 b & z_2 \operatorname{ch} z_2 b \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{или} \quad \frac{1}{z_1} \operatorname{th} z_1 b = \frac{1}{z_2} \operatorname{th} z_2 b.$$

Это решение имеет место для вещественных z_1 и z_2 .

Когда оба края $y=0$ и $y=b$ свободно оперты (случай пластинки, свободно опертой всеми краями), нетривиальное решение задачи получится при условии, что корни характеристического уравнения (4) z_1 и z_2 – мнимые. В этом случае общий интеграл уравнения (3) следует взять в виде

$$F_i(y) = A_i \sin k_1 y + B_i \cos k_1 y + C_i \operatorname{sh} z_2 y + D_i \operatorname{ch} z_2 y,$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - i^2 \pi^2 / a^2}$.

Из краевых условий

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} = 0,$$

$$w(x, b) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, b)}{\partial y^2} = 0$$

находим $B_i = C_i = D_i = 0, \quad \sin k_1 b = 0$.

Последнее уравнение есть уравнение частот пластинки. Из этого уравнения следует, что

$$k_1 b = j\pi, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

$$k^2 = \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \pi^2, \quad p_{ij} = \pi^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots$$

и
$$F_i(y) = A_j \sin \frac{j\pi y}{b}.$$

Ряд (2), определяющий форму колебаний пластинки, будет иметь вид

$$w(x, y) = \sum_{i, j=1}^{\infty} a_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}. \quad (5)$$

Случай пластинки, свободно опертой по всем краям, был рассмотрен С. П. Тимошенко, который, исходя из представления формы колебаний в виде (5), нашел решение задачи методом нормальных координат.

Некоторое представление о расположении узловых линий на пластинке, свободно опертой по краям, можно получить, рассматривая отдельные слагаемые ряда (5) и затем линейно налагая соответствующие им формы. Так, первый член ряда (5)

$$w_{11}(x, y) = a_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \frac{\pi x}{a} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

нигде внутри пластинки не обращается в нуль; $w_{11}(x, y)$ будет нулем только по краям пластинки. Следовательно, форма $w_{11}(x, y)$ не имеет узловых линий на пластинке: все элементы пластинки, колеблющейся согласно уравнению

$$w(x, y; t) = w_{11}(x, y) \sin(pt + \alpha) = a_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(pt + \alpha),$$

будут отклоняться в одну сторону, одновременно достигая максимальных (амплитудных) отклонений и одновременно проходя через равновесное положение. Это будет, таким образом, первое главное или собственное колебание пластинки; его частота

$$p_{11} = \frac{\pi^2 (a^2 + b^2)}{a^2 b^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}.$$

Следующие по порядку формы мы получим, полагая $i = 2, j = 1$ или, наоборот, $i = 1, j = 2$. В этих случаях соответствующие формы колебаний будут иметь по одной узловой линии, параллельной оси Oy (рис. 1, а) или оси Ox (рис. 1, б). Узловые линии для формы $w_{22}(x, y)$ расположатся, как показано на рис. 88, в. Формы колебаний с узловыми линиями

по диагоналям пластинки можно получить наложением двух собственных форм, показанных на рис. 88, a, b , подобрав для этих форм надлежащим образом постоянные a_{ij} .

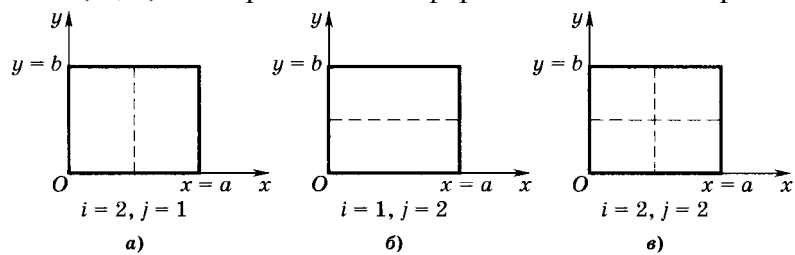


Рис. 1

Лекция 6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН.

Рассмотренная задача колебаний прямоугольной пластинки, свободно опертой по двум противоположным краям, в сущности, исчерпывает известные случаи, когда применение точных методов приводит к полному решению. Во всех других случаях расчет собственных частот и форм приходится вести приближенными способами. Из таких приближенных способов наиболее эффективными, как показывает опыт, являются вариационные методы Ритца и Галеркина. Приближенные расчеты пластинок или тонких плит, по терминологии Б. Г. Галеркина, были именно теми расчетами, для осуществления которых и создавались эти методы. В настоящее время вариационные методы хорошо разработаны в деталях и удобно приспособлены к решению задач на колебания пластинок с любыми краевыми условиями. Из работ, посвященных практическому применению вариационных методов, к расчету колебаний пластинок, кроме работ Дж. Рэлея, Б. Г. Галеркина, Л. С. Лейбензона и В. Ритца, можно отметить работы С. Г. Михлина и Е. С. Сорокина. У последнего расчеты пластинок с довольно сложной нагрузкой доведены до простых справок в подробно составленных таблицах.

Для решения вариационной задачи по методу Ритца, т. е. для нахождения форм колебаний пластинки, удовлетворяющих вариационному уравнению

$$\delta(T_{\max} - \Pi_{\max}) = 0, \quad (1)$$

построим минимизирующую форму в виде конечного ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i w_i(x, y), \quad (2)$$

где $w_i(x, y)$ — базисные функции, т. е. известные функции, подбираемые в соответствии с краевыми условиями задачи; a_i — параметры, значения которых после подстановки (2) в (1) определяются из условий экстремума функции $T_{\max} - \Pi_{\max}$, т. е. из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (T_{\max} - \Pi_{\max}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T_{\max} &= \frac{\rho^2}{2g} \iint_{(s)} h w^2 dx dy, \\ \Pi_{\max} &= \frac{1}{2} \iint_{(s)} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1 - \sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} ds, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При выборе базисных функций можно ограничиться выполнением лишь геометрических условий. Выбранные в соответствии с этими последними условиями базисные функции, будучи подчинены затем уравнению (1), удовлетворяют и динамическим условиям, что можно видеть из вариационного уравнения, записанного в форме:

$$\iint_{(s)} \left(D \Delta^2 w - \frac{\rho h}{g} p^2 w \right) \delta w ds - \int M_L \frac{\partial}{\partial n} (\delta w) dl + \int \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial l} \right) \delta w dl = 0. \quad (5)$$

В самом деле, если, например, края пластинки свободны, то на них δw и $\delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)$ произвольны. Произвольны значения δw и $\delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)$ и внутри контура пластинки. Если поэтому $w_i(x, y)$ удовлетворяют уравнению (1) или (5), то для таких форм будет выполнено и уравнение

$$D \Delta^2 w - \rho p^2 w = 0,$$

и динамические краевые условия

$$M_L = 0, \quad N_L - \frac{\partial H_L}{\partial l} = 0.$$

Не обязательно поэтому, пользуясь методом Ритца, выбирать базисные функции, удовлетворяющие всем краевым условиям — и геометрическим и динамическим, хотя для ускорения расчета это почти всегда желательно.

Что касается самого состава базисных функций, то они, как это было отмечено выше, обычно строятся в виде произведения двух функций, одна из которых является функцией только x , другая только y :

$$w_{ij}(x, y) = X_i(x)Y_j(y). \quad (6)$$

Функции $X_i(x)$ и $Y_j(y)$ представляют собой простые полиномы, или же собственные формы колебаний однородных стержней (или балок), удовлетворяющие краевым условиям, соответствующим способам закрепления краев пластинки (балочные функции). Такие формы строятся с помощью функций Крылова первого рода или элементарных функций, исходя из выражений общего интеграла уравнения форм колебаний однородного стержня:

$$\left. \begin{aligned} X_i(x) &= \sin \frac{\lambda_i x}{a} + A_i \cos \frac{\lambda_i x}{a} + B_i \operatorname{sh} \frac{\lambda_i x}{a} + C_i \operatorname{ch} \frac{\lambda_i x}{a}, \\ Y_j(y) &= \sin \frac{\lambda_j y}{b} + A_j \cos \frac{\lambda_j y}{b} + B_j \operatorname{sh} \frac{\lambda_j y}{b} + C_j \operatorname{ch} \frac{\lambda_j y}{b}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $\lambda_i = k_i a$, $\lambda_j = k_j b$, $k^4 = \mu p^2 / EI$,

a, b — длины краев, параллельных соответственно осям Ox и Oy . Постоянные $A_i, B_i, C_i; A_j, B_j, C_j, \lambda_i, \lambda_j$ находятся из краевых условий для X_i и Y_j .

После того как выбраны базисные функции, построенную из них минимизирующую форму нужно подставить в выражения (4) для T_{max} и Π_{max} . По поводу вычисления Π_{max} заметим, что для пластинок, свободно опертых или защемленных по краям, выражение

$$\iint_{(s)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] ds$$

(так называемая гауссова полная кривизна) равно нулю.

Вычисление двойных интегралов, входящих в T_{max} и Π_{max} , приводится к вычислению простых интегралов стандартной формы. Так, для базисных форм (6) эти интегралы будут, как правило, таких типов:

$$\int_0^l X_i^2 dx, \quad \int_0^l X_i'^2 dx, \quad \int_0^l X_i''^2 dx, \quad \int_0^l X_i' X_j' dx = - \int_0^l X_i X_j'' dx.$$

Лекция 7. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН.

Поместив начало прямоугольной системы координат в центре пластинки и обозначив радиус-вектор и полярный угол некоторой точки нейтральной плоскости соответственно через r и θ , преобразуем с помощью операторов

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

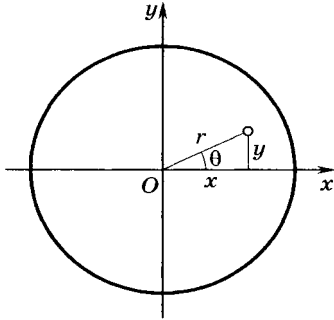


Рис. 1

выражения потенциальной и кинетической энергии, в прямоугольных координатах, к полярным (рис. 1).

Для преобразования к полярным координатам потенциальной энергии

$$\Pi_{\max} = \frac{D}{2} \iint_{(s)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} ds$$

нужно найти в полярных координатах выражения вторых производных от w по x и y . Пользуясь операторами (1), находим:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\cos 2\theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

Подставив эти соотношения в выражение для Π_{\max} , получим

$$\Pi_{\max} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right] \right\} r d\theta dr. \quad (2)$$

Отметим тут же значения вторых производных

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

для $\theta=0$:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\theta=0} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (3)$$

Для кинетической энергии находим

$$T_{\max} = \frac{\gamma h p^2}{2g} \int_0^a \int_0^{2\pi} w^2 r d\theta dr. \quad (4)$$

Уравнение форм свободных поперечных колебаний однородной круглой пластинки в полярных координатах запишем следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\gamma h p^2}{Dg} w = 0. \quad (5)$$

или

$$\Delta(\Delta w) - \frac{\gamma h p^2}{Dg} w = 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (6)$$

Вариационное уравнение поперечных колебаний круглой пластинки, приняв во внимание, что на контуре пластинки

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial}{r \partial \theta}, \quad (7)$$

запишем следующим образом:

$$\iint_{(s)} \left(D \Delta^2 w - \frac{\mathcal{M} p^2}{g} w \right) \delta w r d\theta dr - \oint M_L \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) r d\theta + \oint \left(N_L - \frac{1}{r} \frac{\partial H_L}{\partial \theta} \right) \delta w r d\theta = 0. \quad (8)$$

На контуре пластинки

$$\left. \begin{aligned} M_L &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ H_L &= D(1-\sigma) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ N_L &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Лекция 8. КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК.

Найти первую частоту колебаний однородной круглой пластинки, закрепленной по внешнему контуру (по методу Ритца).

Потенциальная энергия такой пластинки вычисляется по формуле

$$2\Pi_{\max} = D \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 r d\theta dr. \quad (1)$$

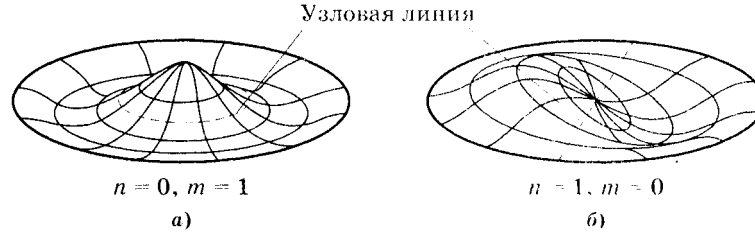


Рис. 1

В качестве минимизирующей формы с n узловыми диаметрами возьмем выражение

$$w(r, \theta) = \alpha r^s (a^2 - r^2)^2 \cos n\theta, \quad (2)$$

где s – параметр, значение которого подбирается из условия минимума квадрата первой частоты.

Подставив (2) в (1) и выполнив интегрирование по θ , получим

$$2\Pi_{\max} = D\pi \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{n^2}{r^2} w_0 \right)^2 r dr,$$

где

$$w_0 = \alpha r^s (a^2 - r^2)^2.$$

Вычислим подынтегральное выражение в скобках:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{n^2}{r^2} w_0 = \alpha \left[a^4 r^{s-2} (s^2 - n^2) - 2a^2 r^s ((s+2)^2 - n^2) + r^{s+2} ((s+4)^2 - n^2) \right].$$

Рассмотрим сначала симметричные колебания без узловых диаметров при $n=0$. В этом случае

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 r dr = \alpha^2 a^{2s+6} \left[\frac{s^4}{2s-2} + \frac{4(s+2)^4}{2s+2} + \frac{(s+4)^4}{2s+6} - \frac{4s^2(s+2)^2}{2s} + \frac{2s^2(s+4)^2}{2s+2} + \frac{4(s+2)(s+4)^2}{2s+4} \right].$$

Кинетическая энергия равна

$$\begin{aligned} 2T_{\max} &= \frac{\pi \gamma p^2}{g} \int_0^a w_0^2 r dr = \frac{\pi \gamma p^2 \alpha^2}{g} \int_0^a (a^4 r^s - 2a^2 r^{s+2} + r^{s+4})^2 r dr = \\ &= \frac{\pi \gamma p^2 \alpha^2 h}{g} \left[\frac{1}{2s+2} + \frac{6}{2s+6} + \frac{1}{2s+10} - \frac{4}{2s+4} - \frac{4}{2s+8} \right] a^{s+10}. \end{aligned}$$

Квадрат первой частоты найдем по формуле Рэлея

$$p_1^2 = \frac{\Pi_{\max}}{T_{\max}}.$$

В него будет входить пока неопределенный параметр s . Этот параметр подбираем из условия минимума p^2 . Разыскав этот минимум, найдем, что он имеет место, когда $s=0$. Но в этом случае

$$2\Pi_{\max} = \frac{32}{3} D\pi \alpha^2 a^6, \quad 2T_{\max} = \frac{\pi \gamma p^2 \alpha^2 a^{10}}{10g}.$$

Следовательно,

$$p_1^2 = \frac{320 Dg}{3a^4 h\gamma}, \quad p_1 = \frac{10.33}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}}.$$

Если $n=1$, то для s нельзя взять значения, меньшего единицы, так как при $s < 1$ производная

$$\frac{\partial w_0}{\partial r} = [a^4 s r^{s-1} - 2a^2 (s+2)r^{s+1} (s+4)r^{s+1}] \alpha$$

для $r=0$ обращается в бесконечность.

Расчет показывает, что с увеличением s частота возрастает. Поэтому для вычисления частоты с одним узловым диаметром следует взять $s=1$. При таком значении

$$2P_{\max} = 8\alpha^2 D\pi a^8, \quad 2T_{\max} = 0.0167 \frac{\alpha^2 \gamma h \pi p^2 a^{12}}{g}$$

и, следовательно,

$$p_1 = \frac{21.9}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}}$$

При двух узловых диаметрах ($n=2$) вычисления дают следующие значения частоты при некоторых значениях s .

s	1,5	1,75	2,0	3,0
$p_1 a^2 \sqrt{\frac{\gamma h}{Dg}}$	36,2	35,5	36,5	45,8

Значение частоты, наиболее близкое к точному, получается, по-видимому, для $s=1.7$, а именно

$$p_1 = \frac{35.4}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}}.$$

Лекция 9. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН.

Основные зависимости теории жестких пластинок

Пластинки прямоугольного очертания входят в состав различных конструкций – крыла самолета, днища, палубы и бортовых стенок корабля, стенок цельнометаллического вагона и т. д. – обычно в виде панелей обшивки, скрепленных с системой подкрепляющих ребер.

Обшивка подвергается в этих конструкциях действию той или иной «местной» поперечной нагрузки, например аэродинамического давления, и кроме того воспринимает «основные» усилия вместе с другими элементами конструкции – от общего изгиба крыла самолета, корпуса судна или вагона. Во многих случаях эти основные усилия являются превалирующими: они вызывают сжатие, изгиб либо сдвиг пластинки в ее плоскости и приводят, при известных условиях,

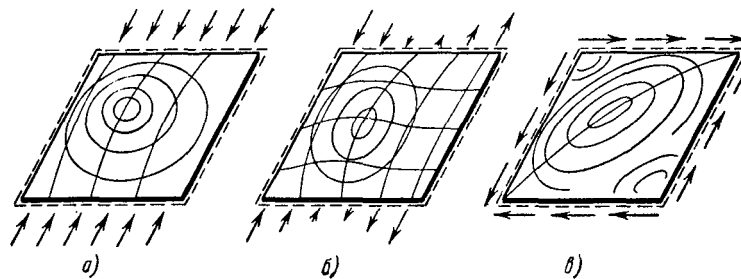


Рис. 1. Выпучивание пластинки при сжатии, изгибе, сдвиге.

к выпучиванию пластинок (1); поэтому расчет пластинок на устойчивость представляет собой неотъемлемую часть общего расчета конструкции. Пластинки, подкрепленные по продольным краям, способны и после потери устойчивости нести возрастающую нагрузку. Для некоторых конструкций считается вполне допустимым, чтобы обшивка получала относительно мелкие вмятины, с тем, однако, условием, чтобы подкрепляющие ее элементы оставались достаточно жесткими. Следовательно, конструктора должно интересовать не только само явление потери устойчивости пластинок, но и их закритическое поведение. Стенки высоких балок, а также элементы различных тонкостенных стержней и балок также представляют собой прямоугольные пластинки, подвергающиеся выпучиванию, следовательно, и здесь расчет на устойчивость имеет первостепенное значение.

При определении критических нагрузок, когда исследуются равновесные состояния, соседние с исходным, можно полагать, что появляющиеся в процессе выпучивания напряжения в срединной поверхности пластинки малы по сравнению с напряжениями собственно изгиба; прогибы пластинки считаются также малыми по сравнению с толщиной. В некоторых задачах при этом можно пользоваться теорией жестких пластинок, пренебрегающей напряжениями в срединной поверхности пластинки. Если же исследуется закритическое поведение пластинки, то надо исходить из более общей теории гибких пластинок, учитывающей одновременно напряжения в срединной поверхности и напряжения изгиба.

Рассмотрим прямоугольную пластинку со сторонами a , b и толщиной h (рис. 9.2). Пусть координатная плоскость xu совпадает со срединной плоскостью пластинки; ось x будем, как правило, проводить вдоль длинной стороны a , ось y – вдоль короткой стороны b . Обозначим перемещения точек срединной поверхности вдоль осей x , y , z через u , v , w .

Рассечем срединную поверхность изогнутой пластинки плоскостью, параллельной плоскости xz (рис. 3). Так как прогибы малы, то в сечении мы получим пологую кривую. Угол наклона θ_x касательной к кривой равен

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1)$$

аналогично для сечения, параллельного плоскости yz ,

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2)$$

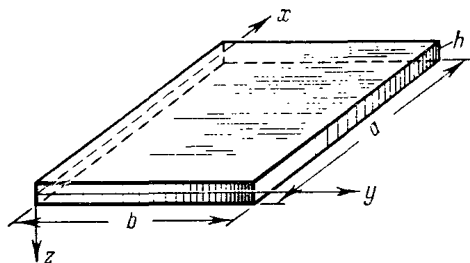


Рис. 2. Система координат при рассмотрении прямоугольной пластинки

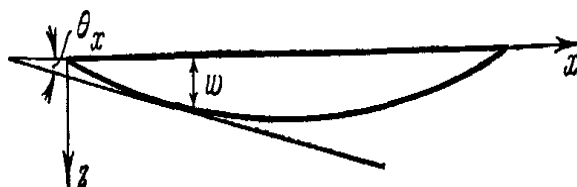


Рис. 3. Сечение изогнутой поверхности пластинки

Кривизну сечения будем считать положительной, если выпуклость обращена в сторону положительного направления оси z . Тогда кривизны в сечениях, параллельных плоскостям xz и yz , будут равны

$$\aleph_x = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \aleph_y = -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \quad (3)$$

или

$$\aleph_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \aleph_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (4)$$

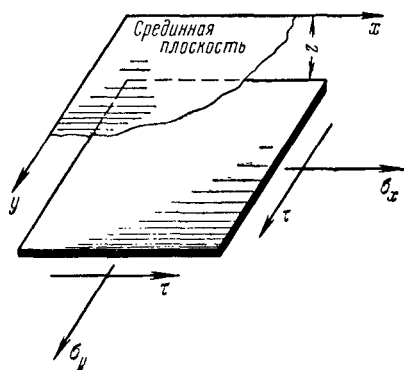


Рис. 9.4. Нормальные и касательные напряжения при изгибе.

произвольного слоя пластинки, лежащего на расстоянии z от срединной поверхности, деформации удлинения $\epsilon_{x,u}$ и $\epsilon_{y,u}$

$$\epsilon_{x,u} = z\aleph_x, \quad \epsilon_{y,u} = z\aleph_y; \quad (7)$$

деформация сдвига будет

$$\gamma_u = 2z\chi. \quad (8)$$

Этим деформациям соответствуют нормальные напряжения σ_x , σ_y и касательные напряжения τ (рис. 4). Пользуясь законом Гука и пренебрегая напряжениями σ_z , получим:

При изменении у угол θ_x в общем случае также меняется; относя приращение угла θ_x к приращению координаты y (или приращение θ_y к приращению x), находим кручение срединной поверхности:

$$\chi = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -\frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad (5)$$

или

$$\chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

$$\sigma_{x,u} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad \sigma_{y,u} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \quad \tau_u = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma. \quad (9)$$

или

$$\sigma_{x,u} = \frac{Ez}{1-\mu^2}(\varkappa_x + \mu\varkappa_y), \quad \sigma_{y,u} = \frac{Ez}{1-\mu^2}(\varkappa_y + \mu\varkappa_x), \quad \tau_u = \frac{Ez}{1+\mu}\chi. \quad (10)$$

В сечениях пластинки, параллельных осям x и y , выделим полоски длиной, равной единице. Усилия σ_x и σ_y образуют изгибающие моменты, приходящиеся на единицу длины сечения:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x,u} z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{y,u} z dz,$$

или

$$M_x = D(\varkappa_x + \mu\varkappa_y), \quad M_y = D(\varkappa_y + \mu\varkappa_x), \quad (11)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластинки:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (12)$$

Касательные усилия τ образуют крутящий момент, приходящийся на единицу длины сечения

$$H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau z dz, \quad (13)$$

или

$$H = D(1-\mu)\chi. \quad (14)$$

Введем, далее, обозначения Q_x , Q_y для поперечных сил в сечениях xz и yz , также приходящихся на единицу длины.

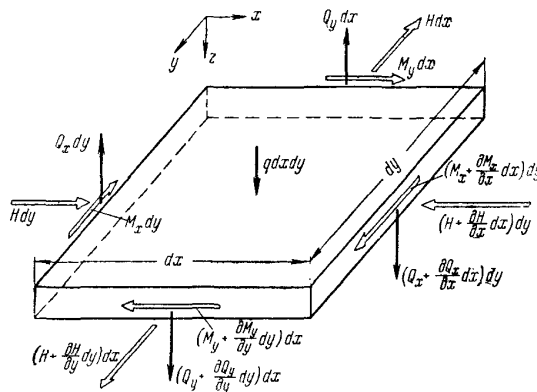


Рис. 5. Усилия, приложенные к деформированному элементу пластинки

Допустим, что пластинка подвергается действию поперечной нагрузки интенсивностью q . На рис. 5 показан элемент пластинки $dx dy$ с действующими на него силами. Двойными стрелками обозначены вектор-моменты. Если в сечении с координатой x действует момент $M_x dy$, то в соседнем сечении, имеющем координату $x+dx$, будет действовать момент $(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx) dy$. Аналогичные приращения получают остальные компоненты моментов и поперечных сил. Составим уравнения равновесия элемента в проекциях на ось z и в моментах относительно осей x и y . После простых преобразований эти уравнения приобретают вид:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q, \quad (15)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (17)$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (18)$$

Пользуясь выражениями для моментов и кривизн, приходим к известному дифференциальному уравнению изгиба жестких пластинок

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (19)$$

или

$$D \nabla^4 w = q. \quad (20)$$

где

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (20a)$$

— двумерный оператор Лапласа.

В «классических» задачах устойчивости внешняя поперечная нагрузка не учитывается: начальное напряженное состояние считается безмоментным. Но вместе с тем

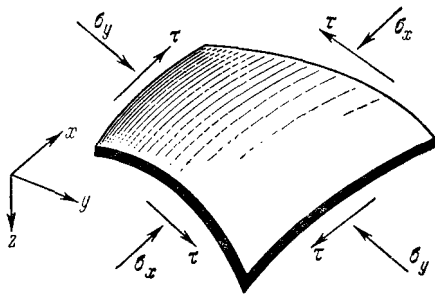


Рис 6. Усилия в срединной поверхности

при рассмотрении «соседних» изогнутых состояний пластинки надо принять во внимание проекции повернутых внутренних усилий на оси неподвижной системы координат. На рис. 6 показан элемент пластинки $dx dy$ после изгиба с действующими на него нормальными усилиями σ_x , σ_y и касательными τ . Напряжения σ_x , σ_y считаются положительными при сжатии; касательные напряжения будем принимать положительными, если они направлены, как показано на рис. 6; соответствующая им деформация сдвига увеличивает угол между гранями элемента, расположенными ближе к началу координат. Определим результирующую усилий $\sigma_x h dy$. Левая грань элемента поворачивается вокруг оси y на угол $\partial w / \partial x$, а правая – на угол $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$ (рис. 7). Суммарная проекция сил $\sigma_x h dy$ на ось z , равная, с точностью до малых высшего порядка, их равнодействующей, будет (оси координат на рис. 7, 8 отличаются от принятых на рис. 6):

$$\sigma_x h \frac{\partial w}{\partial x} dy - \sigma_x h \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy = -\sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy. \quad (21)$$

Аналогичное выражение для усилий σ_y имеет вид

$$-\sigma_y h \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy dx. \quad (21a)$$

Найдем, далее, равнодействующую касательных усилий τh , также получивших новые направления. Если одна из граней, параллельных y ,

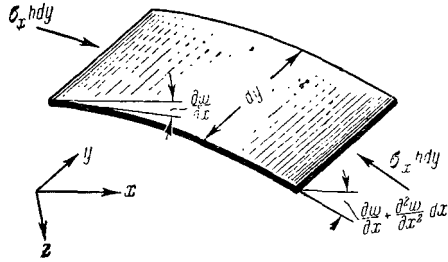


Рис. 9.7. К определению результирующей повернутых усилий сжатия.

Рис. 7. К определению результирующей повернутых усилий сжатия.

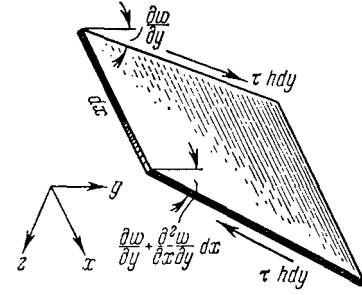


Рис. 9.8. К определению результирующей повернутых усилий сдвига.

Рис. 8. К определению результирующей повернутых усилий сдвига.

повернулась вокруг оси x на угол $\partial w/\partial y$, а вторая, ближайшая (рис. 8), – на угол $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx$, то силы $thdy$ дадут суммарную проекцию, равную

$$-th \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy. \quad (22)$$

Левая грань поворачивается вокруг оси y на угол $\partial w/\partial x$, а правая – на угол $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy$. Полная проекция усилий $thdx$ будет также равна

$$-th \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy. \quad (22a)$$

Найдем сумму проекций «повернутых» усилий и разделим ее на $dx dy$; эту величину надо ввести в левую часть уравнения (15); при $q = 0$ оно получает вид

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma_y h \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2th \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (23)$$

Отсюда

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) h. \quad (24)$$

Сравним это уравнение с (15); как легко видеть, выражение, стоящее в скобках, можно трактовать как интенсивность фиктивной поперечной нагрузки

$$l^0 = - \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) h = (\sigma_x \aleph_x + \sigma_y \aleph_y + 2\tau \chi) h. \quad (25)$$

Окончательно уравнение (20) получает вид (при $q=0$)

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w + \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (26)$$

При интегрировании уравнения (26) мы должны удовлетворить граничным условиям. Рассмотрим некоторые из вариантов таких условий.

1. Один из краев, например край $x = 0$, шарнирно оперт.

Такое предположение можно сделать, если пластинка соединена с подкрепляющим ребром, имеющим малую жесткость на кручение (тонкостенный стержень открытого профиля), либо если прикрепление пластинки к ребру осуществляется по узкой полосе (один ряд заклепок, точечная сварка) (рис. 9, а). Тогда граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \quad (27)$$

$$M = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (28)$$

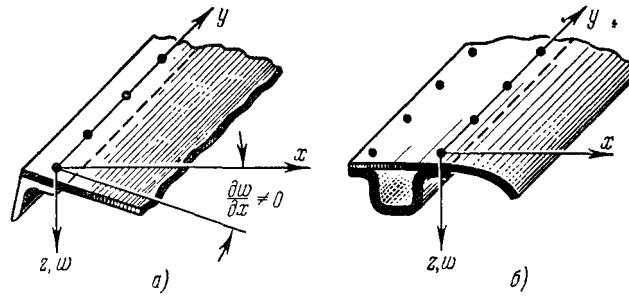


Рис. 9.9. Граничные условия: а) шарнирное закрепление; б) защемление.

Если выполнено условие (27), то вдоль края $x=0$ заведомо $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$; следовательно, условие (28) переписется в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (29)$$

2. Край $x = 0$ защемлен. Такое допущение соответствует случаю пластинки, прочно сочлененной (например, с помощью двухрядного заклепочного шва) с ребром, достаточно жестким на кручение (рис. 9, б). Граничные условия будут:

$$w = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (31)$$

3. Пластика скреплена по краю $x=0$ с упругим ребром, имеющим изгибную жесткость EJ . Одно из условий сопряжения состоит в равенстве прогибов:

$$w_1 = (w)_{x=0} \quad (32)$$

через w_1 обозначен прогиб ребра. Второе условие выражает равенство погонного усилия, передающегося от пластинки на ребро, реакции со стороны ребра. Можно показать, что погонная реактивная сила, нормальная к поверхности пластинки, будет для рассматриваемого края

$$R_x = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (33)$$

или

$$R_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (34)$$

Второе граничное условие приобретает вид

$$EJ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=0}. \quad (35)$$

4. Край $x=0$ свободен. Тогда должно быть

$$M_x = 0, \quad R_x = 0, \quad (36)$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (38)$$

Определим работу внутренних усилий на возможном перемещении пластинки. Если кривизна \aleph_x получает приращение $\delta \aleph_x$, то работа момента $M_x dy$, приходящаяся на

длину элемента dx , будет равна $(-M_x \delta \aleph_x dx dy)$. Вычисляя таким же образом работу остальных усилий и интегрируя по площади пластинки $F=ab$, получим

$$\delta A = - \iint_F (M_x \delta \aleph_x + M_y \delta \aleph_y + 2H \delta \chi) dx dy.$$

Приращение потенциальной энергии равно $\delta U = -\delta A$; пользуясь выражениями для моментов и кривизн, находим

$$\delta U = D \iint_F \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy,$$

или

$$\delta U = \frac{1}{2} D \delta \iint_F \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

Полная энергия изгиба равна

$$U = \frac{1}{2} D \iint_F \left\{ (\nabla^2 w)^2 - (1-\mu)L(w, w) \right\} dx dy; \quad (39)$$

под $L(w, w)$ понимается выражение

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \quad (40)$$

Вычислим, далее, работу внешних сил, совершающуюся при выпучивании пластинки. Допустим, что пластинка подвергается действию усилий σ_x, σ_y, τ , приложенных в срединной плоскости. Обозначим через u, v перемещения некоторой точки срединной плоскости вдоль осей x, y . Найдем взаимное смещение кромок пластинки, к которым приложены усилия σ_x . Выделим элемент AB волокна, параллельного оси x (рис. 10). Пусть перемещения точки A вдоль осей x и z будут u и w , а точки

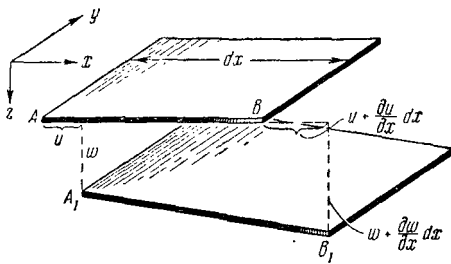


Рис. 10. К определению работы сжимающих сил при выпучивании пластинки.

в срединной плоскости. Обозначим через u, v перемещения некоторой точки срединной плоскости вдоль осей x, y . Найдем взаимное смещение кромок пластинки, к которым приложены усилия σ_x . Выделим элемент AB волокна, параллельного оси x (рис. 10). Пусть перемещения точки A вдоль осей x и z будут u и w , а точки

$B - u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$: новые

положения точек обозначим через A_1, B_1 . Длина ds_1 элемента после деформации будет

$$ds_1 = \left[\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

или

$$ds_1 = dx \left[1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Раскладывая это выражение в ряд и ограничиваясь первыми членами разложения, получим

$$ds_1 = \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

Мы рассматриваем случай, когда пластинка выпучивается из своей плоскости; поэтому величиной $(\partial u / \partial x)^2$ можно пренебречь по сравнению с $(\partial w / \partial x)^2$. Окончательно находим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (41)$$

По аналогии выпишем выражение для деформации удлинения элемента, параллельного оси y :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (42)$$

Примем условно, что деформации в срединной поверхности при выпучивании $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ равны нулю. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \quad (43)$$

Взаимное смещение точек, принадлежащих кромкам $x=0$ и $x=a$, отнесенное к размеру a , равно

$$e_x = -\frac{1}{a} \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{1}{2a} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx; \quad (44)$$

величину e_x считаем положительной при сближении кромок. Будем принимать, что в процессе выпучивания усилия σ_x остаются постоянными. Тогда их работа будет равна

$$W_1 = \sigma_x e_x ha = \frac{1}{2} \int_0^b \sigma_x h \left[\int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] dy; \quad (45)$$

величина ah оставлена под знаком интеграла, так как здесь принято, что усилия ah меняются вдоль размера b . Аналогично взаимное смещение кромок $y=0, y=b$ будет

$$e_y = -\frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{1}{2b} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy, \quad (46)$$

а работа усилий σ_y

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_0^a \sigma_y h \left[\int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy \right] dx. \quad (47)$$

Перейдем к определению работы касательных усилий τh . Найдем деформацию сдвига γ' элемента $dx dy$, соответствующую перемещениям u, v . Как видно из рис. 11, она равна

$$\gamma' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (a)$$

На следующем рис. 12 показано, как искажается треугольник OMN со сторонами dx, dy при деформации сдвига γ'' , вызванной перемещениями w . Рассматривая рисунок, находим

$$\begin{aligned} \overline{M''N''} = & \left[(dx)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 + (dy)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} dy \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2 \sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2} \sqrt{(dy)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} dy \right)^2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma'' \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (b)$$

или, приближенно,

$$\overline{M''N''} = \left\{ (dx)^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + (dy)^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\gamma'' dx dy \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (b')$$

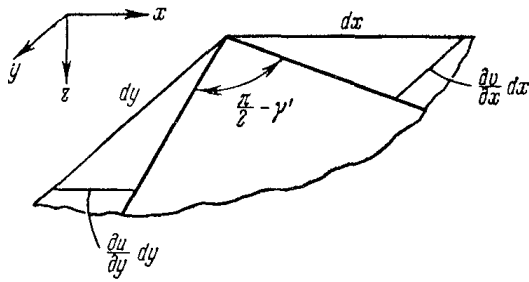


Рис. 11. Деформация сдвига в срединной поверхности

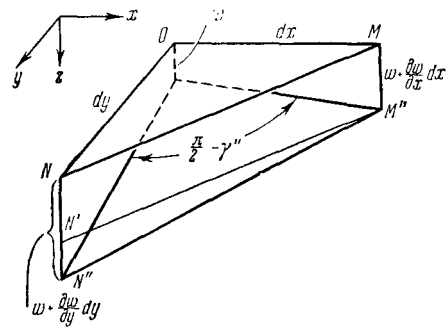


Рис. 12. К определению работы сдвигающих усилий

С другой стороны, из рассмотрения треугольника $N''N''M''$ вытекает

$$\overline{M''N''} = \left[(dx)^2 + (dy)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} dy - \frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (c)$$

Сравнение выражений (b') и (c) дает

$$\gamma'' = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (d)$$

Полная деформация сдвига будет

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (48)$$

Считая и здесь условно $\gamma = 0$, находим $\gamma' = -\gamma''$ или

$$\gamma' = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (49)$$

Примем, что касательные усилия τ постоянны вдоль кромок пластинки a, b . Им соответствует «интегральное» искажение пластинки

$$g = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (50)$$

Работа сил γh будет

$$W_3 = \tau h g = \tau h \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (51)$$

Окончательное выражение для работы внешних сил получает вид

$$W = \frac{h}{2} \left\{ \int_0^b \sigma_x \left[\int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] dy + \int_0^a \sigma_y \left[\int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy \right] dx \right\} + \tau h \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (52)$$

Полная энергия системы равна

$$\Theta = U - W. \quad (53)$$

Приведенными выше выражениями для U и W мы воспользуемся при решении задач устойчивости пластинок с помощью энергетического метода.

В этом выводе мы понимали под W работу внешних сил, приложенных к кромкам пластинки и подчиненных определенным условиям. Но в некоторых задачах такая трактовка оказывается недостаточной. Тогда величину W надо трактовать иначе – как работу усилий в срединной плоскости, накопившихся к моменту потери устойчивости, на дополнительных перемещениях, вызванных выпучиванием. Считая поле начальных усилий переменным по обоим направлениям, можно придти к следующей формуле, обобщающей (52):

$$W = \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy; \quad (52, a)$$

Под σ_x , σ_y , τ здесь понимаются заданные начальные напряжения в срединной плоскости. Проводя интегрирование по частям в (39) и (52, a), можно получить основное дифференциальное уравнение (26) и статические граничные условия.