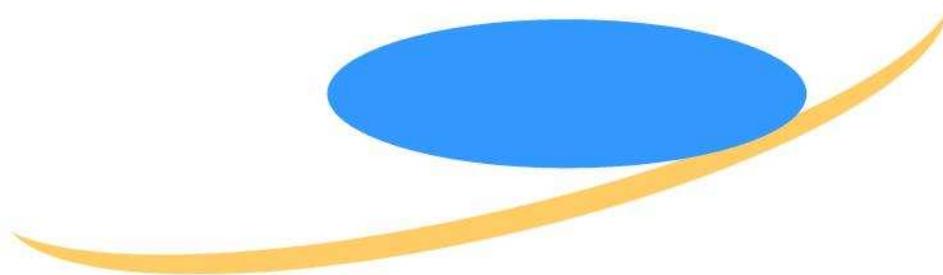


N. Djumabaev, J. Valieva, G. Mamutova

İRRATSİONAL TEN`LEMELERDİ SHESHİW USILLARI

(metodikalıq qollanba)



NO`KİS-2014

Bul metodikalıq qollanba joqarı oqıw orınlarınan` matematika fakulteti talabaları, akademiyalıq litsey, ka`sip-o`ner kolledjleri, ulıwma bilim beriw mektepleri ha`m matematika pa`nin teren`nen oqıtılatug`ın qa`nigelestirilgen mektep oqıwshıları ushın «Irratsional ten`lemelerdi sheshiw usılları» temasında jazılğ`an bolıp, bunda ha`r qıylı tu`rdegi irratsional ten`lemelerdi sheshiw`ın tu`rli usılları ko`rsetilgen. Metodikalıq qollanbada oqıwshılardıń o`zlestiriliwi kerek bolğ`an mısallar metodikalıq jaqtan bir neshe usıllar menen sheship ko`rsetilgen.

JUWAPLI REDAKTOR:

T.T. Saparov – A`jiniyaz atındag`ı No`kis ma`mleketlik pedagogikalıq inistituti Zoologiya kafedrası dotsenti, pedagogika ilimlerinin` kandidadı.

PİKİR BİLDİRİWSHİLER:

- 1. O.Nurjanov* - Berdaq atındag`ı Qaraqalpaq ma`mleketlik universiteti algebra ha`m differentsial geometriya kafedrasının` dotsenti, fizika matematika ilimlerinin` kandidadı.
- 2. S.Tanirbergenov* – A`jiniyaz atındag`ı No`kis ma`mleketlik pedagogikalıq inistituti Ulıwma matematika kafedrası dotsenti, fizika matematika ilimlerinin` kandidadı.

Kirisiw

Oqıwshılarg`a korenlerdin` qa`siyetin ha`m korenlerden qutılıwdın` jolların bildiriw arqalı irratsional ten`lemelerdi sheshiwdin` usılların u`yretiw u`lken a`hmiyetke iye. Qollanbada irratsional ten`lemelerdi sheshiwde ten` ku`shli almastırıwlar arqalı sheshiw usıllarına ken` orın berildi. Irratsional ten`lemelerdi sheshiwde jat korenlerdin` payda bolıwının` aldın alıw ha`m korenlerdi joytıp alıw jag`dayların anıqlaw ushın ten`lemenin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabıw arqalı sheshiwge u`lken kewil awdarıldı.

Qollanbada: «Irratsional ten`lemeler», «Ten`lemenin` anıqlanıw ha`m o`zgeriw oblastların tekseriw arqalı irratsional ten`lemelerdin` sheshimlerinin` bar yamasa joq ekenligin anıqlawg`a arnalg`an mısallar», «Bir yamasa bir neshe koren astındag`ı an`latpaları anıq kvadrat bolg`an irratsional ten`lemelerdi sheshiw», «Bir neshe kvadrat korenlerdi o`z ishine alatug`ın irratsional ten`lemelerdi sheshiwge mısallar», «Berilgen irratsional ten`lemeni eki o`zgeriwshi kirgiziw arqalı sheshiw usılı», «Jan`a o`zgeriwshi kirgiziw ja`rdeminde sheshiletug`ın irratsional ten`lemelerdi sheshiw usılları», «Kub koren qatnasqan irratsional ten`lemelerdi sheshiw usılları», «Jasalma usıllar ja`rdeminde sheshiletug`ın irratsional ten`lemelerdi sheshiw usılları» bo`limlerge bo`linip, ha`r bir bo`limge jeterlishe mısallar metodikalıq jaqtan anıq etip sheship ko`rsetildi. Solay etip, bul metodikalıq qollanbada irratsional ten`lemelerdi sheship u`yreniw boyınsha bilim ha`m a`meliy ko`nlikpelerdi teren`lestiriw maqset etip qoyılğ`an bolıp matematikag`a qızıqqan oqıwshılarg`a arnalg`an. Metodikalıq qollanbadan sabaq waqtında, fakul`tativ sabaqlarda, do`gerek sabaqlarda, matematikanı teren`nen oqıtatug`ın akademiyalıq litseylerde, kollejlerde, pedagogikalıq instituttin` talabaları ha`m oqıtıwshıları sonday aq orta mekteptin` mug`allimleri paydalanıwları mu`mkin. Bul metodikalıq qollanbanın` tiykarg`ı maqseti oqıwshılarg`a irratsional ten`lemelerdi tu`rlerine qaray ha`r qyılı tu`rlerge bo`lip ha`r bir tu`rge bir neshe mısallar sheship ko`rsetiw arqalı irratsional ten`lemelerdi qa`tesiz sheshiwdi ha`m olardıń` teren` bilimge iye bolıwına ja`rdem ko`rsetiw bolıp tabıladı.

§1. İRRATSİONAL TEN'LEMELER

O'zgeriwshisi koren belgisi astında bolg'an ten'lemeler irratsional ten'lemeler dep ataladı. Irratsional ten'lemeler elementar algebrada haqıyqiy sanlar ko'pliginde sheshiledi. Irratsional ten'lemelerdi sheshiwde to'mendegilerdi eske alıw kerek:

1. Ten'lemedegi jup da'rejeli korenler arifmetikaliq mag'anada tu'siniledi. Basqasha aytqanda, eger koren astındag'ı an'latpa teris bolsa, onda koren mag'anag'a iye bolmaydı; eger koren astındag'ı an'latpa nolge ten' bolsa, korende nolge ten' boladı; eger koren astındag'ı an'latpa on' bolsa, onda koren belgisi on' boladı.

2. Ten'lemedegi taq da'rejeli korenler an'latpanın' barlıq haqıyqiy ma'nislerinde anıqlang'an boladı. Sonlıqtan, eger koren astındag'ı an'latpa teris bolsa, onda korende teris boladı; eger koren astındag'ı an'latpa nol'ge ten' bolsa, onda korende nol'ge ten'; eger koren astındag'ı an'latpa on' bolsa, onda korende on' boladı.

Endi irratsional ten'lemelerdi sheshiwdin' usılların qarap o'teyik.

Ten'lemenin' anıqlanıw ha'm o'zgeriw oblastların tekseriw arqalı irratsional ten'lemelerdin' sheshimlerinin' bar yamasa joq ekenligin anıqlawg'a arnalg'an misallar:

1-mısal: $\sqrt{x-6} + \sqrt{2-x} = 3$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: Ten'lemenin' sol jag'ının' anıqlanıw oblastın tabamız

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Berilgen ten'lemenin' sol jag'ı x tın' hesh bir ma'nisinde mag'anag'a iye emes.

Juwabi: $x \in \emptyset$

2-mısal: $\sqrt{x^3 - x - 1} + \sqrt{4x + 1} = -5$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: Bul ten'leme sheshimge iye emes, sebebi x tın' qabıl etiwı mu'mkin bolg'an barlıq ma'nislerinde ten'lemenin' shep ta'repi on', al on' ta'repi teris, on' san teris sang'a ten' bolmaydı.

Juwabi: $x \in \emptyset$

3-mısal: $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+1} = 2$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: Ten'lemenin' sol jag'ının' anıqlanıw oblastın tabamız

$$\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5$$

Ten`leme $x \geq 5$ bolg`anda orınlı. Sol sebepli ten`lemenin` eki jag`ın kvadratqa ko`terip ten`lemenin` korenlerin tabıwg`a keletug`ınday bolıp ko`rinedi, bıraq bunday emes, ten`lemenin` shep jag`ında eki o`siwshi funksiyanın` qosındısı turıptı, sol sebepli qosındıda o`siwshi funksiya boladı. $x \in [5; \infty)$ ushın funksiya $x = 5$ te en` kishi ma`nisti qabil etedi, yag`nıy $f(5) = \sqrt{5-5} + \sqrt{1+5} = \sqrt{6} \approx 2,45$, sonlıqtan $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{x+1}$ funksiyanın` grafigi $y = 2$ tuwrısı menen kesilispeydi. Bunnan berilgen ten`lemenin` sheshimge iye emes ekenligi kelip shig`adi.

Juwabi: $x \in \emptyset$

4-mısal: $\sqrt{x^2 + x - 6} + \sqrt{2x + 5} = \sqrt{1 - x}$ ten`lemesin sheshin`

Sheshiw: Bul ten`lemenin` anıqlanıw oblastı to`mendegi ten`sizlikler sistemasının` sheshimlerinden ibarat.

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ 2x + 5 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2) \geq 0 \\ x \geq -\frac{5}{2} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} \leq x \leq 1 \\ x \geq 2 \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Demek, berilgen ten`lemenin` anıqlanıw oblastı bos ko`plik, olay bolsa ten`leme sheshimge iye emes.

Juwabi: $x \in \emptyset$

5-mısal: $\sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} = 6 + x^2$ ten`lemesin sheshin`

Sheshiw: Ten`lemenin` anıqlanıw oblastı to`mendegi ten`sizlikler sistemasının` sheshimleri boladı.

$$\begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ x - 5 > 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x < -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Demek, berilgen ten`leme sheshimge iye emes.

Juwabi: $x \in \emptyset$

6-mısal: $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - x^2} = 2$ ten`lemesin sheshin`

Sheshiw: Ten`lemenin` anıqlanıw oblastın tabamız:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 2 \\ |x| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow |x| = 2$$

Biraq $|x| = 2$ ma'nisi ten'lemenin` sheshimi bola almaydı, sebebi $0 \neq 1$.

Demek, berilgen ten'leme sheshimge iye emes.

Juwabi: $x \in \emptyset$

7- misal: $5\sqrt{x} - 3\sqrt{-x} + \frac{17}{x} = 4$ ten'lemesin sheshin`.

Sheshiw: 1) Eger $x < 0$ bolsa, onda $5\sqrt{x}$ an'latpası mag'anag`a iye bolmaydı.

2) Eger $x > 0$ bolsa, onda $3\sqrt{-x}$ an'latpası mag'anag`a iye bolmaydı.

3) Eger $x = 0$ bolsa, onda $\frac{17}{x}$ an'latpası mag'anag`a iye bolmaydı.

Olay bolsa, berilgen ten'lemenin` sol jag`ı x tın` qa`legen ma'nisinde mag'anag`a iye bolmaydı, sonlıqtan berilgen ten'leme sheshimge iye bolmaydı.

Juwabi: $x \in \emptyset$

8- misal: $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+9} = \sqrt{x-2}$ ten'lemesin sheshin`.

Sheshiw: Ten'lemenin` anıqlanıw oblastın tabamız.

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x + 9 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$

$x \geq 3$ bolg`anda ten'lemenin` sol jag`ı teris, al on` jag`ı on` boladı. Olay bolsa berilgen ten'leme sheshimge iye emes.

Juwabi: $x \in \emptyset$

Shınıg`ıw ushın misallar:

1. $\sqrt[3]{54 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{54 - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{14}$

2. $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 8$

3. $\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} + \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = x + 1$

4. $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-2)(x-3)} = \sqrt{3}$

5. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x$

6. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 20$

7. $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2 + 7x} = 25 - 2x$

$$8. \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6$$

$$9. \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} = \sqrt{2}$$

$$10. \sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 5$$

§2. BİR YAMASA BİR NESHE KOREN ASTINDAG'I AN'LATPALARI ANIQ KVADRAT BOLG'AN İRRATSİONAL TEN'LEMELERDİ SHESHİW

1-mısal: $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 10$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-5)^2} = 10 \Leftrightarrow |x+2| + |x-5| = 10$

Bul ten'lemeni sheshiwde to'mendegi jag`daylar boladı:

a) Eger $x < -2$ bolsa, $-x-2-x+5=10 \Leftrightarrow x=-3,5$. Bul $x_1 = -3,5$ sanı $-3,5 \in (-\infty, -2)$

bolg'anlıqtan ten'lemenin` koreni boladı.

b) Eger $-2 \leq x \leq 5$ bolsa, onda $x+2-x+5=10 \Rightarrow 7=10$ bolg'anlıqtan, bul aralıqta ten'leme sheshimge iye bolmaydı.

v) Eger $x > 5$ bolsa, $x+2+x-5=10$ boladı, bunnan $x_2 = 6,5$ kelip shıg`adı.

Bul san qaralıp atırg'an aralıqqa tiyisli bolg'anlıqtan ten'lemenin` sheshimi boladı.

Juwabi: $\{-3,5; 6,5\}$

2- mısal: $\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: Ten'lemenin` anıqlanıw oblastın tabamız: $1-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4}$

$$\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{x^2 - 6x + 9} \Leftrightarrow \sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{(x-3)^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-4x} + 2 = |x-3|$$

Anıqlanıw oblastın itibarg`a alıp keyingi ten'lemeni to'mendegishe jazamız.

$$\sqrt{1-4x} + 2 = 3-x \Leftrightarrow \sqrt{1-4x} = 1-x \Rightarrow (\sqrt{1-4x})^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow 1-4x = 1-2x+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Juwabi: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

3-mısal: $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 1$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2} = 3x - 1 \Leftrightarrow |x+1| = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x + 1 = 3x - 1 \Leftrightarrow \\ x + 1 = 1 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Juwabi: $x=1$

4- misal: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} - \sqrt{9x^2 - 24x + 16} = 3 - 2x$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw:

$$\sqrt{4x^2 + 20x + 25} - \sqrt{9x^2 - 24x + 16} = 3 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{(2x+5)^2} - \sqrt{(3x-4)^2} = 3 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2x+5| - |3x-4| = 3 - 2x$$

Keyingi ten`lemeni sheshemiz, bunda to`mendegi jag`daylar boladı:

1) Eger $x < -\frac{5}{2}$ bolsa, $-2x - 5 + 3x - 4 = 3 - 2x \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$, koren emes.

2) Eger $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{4}{3}$ bolsa, $2x + 5 + 3x - 4 = 3 - 2x \Leftrightarrow 7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$ bul

ma`nis ten`lemenin` koreni boladı.

Eger $x > \frac{4}{3}$ bolsa, $2x + 5 - 3x + 4 = 3 - 2x \Leftrightarrow x = -6$ koren emes.

Juwabi: $\left\{\frac{2}{7}\right\}$

5- misal: $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw:

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| + |x-1| + |x-2| = 2$$

Keyingi ten`lemeni sheshiwde to`mendegi jag`daylar boladı:

1) eger $x < 0$ bolsa, $-x - x + 1 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ koren emes.

2) eger $0 \leq x \leq 1$ bolsa, $x - x + 1 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ koren.

3) eger $1 < x \leq 2$ bolsa, $x + x - 1 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ koren emes.

4) Eger $x > 2$ bolsa, $x + x - 1 + x - 2 = 2 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ koren emes.

Juwabi: $\{1\}$

Shınıg`ıw ushın mısallar:

1. $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-1} = -3$
2. $12 - \sqrt{x+\sqrt{2}} = 7$
3. $\sqrt{9+\sqrt{x-\sqrt{3}}} = 3$
4. $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x-2} = 1$
5. $4\sqrt{y\sqrt{2}-1} + 6\sqrt{4y+3} = 1$
6. $x + \sqrt{x-1} + 4 = \sqrt{x-1}$
7. $\sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{5x-6-x^2}$
8. $\sqrt{-x^2-3x-2} = 2x-3$
9. $\sqrt{y^2+y} + \sqrt{y^2-y-2} + \sqrt{y^2-5y-6} = 0$
10. $\sqrt{2x^2-7x+3} = \sqrt{5x-2-2x^2}$

§3. BİR NESHE KVADRAT KORENLERDİ O`Z ISHİNE ALATUG`IN İRRATSİONAL TEN`LEMELERDİ SHESHİWGE MISALLAR

Bunday tu`rdegi irratsional ten`lemeler ten`lemenin` eki jag`ın birdey da`rejege ko`teriw usılınan paydalanıp sheshiledi.

1-mısal: $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw:

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3 &\Rightarrow (\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x})^2 = 3^2 \Rightarrow 4-x+5+x+2\sqrt{(4-x)(5+x)} = 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(4-x)(5+x)} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=0 \\ 5+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-5 \end{cases}\end{aligned}$$

Juwabı: $\{-5,4\}$

2- mısıl: $\sqrt{4x+9} - \sqrt{11x+1} = \sqrt{7x+4}$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: Ten`lemenin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabamız: $\begin{cases} 4x+9 \geq 0 \\ 11x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{11} \\ 7x+4 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}\sqrt{4x+9} - \sqrt{7x+4} = \sqrt{11x+1} &\Rightarrow (\sqrt{4x+9} - \sqrt{7x+4})^2 = (\sqrt{11x+1})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x+9 - 2\sqrt{(4x+9)(7x+4)} + 7x+4 = 11x+1 &\Rightarrow \sqrt{28x^2+79x+36} = 6 \Rightarrow \\ \Leftrightarrow 28x^2+79x+36 = 36 &\Rightarrow 28x^2+79x = 0 \Leftrightarrow x(28x+79) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2\frac{23}{28} \end{cases}\end{aligned}$$

$x_1 = 0$ koreni ten'lemenin` mu'mkin ma'nisleri oblastına tiyisli bolg'anlıqtan sheshim boladı. $x_2 = -2\frac{23}{28}$ koreni ten'lemenin` mu'mkin ma'nisler oblastına tiyisli bolmag'anlıqtan ten'lemenin` koreni bolmaydı.

Juwabi: $x=0$

3-mısal: $\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0$ ten'lemesın sheshin`.

Sheshiw: M.M.O (Mu'mkin ma'nislerinin` oblastı) $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{3x+2} &\Rightarrow (x+2)^3 = (3x+2)^2 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 9x^2 + 12x + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ (x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$x_1 = -1$ ten'lemeıı qanaatlandırmaydı, sonlıqtan koren emes.

Juwabi: $x=2$

4-mısal: $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$ ten'lemesın sheshin`.

Sheshiw: MMO: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$\sqrt{x+1} = y \geq 0$ dep belgıleyміz. Sonda berilgen ten'leme u o`zgeriwshisine qarata to`mendegi tu`rde boladı.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9-y} + \sqrt[3]{7+y} = 4 &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{9-y} + \sqrt[3]{7+y})^3 = 4^3 \Leftrightarrow 9-y + 3\sqrt[3]{(9-y)^2(7+y)} + 3\sqrt[3]{(9-y)(7+y)^2} + \\ &+ 7+y = 64 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(9-y)^2(7+y)} + 3\sqrt[3]{(9-y)(7+y)^2} = 48 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(9-y)(7+y)} \cdot (\sqrt[3]{9-y} + \sqrt[3]{7+y}) = 48 \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{9-y} + \sqrt[3]{7+y} = 4$ ekenligin eske alsaq, ten'leme to'mendegi tu`rge iye boladı.

$$\begin{aligned} 12\sqrt[3]{(9-y)(7+y)} = 48 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{(9-y)(7+y)} = 4 \Leftrightarrow (9-y)(7+y) = 64 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y-1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Olay bolsa, $\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Juwabi: $x=0$

5-mısal: $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4$ ten'lemesın sheshin`.

Sheshiw: $\sqrt{x+7} = y \geq 0 \Rightarrow x+7 = y^2 \Rightarrow x = y^2 - 7$

Berilgen ten'leme y o`zgeriwshisine qarata to`mendegishe boladı.

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + 2y + 1} + \sqrt{y^2 - y - 6} = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{y^2 - y - 6} = 4 \Leftrightarrow |y+1| + \sqrt{y^2 - y - 6} = 4 \\ y \geq 0 &\text{ bolg'anlık tan} \end{aligned}$$

$$y+1+\sqrt{y^2-y-6}=4 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-y-6}=3-y \Leftrightarrow \begin{cases} 3-y \geq 0 \\ y^2-y-6=(3-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ y=3 \end{cases}$$

Bunnan $\sqrt{x+7}=9 \Leftrightarrow x=2$

Juwabi: $x=2$

6- misal: $\sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}} + \sqrt{\frac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}} = \frac{13}{6}$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}} + \sqrt{\frac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}} = \frac{13}{6} &\Leftrightarrow \sqrt{-\frac{(x+9)(x-2)}{(x-4)(x-2)}} + \sqrt{-\frac{(x-4)(x-2)}{(x+9)(x-2)}} = \\ = \frac{13}{6} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-\frac{x+9}{x-4}} + \sqrt{-\frac{x-4}{x+9}} = \frac{13}{6} \\ x \neq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

MMO: $\begin{cases} -\frac{x+9}{x-4} > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-4) < 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-9; 2) \cup (2; 4)$

Meyli $\sqrt{-\frac{x+9}{x-4}} = y$ dep belgileyik, bunda $y > 0$.

$$y + \frac{1}{y} - \frac{13}{6} = 0 \Leftrightarrow 6y^2 - 13y + 6 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = \frac{3}{2}$$

1) $\sqrt{-\frac{x+9}{x-4}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{x+9}{x-4} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow -9x - 81 = 4x - 16 \Leftrightarrow 13x = -65 \Leftrightarrow x_1 = -5$

2) $\sqrt{-\frac{x+9}{x-4}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{x+9}{x-4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow -4x - 36 = 9x - 36 \Leftrightarrow x_2 = 0$

Juwabi: $x_1 = 0, x_2 = -5$

7-misal: $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: Berilgen ten`lemeni to`mendegishe jazıp alamız:

$$\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2(x^2+x)+9} \quad \text{Bul ten`lemeden } x^2+x=y \quad \text{dep}$$

belgileymiz. Sonda u ke qarata to`mendegi ten`leme payda boladı.

$$\sqrt{y+4} + \sqrt{y+1} = \sqrt{2y+9} \quad \text{bul ten`lemenin` eki jag`ın kvadratqa ko`teremiz.}$$

$$\begin{aligned} y+4 + 2\sqrt{(y+4)(y+1)} + y+1 &= 2y+9 \Leftrightarrow \sqrt{(y+4)(y+1)} = 2 \Leftrightarrow y^2 + 5y + 4 = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 + 5y &= 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = -5 \end{aligned}$$

Bul tabilg`an y tin` ma`nislerin belgilengen jerge qoyamız.

1) $x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=-1$

2) $x^2 + x = -5 \Leftrightarrow x^2 + x + 5 = 0$ bul ten`lemenin` diskriminanti nol`den kishi bolg`anliqtan sheshimge iye emes.

Juwabi: $x_1 = 0, x_2 = -1$

8-misal: $\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: MMO: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$

Berilgen ten`lemenin` eki jag`in kvadratqa ko`teremiz.

$$\frac{x+4 + 2\sqrt{(x+4)(x-4)} + x-4}{4} = (x + \sqrt{x^2 - 16})^2 - 12(x + \sqrt{x^2 - 16}) + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x + \sqrt{x^2 - 16}) - 25(x + \sqrt{x^2 - 16}) + 72 = 0$$

Bul ten`lemeden $x + \sqrt{x^2 - 16} = y$ dep belgileymiz, sonda u ke qarata to`mendegi ten`leme payda boladi.

$2y^2 - 25y + 72 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{9}{2}, y_2 = 8$ Bul tabilg`an y tin` ma`nislerin belgilengen jerge

qoyip x tin` ma`nislerin tabamiz.

$$x + \sqrt{x^2 - 16} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 16} = 9 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2x \geq 0 \\ 4x^2 - 64 = 81 - 36x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4,5 \\ 36x = 145 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{145}{36}$$

Bul koren emes.

$$2) x + \sqrt{x^2 - 16} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 16} = 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ x^2 - 16 = 64 - 16x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x = 5 \end{cases}$$

Juwabi: $x=5$

9-misal: $(x + \sqrt{x^2 - 1})^5 \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1})^3 = 1$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: MMO: $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^3 \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1})^3 = 1 \Leftrightarrow ((x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1}))^3 \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x^2 + 1)^3 (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 = 1 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} = 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = -1 \end{cases}$$

$$1) x + \sqrt{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 1 - x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$2) x + \sqrt{x^2 - 1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = -1 - x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 + 2x + x^2 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

Juwbabi: $x_1 = 1, x_2 = -1$

10-mısal: $\sqrt{3x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{3x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + x + 4}$ ten`lemesın sheshın`.

Sheshiw: MMO: $x \in R$. Berılgen ten`lemenı to`mendegıshe jazamız:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x^2 + x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3} = \sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{(\sqrt{3x^2 + x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3})(\sqrt{3x^2 + x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3})}{\sqrt{3x^2 + x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3}} = \\ & = \frac{(\sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 3})(\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 3})}{\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 3}} \Rightarrow \frac{3x^2 + x + 2 - 3x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 + x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3}} = \\ & = \frac{x^2 + x + 4 - x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 3}} \Rightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{3x^2 + x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3}} = \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 3}} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (x - 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3x^2 + x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 3}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Bul ten`lemedegı ekinshi qawsırmanın` ishindegi an`latpa on`, olay bolsa ten`leme jalg`ız $x=1$ korenine iye boladı.

Juwbabi: $\{1\}$

11- mısal: $\sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x + 2} = 2x + 1$ ten`lemesın sheshın`.

Sheshiw: Berılgen ten`lemenin` eki jag`ın ten`lemenin` sol jag`ının` tu`yinlesine ko`beytemız:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x + 2})(\sqrt{x^2 + 5x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x + 2}) = (2x + 1)(\sqrt{x^2 + 5x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x + 2}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow x^2 + 5x + 3 - x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(\sqrt{x^2 + 5x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x + 2}) \Rightarrow 2x + 1 - \\ & - (2x + 1)(\sqrt{x^2 + 5x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x + 2}) = 0 \Rightarrow (2x + 1)(1 - \sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x + 2}) = 0 \end{aligned}$$

$$1) 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$2) \sqrt{x^2 + 5x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x + 2} = 1 \dots \dots \dots (1)$$

Berılgen ten`leme menen (1)- ten`lemenı qosamız, sonda to`mendegı ten`leme

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{x^2 + 5x + 3} = 2x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 3} = x + 1 \Rightarrow (\sqrt{x^2 + 5x + 3})^2 = (x + 1)^2 \Rightarrow \\ & \text{payda boladı:} \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Juwbabi: $\left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{2}{3} \right\}$

12-mısal: $2\sqrt{2x + \sqrt{x}} = 3\sqrt{\frac{x}{2x + \sqrt{x}}} + 2\sqrt{2x - \sqrt{x}}$ ten`lemesın sheshın`.

Sheshiw: MMO: $x \neq 0$. Berilgen ten`lemenı to`mendegishe jazıp ha`m onın` eki jag`ın kvadraqa ko`teremiz.

$$\left(2\sqrt{2x+\sqrt{x}} - 3\sqrt{\frac{x}{2x+\sqrt{x}}}\right)^2 = \left(2\sqrt{2x-\sqrt{x}}\right)^2 \Rightarrow 4(2x+\sqrt{x}) - 12\sqrt{x} + \frac{9x}{2x+\sqrt{x}} = 4(2x-\sqrt{x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 4\sqrt{x} - 12\sqrt{x} + \frac{9x}{2x+\sqrt{x}} = 8x - 4\sqrt{x} \Rightarrow \frac{9x}{2x+\sqrt{x}} = 4\sqrt{x}$$

Bul ten`lemenin` eki jag`ın \sqrt{x} qa bo`lemiz, sonda to`mendegi ten`leme payda boladı:

$$\frac{9}{2\sqrt{x}+1} = 4 \Rightarrow 8\sqrt{x} + 4 = 9 \Rightarrow 8\sqrt{x} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{8} \Rightarrow x = \frac{25}{64}$$

Juwabi: $\left\{\frac{25}{64}\right\}$

Shınıg`ıw ushın mısallar:

1. $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-1} = 3$
2. $12 - \sqrt{x+\sqrt{2}} = 14$
3. $\sqrt{18+\sqrt{x-\sqrt{3}}} = 22$
4. $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x-2} = 0$
5. $\sqrt{y\sqrt{2}-1} + \sqrt{4y+3} = 5$
6. $x + \sqrt{2x-1} + 6 = \sqrt{2x-1}$
7. $\sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{5x+6-x^2}$
8. $\sqrt{-x^2-3x-2} = 3x-1$
9. $\sqrt{y^2+y} + \sqrt{y^2-y-2} + \sqrt{y^2-5y-6} = 0$
10. $\sqrt{2x^2-6x+3} = \sqrt{4x-2-2x^2}$

§4. BERILGEN İRRATSİONAL TEN`LEMENİ EKİ O`ZGERİWSHİ KIRGIZIW ARQALI SHESHİW USILI

Ayırım irratsional ten`lemeler eki o`zgeriwshi kirgiziw arqalı ten`lemeler sistemasın sheshiw ja`rdeminde ansat sheshiledi. Usınday usıl menen sheshiletug`ın ten`lemelerge mısallar keltireyik.

1-mısal: $\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 4$ ten`lemesın sheshin`.

Sheshiw: $\sqrt{1+x+x^2} = y$ ha'm $\sqrt{1-x+x^2} = \kappa$ dep belgileyik. Sonda to'mendegi sistema payda boladi.

$$\begin{cases} y + \kappa = 4 \dots\dots\dots(1) \\ y^2 - \kappa^2 = 2x \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

(2)- ni (1)- ge bo'lemiz. $\frac{y^2 - \kappa^2}{y + \kappa} = y - \kappa = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2} \dots\dots\dots(3)$

(1)- ha'm (3)- ni sistema etip sheshemiz.

$$\begin{cases} y + \kappa = 4 \\ y - \kappa = \frac{x}{2} \end{cases}$$

Bunnan, $y = 2 + \frac{x}{4} \Rightarrow \sqrt{1+x+x^2} = 2 + \frac{x}{4} \Rightarrow 1+x+x^2 = 4 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{5} \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$

Berilgen ten'lemeni tabilg'an eki korende qanaatlandiradi.

Juwabi: $x_1 = -\frac{4}{\sqrt{5}}, x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$

2-misal: $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = 2 - \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ ten'lemesin sheshin'

Sheshiw: $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = y$ ha'm $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = \kappa$ dep belgileymiz. Sonda to'mendegi ten'lemeler sistemasi payda boladi.

$$\begin{cases} y + \kappa = 2 \dots\dots\dots(1) \\ y^3 + \kappa^3 = 2 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

(2)- ni (1)- ge bo'lip to'mendegi ten'lemeni payda etemiz:

$y^2 - y\kappa + \kappa^2 = (y + \kappa)^2 - 3y\kappa = 1$ bunnan $y\kappa = 1$

$\begin{cases} y + \kappa = 2 \\ y\kappa = 1 \end{cases}$ bul sistemadan $k=1$ boladi. Olay bolsa $x=0$

Juwabi: $x=0$

3- misal: $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: $\sqrt[4]{97-x} = y$ ha'm $\sqrt[4]{x} = \kappa$ dep belgileymiz. Sonda to'mendegi ten'lemeler sistemasi payda boladi:

$$\begin{cases} y + \kappa = 5 \dots\dots\dots(1) \\ y^4 + \kappa^4 = 97 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

(2)- ten'lemeni to'mendegishe tu'rlendiremiz.

$$y^4 + \kappa^4 = (y^2 + \kappa^2)^2 - 2y^2\kappa^2 = ((y + \kappa)^2 - 2y\kappa)^2 - 2y^2\kappa^2 = (25 - 2y\kappa)^2 - 2y^2\kappa^2 = 97$$

$$(y\kappa)^2 - 50y\kappa + 264 = 0 \Rightarrow y\kappa = 25 \pm 19.$$

a) $\begin{cases} y + \kappa = 5 \\ y\kappa = 6 \end{cases} \Rightarrow \kappa_1 = 2 \quad x_1 = 16 \quad \kappa_2 = 3 \quad x_2 = 81$

b) $\begin{cases} y + \kappa = 5 \\ y\kappa = 44 \end{cases}$ bul ten'lemeler sisteması sheshimge iye emes.

Juwabi: $x_1 = 16, \quad x_2 = 81$

4- misal: $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x}} = x$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} = y \quad (y \geq 0), \quad \sqrt{x - \frac{7}{x}} = \kappa \quad (\kappa \geq 0)$ belgilewlerin kirgizemiz,

sonda $\begin{cases} y^2 - \kappa^2 = x^2 - x \\ y + \kappa = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + \kappa)(y - \kappa) = x^2 - x \\ y + \kappa = x \end{cases} \Rightarrow x(y - \kappa) = x^2 - x$ bunda $x \neq 0$ bolatug'inlig'inan u ha'm k lar to'mendegi sistemani qanaatlandıradi.

$$\begin{cases} y - \kappa = x - 1 \\ y + \kappa = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{1}{2} \\ \kappa = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\kappa = \frac{1}{2}$ ma'nisin $\sqrt{x - \frac{7}{x}} = \kappa$ ten'ligine qoysaq ha'm bul ten'lemenin' eki jag'in

kvadratqa ko'tersek $4x^3 - x^2 - 28 = 0$ ten'lemesine iye bolamiz. Bul ten'lemeni sheshemiz: $4x^3 - x^2 - 28 = 4x^3 - 8x^2 + 7x^2 - 28 = (x - 2)(x^2 + 7x + 14) = 0$ bunnan $x=2$ jalg'iz koren boladi.

Juwabi: $x=2$

5-misal: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: $\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = \sqrt{(2x+3)(x+1)} = \sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{x+1}$ bolatug'ini belgili.

$\sqrt{2x+3} = a \quad (a \geq 0), \quad \sqrt{x+1} = c \quad (c \geq 0)$ dep belgileymiz. Sonda berilgen ten'leme $a + c = 3x - 16 + 2ac \dots \dots (1)$ tu'rinde boladi.

$\sqrt{2x+3} = a \Rightarrow a^2 = 2x+3 \dots \dots (2) \quad \sqrt{x+1} = c \Rightarrow c^2 = x+1 \dots \dots (3)$

(2)- ha'm (3)- ten'liklerdi qosamiz, sonda $a^2 + c^2 = 3x + 4 \Leftrightarrow 3x = a^2 + c^2 - 4$ ten'lemesi payda boladi. Bul ten'likti (1)-ge qoyamiz ha'm

$$a + c = a^2 + c^2 + 4 - 16 + 2ac \Leftrightarrow (a+c)^2 - (a+c) - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=5 \\ a+c=-4 \end{cases}$$

$$1) \quad a+c=5 \Rightarrow \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5 \Rightarrow \sqrt{2x+3} = 5 - \sqrt{x+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\sqrt{2x+3})^2 = (5 - \sqrt{x+1})^2 \Rightarrow 10\sqrt{x+1} = 23 - x \Leftrightarrow x=3$$

$$2) \quad a+c=-4 \Rightarrow \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = -4 \Leftrightarrow x = \emptyset$$

Juwabi: $x=3$

6-mısal: $\sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 1 = 0$ ten`lemesın sheshın`

Sheshiw: $\sqrt{x+1} = a$ ($a \geq 0$), $\sqrt{\frac{x-1}{x}} = c$ ($c \geq 0$) belgilewlerin kirgizemiz.

Onda $a - c = 1$ boladı.

$$\begin{cases} x+1 = a^2 \\ \frac{x-1}{x} = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^2 - 1 \\ x = \frac{1}{1-c^2} \end{cases} \Leftrightarrow (a^2 - 1)(c^2 - 1) = -1 \text{ Bul tabılg`anlardan to`mendegi}$$

sistemanı payda etemiz.

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ a^2 c^2 - a^2 - c^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 1 \\ (ac)^2 - (a - c)^2 - 2ac + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (ac)^2 - 2ac + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (ac - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow ac = 1.$$

Solay etip to`mendegi sistemag`a kelemiz:

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ ac = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ ac = 1 \end{cases} \text{ bunnan } c \cdot (c + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow c^2 + c - 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$a = 1 + c = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ endi } x \text{ tı tabamız.}$$

$$x = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - 1 = \frac{6 + 2\sqrt{5} - 4}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Juwabi: } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

7- mısal: $\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - x}}} = x$ ten`lemesın sheshın`.

Sheshiw: $u = \sqrt{a - x} \geq 0$, $\kappa = \sqrt{a - y} \geq 0$ dep belgileymiz, sonda berilgen

ten`leme $\sqrt{a - \kappa} = x$ tu`rinde boladı. Bul tabılg`anlardan to`mendegi sistemag`a iye bolamız.

$$\begin{cases} a - x = y^2 \\ a - y = \kappa^2 \\ a - \kappa = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - \kappa^2 = y - x \\ \kappa^2 - x^2 = \kappa - y \\ x^2 - y^2 = x - \kappa \end{cases}$$

Bul ten'liklerdi ko'beytemiz,

$$(y^2 - \kappa^2)(\kappa^2 - x^2)(x^2 - y^2) = (y - x)(\kappa - y)(x - \kappa) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(y - \kappa)(x - \kappa)((x + y)(y + \kappa)(\kappa + x) + 1) = 0$$

Bul ten'lemeden $(x - y)(y - \kappa)(\kappa - x) = 0$ boladı.

1) $y = \kappa \Rightarrow \sqrt{a - x} = \sqrt{a - y} \Rightarrow x = y$

2) $\kappa = x \Rightarrow \sqrt{a - y} = \sqrt{a - \kappa} \Rightarrow y = \kappa$ bunnan $x = \kappa$ boladı, olay bolsa

$x = \sqrt{a - x} \Rightarrow x^2 = a - x \Leftrightarrow x^2 + x - a = 0$. Bul ten'leme $a \geq 0$ bolg`anda on`

sheshimlerge iye boladı, yag`nıy $x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$, $a < 0$ bolg`anda sheshimge iye

bolmaydı.

Juwabi: $x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

8- misal: $\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} = 1$ ten'lemesin sheshi.

Sheshiw: $\sqrt[3]{2 - x} = y, \sqrt{x - 1} = \kappa \geq 0$ o`zgeriwshilerin kirgizemiz.

Sonda to`mendegi sistema payda boladı.

$$\begin{cases} y^3 + \kappa^2 = 1 \\ y + \kappa = 1 \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

bunnan $y^3 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y^2 + y - 2) = 0 \Leftrightarrow y(y + 2)(y - 1) = 0$

$y_1 = 0, y_2 = -2, y_3 = 1$ boladı. Demek, (1) sistema $(0;1), (1;0), (-2;3)$ sheshimlerine

iyе.

Juwabi: $\{1;2;10\}$

Shınıg`ıw ushın misallar:

1. $\sqrt{2x^2 - 7x + 3} = \sqrt{5x + 12 - 2x^2}$
2. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 6$
3. $\sqrt{4y^2 - 12y + 9} = 8$
4. $\sqrt{25x^2 + 10x + 1} = 5x - 1$
5. $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 1 - x$
6. $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} - \sqrt{5x^2 - 24x + 16} = 3 - x$
7. $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4$
8. $\sqrt{x + 9} + x + 10 = 0$
9. $\sqrt{x + 8} - x + 4 = 0$
10. $4x - \sqrt{18x + 1} + 1 = 0$

§5. JAN`A O`ZGERIWSHI KIRGIZIW JA`RDEMİNDE SHESHİLETUG`IN İRRATSİONAL TEN`LEMELERDİ SHESHİW USILLARI

1- misal: $x^2 - 3x - \sqrt{2x^2 - 6x + 5} = -3$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $x^2 - 3x = y$ dep belgileymiz, sonda ten`leme $\sqrt{2y + 5} = y + 3$ tu`rine keledi. Endi bul ten`lemeni sheshemiz.

$$\begin{aligned} \sqrt{2y + 5} = y + 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} y + 3 \geq 0 \\ 2y + 5 = (y + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -3 \\ 2y + 5 = y^2 + 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -3 \\ (y + 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -3 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Tabilg`an y tın` bul ma`ninin belgilegen jerge qoyamiz.

$$\text{Sonda } x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Juwabi: $\{1; 2\}$

2- misal: $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $y = x^2 - x$ dep belgileymiz. Sonda to`mendegi ten`leme payda boladı.

$$\begin{aligned} \sqrt{y + 2} + \sqrt{y + 7} = \sqrt{2y + 21} &\Rightarrow (\sqrt{y + 2} + \sqrt{y + 7})^2 = (\sqrt{2y + 21})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y + 2 + y + 7 + 2 \cdot \sqrt{(y + 2)(y + 7)} = 2y + 21 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 9y + 14} = 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 + 9y - 22 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -11 \end{cases} \end{aligned}$$

Tabilg`an bul y tın` ma`nislerin belgilengen jerge qoyıp x tın` ma`nislerin

tabamiz. $\begin{cases} x^2 - x = 2 \\ x^2 - x = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - x + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x \in \emptyset \end{cases}$

Juwabi: $\{-1; 2\}$

3- misal: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + \sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw:

$$\begin{aligned} (x^4 + 4x^3 + 4x^2) + 2(x^2 + 2x) + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 10} &= 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 - (x^2 + 2x + 1)^2 &= \sqrt{x^2 + 2x + 10} \\ \sqrt{x^2 + 2x + 10} = y &\text{ dep belgileymiz, } y > 0 \text{ bolsın.} \end{aligned}$$

$x^2 + 2x + 10 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = y^2 - 9$ boladı. Demek,

$$3 - (y^2 - 9)^2 = y \Leftrightarrow (y + 3)^2(y - 3)^2 + (y - 3) = 0 \Leftrightarrow (y - 3)((y + 3)^2(y - 3) + 1) = 0$$

Bunnan $y = 3u = 3$ kelip shıg`adı. Solay etip,

$$x^2 + 2x + 10 = 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Juwabi: $\{-1\}$

4- misal: $\frac{3(x-2) + 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{2(x^2 - 1)} = 1$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: Ten`lemenin` anıqlanıw oblastın tabamız:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty).$$

Berilgen ten`lemeni to`mendegi tu`rde jazamız:

$$3x - 6 + 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 2(x^2 - 1) \Leftrightarrow 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 2x^2 - 3x + 4$$

$\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = y$ ($y \geq 0$) dep belgileymiz, sonda keyingi ten`leme

$y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \end{cases}$ boladı. Bul tabılg`an eki koren sha`rtti qanaatlandıradı. Endi

x tı tabamız:

$$\text{a) } \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 3 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{73}}{4} \\ x = \frac{3 + \sqrt{74}}{4} \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 1 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 2x\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Tabılg`an to`rt korennin` barlıg`ıda ten`lemenin` anıqlanıw oblastında bolg`anlıqtan berilgen ten`lemenin` korenleri boladı.

Juwabi: $\left\{\frac{3 - \sqrt{73}}{4}; 0; \frac{3}{2}; \frac{3 + \sqrt{73}}{4}\right\}$

5- misal: $3(x + 5)(x - 2) + \sqrt{x^2 + 3x} = 0$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: Ten`lemenin` sol jag`ında turg`an korennin` anıqlanıw oblasti

$x(x+3) \geq 0$ bolg'anlıqtan ha'm on` sang`a teris sandı qosqanda nol` bolatug`ının eske alıp ten`lemenin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın to`mendegishe jazamız.

$$\begin{cases} x(x+3) \geq 0 \\ (x+5)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq -3 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$3(x+5)(x-2) + \sqrt{x^2+3x} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 30 + \sqrt{x^2+3x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(x^2+3x) + \sqrt{x^2+3x} - 30 = 0$$

Bul ten`lemedegi $\sqrt{x^2+3x} = y$ ($y \geq 0$) dep belgileymiz, sonda to`mendegi

ten`leme payda boladı: $3y^2 + y - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3\frac{1}{3} \\ y = 3 \end{cases}$

$$\sqrt{x^2+3x} = 3 \Leftrightarrow x^2+3x = 9 \Leftrightarrow x^2+3x-9 = 0 \Leftrightarrow$$

Endi x tı tabamız: $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3-3\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Tabılğ`an x tın` ma`nisleri ten`lemenin` anıqlanıw oblastına tiyisli bolg'anlıqtan berilgen ten`lemenin` korenleri boladı.

Juwabi: $\left\{ \left(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \right) \right\}$

6- misal: $\sqrt{17x^2+7x+0.5} = 13x^2+5x+0.5$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $x \in R$ de $13x^2+5x+0.5 > 0$ bolg'anlıqtan berilgen ten`leme

$$17x^2+7x+0.5 = (13x^2+5x+0.5)^2 \dots\dots(1) \text{ ten`lemesine ten` ku`shli boladı.}$$

$13x^2+5x+0.5 = y$ dep belgileymiz, sonda berilgen ten`leme to`mendegishe boladı. $17x^2+7x+0.5 = (13x^2+5x+0.5) + 4x^2+2x = y + 4x^2+2x$ boladı.

Bul tabılğ`anlardı (1)- ge qoyamız. $y^2 = y + 4x^2 + 2x \Leftrightarrow y^2 - y - 4x^2 - 2x = 0$

Bull ten`lemenin` diskriminanti $D = 1 + 4(4x^2 + 2x) = 16x^2 + 8x + 1 = (4x + 1)^2$

Demek, $y = \frac{1 \pm (4x + 1)}{2}$ bunnan $y_1 = -2x$, $y_2 = 2x + 1$ kelip shıg`adı. y tın` bul

tabılğ`an ma`nislerin (1) -ge qoysaq

$$13x^2 + 5x + 0,5 = -2x \Leftrightarrow 13x^2 + 7x + 0,5 = 0 \text{ ha'm } 13x^2 + 5x + 0,5 = 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13x^2 + 3x - 0,5 = 0 \text{ ten'lemeleri kelip shig'adi. Bul ten'lemelerdi sheship,}$$

berilgen ten'lemelerdin' korenlerin tabamiz.

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{23}}{26}, \quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{35}}{26}$$

7- misal: $\sqrt[4]{x(x+5)^2} + 6\sqrt[4]{x^3} = 5\sqrt[4]{x^2(x+5)}$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x(x+5)^2} + 6\sqrt[4]{x^3} = 5\sqrt[4]{x^2(x+5)} &\Leftrightarrow \sqrt[4]{x(x+5)^2} + 6\sqrt[4]{x^3} - 5\sqrt[4]{x^2(x+5)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{(x+5)^2} + 6\sqrt[4]{x^2} - 5\sqrt[4]{x(x+5)}) = 0 \end{aligned}$$

bunnan $x_1 = 0$ ha'm $\sqrt[4]{(x+5)^2} - 5\sqrt[4]{x(x+5)} + 6\sqrt[4]{x^2} = 0$, $x=0$ ma'nisi bul ten'lemeni qanaatlandirmag'ani ushin ten'lemenin' eki jag'in $\sqrt[4]{x^2}$ qa bo'lemiz:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{x+5}{x}\right)^2} - 5\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} + 6 = 0 \text{ ten'lemesi payda boladi.}$$

Bul ten'lemeden $\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = y$ ($y \geq 0$) dep belgileymiz. Sonda $y^2 - 5y + 6 = 0$

kvadrat ten'lemesi payda boladi, bul ten'lemenin' korenleri $y_1 = 2, y_2 = 3$ boladi. Bul tabilgan y tin' ma'nislerin belgilengen jerge qoyamiz.

$$1) \sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = y_1 \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+5}{x} = 16 \Leftrightarrow x+5 = 16x \Leftrightarrow 15x = 5 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}$$

$$2) \sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = y_2 \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = 3 \Leftrightarrow \frac{x+5}{x} = 81 \Leftrightarrow x+5 = 81x \Leftrightarrow 80x = 5 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{16}$$

$$\text{Juwabi: } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{16}$$

8- misal: $\sqrt{8+x+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: $\sqrt{x+7} = y$ ($y \geq 0$) dep belgileymiz, onda $x = y^2 - 7$ boladi. Bul tabilgan ma'nislerdi berilgen ten'lemege qoyamiz:

$$\begin{aligned} \sqrt{8+y^2-7+2y} + \sqrt{y^2-7+1-y} = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{y^2+2y+1} + \sqrt{y^2-y-6} = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{y^2-y-6} = 4 \Leftrightarrow |y+1| + \sqrt{y^2-y-6} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y+1+\sqrt{y^2-y-6}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \sqrt{y^2-y-6}=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 3-y \geq 0 \\ y^2-y-6=(3-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 3 \\ y^2-y-6=9-6y+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 3 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow y=3$$

Bul tabilg`an y tın` ma`ninin belgilengen jerge qoyamız. Sonda

$$x = y^2 - 7 = 3^2 - 7 = 9 - 7 = 2$$

Juwabi: $\{2\}$

9- misal: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $\sqrt{x-1} = y$ ($y \geq 0$) dep belgileymiz. Sonda $x = y^2 + 1$ boladı.

y tın` bul tabilg`an ma`ninin berilgen ten`lemege qoyamız:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2+2y+1} + \sqrt{y^2-2y+1} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{(y-1)^2} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |y+1| + |y-1| = 2 \end{aligned}$$

Bunda $y \geq 0$ bolg`anlıqtan, keyingi ten`lemeni to`mendegishe sheshemiz:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y \geq 0 \\ y+1+|y-1|=2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ |y-1|=-(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ -(y-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq y^2 + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Juwabi: $[1;2]$

10- misal: $(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} - 28 = 0$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: Ten`lemenin` anıqlanıw oblastın tabamız:

$$\frac{x+1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = y$ dep belgileymiz, sonda berilgen ten`leme to`mendegi tu`rge iye

$$\text{boladı: } y^2 + 3y - 28 = 0 \Leftrightarrow (y+7)(y-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -7 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

Berilgen ten`leme to`mendegi ten`lemeler birigiwine ten` ku`shli boladı:

$$\begin{cases} (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -7 \\ (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 4 \end{cases}$$

1)

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -7 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ \sqrt{(x-3)(x+1)} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{53} \\ x_2 = 1 + \sqrt{53} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{53}$$

$$2) (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \sqrt{(x-3)(x+1)} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 2x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \begin{cases} x_1 = 1 - 2\sqrt{5} \\ x_2 = 1 + 2\sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 2\sqrt{5}$$

Juwabi: $\{1 - \sqrt{53}; 1 + 2\sqrt{5}\}$

11-mısal: $\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} = \frac{2-x}{2+x}$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: Berilgen ten`lemenin` anıqlanıw oblastın tabamız:

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 2+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} = y \Leftrightarrow y^2 = \frac{2-x}{2+x} \text{ boladı, sonda berilgen ten`leme to`mendegi tu`rge iye}$$

$$\text{boladı: } y^2 = y \Leftrightarrow y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y(y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Bul tabılǵan y tın` ma`nislerin belgilegen jerge qoyamız:

$$1) \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

$$2) \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2+x} \Leftrightarrow 2-x = 2+x \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Juwabi: $\{0; 2\}$

12- mısal: $x^3\sqrt{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $\sqrt[3]{35-x^3} = y$ dep belgileymiz. $y^3 = 35-x^3 \Leftrightarrow x^3 + y^3 = 35$

Berilgen ten`leme to`mendegi ten`lemeler sistemasına ten` ku`shli boladı:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ xy(x+y) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 35 \\ (x+y)xy = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 = 125 \\ (x+y)xy = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Juwabi: {2; 3}

13- misal: $\frac{x\sqrt[5]{x}-1}{x\sqrt[5]{x^3}-1} + \frac{5\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1} = 16$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: MMO: $\begin{cases} \sqrt[5]{x^3}-1 \neq 0 \\ \sqrt[5]{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1$

Berilgen ten`lemeni to`mendegishe tu`rlendirip jazamız:

$$\frac{\sqrt[5]{x^6}-1}{\sqrt[5]{5x^3}-1} + \frac{\sqrt[5]{x^3}-1}{5\sqrt[5]{x}-1} = 16 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt[5]{x^3}-1)(\sqrt[5]{x^3}+1)}{\sqrt[5]{x^3}-1} + \frac{(\sqrt[5]{x^3}-1)(\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1)}{\sqrt[5]{x}-1} = 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^3}+1 + \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x}+1 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x} - 14 = 0$$

Bul ten`lemeden $\sqrt[5]{x} = y$ dep belgileymiz.

$$y^3 + y^2 + y - 14 = 0 \Leftrightarrow (y^3 - 8) + (y^2 - 4) + (y - 2) = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(y^2 + 2y + 4) + \\ + (y - 2)(y + 2) + (y - 2) = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(y^2 + 3y + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = 0 \\ y^2 + 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y = \emptyset \end{cases}$$

Tabilg`an bul y tin` ma`nisin belgilegen jerge qoyamız:

$$\sqrt[5]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 32$$

Juwabi: {2}

14-misal: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw:

$$x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x\sqrt{1+x} = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3-x} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x\sqrt{1+x})^2 = (2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3-x})^2 \Leftrightarrow x^2(1+x) = 4(x^2+1) + 3-x - \\ - 4\sqrt{x^2+1}\sqrt{3-x} \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+1}\sqrt{3-x} = -x^3 + 3x^2 - x + 3 + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+1}\sqrt{3-x} = (x^2+1)(3-x) + 4$$

Keyingi ten'lemeden $\sqrt{x^2+1}\sqrt{3-x}=y$ dep belgileymiz, sonda to'mendegi kvadrat ten'leme payda boladı.

$$4y = y^2 + 4 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

Bul tabılg'an y tin' ma'nisin belgilengen jerge qoyamız.

$$\sqrt{x^2+1}\sqrt{3-x} = 2 \Rightarrow (x^2+1)(3-x) = 4 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(-x^2+2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \\ x_3 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Juwabi: $x_1 = 1, x_2 = 1 + \sqrt{2}, x_3 = 1 - \sqrt{2}$

Shınıg`ıw ushın mısallar:

1. $(x-1)\sqrt{x-2} = 5\sqrt{2}$
2. $x^2 + 4x + 15 = x\sqrt{2x+15}$
3. $(4x+1)\sqrt{x+5} = \sqrt{2}$
4. $2(x^2+2) = 5\sqrt{x^3+1}$
5. $4 + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x+2\sqrt{x-1}}$
6. $4 + \sqrt{x-3} = \sqrt{1+x+4\sqrt{x-3}}$
7. $3 + \sqrt{x-2} = \sqrt{7+x} + 6\sqrt{x-2}$
8. $x = \sqrt{12+x+4\sqrt{x+8}}$
9. $\sqrt{x-1} - \sqrt{2-x} = 1$
10. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 4$

§6. KUB KOREN QATNASQAN İRRATSIONAL TEN'LEMELERDİ SHESHİW USILLARI

1-mısal: $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$ ten'lemesin sheshin`.

Sheshiw: Berilgen ten'lemenin` eki jag`ın kubqa ko'teremiz:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1 &\Rightarrow (\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3})^3 = 1^3 \Rightarrow x+34 - x-3 - \\ &- \sqrt[3]{(x+34)(x-3)} \cdot (\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3}) = 1 \end{aligned}$$

Keyingi ten`lemedegi qawsırmann` ishindegi an`latpanın` ornına

$\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$ ma`nısın qoysaq keyingi ten`leme to`mendegi ko`riniste boladı.

$$37 - 3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+34)(x-3)} = 12 \Leftrightarrow (x+34)(x-3) = 1728 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 31x - 1830 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -61 \\ x_2 = 30 \end{cases}$$

Juwabi: $\{-61; 30\}$

2-mısal: $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$ ten`lemesın sheshın`.

Sheshiw: MMO: $x \geq 0$

Ten`lemenin` eki jag`ın kubqa ko`teremız:

$$1 + \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})} + 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})^2} + 1 - \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})} + 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})^2} = 6 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}) = \\ = 6$$

Keyingi ten`lemedegi qawsırmann` ishindegi an`latpanın` ornına

$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$ ma`nısın qoysaq keyingi ten`leme to`mendegi ko`riniste boladı.

$$3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1-x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Juwabi: $\{0\}$

Ayırım irratsional ten`lemeler to`mendegi teorema ja`rdeminde an`sat sheshiledi.

Teorema: Eger $a \pm b = c$ bolsa, onda $a^3 \pm b^3 \pm 3abc = c^3$ boladı.

Da`lillew:

$$a \pm b = c \Leftrightarrow (a \pm b)^3 = c^3 \Leftrightarrow a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 = c^3 \Leftrightarrow a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b) = c^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow a^3 \pm b^3 \pm 3abc = c^3$$

3-mısal: $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$ ten`lemesın sheshın`.

Sheshiw: $x+5 + x+6 = 2x+11$ demek, bul ten`lemeni joqarıdag`ı teoremadan

paydalanıp sheshiwge boladı:

$$x+5 + x+6 + 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)} = 2x+11 \Leftrightarrow 2x+11 + 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)} =$$

$$2x+11 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)} = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x+6)(2x+11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Juwabi: $\left\{-\frac{11}{2}; -5; -6\right\}$

4-mısal: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$ ten`lemesın sheshın`.

Sheshiw: Bunday tu`rdegi ten`lemeni to`mendegi formulani paydalanip ansat sheshiwge boladi.

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \dots\dots\dots(1)$$

Meyli $a = \sqrt[3]{x+1}$; $b = \sqrt[3]{x+2}$; $c = \sqrt[3]{x+3}$ bolsin, olay bolsa

$$x+1+x+2+x+3-3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3}).$$

$$\left((\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2})^2 + (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x+3})^2 + (\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x+1})^2 \right)$$

Bul ten`lemenin` on` ta`repi`ndegi birinshi qawsirmanin` ornina

$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$ ma`nisi`n qoysaq, onda ten`leme to`mendegi tu`rde boladi:

$$\begin{aligned} 3x+6-3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)} &= 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)} = x+2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3) &= (x+2)^3 \Leftrightarrow (x^2+3x+2)(x+3) = x^3+6x^2+12x+8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x^2+9x+2x+6 &= x^3+6x^2+12x+8 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Juwabi: $\{-2\}$

5- misal: $3\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} + 3\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} = 10$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $3\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} + 3\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} = 10 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}} = 10$

$\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} = y \neq 0$ dep belgileymiz.

$$3y + \frac{3}{y} - 10 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3} \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

Bul tabilg`an y tin` ma`nislerin belgilengen jerge qoyamiz.

1) $\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} = y_1 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{27} \Rightarrow 27x-54 = x+2 \Leftrightarrow 26x = 56 \Leftrightarrow x_1 = \frac{28}{13}$

2) $\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} = y_2 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} = 3 \Rightarrow \frac{x-2}{x+2} = 27 \Rightarrow 27x+54 = x-2 \Leftrightarrow 26x = -56 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{28}{13}$

Juwabi: $\left\{ -\frac{28}{13}, \frac{28}{13} \right\}$

6- misal: $2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{27-14x} = 1$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $\sqrt[3]{x-1} = y$ dep belgileymiz, bunnan $x = y^3 + 1$ boladı. Bul tabılǵ`anlardı berilgen ten`lemege qoysaq:

$$\begin{aligned} 2y + \sqrt[3]{27 - 14(y^3 + 1)} = 1 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{27 - 14(y^3 + 1)} = 1 - 2y \Rightarrow 27 - 14(y^3 + 1) = (1 - 2y)^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 27 - 14y^3 - 14 = 1 - 6y + 12y^2 - 8y^3 &\Leftrightarrow 6y^3 + 12y^2 - 6y - 12 = 0 | : 6 \Leftrightarrow y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2(y + 2) - (y + 2) = 0 &\Leftrightarrow (y + 2)(y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Bul tabılǵ`an y tın` ma`nislerin belgilengen jerge qoyamız.

$$1) x_1 = (-2)^3 + 1 = -8 + 1 = -7$$

$$2) x_2 = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$3) x_3 = 1 + 1 = 2$$

Juwabi: $\{-7; 0; 2\}$

6- misal: $\frac{(x-1)\sqrt[3]{10-x} - (10-x)\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{10-x}} = 6$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: MMO: $x \neq 0$. Berilgen ten`lemenin` alımı ha`m bo`limin $\sqrt[3]{x-1}$ ge bo`lemiz:

$$\frac{(x-1)\sqrt[3]{\frac{10-x}{x-1}} - (10-x)}{1 - \sqrt[3]{\frac{10-x}{x-1}}} = 6 \text{ ten`lemesinen } \sqrt[3]{\frac{10-x}{x-1}} = y \text{ dep belgilesek, } \frac{10-x}{x-1} = y^3$$

boladı ha`m bunnan $x = \frac{y^3 + 10}{y^3 + 1}$ boladı. Endi $x-1$ ha`m $10-x$ an`latpaların u arqalı

$$\text{an`latamız: } x-1 = \frac{y^3 + 10}{y^3 + 1} - 1 = \frac{9}{y^3 + 1}; \quad 10-x = 10 - \frac{y^3 + 10}{y^3 + 1} = \frac{9y^3}{y^3 + 1}$$

Bul tabılǵ`anlardı berilgen ten`lemege qoyamız.

$$\frac{\frac{9y}{y^3 + 1} - \frac{9y^3}{y^3 + 1}}{1 - y} = 6 \Rightarrow \frac{9y}{y^3 + 1}(1 - y^2) = 6 \Rightarrow \frac{9y(1+y)}{y^3 + 1} = 6 \Leftrightarrow \frac{9y(y+1)}{(y+1)(y^2 - y + 1)} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9y = 6y^2 - 6y + 6 \Leftrightarrow 6y^2 - 15y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

Bul tabılǵ`an y tın` ma`nislerin belgilengen jerge qoyamız.

$$x_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 10}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1} = \frac{81}{9} = 9; \quad x_2 = \frac{2^3 + 10}{2^3 + 1} = \frac{18}{9} = 2$$

Juwabi: {2;9}

7- misal: $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 34x + 37} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 34x - 37} = 2$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 34x + 37} = a$ ha`m $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 34x - 37} = b$ dep belgileymiz,

Sonda berilgen ten`leme $a - b = 2$ tu`rine iye boladı ha`m bul ten`lemenin` eki jag`ın kubqa ko`teremiz:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 8 \Leftrightarrow a^3 - 3ab(a - b) - b^3 = 8 \dots \dots \dots (1)$$

$$a^3 - b^3 = (x^3 + 3x^2 + 34x + 37) - (x^3 - 3x^2 + 34x - 37) = 6x^2 + 74, \text{ al}$$

$$ab = \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 34x + 37)(x^3 - 3x^2 + 34x - 37)} = \sqrt[3]{(x^3 + 34x)^2 - (3x^2 + 37)^2}$$

bul tabilg`anlardı (1)- ge qoysaq to`mendegi ten`leme payda boladı.

$$6x^2 + 74 - 6\sqrt[3]{(x^3 + 34x)^2 - (3x^2 + 37)^2} = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x^3 + 34x)^2 - (3x^2 + 37)^2} = x^2 + 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^3 + 34x)^2 - (3x^2 + 37)^2 = (x^2 + 11)^3 \Leftrightarrow x^6 + 68x^4 + 1156x^2 - 9x^4 - 222x^2 - 1369 =$$

$$= x^6 + 33x^4 + 363x^2 + 1331 \Leftrightarrow 26x^4 + 571x^2 - 2700 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = -\frac{625}{26} \end{cases}$$

$$1) x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \quad 2) x^2 = -\frac{625}{26} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Juwabi: {-2;2}

8- misal: $(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} + (x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} = 2$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = y \neq 0$ dep belgileymiz, sonda berilgen ten`leme to`mendegishe

boladı:

$$(3-x)y + \frac{x-1}{y} = 2 \Rightarrow (3-x)y^2 - 2y + (x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{x-1}{3-x} \end{cases}$$

Bul tabilg`an y tın` ma`nislerin belgilegen jerge qoyamız:

$$1) \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = 1 \Rightarrow \frac{3-x}{x-1} = 1 \Rightarrow 3-x = x-1 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

$$2) \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = \frac{x-1}{3-x} \Rightarrow \frac{3-x}{x-1} = \left(\frac{x-1}{3-x}\right)^3 \Rightarrow \frac{3-x}{x-1} = \frac{1}{\left(\frac{3-x}{x-1}\right)^3}$$

Bul ten`lemeden $\frac{3-x}{x-1} = a$ dep belgilesek, onda ten`leme $a = \frac{1}{a^3} \Rightarrow a^4 = 1$ boladı.

$$a^4 = 1 \Leftrightarrow (a^2 - 1)(a^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ a = \emptyset \end{cases}$$

Bul tabilg`an a nın` manislerin belgilegen jerge qoyamız:

$$1) \frac{3-x}{x-1} = 1 \Rightarrow 3-x = x-1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$2) \frac{3-x}{x-1} = -1 \Rightarrow 3-x = 1-x \Rightarrow x \in \emptyset$$

Juwabi: {2}

9- misal: $\sqrt[3]{(2-x)^2} - \sqrt[3]{(2-x)(7+x)} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = 3$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $\sqrt[3]{2-x} = a$ ha`m $\sqrt[3]{7+x} = b$ dep belgileymiz ja`ne bulardan

$$a^3 = 2-x; \quad b^3 = 7+x \text{ tabamız. Eger bul eki ten`likti qossaq } a^3 + b^3 = 9 \dots(1)$$

ten`ligine iye bolamız.

Berilgen ten`lemeni belgilewler arqalı to`mendegishe jazamız:

$$a^2 - ab + b^2 = 3 \dots\dots\dots(2)$$

(1)- ha`m (2)- ten`lemelerden to`mendegi sistemanı payda etemiz:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ a^2 - ab + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 9 \\ a^2 - ab + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ a^2 - ab + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3-b \\ a^2 - ab + b^2 = 3 \end{cases}$$

$a = 3-b$ ma`nisin sistemanın` ekinshi ten`lemesine qoyıp to`mendegi ten`lemeni payda etemiz:

$$(3-b)^2 - b(3-b) + b^2 = 3 \Leftrightarrow b^2 - 3b + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \end{cases}$$

Bul tabilg`anlardan $a_1 = 2; a_2 = 1$. Endi a ha`m v lardın` ornına ma`nislerin qoyıp x tin` ma`nislerin tabamız: $x_1 = 2 - 2^3 = 2 - 8 = -6; x_2 = 2 - 1 = 1$

Juwabi: {-6;1}

Shınıg`ıw ushın misallar:

$$1. \sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 6$$

$$2. \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 2 \frac{x-1}{x}$$

3. $\frac{\sqrt{x^2+x+6} + \sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6} - \sqrt{x^2-x-4}} = 1$
4. $\sqrt{x^2+5x-4} - \sqrt{x^2+5x+6} = -3$
5. $\sqrt{x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2-5x+5} = 3-x$
6. $\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x-1} = \sqrt{x-1}$
7. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-8} = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-10}$
8. $\sqrt{2x^2+21x-11} - \sqrt{2x^2-9x+4} = \sqrt{18x-9}$
9. $\sqrt{2x^2+3x-2} + \sqrt{4x^2-2x-1} = \sqrt{18x^2+5x-7}$
10. $\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2+9} = 5$
11. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 2$

§7. JASALMA USILLAR JA`RDEMİNDE SHESHİLETUG`IN İRRATSİONAL TEN`LEMELERDİ SHESHİW USILLARI

1-mısal: $\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: Ten`lemenin` sol jag`ı on` bolg`anlıqtan, on` jag`ıda on` bolıwı, yag`nıy $x > 0$ bolıwı tiyis. Berilgen ten`lemenin` eki jag`ın ten`lemenin` sol jag`ındag`ı an`latpanın` tu`yinlesine ko`beytemiz.

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5})(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}) = \\ & = 3x(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}) \Leftrightarrow 6x = 3x(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}) \Leftrightarrow B \\ & \Leftrightarrow x(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5} - 2) = 0 \end{aligned}$$

bunnan $x=0$ biraq bul ma`nis ten`lemenin` koreni emes. Endi to`mendegi ten`lemeni sheshemiz:

$$\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5} = 2 \dots \dots \dots (1)$$

Berilgen ten`leme menen (1)- ten`lemeni qosamız, sonda to`mendegi ten`leme payda boladı: $2\sqrt{2x^2+3x+5} = 3x+2$ bul ten`lemenin` eki jag`ın kvadratqa

ko`tersek: $8x^2+12x+20 = 9x^2+12x+4 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases} \quad x > 0$ ekenin itibarg`a

alsaq, $x=4$ berilgen ten`lemenin` koreni boladı.

Juwabi: {4}

2- misal: $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw:

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7 \dots \dots \dots (1)$$

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 15} - \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = y \dots \dots \dots (2)$$

(1)- ha`m (2)- ten`lemelerdi ag`zama-ag`za ko`beytemiz, sonda $u=1$ kelip shıg`adı.

Bul tabılğ`an $u=1$ ma`nisin (2)- ge qoyamız.

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7 \dots \dots \dots (1)$$

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 15} - \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 1 \dots \dots \dots (3)$$

(1)- ha`m (3)- ten`lemelerdi ag`zama-ag`za qosıp to`mendegi ten`lemege iye bolamız:

$$2\sqrt{3x^2 - 2x + 15} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 2x + 15} = 4 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 15 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Juwabi: $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$

3-misal: $(2x - 1)\sqrt{x - 2} = 7\sqrt{2}$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: Berilgen ten`lemenin` eki jag`ındag`ı korenler o`z-ara ten`bolsın dep oylayıq. Eger olar ten` bolsa, onda to`mendegi ten`lemeler sistemasına iye bolamız.

$$\begin{cases} 2x - 1 = 7 \\ \sqrt{x - 2} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

Berilgen ten`lemenin` $x=4$ ten basqa korenlerinin` joq ekenligin ko`rseteyik.

Meyli $x > 4$ bolsın, onda $\begin{cases} 2x - 1 > 7 \\ \sqrt{x - 2} > \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow (2x - 1)\sqrt{x - 2} > 7\sqrt{2}$

Eger, $2 \leq x \leq 4$ bolsa, onda $\begin{cases} 2x - 1 < 7 \\ \sqrt{x - 2} < \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow (2x - 1)\sqrt{x - 2} < 7\sqrt{2}$

Demek, berilgen ten`leme jalğ`ız $x=4$ korenine iye boladı.

Juwabi: {4}

4- misal: $\sqrt{x + \sqrt{6x - 9}} + \sqrt{x - \sqrt{6x - 9}} = \sqrt{6}$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: MMO: $\begin{cases} 6x - 9 \geq 0 \\ x - \sqrt{6x - 9} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ (x - 3)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$

Berilgen ten'lemenin` sol jag`ındag`ı ha`r bir korendi quramalı koren formulasınan paydalanıp to`mendegishe jazamız:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-6x+9}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-6x+9}}{2}} + \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-6x+9}}{2}} - \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-6x+9}}{2}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x+\sqrt{x^2-6x+9}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{x^2-6x+9}} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x^2-6x+9} = 3-x \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2} = 3-x \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-3| = 3-x \\ x \leq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$|x-3| = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = 3-x \\ 3-x = x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{Juwabi: } \frac{3}{2} \leq x \leq 3$$

5- misal: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$ ten'lemesin sheshin`.

$$\text{Sheshiw: MMO: } \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow x \geq -1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Meyli $\sqrt{2x+3} = y_1$ ha`m $\sqrt{x+1} = y_2$ dep belgileyik, sonda to`mendegi ten`lik payda boladı:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 2x+3 + x+1 - 20 + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} = (\sqrt{2x+3})^2 + (\sqrt{x+1})^2 + \\ &+ 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} - 20 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 - 20 \end{aligned}$$

Bunnan $y_1 + y_2 = (y_1 + y_2)^2 - 20$, bul ten`lemeden $y_1 + y_2 = a$ dep belgilesek

$$a^2 - a - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ a_2 = 5 \end{cases}$$

Bul tabılğ`an a nın` ma`nislerin belgilegen jerge qoyıp to`mendegi ten`lemelerdi payda etemiz: 1) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = -4 \Rightarrow x \in \emptyset$

2) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = 5 - \sqrt{x+1}$ bul ten`lemenin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastı $5 - \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 5 \Rightarrow x+1 \leq 25 \Rightarrow x \leq 24$ boladı.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} &= 5 - \sqrt{x+1} \Rightarrow (\sqrt{2x+3})^2 = (5 - \sqrt{x+1})^2 \Rightarrow 2x+3 = 25 - 10\sqrt{x+1} + x+1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x-23 = -10\sqrt{x+1} \Rightarrow 10\sqrt{x+1} = 23-x \Rightarrow 100x+100 = 529 - 46x + x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 146x + 429 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 143 \end{cases} \end{aligned}$$

$x_2 = 143$ ma`nisi ten`lemenin` anıqlanıw oblastında bolmag`anlıqtan ten`lemenin` koreni bolmaydı, olay bolsa berilgen ten`leme $x=3$ korenine iye boladı.

Juwabi: $\{3\}$

6- misal: $\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}} = \sqrt{x}$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw:

$$\begin{aligned} & \frac{(x+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}})}{x-x-\sqrt{3}} + \frac{(x-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}})}{x-x+\sqrt{3}} = \sqrt{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{(x-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}} - \frac{(x+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}})}{\sqrt{3}} = \sqrt{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{x-\sqrt{3}}-\sqrt{3}x-\sqrt{3}\sqrt{x-\sqrt{3}}-x\sqrt{x}+x\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sqrt{x+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{x(\sqrt{x+\sqrt{3}}+\sqrt{x-\sqrt{3}})+\sqrt{3}(\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}})-2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = \sqrt{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{x(\sqrt{x+\sqrt{3}}+\sqrt{x-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}} + \sqrt{x+\sqrt{3}} - \sqrt{x-\sqrt{3}} = 3\sqrt{x} \end{aligned}$$

Bul ten'lemeni ja'ne de tu'rlendiremiz:

$$\begin{aligned} & \frac{x(\sqrt{x+\sqrt{3}}+\sqrt{x-\sqrt{3}})(\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}(\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}})} + \sqrt{x+\sqrt{3}} - \sqrt{x-\sqrt{3}} = 3\sqrt{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{x(x+\sqrt{3}-x+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}})} + \sqrt{x+\sqrt{3}} - \sqrt{x-\sqrt{3}} = 3\sqrt{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}(\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}})} + \sqrt{x+\sqrt{3}} - \sqrt{x-\sqrt{3}} = 3\sqrt{x} \end{aligned}$$

Keyingi ten'lemenin' eki jag'in kvadratqa ko'teremiz, sonda to'mendegi ten'leme payda boladi.

$$\begin{aligned} & \frac{4x^2}{x+\sqrt{3}+x-\sqrt{3}-2\sqrt{x^2-3}} + x+\sqrt{3}+x-\sqrt{3}-2\sqrt{x^2-3}+2\cdot 2x=9x \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{4x^2}{2(x-\sqrt{x^2-3})} + 2(x-\sqrt{x^2-3})=5x \Rightarrow 2x^2+2(x-\sqrt{x^2-3})^2=5x(x-\sqrt{x^2-3}) \Rightarrow \\ \Rightarrow & 2x^2+2x^2+2x^2-6-4x\sqrt{x^2-3}=5x^2-5x\sqrt{x^2-3} \Rightarrow \\ \Rightarrow & 6x^2-6-4x\sqrt{x^2-3}=5x^2-5x\sqrt{x^2-3} \Rightarrow x\sqrt{x^2-3}=6-x^2 \end{aligned}$$

Keyingi ten'lemenin' eki jag'in kvadratqa ko'teremiz, sonda to'mendegi ten'leme payda boladi:

$$x^4-3x^2=36-12x^2+x^4 \Rightarrow 9x^2=36 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases}$$

bunda, $x \geq 3$ bolg'anlıqtan $x = -2$ koreni ten'lemeni qanaatlandırmaydı, olay bolsa berilgen ten'leme bir $x = 2$ korenine iye boladı.

Juwabi: $\{2\}$

7- misal: $\sqrt[3]{2-x} = 2-x^3$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: Meyli ten'lemenin' sol jag'ındag'ı an'latpa $f(x) = 2-x^3$ funktsiyası bolsın, usı funktsiyag'a keri bolg'an $g(x)$ funktsiyasın tabayıq:

$$f(x) = 2-x^3 \Rightarrow x^3 = 2-f(x) \Rightarrow x = \sqrt[3]{2-f(x)}, \text{ demek, } g(x) = \sqrt[3]{2-f(x)}$$

Ten'lemenin' sha'rti boyınsha $f(x) = g(x)$ bolg'anlıqtan

$$2-x^3 = x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x^2 + x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

Juwabi: $\{1\}$

8- misal: $x^2 - x + 1 = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: Ten'lemenin' on' jag'ındag'ı an'latpa $f(x) = x^2 - x + 1$ funktsiyası bolsın, usı funktsiyag'a keri bolg'an $g(x)$ funktsiyasın tabayıq, onın' ushın to'mendegi kvadrat ten'lemeni sheshemiz:

$$x^2 - x + 1 - f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1-f(x))}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4f(x)-3}}{2}$$

$$2x = 1 + \sqrt{4f(x)-3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - \frac{3}{4}}, \text{ demek } f(x) \text{ funktsiyasına keri bolg'an}$$

$$g(x) \text{ funktsiyası to'mendegishe boladı: } g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$$

Berilgen ten'lemenin' sha'rti boyınsha $f(x) = g(x)$ bolg'anlıqtan berilgen ten'leme to'mendegishe jazıladı:

$$x^2 - x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Juwabi: $\{1\}$

9- misal: $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 3$ ten'lemesin sheshin'.

Sheshiw: Berilgen ten'lemenin' sol jag'ındag'ı ha'r bir qoslıwshını Koshi ten'sizliginen paydalanıp to'mendegishe jazamız:

$$\sqrt[4]{1-x^2} = \sqrt[4]{(1+x)(1-x)} \leq \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}$$

$$\sqrt[4]{1-x} = \sqrt{1 \cdot \sqrt{1-x}} \leq \frac{1 + \sqrt{1-x}}{2}$$

$$\sqrt[4]{1+x} = \sqrt{1 \cdot \sqrt{1+x}} \leq \frac{1 + \sqrt{1+x}}{2}$$

Bul ten`sizliklerdi qossaq to`mendegi ten`sizlik kelip shıg`adı:

$$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \leq 1 + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1+(1-x)}{2} + \frac{1+(1+x)}{2} = 3$$

Joqarıdagı keltirilgen ten`sizliklerdin` ha`r birinde ten`lik $x=0$ bolg`anda orınlanadı, olay bolsa $x=0$ berilgen ten`lemenin` sheshimi boladı.

Juwabi: $\{0\}$

10-mısal: $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1 \dots \dots \dots (1)$

Berilgen ten`lemenin` sol jag`ındagı an`latpag`a tu`yinles bolg`an an`latpanı

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 8} + \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = a \dots \dots \dots (2) \text{ dep belgileyik.}$$

(1)-ha`m (2)- ten`lemelerdi ko`beytsek, to`mendegi ten`leme payda boladı:

$$3x^2 + 5x + 8 - 3x^2 - 5x - 1 = a \Leftrightarrow a = 7, \text{ bul ma`nisti (2)-ge qoysaq}$$

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 8} + \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 7 \dots \dots \dots (3) \text{ ten`leme payda boladı.}$$

(1)-ha`m (3)-ten`lemelerdi qosıp to`mendegi ten`lemeni payda etemiz:

$$2\sqrt{3x^2 + 5x + 8} = 8 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 5x + 8} = 4 \Rightarrow 3x^2 + 5x + 8 = 16 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{8}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Juwabi: $\left\{-\frac{8}{3}; 1\right\}$

11-mısal: $\sqrt[4]{x+41} + \sqrt[4]{41-x} = 4$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: $\sqrt[4]{x+41} = a \geq 0 \dots \dots (1)$ ha`m $\sqrt[4]{41-x} = e \geq 0 \dots \dots (2)$ dep belgileyemiz.

(1)-ha`m (2)-ten`lemeni berilgen ten`lemege qoysaq $a + e = 4 \dots \dots (3)$ ten`lemesi

ha`m bul ten`lemelerden to`mendegi ten`lemeler sisteması payda boladı.

$$\begin{cases} x+41 = a^4 \\ 41-x = e^4 \end{cases} \Rightarrow a^4 + e^4 = 82 \dots \dots \dots (4)$$

(3)-ha`m (4)-ten`lemelerden to`mendegi ten`lemeler sisteması payda boladı:

$$\begin{cases} a + \epsilon = 4 \\ a^4 + \epsilon^4 = 82 \end{cases} \text{ bul ten'lemeler sistemasın to'mendegishe sheshemiz:}$$

$$a^4 + \epsilon^4 = 82 \Rightarrow (a^2 + \epsilon^2)^2 - 2a^2\epsilon^2 = 82 \Rightarrow ((a + \epsilon)^2 - 2a\epsilon)^2 - 2a^2\epsilon^2 = 82 \text{ bul ten'lemedegi}$$

$$a + \epsilon = 4 \quad \text{ekenligin eske alsaq, onda}$$

$$(16 - 2a\epsilon)^2 - 2a^2\epsilon^2 = 82 \Rightarrow 256 - 64a\epsilon + 4a^2\epsilon^2 - 2a^2\epsilon^2 - 82 = 0 \Rightarrow (a\epsilon)^2 - 32(a\epsilon) + 87 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a\epsilon)_1 = 3 \\ (a\epsilon)_2 = 29 \end{cases}$$

Bul tabılǵ'an ma'nislerden to'mendegi ten'lemeler sistemaları payda boladı:

$$1) \begin{cases} a + \epsilon = 4 \\ a\epsilon = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \epsilon = 1 \\ a = 1 \\ \epsilon = 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} a + \epsilon = 4 \\ a\epsilon = 29 \end{cases} \text{ bul ten'lemeler sisteması sheshimge iye}$$

emes. Bul tabılǵ'an a ham ϵ nın ma'nislerin (1)-ha'm (2)-ge qoyamız:

$$a) \begin{cases} \sqrt[4]{x+41} = 3 \\ \sqrt[4]{41-x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+41 = 81 \\ 41-x = 1 \end{cases} \text{ bul sistemann' birinshi ten'lemesinen ekinshisin}$$

$$\text{alsaq } 2x = 80 \Rightarrow x_1 = 40 \quad v) \begin{cases} \sqrt[4]{x+41} = 1 \\ \sqrt[4]{41-x} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+41 = 1 \\ 41-x = 81 \end{cases}$$

bul sistemann' birinshi ten'lemesinen ekinshisin alsaq $2x = -80 \Rightarrow x_2 = -40$

$$\text{Juwabi: } \{-40; 40\}$$

$$\text{12-mısal: } \sqrt{\frac{x-5}{x+2}} + \sqrt{\frac{x-4}{x+3}} = \frac{7}{x+2} \sqrt{\frac{x+2}{x+3}} \text{ ten'lemesin sheshin'}$$

$$\text{Sheshiw: MMO: } \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+3 > 0 \\ x-4 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 5$$

Berilgen ten'lemeni to'mendegishe tu'rlendirip jazamız:

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+3}} = \frac{7}{\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-2x-15} + \sqrt{x^2-2x-8}}{\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+3}} = \frac{7}{\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-2x-15} + \sqrt{x^2-2x-8} = 7$$

Keyingi ten'lemeden $x^2 - 2x - 8 = y$ dep belgileymiz.

$$\sqrt{y-7} + \sqrt{y} = 7 \Rightarrow \sqrt{y-7} = 7 - \sqrt{y} \text{ bul ten'lemenin' mu'mkin ma'nislerinin' oblastı:}$$

$$\begin{cases} y-7 \geq 0 \\ 7 - \sqrt{y} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 7 \\ y \leq 49 \end{cases} \Rightarrow 7 \leq y \leq 49$$

$$\sqrt{y-7} = 7 - \sqrt{y} \Rightarrow y-7 = 49 - 14\sqrt{y} + y \Rightarrow 14\sqrt{y} = 56 \Rightarrow \sqrt{y} = 4 \Rightarrow y = 16$$

y tın' bul tabılǵ'an ma'nisin belgilengen jerge qoysaq:

$$x^2 - 2x - 8 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 6 \end{cases} \quad \text{Juwabi: } \{6\}$$

13- misal: $\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshin`: MMO: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ x^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6 &\Leftrightarrow \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} - 12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} - 2x - 2\sqrt{x^2 - 16} + 12 = 0 &\Leftrightarrow (\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}) - (\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4})^2 + 12 = 0 \end{aligned}$$

Bul keyingi ten`lemeden $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = y > 0$ dep belgileymiz:

$$y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -3 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

Bunnan $y_1 = -3$ ma`nisi alınbaydı, sebebi $y > 0$ bolıwı tiyis.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4 &\Rightarrow (\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4})^2 = 4^2 \Rightarrow x+4 + 2\sqrt{x^2 - 16} + x-4 = 16 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - 16} = 16 - 2x &\Rightarrow 4(x^2 - 16) = 4(64 - 16x + x^2) \Rightarrow x^2 - 16 - 64 - x^2 + 16x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 16x = 80 &\Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Juwabi: $\{5\}$

14- misal: $2x + \frac{x-1}{x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 3\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 0$ ten`lemesin sheshin`.

Sheshiw: Berilgen ten`lemeden $\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = a$ ha`m $\sqrt{x+1} = \epsilon$ dep belgileymiz.

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = a \Rightarrow \frac{x-1}{x} = a^2; \quad \sqrt{x+1} = \epsilon \Rightarrow x+1 = \epsilon^2; \quad \sqrt{x - \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}} = \sqrt{\frac{x-1}{x} \cdot (x+1)} = a\epsilon$$

Bul ma`nislerdi berilgen ten`lemege qoyıp to`mendegi ten`lemege iye bolamız:

$$\begin{aligned} a^2 - a - 3a\epsilon + 2\epsilon^2 - 2 = 0 &\Leftrightarrow a^2 - a\epsilon + a - 2a\epsilon + 2\epsilon^2 - 2\epsilon - 2a + 2\epsilon - 2 = 0 \Leftrightarrow a(a - \epsilon + 1) - \\ - 2\epsilon(a - \epsilon + 1) - 2(a - \epsilon + 1) &= 0 \Leftrightarrow (a - \epsilon + 1)(a - 2\epsilon - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \epsilon - 1 \\ a = 2\epsilon + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x} = \sqrt{x^2 + x} \Rightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{x})^2 = (\sqrt{x^2 + x})^2 \Rightarrow$$

$$1) \Rightarrow x-1 + 2\sqrt{x(x-1)} + x = x^2 + x \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - x} = x^2 - x + 1 \Rightarrow (\sqrt{x^2 - x} - 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

2) $\sqrt{1-\frac{1}{x}} = 2\sqrt{x+1} + 2$ bul ten`leme sheshimge iye emes, sebebi ten`lemenin` sol

jag`ı 1 den kishi, al on` jagı 1 den u`lken.

Juwabi: $\left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$

Shınıg`ıw ushın mısallar:

Ten`lemelerdi sheshin`.

1. $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-1} = -3$

2. $6 - \sqrt{x} + \sqrt{2} = 7$

3. $\sqrt{10 + \sqrt{x} - \sqrt{3}} = 3$

4. $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$

5. $7\sqrt{y\sqrt{2}-1} + 5\sqrt{4y+3} = 2$

6. $x + \sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{x-1}$

7. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{5x - 6 - x^2}$

8. $\sqrt{-x^2 - 3x - 2} = x - 1$

9. $\sqrt{y^2 + y} + \sqrt{y^2 - y - 2} + \sqrt{y^2 - 5y - 6} = 0$

10. $\sqrt{2x^2 - 7x + 3} = \sqrt{5x - 2 - 2x^2}$

11. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2$

12. $\sqrt{4y^2 - 12y + 9} = 6$

13. $\sqrt{25x^2 + 10x + 1} = 5x + 1$

14. $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 1 - 3x$

15. $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} - \sqrt{9x^2 - 24x + 16} = 3 - 2x$

16. $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2$

17. $\sqrt{x+9} + x + 8 = 0$

18. $\sqrt{x+8} - x + 2 = 0$

19. $3x - \sqrt{18x+1} + 1 = 0$

20. $(2x-1)\sqrt{x-2} = 7\sqrt{2}$

21. $x^2 + 2x + 15 = 2x\sqrt{2x+15}$

22. $(4x+1)\sqrt{x+5} = -11\sqrt{2}$
23. $2(x^2+2) = 5\sqrt{x^3+1}$
24. $1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+2}\sqrt{x-1}$
25. $2 + \sqrt{x-3} = \sqrt{1+x+4}\sqrt{x-3}$
26. $3 + \sqrt{x-2} = \sqrt{7+x} + 6\sqrt{x-2}$
27. $x = \sqrt{12+x+4}\sqrt{x+8}$
28. $\sqrt{x-1} - \sqrt{2-x} = 1$
29. $\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4$
30. $\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 4$
31. $\sqrt{x-\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}$
32. $\frac{\sqrt{x^2+x+6} + \sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6} - \sqrt{x^2-x-4}} = 5$
33. $\sqrt{2x^2+5x-27} - \sqrt{2x^2+5x+12} = -3$
34. $\sqrt{x^2-5x+10} - \sqrt{6x^2-35x+55} = 3-x$
35. $\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x-1} = \sqrt{x-1}$
36. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x-10}$
37. $\sqrt{2x^2+21x-11} - \sqrt{2x^2-9x+4} = \sqrt{18x-9}$
38. $\sqrt{2x^2+3x-2} + \sqrt{8x^2-2x-1} = \sqrt{18x^2+5x-7}$
39. $\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2+18} = 5$
40. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$
41. $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$
42. $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$
43. $\sqrt{x^3-4x^2+x+15} + \sqrt{x^3-4x^2-x+13} = x+1$
44. $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$
45. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4-2x$
46. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$
47. $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} = 35-2x$

Paydalanilg'an a'debyatlar:

1. Algebra ha'm matematikalıq analiz tiykarlari. 1ha'm 2 bo'lim. // Abdixamidov A.I, Nasimov X.A, Nosirov I.M, Xusanov J.X. – No'kis: «Bilim», 2005.
2. Вавилов В.В, Мельников И.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенство. – Москва: «Наука», 1987.
3. Galitskiy M.L. va boshqalar. Algebra va matematik analiz kursini chuqur o'rganish: Metodik tavsiyalar va didaktik materiallar. – Toshkent: «O'qituvchi» 1995.
4. 3000 конкурсных задач по математике. // Куланин Е.Д, Норин В.П, Федин С.Н, Шевченко Ю.А. – Москва, 1998.
5. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. – Москва: «Просвещение», 1991.
6. Mirzaahmedov M.A., Karimov R.A. Tenglama va tangsizliklarni echish. – Toshkent: «O'qituvchi», 1989.
7. Umirbekov A.U, Shaabzalov Sh.Sh. Matematikani takrorlang. – Toshkent: «O'qituvchi», 1989.
8. Saxaev M. Algebradan masalalar to'plami. – Toshkent: «O'qituvchi», 1987.
9. Яремчук Ф.Р., Рудченко П.А. Алгебра и элементарные функции. – Киев, 1976.
10. Шаригин И. Математика для поступающих в вуз. – Москва: Дрофа, 2004.

MAZMUNI

Kirisiw	3
§1. Irratsional ten`lemeler.Ten`lemenin` anıqlanıw ha`m o`zgeriw oblastların tekseriw arqalı irratsional ten`lemelerdin` sheshimlerinin` bar yamasa joq ekenligin anıqlawg`a arnalg`an mısallar	4
§2. Bir yamasa bir neshe koren astındag`ı an`latpaları anıq kvadrat bolg`an irratsional ten`lemelerdi sheshiw	7
§3. Bir neshe kvadrat korenlerdi o`z ishine alatug`ın irratsional ten`lemelerdi sheshiwge mısallar	9
§4. Berilgen irratsional ten`lemeni eki o`zgeriwshi kirgiziw arqalı sheshiw usılı	14
§5. Jan`a o`zgeriwshi kirgiziw ja`rdeminde sheshiletug`ın irratsional ten`lemelerdi sheshiw usılları	19
§6. Kub koren qatnasqan irratsional ten`lemelerdi sheshiw usılları	26
§7. Jasalma usıllar ja`rdeminde sheshiletug`ın irratsional ten`lemelerdi sheshiw usılları	32
Paydalanılg`an a`debiyatlar	43

Du'ziwshiler:

N.Djumabaev, J.Valieva – A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı ulıwma matematika kafedrasının' ag'a oqıtıwshıları.

G.Mamutova – Ulıwma matematika kafedrası assistent oqıtıwshısı.

İRRATSİONAL TEN`LEMELERDİ SHESHİW USILLARI

(metodikalıq qollanba)

Metodikalıq qollanba A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutının' Oqıw-metodikalıq Ken'esi qararı (4-iyul' 2014-jılǵı №10) menen baspadan shıǵ'arıwǵ'a usınılg'an.

Bas redaktor *K.M. Koshanov*

Tex. redaktor *U.B. Balımova*

Operator *N. Nisanbaev*

A'jiniyaz atındag'ı NMPİ redaksiya-baspa bo'limi

A'jiniyaz atındag'ı NMPİ kishi baspaxanasında basılǵ'an 2014-j.

**Buyırtpa №0086. Nusqası 100 dana. Formatı 60x84. Ko'lemi 2,8 b.t.
230105, No'kis qalası, A. Dosnazarov ko'shesi-104. Reestr №11-3084.**