

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

QARSHI MUHANDISLIK IQTISODIYOT INSTITUTI

Eshmatov Bahodir Eliyevichning

«OLIV MATEMATIKA» FANIDAN

MARUZA MATNI

Transport yo'nalishi
2-kurslari uchun

QARSHI – 2014

1-maruza: Kombinatorika elementlari

Reja:

1. O‘rin almashtirishlar.
2. O‘rinlashtirishlar.
3. Mosliklar.
4. Takrorlanishli o‘rin almashtirishlar .
5. Takrorlanishli o‘rinlashtirishlar..
6. Takrorlanishli mosliklar.

Tayanch iboralar: **Kabinatorika**, O‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar, mosliklar, takrorlanishli o‘rin almashtirishlar, takrorlanishli o‘rinlashtirishlar, takrorlanishli mosliklar

Kombinatorika – bu diskret matematikaning diskret to‘plam elementlarini berilgan qoidalar asosida tanlash va joylashtirish bilan boq‘liq masalalarni yechish usullarini o‘rganuvch bo‘limdir.

Qandaydir predmetlardan tashkil topgan guruhlar birikmalar yoki kombinatsiyalar deb ataladi.

Uch xil turdagi kombinatsiyalar bor: o‘rin almashtirish, o‘rinlashtirish va mosliklar.

O‘rin almashtirishlar. n ta elementli o‘rin almashtirishlar deb, bir-biridan faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladigan n ta elementli birikmalarga aytiladi. Masalan, 3 ta A , B va C elementdan 6 ta o‘rin almashtirish bajarish mumkun: ABC , BAC , ACB , CAB , CBA , BCA .

n ta elementli o‘rin almashtirishlar soni quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

EXSEL dasturining standart funktsiyalari: Matematik funktsiyalar. $n!$ qiymatini maxsus *FAKTR(SON)** nomli funktsiya hisoblaydi. Bunda SON - n ning miqdoriy qiymatiga teng. Shuningdek ikkilangan faktorial $n!!$:

$$n!! = (2k+1)!! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2k+1) \quad (n - \text{toq})$$

$$n!! = (2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k) \quad (n - \text{juft})$$

Uning qiymatini maxsus *DVFATR(SON)* nomli funktsiya hisoblaydi.

O‘rinlashtirishlar. n ta elementdan m ta dan o‘rinlashtirishlar deb, har birida berilgan n ta elementdan m tasi olingan shunday birikmalarga aytiladiki, ularning har biri hech bo‘lmaganda bitta elementi bilan yoki faqat ularning joylashish tartidi bilan farq qiladi.

Masalan, 3 ta A , B va C dan ikkita elementli 6 ta o‘rinlashtirish mavjud: AB , AC , BC , BA , CA , CB ;

n ta elementda m ta dan o‘rinlashtirishlar soni

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}; \quad (0 \leq m \leq n)$$

formulasi bilan hisoblanadi.

$$A_n^1 = n; \quad A_n^0 = 1.$$

EXSEL dasturining standart funktsiyalari: Statistik funktsiyalar. O‘rinlashtirishlar sonining qiymatini maxsus $PEREST(SON;TALANGAN_SON)$ nomli funktsiya hisoblaydi. Bunda SON - barcha tanlash obyektlari soni (ya’ni n); $TANLANGAN_SON$ - tanlanayotgan obyektlari soni (ya’ni m).

Mosliklar. n ta element orasidan m ta element dan tuzilgan mosliklar deb, har birida berilgan n ta elementdan m tasi olingan shunday birikmalarga aytiladiki, ularning har biri hech bo‘lmaganda bitta elementi bilan farq qiladi.

n ta element orasidan m ta element dan tuzilgan mosliklar soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad (0 \leq m \leq n).$$

formulasi bilan hisoblanadi. Bu son quyidagi xossalarga ega:

$$1, C_n^0 = C_0^0 = 1. \quad 2, C_n^1 = n. \quad 3, C_n^m = C_n^{n-m}, \quad (m \neq \frac{n}{2}).$$

$$4, C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad 5, C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}, \quad (0 \leq m \leq n).$$

EXSEL dasturining standart funktsiyalari: Matematik funktsiyalar. Mosliklar sonining qiymatini maxsus $CHISLKOMB(SON;TALANGAN_SON)$ nomli funktsiya hisoblaydi. Bunda SON - barcha tanlash ob’ektlari soni (ya’ni n); $TANLANGAN_SON$ - tanlanayotgan ob’ektlari soni (ya’ni m).

Takrorlanishli o‘rin almashtirishlar. n ta A, B, K, C elementlar mavjud bo‘lub, ularning ichida A element α marta, B element β marta va h.k. hamda C element γ marta takrorlansin va $n = \alpha + \beta + K + \gamma$ bo‘lsin. U holda, takrorlanishli o‘rin almashtirishlar

$$P_{takr.} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot K \cdot \gamma!}$$

formula yordamida topiladi.

Takrorlanishli o‘rinlashtirishlar. n ta elementdan m ta dan takrorlanishli o‘rinlashtirishlarda ($m < n$) ixtiyoriy element 1 dan m martagacha uchrashi yoki umuman uchramasligi mumkin, ya’ni har bir n ta elementdan m ta dan takrorlanishli o‘rinlashtirish nafaqat turli elementdan, balki m ta ixtiyoriy ravishda takrorlanuvchi ixtiyoriy elementlardan tashkil etilgan, hech bo‘lmaganda elementlarining joylashish tartidi bilan farq qilivchi guruhlar har xil guruh hisoblanadi.

n ta elementdan m ta dan takrorlanishli o‘rinlashtirishlar soni

$$A_{n,takr.}^m = n^m$$

formula yordamida topiladi.

Takrorlanishli mosliklar. n ta elementdan m ta dan takrorlanishli mosliklarda ($m < n$) ixtiyoriy element 1 dan m martagacha uchrashi yoki umuman uchramasligi mumkin, ya’ni har bir n ta elementdan m ta dan takrorlanishli o‘rinlashtirish nafaqat turli elementdan, balki m ta ixtiyoriy ravishda takrorlanuvchi ixtiyoriy elementlardan tashkil tohishi mumkin. Tarkibi

bir xil bo‘lib, faqat elementlarining tartibi bilan farq qiluvchi guruhlar farq qilinmaydi.

n ta elementdan m ta dan takrorlanishli o‘rinlashtirishlar soni

$$C_{n,takr.}^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

formula yordamida topiladi.

2-3-mavzu: Hodisa. Elementar va diskret hodisalar fazosi. Ehtimollikning klassik, geometrik va statistik ta’riflari

Reja:

1. Hodisa.

2. Elementar va diskret hodisalar fazosi.

3. Ehtimollikning klassik, geometrik va statistik ta’riflari .

Таянч иборалар: Hodisa, elementar va diskret hodisalar fazosi, klassik ta’rif, geometrik ta’rif, statistik ta’rif.

Tasodifiy hodisalar ustida amallar. Tajribaning har bir yaxlit natijasi *elementar hodisa* deb ataladi. Barcha *elementar hodisalar* to‘plamini $\Omega = \{\omega\}$ deb belgilaymiz. $\Omega = \{\omega\}$ to‘plam *elementar hodisalar fazosi* deb ataladi.

Ω fazoning $\forall A$ qism to‘plami *hodisa* deb ataladi.

A va B hodisaning *yig‘indisi* $A \cup B$ deb yoki A hodisaga, yoki B hodisaga, yoki ularning ikkalasiga ham tegishli bo‘lgan *elementar hodisalardan* iborat bo‘lgan to‘plamaga aytiladi.

A va B hodisalarning ko‘paytmasi $A \cap B$ yoki $A \cdot B$ deb, A va B larning har ikkalasiga tegishli bo‘lgan *elementar hodisalardan* iborat bo‘lgan hodisaga aytiladi.

A va B hodisalarning ayirmasi $A \setminus B$ deb A ga tegishli va B ga tegishli bo‘lmagan *elementar hodisalardan* iborat bo‘lgan hodisaga aytiladi.

Agar $A \cdot B = \emptyset$ bo‘lsa, u holda A va B hodisalar birgalikda bo‘lmagan hodisalar deyiladi hamda bu holda $A \cup B$ ning o‘riniga $A + B$ yoziladi.

Ω to‘plam *muqarrar* hodisa, \emptyset - to‘plam *mumkun bo‘lmagan* hodisa deyiladi.

Agar $A \cdot \bar{A} = \emptyset$ va $A + \bar{A} = \Omega$ bo‘lsa, u holda \bar{A} hodisa A hodisaga *qarama-qarshi* hodisa deyiladi.

Ehtimollikning ta’riflari. Hodisaning ehtimolligi bu hodisaning ro‘y berishi imkonining miqdoriy ko‘rsatgichidir.

Agar W - n ta o‘zaro teng kuchli, ya’ni ro‘y berish yoki bermasligining ehtimolligi bir xil bo‘lgan hodisalardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda A hodisaning $P(A)$ ehtimolligi A hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diradigan *elementar hodisalar soni* m ning barcha *elementar hodisalar soni* n ga nisbatiga teng:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Barcha *elementar hodisalar* teng imkoniyatli bo‘lgan hol “klassik” hol deb ataladi. Shuning uchun $P(A)$ ehtimollik ko‘pincha “klassik” ehtimollik deb ataladi.

Ushbu $w(A) = \frac{m}{n}$ nisbat A hodisaning *nisbiy chastotasi* ham deb ataladi.

Nisbiy chastota tajribalardan so'ng hisoblanadi. m - A hodisa ro'y bergan tajribalar soni; n - tajribalarning umumiy soni. Statistik ta'rifda hodisaning ehtimolligi sifatida uning nisbiy chastotasi olinadi. Shuning uchun klassik ta'rif statistik ta'rif deb ataladi.

Geometrik ehtimollik tajriba uchun elementar hodisalar soni cheksiz ko'p bo'lgan hollarda ishlatiladi. Geometrik ehtimollikning ma'nosini quyidagicha: Ixtiyoriy olingan nuqtaning $g \in G$ sohaga tushish ehtimoli

$$P(g) = \frac{g}{G}$$

songa teng.

4-5-мавзу: Shartli ehtimollik. Ehtimollikning ko'paytirish va qo'shish teoremlari..

Reja:

1. Shartli ehtimollik.

2. Ehtimollikning ko'paytirish va qo'shish teoremlari.

Таянч иборалар: Shartli ehtimollik, o'zaro bog'liq emas va o'zaro bog'liq hodisalar, ehtimollikning yig'indisi va ko'paytmasi.

Agar ikkita A va B hodisalardan birining ro'y berishi ikkichisining ro'y berish yoki bermasligiga bog'liq bo'lmasa, bunday hodisalar *o'zaro bog'liq emas* deyiladi. Aks holda ular *o'zaro bog'liq* deyiladi.

$P(A|B)$ *sartli ehtimollik* deb B hodisa ro'y berganligi aniq bo'lganligida A hodisa ro'y berish ehtimolligiga aytiladi:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ bunda } P(B) > 0.$$

Agar A va B hodisalar *o'zaro bog'liq* bo'lmasa, u holda $P(A|B) = P(A)$ va $P(B|A) = P(B)$ tengliklar bajariladi.

Teorema (ko'paytirish teoremasi): O'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli bu hodisalar har birining ro'y berish ehtimolliklarining ko'paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Umumiy holda

$$P(A_1 \cdot K \cdot A_n) = P(A_1) \cdot K \cdot P(A_n).$$

O'zaro bog'liq bo'lgan ikki hodisaning bir vaqtda ro'y berish ehtimolligi quyidagiga teng:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B); \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B|A);$$

Umumiy holda, agar A_1, A_2, K, A_n hodisalar o'zaro bog'liq bo'lsa,

$$P(A_1, A_2, K, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot K \cdot P(A_n|A_1 \cdot K \cdot A_{n-1}).$$

Teorema (qo'shish teoremasi). Birgalikda bo'lmagan 2 hodisadan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimolliklarining yig'indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Umumiy holda, agar A_1, A_2, \dots, A_n birgalikda bo'lmagan hodisa bo'lsa,

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

O'zaro birgalikda bo'lgan ikkita hodisadan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimoli ular har birining ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolini ayirilganiga teng:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

O'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar uchun ehtimollarni qo'shish formulasi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

6-7- mavzu: To'la ehtimollik. Bayes formulasi. Bernulli sxemasi. Bernulli va Puasson formulalari.

Reja:

- 1. Hech bo'lmaganda bitta hodisaning ro'y berish ehtimolligi**
- 2. To'la ehtimollik formulasi.**
- 3. Bayes formulasi.**
- 4. Бернулли ва Пуассон формулалари**

A_1, A_2, \dots, A_n hodisalar to'plami o'zaro bog'liqsiz va $P(A_i) = p_i, q_i = 1 - p_i$ bo'lsin. Aytaylik, sinov natijasida bu hodisalarning hech biri ro'y bermasligi yoki ularning bir qismi, yoki hammasi ro'y berishi mumkin bo'lsin. A hodisa A_1, A_2, \dots, A_n hodisalarning hech bo'lmaganda bittasi ro'y berishidan iborat hodisa bo'lsin. U holda

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$$

Xususan, agar A_1, A_2, \dots, A_n hodisalarning ehtimolliklari bir xil $P(A) = p, q = 1 - p$ bo'lsa, u holda $P(A) = 1 - q^n$.

H_1, H_2, \dots, H_n hodisalar to'la guruhni tashkil etsin, ya'ni sinov natijasida ularning faqat bittasi ro'y berishi mumkin va ular birgalikda emas:

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1, \quad H_i \cdot H_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

A hodisa ana shu hodisalardan bittasi ro'y bergandagina ro'y berishi mumkin bo'lsin. H_1, H_2, \dots, H_n hodisalarning qaysi biri ro'y berishi oldindan ma'lum bo'lmagani uchun ular *gipotezalar* deb ataladi. A hodisa ro'y berish ehtimoli to'la ehtimollik deyiladi:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i).$$

Ba'zan, A hodisa ro'y bergani ma'lum bo'lgandan so'ng H_k gipotezalarning $P(H_k | A)$ shartli ehtimolligini hisoblash zaruriyati tug'iladi. Bu ehtimolliklar Bayes formulasidan aniqlanadi:

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k)P(A | H_k)}{P(A)}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Bu yerda $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i)$ bo'lib, $H_k, k = \overline{1, n}$, gipotezalar to'la guruhni tashkil etadi.

$H_k, k = \overline{1, n}$ - ehtimollik *aprior (sinovdan oldingi)*,

$P(H_k | A), k = \overline{1, n}$ - ehtimollik *aposterior (sinovdan keyingi)* deyiladi.

Aytaylik, biror A hodisaning ketma-ket o'tkazilayotgan bog'liqsiz tajribalarning har birida ro'y berishi ham bermasligi ham mumkun bo'lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi p ga teng va bu ehtimollik tajriba nomeriga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son. Tabiiyki, har bir tajriba uchun A hodisaning ro'y bermaslik ehtimoli $q = 1 - p$ ga teng bo'ladi. Yuqoridagi shartlarnu qanoatlantiruvchi tajribalar ketma-ketligiga *Bernulli sxemasi* deyiladi.

Bernulli sxemasi 2 ta parametr uchun n - tajribalar soni va p - har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi bilan aniqlanadi. Bernulli sxemasida A hodisaning m marta ro'y berish ehtimolligi *Bernulli formulasi* bilan aniqlanadi:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \quad \text{bunda } p = 1 - q.$$

n ta tajriba o'tkazilganda hodisaning ro'y berishlar soni m_1, m_2 ($m_1 < m_2$) sonlar orasida bo'lish ehtimolligi quyidagi formuladan topiladi:

$$P_n(m_1; m_2) = P_n(m_1 \leq k \leq m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k)$$

n ta tajriba o'tkazilganda hodisaning ko'pi bilan m marta ro'y berish ehtimolligi quyidagi formuladan topiladi:

$$P_n(0; m) = \sum_{k=0}^m P_n(k) \quad \text{yoki} \quad P_n(0; m) = 1 - \sum_{k=m+1}^n P_n(k)$$

n ta tajriba o'tkazilganida hodisaning kamidan m marta ro'y berish ehtimolligi quyidagi formulalar bilan topiladi:

$$P_n(m; n) = \sum_{k=m}^n P_n(k) \quad \text{yoki} \quad P_n(m; n) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_n(k).$$

n ta tajriba o'tkazilganida hodisaning hech bo'lmaganda bir marta ro'y berish ehtimolligi quyidagi formuladan topiladi:

$$P_n(1; n) = 1 - q^n.$$

EXSEL dasturining standart funktsiyalari:

Standart funktsiyalar: Bernulli sxemasida A hodisaning n tajribaning m tasida tasodifiy ro'y berish ehtimolligi $P_n(m)$ va hodisaning ko'pi bilan m marta ro'y berish ehtimolligi $P_n(0; m)$ maxsus

BINOMRASP(SON_S;TAJRIBALAR;S_EHTIMOLLIK;INTEGRAL) nomli funktsiya yordamida hisoblanadi. Bunda *SON_S* ro'y berishlar soni; *TAJRIBALAR* - barcha tajribalar soni; *S_EHTIMOLLIK* - har bir tajriba uchun

hodisaning ro‘y berish ehtemoli; *INTEGRAL* - ushbu parametrga *ROST(ISTINA – TRUE)* qiymati berilsa $P_n(m)$ ehtimollik hisoblanadi; parametrga *YOLG‘ON(LOJ – FALSE)* qiymati berilsa $P_n(0;m)$ ehtimollik hisoblanadi;

n tajriba o‘tkazilganda hodisaning hech bo‘lmaganda bir marta ro‘y berish ehtimolini hisoblash uchun maxsus funktsiyaga murojaat quyidagicha:

$$1 - \text{BINORASP}(n;0;p;\text{ROST});$$

n tajriba o‘tkazilganida hodisaning ro‘y berishlar soni m_1, m_2 orasida bo‘lish ehtimoli $P_n(m_1;m_2)$ ni hisoblash uchun maxsus funktsiyaga murojaat quyidagicha:

$$\text{BINOMRASP}(n;m_2;p;\text{ROST}) - \text{BINOMRASP}(n;m_1;p;\text{ROST}).$$

P dan kichik bo‘lmagan ehtimollik bilan hodisa hech bo‘lmaganda bir marta ro‘y berish uchun o‘tkazish kerak bo‘lgan tajribalar soni n :

$$P_n(1;n) = 1 - q^n \geq P$$

$$(1-p)^n \leq 1-P$$

$$n \ln(1-p) \leq \ln(1-P)$$

$$n \leq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)};$$

$\ln x$ funktsiyaning qiymatlari 1- jadvalga keltirilgan.

Bernulli sxemasida hodisaning ro‘y berishlar soni m ning eng ehtimolliroq qiymati μ quyidagicha hisoblanadi:

1. Agar $(n+1)p$ ko‘paytmaning qiymati kasr bo‘lsa, m kasrning butun qismiga teng: $\mu = [(n+1)p]$.

2. Agar $(n+1)p$ ko‘paytmaning qiymati butun bo‘lsa, ro‘y berishlar soni m ning eng ehtimolliroq qiymati ikkita bo‘ladi:

$$\mu_1 = (n+1)p - 1; \quad \mu_2 = (n+1)p.$$

Puasson formulasi. Bernulli sxemasida n ning qiymati yetarlicha katta, m ning qiymati esa kichkina bo‘lgan hollarda hodisaning m marta ro‘y berishlar ehtimolligi Puasson formulasi yordamida hisoblanadi:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np$$

Puasson formulasiga asosan n ta tajriba o‘tkazilganda hodisaning ro‘y berishlar soni m_1, m_2 ($m_1 < m_2$) sonlar orasida bo‘lish ehtimolligi quyidagi formuladan topiladi:

$$P_n(m_1; m_2) \approx e^{-\lambda} \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$ funktsiyasining qiymatlari 2-jadvalda keltiriladi.

EXSEL dasturining standart funktsiyalari:

Standart funktsiyalar: Bernulli sxemasida A hodisaning n tajribaning m tasida tasodifiy ro‘y berish ehtemoli $P_n(m)$ va hodisaning ko‘pi bilan m marta ro‘y berish ehtimolligi $P_n(0;m)$ larni Puasson formulasi bo‘yicha maxsus

$$PUASSON(X; O'RTACHASI; INTEGRAL)$$

nomli funktsiya hisoblaydi.

8-9-MAVZY: Muavr-Laplas teoremlari

Режа:

1. Muavr-Laplasning lokal teoremasi.
2. Muavr-Laplasning integral teoremasi.
3. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar nisbiy chastotaning o‘zgarmas ehtimollikdan chetlashishi

n ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligi ko‘rilayotgan bo‘lib, biror A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi har bir tajriba uchun p soniga teng bo‘lsin. Muavr-Laplas teoremlari Bernulli sxemasida n , m , m_1 , m_2 lar katta qiymatlar qabul qilgandagina quyidagi ehtimolliklarni taqribiy hisoblash uchung qo‘llaniladi:

$$P_n(m) \approx C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \quad \text{va} \quad P(m_1 \leq k \leq m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k)$$

Muavr-Laplasning lokal teoremasi. Agar n ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligida biror hodisaning ro‘y berish ehtimolligi o‘zgarmas p soniga teng bo‘lsa, bu tajribalar hodisaning aynan m marta ro‘y berish ehtimolligi

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

formula yordamida hisoblanadi. Bu yerda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Laplas funktsiyasi deb ataladi, uning qiymatlari ilovadagi 3-jadvalda keltirilgan. Funktsiya juft bo‘lganligi uchun manfiy qiymatlari ham ana shu jadvaldan topiladi ($x \geq 4$ qiymatlarda $\varphi(x) = 0$ deb olinadi).

Muavr-Laplasning integral teoremasi. Agar n ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligida biror hodisaning ro‘y berish ehtimolligi o‘zgarmas p soniga teng bo‘lsa, bu tajribalarda hodisaning ro‘y berishlar soni m ning m_1 va m_2 qiymatlar orasida bo‘lish ehtimolligi

$$P(m_1; m_2) = P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

formula yordamida hisoblanadi. Bunda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1)$$

Laplasning integral funktsiyasi deb ataladi, bu funktsiyasining qiymatlari 4-jadvalda keltirilgan.

$\Phi(x)$ toq funktsiya bo'lgani uchun x manfiy qiymatlari ana shu jadvaldan foydalaniladi. $x > 5$ da $\Phi(x) = 0.5$ bo'ladi.

EXSEL dasturining standart funktsiyalari:

Standart funktsiyalar: (1) ko'rinishdagi Laplasning integral funktsiyasining qiymatlarini maxsus *NORMSTRASP(Z)*-0,5 nomli funktsiya hisoblaydi.
 $\Phi_0(x) = \Phi(x) + 0,5$

O'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar nisbiy chastotaning o'zgarmas ehtimollikdan chetlashishini baholashda Muavr-Laplasning integral teoremasining natijasidan foydalaniladi.

Natija: n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribada hodisalarning ro'y berish ehtimolliigi p bo'lsa, hodisaning ro'y berishlar soni m ning nisbiy chastotasi $\frac{m}{n}$ ning o'zgarmas ehtimollik p dan chetlashishining biror $\varepsilon > 0$ dan katta bo'lmaslik ehtimolliigi quyidagiga tehg:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Bu formulani hosil qilish uchun $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon$ dan $(p - \varepsilon)n \leq m \leq (p + \varepsilon)n$ hosil qilamiz. Muavr-Laplasning teoremasini $m_1 = (p - \varepsilon)n$ va $m_2 = (p + \varepsilon)n$ chegaralar uchun qo'llasak, natija isbot bo'ladi.

10-11-mavzu: Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar, ularning sonly xarakteristikallari

Reja:

- 1. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimotlari.**
- 2. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikallari.**
- 3. Ba'zi diskret taqsimot qonunlari**
- 4. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.**
- 5. Taqsimot va zichlik funktsiyalari.**
- 6. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikallari.**

Tajriba natijasiga ko'ra biror qiymatlar to'plamidan tasodifiy ravishda bitta qiymat qabul qiladigan o'zgaruvchi miqdorga *tasodifiy miqdor* deb ataladi.

Agar tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlar chekli yoki cheksiz ketma-ketlik ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor *diskret tasodifiy miqdor* deyiladi.

Biror chekli yoki cheksiz sonli oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdor *uzluksiz tasodifiy miqdor* deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdorlar. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb uning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari x_i va mos $p_i = P(X = x_i)$ ($\sum_i p_i = 1$) ehtimolliklari majmuiga aytiladi. Har qanday tasodifiy miqdor o'zinnig taqsimot qonuni bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni jadval, formula yoki grafik ko'rinishida berilishi mumkin.

Taqsimot qonunining $M_i(x_i, p_i)$ nuqtalarni tutashiruvchi siniq chiziqdan iborat grafiqi *taqsimot poligoni* deyiladi.

Agar X tasodifiy miqdor x_1, x_2, \dots, x_n qiymatlarni mos ravishda p_1, p_2, \dots, p_n ehtimolliklar bilan qabul qiladigan deskret tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda uning *taqsimot funksiyasi* quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p_i$$

Bu yerda x_i ning x dan kichik bo'lgan qiymatlarining ehtimolliklari yig'indisi olinadi.

Quyida $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix}$ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi ko'rinishi keltirilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ p_1 & x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 < x \leq x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & x_3 < x \leq x_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 & x_4 < x \leq x_5 \\ 1 & x > x_5 \end{cases}$$

X diskret tasodifiy miqdorning $[a; b]$ oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimolligi $P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} p_i$ bo'ladi.

EXSEL dasturining standart funksiyalari:

Statistik funksiyalar: $P(a \leq X \leq b)$ ehtimollik maxsus

`VEROYATNOST(X _DIAPAZONI; EHTIM _DIAPAZONI; QUYI _CHEGARARA; YUQORI _n CHGEGARA)`

omli funktsiya bilan hisoblanadi. Bunda `X _DIAPAZONI` - X tasodifiy miqdorning qiymatlari massivi; `EHTIM _DIAPAZONI` - tasodifiy miqdorning ehtimolliklari massivi; `QUYI _CHEGARARA` - ko'rilay otgan oraliqning quyi chegarasi; `YUQORI _CHGEGARA` - majburiy bo'lmagan parametr bo'lib, ko'rilayotgan oraliqning yuqori chegarasi; Agar bu parametr qiymati kiritilmasa $P(a \leq X \leq b) = P(X = a)$ ehtimollik hisoblanadi.

2. Matematik kutilma tasodifiy miqdor o'rtacha qiymatining sonli xarakteristikasi sifatida xizmat qiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning *matematik kutilmasi* deb uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini mos ehtimolliklariga ko'paytmasining yig'indisiga aytiladi.

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari sanoqli bo'lsa, u holda

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k .$$

Matematik kutilmasining xossalari:

1. $MC = C$. 2. $M(CX) = C \cdot MX$. 3. $M(X + Y) = MX + MY$.

Ikki tasodifiy miqdor bog'liqsiz deyiladi, agar ulardan birining taqsimot qonuni ikkinchusining qanday qiymat qabul qilganligiga bog'liq bo'lmasa va aksincha.

Tasodifiy miqdor qabul qila oladigan qiymatlarining o'zining matematik kutilmasi atrofida qanchalik sochilganini baholash uning *dispersiyasi* va *o'rtacha kvadratik chetlanishi* xizmat qiladi.

Dispersiya. X tasodifiy miqdorning *dispersiyasi* deb uning matematik kutilmasidan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi.

$$DX = M[X - MX]^2 = MX^2 - (MX)^2$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun

$$DX = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - MX)^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \cdot p_k - (MX)^2$$

Dispersiyaning xossalari. 1. $DC = 0$. 2. $D(CX) = C^2 DX$.
3. $D(X \pm Y) = DX + DY$.

O'rtacha kvadratik chetlanish. X tasodifiy miqdorning *o'rtacha kvadratik chetlanishi* deb dispersiyadan olingan kvadratik ildizga aytiladi.

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}$$

X tasodifiy miqdorning *modasi* deb, tasodifiy miqdorning eng ehtimolliroq qiymatiga, ya'ni eng katta ehtimollik $p^* = \max_i(p_i)$ ga mos kelgan x^* qiymatiga aytiladi.

3. Tekis taqsimlangan diskret tasodifiy miqdor deb, chekli sondagi x_1, x_2, \dots, x_n qiymatlari teng ehtimolliklar $p_n = \frac{1}{n}$ bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdorga aytiladi. Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi qabul qiladigan qiymatlarining o'rtacha arifmetigiga teng.

Masala: X tasodifiy miqdor o'yin soqqasi tashlanganda ustki yog'da tushgan ochkolar soni va Y tasodifiy miqdor tanga tashlanganda gerb tomoni bilan tushsa 1, raqam tomoni bilan tushsa 0 qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari tuzilsin.

$$\text{Yechish: } \begin{pmatrix} X: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ P: & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} Y & 0 & 1 \\ P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Binominal taqsimot. n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi o'tkazilayotganida biror A hodisa ro'y berishi yoki bermasligi mumkin. A hodisaning ro'y berish ehtimolligi p tajribadan tajribaga o'zgarmas bo'lib qoladi. Teskari hodisaning ehtimolligi esa $q = 1 - p$ gat eng. Tajribalarning o'zaro bog'liq emasligi har tajribada A hodisaning ro'y berish yoki bermasligi qolgan tajribalar natijalariga bog'liq emasligini bildiradi.

X deskret tasodifiy miqdor n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida A hodisaning ro'y berishlar soni p esa A hodisaning

ehtimolligi bo'lsin, ya'ni Bernulli sxemasi o'rinli bo'lsin. Ana shu tasodifiy miqdor n va p parametrlri *binominal taqsimot qonuniga* bo'ysunadi:

$$P(X = k) = P_k(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}; \quad k = \overline{1, n}.$$

Binominal taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasi:

$$MX = np; \quad DX = npq.$$

EXSEL dasturining standart funktsiyalari:

Statistik funktsiyalar: $B(n; p)$ parametrlri binomial taqsimlangan X tasodifiy miqdorning m qiymat qabul qilish ehtimolligi $P(X = m)$ va bu tasodifiy miqdorning m dan katta bo'lmagan qiymatlar qabul qilish ehtimolligi $P(X \leq m)$ larni maxsus

DINOMRASP(SON_S; SINOVLAR; S_EHTIMOLLIK; INTEGRAL) nomli funktsiya hisoblaydi. Bunda *SON_S* ro'y berishlar soni (m); *SINOVLAR* - barcha tajribalar soni (n); *S_EHTIMOLLIK* - har bir tajriba uchun hodisaning ro'y berish ehtimolligi (p); *INTEGRAL* - parametr *ROST(ISTENA)* qiymat qabul qilsa, $P(X = m)$ ehtimollik, parametr *YOLG"ON(LOJ)* qiymat qabul qilsa, $P(X \leq m)$ ehtimollik hisoblanadi.

Masala: Bir shaharda 30% aholi ish joyiga shaxsiy avtotransportida borishni afzal ko'radi. Tasodifiy ravishda 8 nafar odam tanlab olindi. X - shaxsiy avtomobilni afzal ko'radiganlar soni. Uning taqsimot qonunini toping.

Yechish: X ning mumkin bo'lgan qiymatlari 0,1,2, . . . ,8; ularda mos kelgan ehtimolliklar

$$P(X = k) = P_8(k) = C_8^k \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{8-k}; \quad k = \overline{0, 8}.$$

EXSEL: $P(X = k)$ ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funktsiyaga murojaat qilinadi: *BINOMRASP(k;8;0.3;YOLG"ON)*.

Puasson taqsimot qonuni. Puasson taqsimot qonuni ko'pincha ma'lum vaqt yoki uzunlik oralig'ida hodisaning ro'y berishlar soni ustida gap borganda va ehtimollik juda kichik bo'lganda ishlatiladi.

Masalan, 10 daqiqa davomida telefon stansiyasiga qilingan qo'ng'roqlar soni; 1 soat davomida YOQSH ga kelgan mashinalar soni.

Puasson taqsimot qonuni bilan taqsimlangan X deskret tasodifiy miqdor 0,1,2,... qiymatlarni $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu yerda $\lambda = np$.

Puasson taqsimotining matematik kutilmasi va dispersiyasi:

$$MX = \lambda; \quad DX = \lambda.$$

EXSEL dasturining standart funktsiyalari:

Statistik funktsiyalar: l parametrlri Puasson taqsimoti bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning m qiymat qabul qilish ehtimolligi $P(X = m)$ ni maxsus

$$PUASSON(X_O"RTACHASI; INTEGRAL)$$

nomli funktsiya hisoblaydi. Bunda X - ro'y berishlar soni (m); *O"RTACHASI* - taqsimotning matematik kutilmasi; *INTEGRAL* - parametr *ROST(ISTENA)*

qiymat qabul qilsa, $P(X = m)$ ehtimollik, parametr $YOLG'ON(LOJ)$ qiymat qabul qilsa, $P(X \leq m)$ ehtimollik hisoblanadi.

Masala: O'rtacha hisobda bankka har 3 daqiqada bir mijoz kirska:

a) Navbatdagi bir daqiqada bankka bir mijoz kirish ehtimolligini toping.

b) Navbatdagi bir daqiqada bankka kamida 3 kishi kirish ehtimolligini toping.

$$Yechish: P(X = 1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-1/3}}{3} = 0,2388;$$

EXSEL: $P(X = 1)$ ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funktsiyaga murojaat qilinadi: $PUASSON(1;1/3;YOLG'ON)$.

$$\begin{aligned} b) P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} \right) = \\ &= e^{-1/3} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{18} \right) = 0,9951; \end{aligned}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,9951 = 0,0048.$$

EXSEL: $P(X \geq 3)$ ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funktsiyaga murojaat qilinadi: $1 - PUASSON(2;1/3;ROST)$.

n sinovlar soni katta, har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimolligi esa yetarlicha kichik bo'lganida Puasson taqsimoti yordamida binomial taqsimotni taqribiy hisoblash mumkin:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Geometrik taqsimot. X diskret tasodifiy miqdor $0,1,2,\dots$ qiymatlarni

$$P(X = k) = p(1-p)^k, \quad 0 < p < 1$$

ehtimollik bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdorga p parametrli *geometrik taqsimotga* ega bo'lgan tasodifiy miqdor deyiladi.

$P(X = k)$ - Bernulli sxemasida hodisaning aynan k ta sinovdan so'ng 1-chi marta (hodisaning 1- chi bor ($k+1$) chi tajribada) ro'y berishi ehtimolligiga teng.

Geometrik taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasi:

$$MX = \frac{1-p}{p}; \quad DX = \frac{1-p}{p^2}.$$

Masala: Uskuna mustahkamligi sinovlardan o'tkazilmoqda. Sinovlar uskunaning ishdan chiqishiga qadar o'tkaziladi. Har bir sinovda uskunaning ishdan chiqish ehtimoli 1,1 ga teng. Muvaffaqiyatli o'tgan tajribalar sonining matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

$$Yechish: MX = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0,1}{0,1} = 9; \quad DX = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0,1}{0,1^2} = 90.$$

Gipergeometrik taqsimot. Gipergeometrik taqsimot 3 ta parametr N, M, n lar yordamida aniqlanadi.

Misol: N ta mahsulot partiyasida M ta sifatsizi bor. Tekshirish uchun partiyadan tasodifan n ta mahsulot olindi. X tasodifiy miqdor $m = 0, 1, 2, \dots, \min(M, n)$ qiymatlarni quyidagi ehtimolliklar bilan qabul qiladi:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = \overline{1, n}$$

Gipergeometrik taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasi:

$$MX = \frac{nM}{N}; \quad DX = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

EXSEL dasturining standart funksiyalari:

Statistik funksiyalar: (N, M, n) parametrli gipergeometrik taqsimlangan X tasodifiy miqdorning m qiymat qabul qilish ehtimolligi $P(X = m)$ ni maxsus

GIPERGEOMET(S; TANLANMA _ HAJMI; BOSH _ TO' PLAM _ S; BOSH _ TO' PLAM _ HAJMI nomli funktsiya hisoblaydi.

n va M parametrlar o'zgarib qolganida $N \rightarrow \infty$ da gipergeometrik taqsimot binominal taqsimotga yaqinlashadi. $p = \frac{M}{N}$ sifatli mahsulotlar chastotasi bo'lsin. Agar $\frac{n}{M} < 0,1$ o'rinli bo'lsa, gipergeometrik taqsimotni binominal taqsimot bilan yaqinlashtirish mumkin, ya'ni

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \approx C_N^n p^k (1-p)^{n-k}$$

4. Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun deskret tasodifiy miqdor kabi taqsimot qonunini aniqlab bo'lmaydi, chunki uzluksiz tasodifiy miqdor chekli yoki cheksiz oraliqning har bir qiymatini qabul qilishi mumkin va bunday qiymatlar soni sanoqsiz. Shu sabab uzluksiz tasodifiy miqdorlarni tasvirlashda taqsimot va zichlik funksiyalaridan foydalaniladi.

Taqsimot funksiyasi. Barcha $-\infty < x < \infty$ uchun X tasodifiy miqdor (deskret yoki uzluksiz) ning x dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoli kabi aniqlangan funktsiyaga X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi:

$$P\{X < x\} = F(x).$$

Taqsimot funksiyasining xossalari.

1. Taqsimot funksiyasining o'zgarish sohasi: $[0; 1]$.
2. X tasodifiy miqdorning $(a; b)$ oraliqda qiymat qabul qilish ehtimoli: $P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a)$
3. $F(x)$ -kamaymaydigan funktsiya, ya'ni agar $x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda $F(x_1) \leq F(x_2)$.
4. $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.
5. Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun: $\forall a$ da $P(X = a) = 0$ va quyidagi tengliklar o'rinli:

$$P\{a \leq X \leq b\} = P\{a \leq X < b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$$

X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasidan olingan hosila tasodifiy miqdorning *zichlik funksiyasi* deyiladi.

$$f(x) = F'(x)$$

Zichlik funktsiyasining xossalari.

1. $F(x)$ - kamaymaydigan funktsiya bo'lgani uchun $f(x) \geq 0$.

2. Zichlik funktsiyasi berilgan bo'lsa, taqsimot funktsiyasi $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

formula bilan aniqlanadi.

3. X tasodifiy miqdorning $(a;b)$ oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimolligi:

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx .$$

4. Zichlik funktsiyasidan $(-\infty:\infty)$ oraliq bo'yicha olingan integral birga teng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

X tasodifiy miqdor o'zining taqsimot funktsiyasi $F(x)$ yoki zichlik funktsiyasi $f(x)$ bilan bir qiymatli aniqlanadi.

$F(x_p) = p$ bilan aniqlanadigan x_p kattalik taqsimotning p - tartibli kvantili deyiladi. 0,5 - tartibli kvantili taqsimot medianasi deyiladi: $medX = x_0$.

Agar zichlik funktsiyasi maksimum nuqtaga ega bo'lsa, $f(x)$ funktsiyani maksimumga erishadigan x argumentning qiymati taqsimot modasi deyiladi.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: X tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi

$$f(x) = cx^2 e^{-kx}, \quad (k > 0; \quad 0 \leq x < \infty).$$

a) c koeffitsientni aniqlang;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasini toping.

d) X tasodifiy miqdorning $(0;1/k)$ oraliqqa tushish ehtimolligini toping.

Yechish: a) c koeffitsientni $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ tenglikdan aniqlaymiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} cx^2 e^{-kx} dx = 1; \quad c = \left(\int_0^{\infty} x^2 e^{-kx} dx \right)^{-1}$$

Ikki marta bo'laklab integrallasak, $c = k^3 / 2$ va zichlik funktsiyasi $f(x) = \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx}$ hosil bo'ladi.

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasini quyidagicha topamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x \frac{k^3}{2} t^2 e^{-kt} dt = 1 - \frac{k^2 x^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx}; \quad 0 \leq x < +\infty.$$

c) X tasodifiy miqdorning $(0;1/k)$ oraliqqa tushish ehtimolligini topamiz:

$$P(0;1/k) = F(1/k) - F(0) = 1 - 5/2e \approx 0,086$$

5. Barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

bilan aniqlanadi.

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega:

$$1. MC = C \quad 2. M(CX) = C \cdot MX \quad 3. M(X + Y) = MX + MY.$$

Agar $Y = \varphi(X)$ barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X tasodifiy argumentning funktsiyasi bo'lsa, u holda

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx.$$

Butun OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)dx$$

kabi aniqlanadi.

X uzluksiz tasodifiy miqdor **dispersiyasining xossalari:**

$$1. DC = 0; \quad 2. D(CX) = C^2 DX; \quad 3. D(X \pm Y) = DX \pm DY.$$

Agar $Y = \varphi(X)$ barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X tasodifiy argumentning funktsiyasi bo'lsa, u holda

$$D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - M[\varphi(X)])^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x)f(x)dx - [M[\varphi(X)]]^2$$

X uzluksiz tasodifiy miqdorning *o'rtacha kvadratik chetlanishi* deb dispersiyadan olingan kvadratik ildizga aytiladi.

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}.$$

X uzluksiz tasodifiy miqdorning *modasi* deb, zichlik funktsiyasi maximum qiymati erishadigan argumentning qiymatiga aytiladi.

Barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning k -*tartibli boshlang'ich momenti* quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$v_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

Barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning k -*tartibli markaziy momenti* quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k f(x)dx$$

Ta'rifga ko'ra $k = 1$ da $v_1 = MX$, $\mu_1 = 0$ va $k = 2$ da

$$\mu_2 = DX = v_2 - v_1^2$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3;$$

6. Tekis taqsimot qonuni - $R(a; b)$. (a, b) chekli oraliqdan qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi shu oraliqda o'zgarmas songa teng bo'lib, oraliq tashqarisida nolga teng bo'lsa, bunday tasodifiy miqdorga bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdor yoki *tekis taqsimot*

qonuniga bo'ysunuvchi tasodifiy miqdor deyiladi. Tekis taqsimot qonuniga bo'ysunuvchi tasodifiy miqdorning:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a;b) \\ \frac{1}{b-a}, & x \in (a;b) \end{cases} \quad - \text{ zichlik funksiyasi}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad - \text{ taqsimot funksiyasi}$$

$$MX = \frac{b+a}{2} \quad - \text{ matematik kutilmasi;}$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12} \quad - \text{ dispersiyasi,}$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad - \text{ o'rtacha kvadratik chetlanishi.}$$

EXSEL dasturining standart funksiyalari:

Statistik funksiyalar: (0;1) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning bitta qiymatini hisoblovchi maxsus *SLCHIS()* nomli funksiya hisoblaydi.

(a;b) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning bitta qiymatini hisoblovchi maxsus *SLCHISMEJDU(QUYI_CHEGAR;YUQORI_CHEGARA)* nomli funksiya hisoblaydi.

Ko'rsatkichli taqsimot qonuni - $\Gamma_\lambda(x)$ ($\lambda > 0$). Musbat qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor bo'lib, uning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad - \text{ zichlik funksiyasi;}$$

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases} \quad - \text{ taqsimot funksiyasi;}$$

$$MX = \frac{1}{\lambda} \quad - \text{ matematik kutilmasi;}$$

$$DX = \frac{1}{\lambda^2} \quad - \text{ dispersiyasi;}$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \quad - \text{ o'rtacha kvadratik chetlanishi.}$$

EXSEL dasturining standart funksiyalari:

Statistik funksiyalar: Ko'rsatkichli taqsimot uchun zichlik

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \text{ yoki taqsimot } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases} \text{ funksiyalarining}$$

qiymatlarini maxsus: *EKSPRASP(X;LYAMBDA;INTEGRAL)* nomli funksiya hisoblaydi. Bunda X - funksiya hisoblanish kerak bo'lgan qiymati (x); *LYAMBDA* - taqsimotning λ parametri; *INTEGRAL - ROST(TERUEISTINA)* va *YOLG'ON(FALSHELOJ)* qiymatlarini qabul qiladi.

7. Tasodifiy miqdor funktsiyasining taqsimot qonuni. Diskret hol.

Diskret x tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

$$\begin{aligned}\xi: & x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad \dots \\ R: & p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n \quad \dots\end{aligned}$$

$y = g(x)$ - haqiqiy argumentning monoton funktsiyasi bo'lsin. U holda x tasodifiy miqdorning funktsiyasi bo'lgan $\eta = g(\xi)$ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

$$\begin{aligned}\eta: & g(x_1) \quad g(x_2) \quad \dots \quad g(x_n) \quad \dots \\ R: & p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n \quad \dots\end{aligned}$$

Uzluksiz hol. $x = F_\xi(x)$ taqsimot funktsiyasi va $f_\xi(x)$ zichlik funktsiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsin. $y = g(x)$ - monoton o'suvchi funktsiya, $x = g^{-1}(y)$ - unga teskari funktsiya bo'lsin. U holda $\eta = g(\xi)$ uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi quyidagicha topiladi:

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(g(\xi) < y) = P(\xi < g^{-1}(y)) = F_\xi(g^{-1}(y))$$

Oxirgi tenglikni y bo'yicha differentsiallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$F'_\eta(y) = F'_\xi(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y),$$

bu tenglikdan $\eta = g(x)$ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi uchun formula kelib chiqadi:

$$f_\eta(y) = f_\xi(g^{-1}(y)) |g^{-1}(y)|'$$

$y = g(x)$ - monoton kamayuvchi funktsiya, $x = g^{-1}(y)$ - unga teskari funktsiya bo'lsin. U holda yuqoridagi mulohazalardan so'ng quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$F_\eta(y) = F_\xi(g^{-1}(y)); \quad f_\eta(y) = -f_\xi(g^{-1}(y)) |g^{-1}(y)|'$$

Shunday qilib, agar ξ uzluksiz tasodifiy miqdor $f_\xi(x)$ zichlik funktsiyasi bilan berilgan bo'lib, $y = g(x)$ differentsiallanuvchi, monoton o'suvchi yoki monoton kamayuvchi funktsiya va $g^{-1}(y) = \phi(y)$ unga teskari funktsiya bo'lsa, u holda $\eta = g(\xi)$ tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi quyidagi tenglikdan aniqlanadi:

$$f_\eta(y) = f_\xi(\phi(y)) \cdot |\phi'(y)|$$

Amaliyotda asosan $y = g(x)$ - monoton funktsiya bo'lgan holda qo'llaniladi.

Agar $y = g(x)$ - funktsiya aniqlanish sohasida monoton bo'lmasa, u holda bu sohani funktsiya monotonik oraliqlariga bo'linib, har bir monotonik oralig'i uchun $f_i(y)$ zichlik funktsiyasini aniqlash va $f(y) = \sum_i f_i(y)$ yig'indi shaklida

tasvirlash kerak bo'ladi.

8. Ikki tasodifiy argument funktsiyasi. Kompozitsiya formulasi. Agar tasodifiy miqdorning har bir (X, Y) juftligida biron Z tasodifiy miqdorning bitta

qiymati mos kelsa, u holda Z ikki tasodifiy argument funksiyasi $Z = \varphi(X, Y)$ deyiladi.

2 ta bog‘liqsiz X, Y tasodifiy miqdorlar yig‘indasining $f_{X+Y}(z)$ zichlik funksiyasi qo‘shiluvchilarning zichlik funksiyalari $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ yordamida kompazitsiya formulasidan aniqlanadi:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad \text{yoki} \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)f_X(z-y)dy.$$

Agar X, Y argumentlarning qiymatlar to‘plami manfiy bo‘lmasa, u holda $Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi formuladan topiladi:

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad \text{yoki} \quad f_{X+Y}(z) = \int_0^z f_Y(y)f_X(z-y)dy.$$

2 ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar yig‘indisi $Z = X + Y$ ning taqsimot funksiyasi quyidagi formuladan topiladi:

$$F_{X+Y}(z) = \int_{x+y < z} f_X(x) \cdot f_Y(y) dx dy$$

2 ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan deskret tasodifiy miqdorlar uchun ham kompazitsiya formulasi mavjud:

$$P\{X + Y = Z\} = \sum_i P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = Z = x_i\},$$

bunda $P\{X = x_i\} > 0$.

9. Ikki tasodifiy miqdor sistemasi. 2 o‘lchovli tasodifiy miqdor (X, Y) orqali belgilanadi. Bunda X va Y tasodifiy miqdorlarning har biri “tashkil etuvchilar” yoki “kompanentalar” deb, ular birgalikda esa “ikki tasodifiy miqdor sistemasi” deb ataladi.

2 o‘lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi formulaga aytiladi:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$$

Taqsimot funksiyasining xossalari:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.

2. $F(x, y)$ ikkala argumenti bo‘yicha kamaymaydigan funksiya:

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \quad \text{agar } y_2 > y_1 \text{ bo‘lsa};$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \quad \text{agar } x_2 > x_1 \text{ bo‘lsa};$$

3. $F(-\infty; y) = F(x; -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, \quad F(\infty; \infty) = 1$.

4. $F(x; \infty) = F_X(x), \quad F(\infty, y) = F_Y(y)$;

5. (X, Y) tasodifiy nuqtaning uchlari $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$, da bo‘lgan D to‘rtburchakka tushish ehtimolligi quyidagi formuladan topiladi:

$$P\{(X, Y) \in D\} = P\{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

bu yerda $x_1 < x_2, \quad y_1 < y_2$.

2 o‘lchovli deskret tasodifiy miqdor deb tashkil etuvchilari diskret bo‘lgan (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasiga aytiladi.

2 o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor deb tashkil etuvchilari uzluksiz bo‘lgan (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasiga aytiladi.

2 o'lchovli deskret tasodifiy miqdor *taqsimot qonuni* deb ularning qabul qiluvchi qiymatlarining barcha juftliklari (x_i, y_j) va bu juftliklarning ehtimolliklari $p_{ij} = p(x_i, y_j)$ ko'rsatilgan jadvalga aytiladi.

2 o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar sistemasining *zichlik funksiyasi* deb sistemaning taqsimot funksiyasidan olingan 2-tartibli aralash hosilasiga aytiladi:

Zichlik funksiyasi xossalari:

1. $f(x, y) > 0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

3. $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$.

4. (X, Y) tasodifiy nuqtaning uchlari $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$, da bo'lgan D to'rtburchakka tushish ehtimoli quyidagi formuladan topiladi:

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$$

X va Y tasodifiy miqdorlar *bog'liqsiz* deyiladi, agar ulardan ixtiyoriy birining taqsimot qonuni ikkinchi tasodifiy miqdorning qanday qiymat qabul qilganiga bog'lig bo'lmasa.

Teorema (2 tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishining zarur va yetarli sharti): Ikki X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun (X, Y) - 2 o'lchovli tasodifiy miqdorning $F(X, Y)$ taqsimot funksiyasi tashkil etuvchilari taqsimot funksiyalarining ko'paytmasiga teng bo'lishi zarur va yetarli:

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Natija: Ikki X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun (X, Y) - 2 o'lchovli tasodifiy miqdorning $f(X, Y)$ birgalikdagi zichlik funksiyasi tashkil etuvchilari zichlik funksiyalarining ko'paytmasiga teng bo'lishi zarur va yetarli:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Ikki X va Y tashkil etuvchilarning matematik kutilmasi va dispersiyasi hamda (X, Y) tasodifiy nuqtaning $\forall D$ sohaga tushish ehtimolini topish formulalari quyidagi jadvalda keltirilgan:

X va Y deskret tasodifiy miqdorlar	X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlar
$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}$	$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$
$MX = \sum_i \sum_j x_i \cdot p_{ij}$ $MY = \sum_i \sum_j y_j \cdot p_{ij}$	$MX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy$ $MY = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y) dx dy$

$DX = \sum_i \sum_j (x_i - MX)^2 p_{ij}$ $DY = \sum_i \sum_j (y_i - MY)^2 p_{ij}$	$DX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x, y) dx dy$ $DY = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - MY)^2 f(x, y) dx dy$
$P\{(X, Y) \in D\} = \sum_{(x_i, y_j) \in D} p_{ij}$	$P\{(X, Y) \in D\} = \int_D f(x, y) dx dy$

$\sigma(X) = \sqrt{DX}$, $\sigma(Y) = \sqrt{DY}$ sonlar X va Y tasodifiy miqdorlarning o'rtacha kvadratik chetlashishi deyiladi.

(MX, MY) nuqta (X, Y) - 2 o'lchovli tasodifiy miqdorning sochilish markazi deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar sistemasi tashkil etuvchilarining shartli taqsimot qonuni

Diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi tashkil etuvchilarning shartli taqsimot qonunlari. (X, Y) - 2 o'lchovli diskret tasodifiy miqdorni ko'rib chiqamiz. Tashkil etuvchilarning mumkin bo'lgan qiymatlari x_1, x_2, \dots, x_n ; y_1, \dots, y_m bo'lsin. U holda X tashkil etuvchilarning $Y = y_{ji}$ sharti ostidagi shartli taqsimoti quyidagicha aniqlanadi:

$$p_{(X|Y=y_{ji})}^X = \left(p(x_1 | y_j) \quad p(x_2 | y_j) \quad \dots \quad p(x_n | y_j) \right)$$

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i; y_j)}{p(y_j)} \quad (i = \overline{1, n})$$

hisoblanadi.

Y tashkil etuvchilarning $X = x_i$ sharti ostidagi shartli taqsimoti ham shu kabi aniqlanadi:

$$p(y_j | x_i) = \frac{p(x_i; y_j)}{p(x_i)} \quad (j = \overline{1, m})$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar sistemasi tashkil etuvchilarining shartli taqsimot qonunlari. (X, Y) - 2 o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x, y)$ bo'lsin. X tashkil etuvchining $Y = y_{ji}$ qiymatidagi shartli zichligi deb (X, Y) sistemaning $f(x, y)$ birgalikdagi zichlik funksiyasining Y tashkil etuvchining zichlik funksiyasiga nisbatiga aytiladi:

$$\varphi(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}$$

Y tashkil etuvchining shartli zichligi ham xuddi shunday hisoblanadi:

$$\varphi(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}$$

Quyidagi xossalarga o'rinli::

$$\varphi(x|y) \geq 0, \quad \varphi(y|x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x|y) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y|x) = 1$$

12-13-mavzu: Kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlari.

Chiziqli regressiya tenglamasi

Reja:

1. Kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlari.
2. Chiziqli regressiya tenglamasi.
3. Chebishev tengsizligi va katta sonlar qonuni.
4. Matematik statistikada keng qo'llaniladigan tasodifiy miqdorlarning asosiy taqsimotlari.
- 5.

1. 2 o'lchovli tasodifiy miqdor (X, Y) ning kovariatsiya koeffitsienti quyidagi matematik kutilishga aytiladi:

$$\text{cov}(X, Y) = M[(X - MX) \cdot (Y - MY)] = M(X \cdot Y) - MX \cdot MY.$$

- 2 o'lchovli diskret tasodifiy miqdor (X, Y) ning kovariatsiya koeffitsienti quyidagicha hisoblanadi:

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_i \sum_j p_{ij} (x_i - MX) \cdot (y_j - MY) = \sum_i \sum_j p_{ij} x_i y_j - MX \cdot MY.$$

- 2 o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor (X, Y) ning kovariatsiya koeffitsienti quyidagicha hisoblanadi:

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)(y - MY) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - MXMY.$$

X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi chiziqli bog'lanish darajasini *korrelyatsiya koeffitsienti* ko'rsatib beradi:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}, \quad \text{bu yerda } -1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasa, *korrelyatsiya koeffitsienti* $\rho(X, Y) = 0$ va bu holda tasodifiy miqdorlar *korrelyatsiyalanmagan* deyiladi.

Ikki o'zaro korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'ladi, biroq aksinchasi o'rinli bo'lmazligi mumkin.

X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lsin. Ularning birini ikkinchisining chiziqli funksiyasi sifatida tasvirlaymiz:

$$Y = g(x) = aX + b$$

Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga chiziqli o'rtacha kvadratik regressiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$g(x) = MY + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - MX)$$

bu yerda $\rho = \rho(X, Y)$ - X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsienti;

$b = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \text{cov}(X, Y) / DX$ - Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga bo'lgan regressiyasining koeffitsienti.

Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga bo‘lgan regressiyasi tenglamasi:

$$y - MY = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - MX).$$

Bu to‘g‘ri chiziqqa *regressiya to‘g‘ri chizig‘i* deyiladi.

$\sigma_Y^2(1 - \rho^2)$ kattalik Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga nisbatan *qoldiq dispersiyasi* deyiladi. Bu kattalik Y ni $g(X) = aX + b$ chizikli funktsiya bilan almashtirilganda yo‘l qo‘yilgan xatolikning miqdorini bildiradi.

$\rho = \pm 1$ bo‘lganda, $\sigma_Y^2(1 - \rho^2) = 0$ bo‘ladi, hamda X va Y tasodifiy miqdorlar orasida esa o‘zaro chizikli funksional bog‘liqlik bor bo‘ladi.

X tasodifiy miqdorning Y tasodifiy miqdorga bo‘lgan regressiyasi tenglamasi:

$$x - MX = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - MY)$$

$b = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = \text{cov}(X, Y) / DY$ - X tasodifiy miqdorning Y tasodifiy miqdorga bo‘lgan regressiyasining koeffitsienti va $\sigma_X^2(1 - \rho^2)$ - X tasodifiy miqdorning Y tasodifiy miqdorga nisbatan *qoldiq dispersiyasi* deyiladi.

Agar $\rho = \pm 1$ bo‘lsa, u holda ikkala

$$y - MY = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - MX) \quad \text{va} \quad x - MX = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - MY)$$

regressiya chiziqlari ustma-ust tushadi. Tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, ikkala regressiya to‘g‘ri chizig‘i ham (MX, MY) nuqtada, ya‘ni 2-o‘lchovli tasodifiy miqdor (X, Y) ning sochilish markazidan o‘tadi.

2. Ma‘lumki, tajriba natijasida tasodifiy miqdor qanday qiymat qabul qilishini oldindan aytib bo‘lmaydi. Lekin azaldan ma‘lumki, ayrim keng ma‘nodagi shartlar bajarilganda, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning yig‘indisi tasodifiylikdan holi bo‘lib, ma‘lum bir qonuniyatlarga bo‘ysunar ekan. “Katta sonlar qonuni” nomi bilan katta sondagi tasodifiy miqdorlarning yig‘indisining ana shunday xossalarini aks ettiruvchi bir qator teoremlar umumlashtirilgan.

Markov tengsizligi. Manfiy qiymatlar qabul qilmaydigan X tasodifiy miqdor va $\forall a > 0$ son uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{MX}{a} \quad \text{yoki} \quad P\{X < a\} \geq 1 - \frac{MX}{a}$$

Chebisev tengsizligi. Chekli dispersiyasiga ega bo‘lgan X tasodifiy miqdor va $\forall \varepsilon > 0$ son uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad \text{yoki} \quad P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2},$$

ya‘ni X tasodifiy miqdorning uning MX matematik kutilmasidan chetlashishining absolyut qiymati bo‘yicha $\forall \varepsilon > 0$ dan kichik bo‘lish ehtimoli $1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$ dan kichik emas.

Chebisev teoremasi (katta sonlar qonuni): Agar X_1, X_2, K tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi:

- 1) juft-jufti bilan bog'liq bo'lmagan;
- 2) dispersiyalari tekis chegaralangan, ya'ni har bir hil o'zgarimas son $C > 0$ bilan chegaralangan ($DX_1 < C, DX_2 < C, K$) bo'lsa, u holda qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

Xususan, agar $MX_1 = MX_2 = K = a$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - a) \right) \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

Teoremaning isboti $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ tasodifiy miqdorga Chebisev tengsizligini qo'llashga asoslanadi:

Bu muhim teoremaning ma'nosi shunday iboratki, X_1, X_2, K, X_n tasodifiy miqdorlarning o'rta arifmetigi yetarlicha katta n uchun ularning matematik kutilmalarining o'rta arifmetigi $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i$ dan yoki, xususiyl holda, a sonidan juda kam farq qilish ehtimolligi juda katta.

Keyingi teorema hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi va uning ehtimoli orasida bog'lanish haqidadir. N ta bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi o'tkazilgan bo'lib, ularning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarimas p soniga teng bo'lsin.

Bernulli teoremasi (Katta sonlar qonuni): Tajribalar ketma-ketligining soni oshishi bilan A hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi $\frac{m}{n}$ hodisaning ro'y berish ehtimolligi p ga ehtimollik bo'yicha yaqinlashar ekan, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

3. Bu paragrafda normal taqsimot bilan bo'g'liq hamda matematik statistikada ko'p qo'llanadigan taqsimot qonunilari haqida gap boradi.

χ^2 - taqsimot

X_1, X_2, K - o'zaro bo'g'liq bo'lmagan normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Ularni har birining matematik kutilmasi nolga va dispersiyasi birga teng, ya'ni standart normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin:

$MX_i = 0, DX_i = 1, (i = 1, n)$. U holda ular kvadratlarining yig'indisi:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

erkinlik darajasi $k = n$ ga teng bo'lgan χ^2 ("xi- kvadrat") taqsimotga ega bo'ladi. Agar berilgan tasodifiy miqdorning chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda erkinlik

darajasi $k = n - 1$ bo'ladi. Misol uchun, agar $\sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$ bo'lsa, bu tasodifiy miqdor erkinlik darajasi $k = n - 1$ bo'lib

Erkinlik darajasining ma'nosini quyidagi masalalarda tushuntirish mumkin.

Masala. Kompaniya menejeri to'rtta turli loyiha uchun \$150000 byudjetga ega. Menejer nechta erkinlik darajasida ega?

Yechish. Aytalik, $X_i (i=1, 2, 3, 4)$ miqdor i - loyihaga ajratilgan mablag'ni bildirsin. To'rtta turli loyihaning umumiy byudjetini uning o'rtta arijetigini loyihalar soniga ko'paytirilganiga teng deb qarash mumkin ($X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4\bar{X}$). U holda bitta loyihaga taxminan $\$150000/4 = \$37\,500$ mablag' ajratilgan. Uchta loyihaga mablag' ajratilgandan so'ng menejerning to'rtinchi loyihaga qolgan mablag'ni ajratishdan boshqa iloji qolmadi, ya'ni

$$X_4 = 4\bar{X} - (X_1 + X_2 + X_3) = \$150000 - (X_1 + X_2 + X_3).$$

Demak, menejerning erkinlik darajasi 3 ga teng.

Umumiy hol. Z_1, Z_2, \dots, Z_n - normal taqsimlangan o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Z_i tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi a_i ga va dispersiyasi σ_i^2 ga teng. U holda $X_i = \frac{Z_i - a_i}{\sigma_i}$ tenglik orqali aniqlangan X_1, X_2, \dots, X_n tasodifiy miqdorlar standart normalar taqsimotga ega. Ular kvadratlarining yig'indisi $\chi^2 = \chi_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ erkinlik darajasi $k = n$ ga teng bo'lgan x^2 ("xi - kvadrat") taqsimoti ega bo'ladi

Erkinlik darajasi n ta teng bo'lgan x^2 taqsimotning zichlik funksiyasi:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \exp(-x/2) \cdot x^{(n/2)-1}; & x > 0 \end{cases}$$

Bu yerdan $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ - gamma fuksiya; xususan, $\Gamma(n+1) = n!$.

Matematik kutilma va dispersiyasi: $M\chi^2 = n; \quad D\chi^2 = 2;$
modasi: $mod M\chi^2 = n - 2 \quad (n \geq 2).$

Ko'rinib turibdiki "xi- kvadrat" taqsimot bitta parametr - erkinlik darajasi n bilan aniqlanar ekan. Erkinlik darajasi ortishi bilan "xi- kvadrat" normal taqsimotga yaqinlashib boradi.

Student taqsimoti

$X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ - o'zaro bog'liq bo'lgan standart normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Ularning har birining matematik kutilmasi nolga, dispersiya σ^2 ga teng. U holda ushbu tasodifiy miqdor:

$$T = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)}} = \frac{X_0}{\sqrt{\chi_n^2/n}}$$

erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan t - taqsimot yoki Student taqsimotiga ega bo'ladi. T miqdor σ^2 ga bog'liq emasligini ta'kidlab o'tamiz.

Erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan t - taqsimot yoki Student taqsimotining zichlik fuksiyasi

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

bu yerda $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ - gamma fuksiya.

Matematik kutilma, dispersiya va modasi:

$$MT = n > 1; \quad DT = \frac{n}{n-2}, \quad (n > 2); \quad \text{mod } T = 0.$$

Standart normal taqsimot bilan solishtirish

T ning asimptotik taqsimoti standart normal taqsimotga teng, ya'ni $n \rightarrow \infty$ da t - taqsimot matematik kutilmasi nolga teng, dispersiyasi birga teng normal taqsimotga yaqinlashadi.

Shunday qilib, standart normal tasodifiy miqdorning erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan χ^2 - tasodifiy miqdordan kvadrat ildizga nisbatan erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan Student taqsimotiga bo'ysunadi.

F- taqsimot yoki Fisher – Snedikor taqsimoti

$X_1, X_2, K, X_{k_1}, X_{k_1+1}, K, X_{k_1+k_2}$ matematik kutilmasi $a = 0$ va dispersiyasi $\sigma^2 < \infty$ bo'lgan o'zaro bog'liq bo'lmagan normal tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi bo'lsin. U holoda

$$F = F(k_1, k_2) = \frac{\frac{1}{k_1} (X_1^2 + X_2^2 + K + X_{k_1}^2)}{\frac{1}{k_2} (X_{k_1+1}^2 + X_{k_1+2}^2 + K + X_{k_1+k_2}^2)} = \frac{X_{k_1}^2 / k_1}{X_{k_2}^2 / k_2}$$

tasodifiy miqdor erkinlik darajasi k_1 va k_2 bo'lgan Fisher – Snedikor taqsimotining zichligi fuksiyasi.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) \cdot (k_1)^{k_1/2} (k_2)^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)} \cdot \frac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_1+k_2)^{(k_1+k_2)/2}} & x > 0 \end{cases}$$

Fisher – Snedikor taqsimotining matematik kutilmasi, dispersiyasi va modasi

$$MF = \frac{k_1}{k_2 - 2}, \quad (k_2 > 2); \quad DF = \frac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 2)^2(k_2 - 4)} \quad (k_2 > 4);$$

$$\text{mod } F = \frac{k_2(k_1 - 2)}{k_1(k_2 + 2)}.$$

Shunday qilib, erkinlik darajalari k_1 va k_2 bo'lgan χ^2 - tasodifiy miqdorlarning nisbati F - taqsimoti ega.

Mustahkamlash uchun masalalar

1, X_1, X_2, \dots, X_n - o'zaro bog'liq bo'lmagan $N(a; \sigma^2) = N(1; 1)$ parametrli normal tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Erkinlik darajasi 4 ga teng bo'lgan χ^2 - tasodifiy miqdorni ifodalang.

2, $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ - o'zaro bog'liq bo'lmagan $N(a; \sigma^2) = N(5; 7)$ parametrli normal tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Erkinlik darajasi 10 ga teng bo'lgan t - tasodifiy miqdorni ifodalang.

3, $X_1, X_2, \dots, X_{k_1}, X_{k_1+1}, \dots, X_{k_1+k_2}$ - o'zaro bog'liq bo'lmagan $N(2; 1)$ parametrli normal tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Erkinlik darajalari $k_1 = 2$ va $k_2 = 3$ ga teng bo'lgan Fisher taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorni ifodalang.

MATEMATIK STATISTIKA

Statistika fani qonuniyatlarni aniqlash maqsadida ommaviy tasodifiy hodisalarni kuzatish natijalarini tasvirlash, to'plash, sistemalashtirish, tahlil etish va izohlash usullarini o'rganadi. *Matematik statistik* esa ommaviy iqtisodiy va ijtimoiy hodisalarni tahlil etish uchun matematik apparat quradi.

13-14-mavzu: Tanlanma. Statistik va interval baholar tanlanmasining korrelyatsiya koeffitsientlari. Empirik taqsimot funksiyasi.

Reja:

1. Tanlanma.
2. Taqsimoti noma'lum parametrlarining statistik baholari.
3. Taqsimot noma'lum parametrlarining interval baholari.
4. Tanlanmaning korrelyatsiya koeffitsienti.
5. Chiziqli regressiya.
1. Biror sifat miqdoriy alomatga ko'ra obyektlar to'plami tahlil qilinayotgan bo'lsin.

Tanlanma (tanlanma to'plam) deb, tahlil uchun tasodifiy ravishda tanlab olingan ob'ektlar to'plamiga aytiladi. Tanlanma ajratib olingan to'plamga *bosh to'plam* deb ataladi. *Tanlanma hajmi yoki bosh to'plam hajmi* deb, to'plamdagi ob'ektlar soniga aytiladi. Masalan, agar 1000 ta detaldan sifatini tekshirish uchun 100 detal tanlab olingan bo'lsa, bosh to'plam hajmi $N = 1000$ va tanlanmaning hajmi $n = 100$ ga teng bo'ladi.

Tanlanmaning har bir elementi *varianta*, tartiblangan tanlanma *variatsion qator* deb ataladi.

Bosh to'plamdan tanlanma olingan va unda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta, . . . , x_k qiymat n_k marta kuzatilgan bo'lsin. U holda tanlanmaning hajmi $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ga teng. n_i kattalik - x_i variantaning *chastotasi*, $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ kattalik

esa *nisbiy chastotasi* deb ataladi va ular uchun $\sum_{i=1}^k \omega_i = 1$ tenglik o'rinli.

Tanlanmaning *statistik taqsimoti yoki statistik qatori* deb variantalar va ularga mos kelgan chastotalar (nisbiy chastotalar) dan iborat ushbu jadvalga aytiladi:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & K & x_k \\ n_1 & n_2 & K & n_k \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & K & x_k \\ \omega_1 & \omega_2 & K & \omega_k \end{pmatrix}$$

Tanlanmaning *empirik taqsimot funksiyasi* deb, x ning har bir qiymati uchun aniqlangan $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$ funksiyaga aytiladi, bunda n_k - x qiymatdan kichik bo'lgan variantalar soni; n esa tanlanmaning hajmi.

Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan farqli holda bosh to'plam uchun aniqlangan $F(x)$ funksiya nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyani baholash uchun ishlatiladi.

Empirik taqsimot funksiyasining xossalari:

1. Empirik taqsimot funksiyasining qiymatlari $[0;1]$ kesmada yotadi.
2. $F^*(x)$ - kamaymaydigan funksiya.
3. Agar x_1 - eng kichik varianta bo'lsa, u holda $x \leq x_1$ lar uchun $F^*(x) = 0$ va x_2 eng katta varianta bo'lsa, u holda $x \geq x_2$ lar uchun $F^*(x) = 1$.

Chastotalar poligoni deb $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, K , (x_k, n_k) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb $(x_1; \omega_1)$, $(x_2; \omega_2)$, K , (x_k, ω_k) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

Tanlanmani grafik usulda tasvirlashda tanlanmaning hajmi kam bo'lganda poligondan, agar hajmi katta bo'lsa yoki kuzatilayotgan kattalik uzliksiz xarakterga ega bo'lsa, gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar (nisbiy chastotalar) gistogrammasi deb, i - to'g'ri to'rtburchak asosi h uzunlikdagi $[x_{i-1}, x_i]$ qism intervaldan iborat bo'lib, balandligi esa n_i/h (ω_i/h) nisbatga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat zinapoyasimon figuraga aytiladi.

Gistogramma qurish uchun tanlanmaning barcha variantalari yotgan interval h qadam bilan $[x_{i-1}, x_i]$ qism intervallarga bo'linadi va har bir interval uchun unga tushgan variantalar chastotalarining yig'indisi n_i topiladi. So'ng qism intervallarni asos qilib n_i/h (nisbiy chastotalar gistogrammasi uchun $n_i/(h \cdot n) = \omega_i/h$) balandlikdagi to'g'ri to'rtburchaklar quriladi.

i -to'g'ri to'rtburchakning yuzasi $\frac{n_i}{h} \cdot h = n_i$ ga (nisbiy chastotalar gistogrammasi uchun $\omega_i/h \cdot h = \omega_i = n_i/n$) teng. Demak, chastotalar gistogrammasining yuzasi barcha chastotalar yig'indisiga teng. Nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzasi barcha nisbiy chastotalar yig'indisiga teng, ya'ni 1 ga teng.

2. Aytaylik bosh to'planning biror miqdoriy ko'rsatkichini baholash talab qilinsin. Nazariy mulohazalardan ana shu ko'rsatkichning taqsimotiga ega ekanligi ma'lum bo'lsin. Tabiiy ravishda bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi kelib chiqadi. Odatda kuzatish natijalari, ya'ni tanlanma qiymatlaridan boshqa ma'lumot bo'lmaydi.

Noma'lum parametrning *statistik yoki empirik bahosi* deb tasodifiy miqdorning kuzatilgan qiymatlari funksiyasiga aytiladi.

Ixtiyoriy hajmdagi tanlanma uchun matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lgan statistik baho *siljimagan baho* deyiladi.

Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan statistik baho *siljigan baho* deyiladi.

Eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan statistik baho *effektiv baho* deyiladi.

Katta hajmdagi tanlanmalar bilan ish ko'rilganda bahoga asoslilik talabi qo'yiladi. $n \rightarrow \infty$ da baholanayotgan parametrga ehtimollik bo'yicha yaqinlashuvchi statistik baho *asosli baho* deyiladi.

Bitta kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho *nuqtaviy baho* deyiladi

Baholanayotgan parametrni qoplaydigan intervalning chegaralarini bildiruvchi ikki miqdoriy kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho *interval baho* deyiladi.

Nuqtaviy baholar. X tasodifiy miqdorning kuzatilgan qiymatlari quyidagi statistik taqsimotga ega:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_k \end{pmatrix},$$

bu yerda $n_i - x_i$ ($i = \overline{1, k}$) variantaning chastotasi va $\sum_{i=1}^k n_i = n$ - tanlanma hajmi.

Tanlamaning o'rta qiymati bosh to'planning siljimagan bahosi bo'lib xizmat qiladi. Haqiqatan ham

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} x_i = MX$$

Tanlamaning dispersiyasi bosh to'planning dispersiyasi uchun siljigan baho bo'lib xizmat qiladi:

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i$$

$M(D_T) = \frac{n-1}{n} D_{BT}$ - bo'lgani uchun bu baho siljigandir. D_{BT} - bosh to'planning dispersiyasi.

"*Tuzatilgan*" dispersiyasi bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosi bo'lib xizmat qiladi:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i$$

$M(S^2) = D_{BT}$ bo'lgani uchun bu siljimagan bahodir.

Tanlama dispersiyani hisoblaganda quyidagi foydalanish qulay:

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot n_i - \bar{X}^2$$

$\sigma_T = \sqrt{D_T}$ - tanlanmaning o'rtacha kvadratik chetlashishi deyiladi.

"*Tuzatilgan*" o'rtacha kvadratik chetlashish tanlama "tuzatilgan" dispersiyasidan olingan kvadrat ildizi bilan aniqlanadi:

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T}.$$

Bosh to'plam modasining bahosi sifatida tanlanma eng ko'p uchraydigan varianta bilan aniqlanuvchi *tanlanmaviy moda* ishlatiladi, ya'ni: $\text{mod}_T = \{x_{i_0} : n_{i_0} = \max_i(n_i)\}$

Bosh to'plam medianasining bahosi sifatida $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ variatsion qatorining o'rtasi to'g'ri keladigan varianta yoki variantalar bilan aniqlanuvchi *tanlanmaviy mediana* ishlatiladi:

$$\text{med}_T = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{n/2+1}), & \text{azap } n \text{ juft bo'lsa,} \\ x_{[n/2]+1}, & \text{azap } n \text{ toq bo'lsa.} \end{cases}$$

Eng katta va eng kichik variantalar orasidagi farq $R = x_{\max} - x_{\min}$ *tanlanmaning kengligi* deyiladi.

M - bosh to'plamdagi bizni qiziqtirgan xossaga ega bo'lgan elementlar sonining N - bosh to'plam elementlarining umumiy soniga nisbati *bosh ulush* deyiladi: $p = \frac{M}{N}$.

Bosh ulushning nuqtaviy bahosi sifatida *tanlanmaviy ulush*, ya'ni tanlanmadagi bizni qiziqtirgan xossaga ega bo'lgan elementlar soni m ning tanlanma elementlarining umumiy soni n ga $\omega = \frac{m}{n}$ xizmat qiladi.

Tanlanma o'rta qiymatining tanlanmaviy taqsimoti: katta sonlar qonuni va markaziy limit teoremasidan agar bosh to'plam normal taqsimot qonuniga bo'ysunsa, u holda tanlanma o'rta qiymat \bar{X} ham normal taqsimot qonuniga bo'ysunishi kelib chiqadi. Tanlanma hajmi yetarlicha katta bo'lganida qanday taqsimot qonuniga ega bo'lishidan qat'iy nazar o'rta qiymat \bar{X} baribir normal taqsimot qonuniga bo'ysunar ekan. Shunday qilib, agar bosh to'plam a matematik kutilma va σ^2 dispersiyaga ega bo'lsa, u holda tanlanma o'rta qiymati $\bar{X} \approx N\left(a; \frac{\sigma^2}{n}\right)$ bo'lar ekan. Demak,

$$P\{\alpha \leq \bar{X} \leq \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma/\sqrt{n}}\right); \quad P\{|\bar{X} - a| \leq \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

3. Yuqorida ko'rib chiqilgan baholarning hammasi nuqtaviy baholar edi. Kichik hajmdagi tanlanmalarda nuqtaviy baholar baholanayotgan parametrdan sezilarli farq qilishi mumkin. Shu sababli tanlanma hajmi kichik bo'lganida bahoning aniqligi va ishonchliligini yaxshiroq ta'minlaydigan interval baholardan foydalanish o'rinalidir.

Interval baholar intervalning chegaralarini bildiruvchi ikkita miqdor bilan aniqlanadi.

Tanlanma bo'yicha topilgan θ^* statistik kattalik θ noma'lum parametrning bahosi bo'lsin. Albatta, $|\theta - \theta^*|$ ayirma qanchalik kichkina bo'lsa,

θ^* statistik baho θ parametrni shuncha aniq baholaydi. Shunday qilib, $|\theta - \theta^*| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi $\delta > 0$ son baho aniqligining ko'rsatkichidir.

θ^* statistik bahoning *ishonchligi* deb $|\theta - \theta^*| < \delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli γ ga aytiladi, ya'ni

$$P\{|\theta - \theta^*| < \delta\} = P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\} = \gamma.$$

Odatda bahoning ishonchligi oldindan beriladi va γ sifatida birga yaqin qiymatlar olinadi, masalan, 0,95; 0,99; 0,999,

Noma'lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplaydigan $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ interval *ishonch intervali* deyiladi.

Normal taqsimot dispersiyasi ma'lum bo'lgan holda uning matematik kutilmasi uchun interval baho. X - a va σ^2 parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor, ya'ni $N(a, \sigma^2)$ bo'lib, a noma'lum va σ^2 ma'lum bo'lsin. Noma'lum a parametrni γ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch oralig'ini topamiz.

Tanlanmaning qiymatlari X_1, X_2, \dots, X_n - $N(a, \sigma^2)$ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning kuzatish natijalaridan iborat. Ma'lumki, $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ tanlanmaning o'rta qiymati $M(\bar{X}) = a$; $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ parametrli normal taqsimotga ega.

$P\{|\bar{X} - a| < \delta\} = \gamma$ munosabat o'rinli bo'lishini talab qilamiz va bizga ma'lum bo'lgan

$$P\{|\bar{X} - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \quad \text{yoki} \quad P\{|\bar{X} - a| < \delta\} = 2\Phi(t), \quad t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

formuladan foydalanamiz. Oxirgi tenglikdan: $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Demak,

$$P\left\{|\bar{X} - a| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t).$$

Tenglikning chap tomon berilgan va u γ ga teng. U holda

$$P\left\{\bar{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t) = \gamma,$$

ya'ni γ ishonchlilik bilan $\left(\bar{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ishonch oralig'i a noma'lum parametrni qoplaydi, deb ta'kidlash mumkin.

Izoh: Yuroridagi munosabatdagi t kattalikni $\phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ tenglikdan ilovadagi Laplas integral fuksiyasi qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan topiladi. Bahoning aniqligi $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ ga teng bo'ladi.

Normal taqsimot dispersiyasi noma'lum bo'lgan holda uning matematik kutilmasi uchun interval baho. $X - a$ va σ^2 parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor, ya'ni $N(a, \sigma^2)$ bo'lib, parametrlar a va σ larning qiymati noma'lum bo'lsin. Noma'lum a parametrli γ ishochlilik bilan qoplaydigan ishoch oraligini topamiz. Tanlanmaning qiymatilar (variantalari) bo'yicha erkinlik darajasi $h = n - 1$ bo'lgan Student taqsimotli T tasodifiy miqdorni aniqlaymiz:

$$T = \frac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n}}$$

Bu yerda \bar{X} - tanlanma o'rtacha qiymat, s - "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlashish, n -tanlanma hajmi bilan aniqlanadi va a, σ noma'lum parametrlarga bo'g'liq emas. $S(n, t)$ zichlik funktsiyasi $-t$ bo'yicha juft fuksiyasi bo'lgani uchun

$$P(|T| < t_\gamma) = P\left(\left|\frac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = 2 \int_0^{t_\gamma} S(n, t) dt = \gamma$$

yoki

$$P\left(\bar{X} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

Shunday qilib, $\left(\bar{X} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ ishonch oralig'i a noma'lum parametrni γ ishochlilik bilan qoplaydi.

Izoh. Yuroridagi munosabatda t_γ kattalik berilgan n bo'yicha ilovadagi Studentning t kriteriyasi qiymatlari keltirilgan 5-jadvaldan topiladi. Bahoning aniqligi $\delta = t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$ ga teng.

Normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlashishi uchun ishonch oralig'i.

Normal taqsimotning a va σ^2 parametrlari noma'lum bo'lsin. Tanlanma bo'yicha ularning nuqtaviy baholari

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{va} \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

topilgan bo'lib, bizga σ parametrni berilgan γ ishochlilik bilan qoplaydigan ishonch oralig'ini topish vazifasi qo'yilgan bo'lsin. Ushbu

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

yordamchi tasodifiy miqdorni tuzamiz. Bu tasodifiy miqdor erkinlik darajasi $n-1$ bo'lgan χ^2 taqsimot qonuniga ega. χ^2 tasodifiy miqdorning $(a_1; a_2)$ oraliqqa tushish ehtimolligi

$$P(a_1 < \chi^2 < a_2) = \int_{a_1}^{a_2} f_{\chi^2}(x) dx.$$

Bu yerda $f_{\chi^2}(x)$ erkinlik darajasi $n-1$ bo'lgan χ^2 taqsimotning zichlik funksiyasi. Yuqoridagi ehtimollikni γ ga tenglashtiramiz va a_1, a_2 larni topamiz.

$$P(\chi^2 \geq a_2) = \int_{a_2}^{\infty} f_{\chi^2}(x) dx = \frac{1-\gamma}{2} \quad \text{va} \quad P(\chi^2 \leq a_1) = \int_{0_1}^{a_1} f_{\chi^2}(x) dx = \frac{1-\gamma}{2}.$$

U holda

$$P\left(a_1 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < a_2\right) = P\left(\sqrt{a_1} < \frac{\sqrt{n-1} \cdot s}{\sigma} < \sqrt{a_2}\right) = P\left(s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{a_2}} < \sigma < s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{a_1}}\right) = \gamma.$$

$\sqrt{\frac{n-1}{a_1}}, \sqrt{\frac{n-1}{a_2}}$ qiymatlar jadvashtirilgan. Ilovadagi 6-jadvalda berilgan $(\gamma; n)$ lar uchun q ni aniqlaymiz va quyidagi formula bo'yicha ishonch oralig'ini topamiz:

$$\begin{aligned} s(1-q) < \sigma < s(1+q), \quad q < 1 \\ 0 < \sigma < s(1+q), \quad q \geq 1 \end{aligned}$$

Binomial taqsimot uchun ehtimollikni nisbiy chastota bo'yicha baholash. Tasodifiy hodisaning p ehtimoligini (bosh to'plam ulushi) uchun ishonchi oralig'ini topamiz. Biz bilamizki, ω nisbiy chastota p uchun nuqtaviy baho, ya'ni $M\omega = p$ va bundan tashqari

$$D\omega = p \cdot q = p \cdot (1-p).$$

U holda ω tasodifiy miqdor $n \rightarrow \infty$ da $N\left(p; \frac{pq}{n}\right)$ parametrli normal taqsimotga ega bo'ladi. Berilgan γ ishonchlilik uchun shunday t_γ ni topish kerakki, quyidagi munosabat o'rinli bo'lsin:

$$P(|\omega - p| < t_\gamma \cdot \sigma) = \gamma,$$

yoki γ ishonchlilik bilan

$$|\omega - p| < t_\gamma \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot t_\gamma$$

Bu ifodadan p ganisbatan kvadratik tengsizlikka kelamiz:

$$\left(\frac{t_\gamma^2}{n} + 1\right)p^2 + \left(2\omega + \frac{t_\gamma^2}{n}\right)p + \omega^2 < 0.$$

Tengsizlikning yechimi $(p_1; p_2)$ intervaldan iborat bo'lib, p ehtimollik uchun γ ishonchlilik bilan qurilgan intervaldir, bu yerda

$$p_1 = \frac{\omega + \frac{t_\gamma^2}{2n} - t_\gamma \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \frac{t_\gamma^2}{4n^2}}}{1 + \frac{t_\gamma^2}{n}}; \quad p_2 = \frac{\omega + \frac{t_\gamma^2}{2n} + t_\gamma \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \frac{t_\gamma^2}{4n^2}}}{1 + \frac{t_\gamma^2}{n}}$$

Demak, $(p_1; p_2)$ interval p ehtimollik uchun γ ishonchlilik bilan qurilgan intervaldir.

n ning katta qiymatlarida (≈ 100) $\frac{t_{\lambda}^2}{2n}$ va $\frac{t_{\lambda}^2}{4n^2}$ qo'shiluvchilarning qiymatlari juda kichik, kamida $1 + \frac{t_{\lambda}^2}{n} \approx 1$. Shuning uchun

$$p_1 = \omega - t_{\gamma} \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}; \quad p_2 = \omega + t_{\gamma} \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}.$$

Eslatib o'tamiz: t_{γ} ning qiymati $2\Phi(t_{\gamma}) = \gamma$ tanglamaning yechimi sifatida Laplasning integral funktsiyasining qiymatlari keltirilgan ilovaning 4-jadvalidan aniqlanar edi. Bahoning aniqligi $\delta = t_{\gamma} \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$ ga teng.

4. Regressiyada ishtirok etayotgan faktorilar soniga qarab oddiy yoki ko'p o'lchovli regressiyalar farqlanadi.

Oddiy regressiya ikki o'zgaruvchi x va y lar orasidagi bog'liqlik, ya'ni $y = f(x)$ ko'rinishidagi munosabatdan iborat. Bunda y - bog'liq (natijaviy yoki tushuntiriladigan), x - bog'liqsiz (tushuntiradigan) o'zgaruvchi.

Ko'p o'lchovli regressiya deganda y tushuntiriladigan o'zgaruvchi va ikki yoki undan ortiq tushuntiradigan) o'zgaruvchilar orasidagi $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ bog'liqlik tushuniladi.

$y = f(x)$ funktsiyaning ko'rinishiga qarab oddiy regressiya chiziqli va egri chiziqli regressiyaga farqlanadi. Oddiy regressiya tenglamasi ikki o'zgaruvchi orasidagi qonuniyatni xarakterlab bu qonuniyat faqat o'zgaruvchilar ustidagi kuzatishlar asosida aniqlanib har bir kuzativ natijasini emas, balki kuzatuvlar uchun umumiylikni aks ettiradi. Misol uchun, biror mahsulotga talab y ning shu mahsulot narxi x ga bog'liqligi $y = 5000 - 2x$ tenglama bilan berilsa, bu deganiki, mahsulot narxi bir birlikka oshsa, o'rta hisobda talab 2 birlikka kamayar ekan.

Amalda y kattalik ikki qo'shiluvchidan iborat:

$$y = \tilde{y}_x + \varepsilon,$$

bunda y - natijaviy o'zgaruvchining asl qiymati; \tilde{y}_x - regressiya tenglamasidan aniqlangan natijaviy o'zgaruvchining nazariy qiymati; ε - xatolik (shovqin) deb ataluvchi tasodifiy miqdor bo'lib, u natijaviy o'zgaruvchi asl qiymatining nazariy qiymatidan chetlashishini baholaydi.

Biror miqdorlar sistemasi (X, Y) o'rganilayotgan va n ta bog'liqsiz kuzatishlar asosida n juft natijalar $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ olingan bo'lsin. Bu juftliklarning to'g'ri chiziqli XOY koordinatalar sistemasidagi grafik tasviriga *korrellogramma* (*korrelyatsiya maydoni*) deyiladi. Korrellogrammadan bu ikki o'zgaruvchi orasidagi bog'liqlikni o'rganish va regressiya tenglamasi ko'rinishini tanlashda foydalanish qulay.

5. Miqdorlar sistemasi (X, Y) o'rganilayotgan n ta bog'liqsiz kuzatishlar asosida n juft natijalar $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ olingan bo'lsin.

(X, Y) o'zgaruvchilarning *tanlanmaviy kovariatsiya koeffitsientisi*

$$\text{cov}_T(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})(y_i - \tilde{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \tilde{x}\tilde{y},$$

bunda $\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ va $\tilde{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ - X va Y o'zgaruvchilarning tanlanmaviy o'rtachalari.

Tanlanmaviy disperteiya:

$$D_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\tilde{x})^2;$$

$$D_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\tilde{y})^2;$$

Tanlanmaviy korrelyatsiya koeffitsienti:

$$\rho_T = \text{cor}_T(X, Y) = \frac{\text{cov}_T(X, Y)}{\sqrt{D_X} \cdot \sqrt{D_Y}}.$$

Ma'lumki, nazariy korrelyatsiya koeffitsienti - bu -1 va $+1$ oralig'idagi qiymatlar qabul qiluvchi kattalik bo'lib, u ikki miqdoriy kattalik orasidagi chiziqli bog'liqlik darajasini ko'rsatadi:

korrelyatsiya koeffitsienti $+1$ ga teng bo'lsa, kattaliklar orasida aniq musbat chiziqli bog'liqlik borligini;

0 ga tehg bo'lsa, bu kattaliklar chiziqli bog'liq emasligini;

-1 ga tehg bo'lsa, kattaliklar orasida aniq teskari (manfiy) chiziqli bog'liqlik borligini bildirar edi.

Korrelyatsiya koeffitsientining bu qiymatlari kundalik hayotda kam uchraydi, lekin ulardan foydalanib, amaldagi ma'lumotlar haqida tegishli xulosalar chiqarish mumkin. Shuni esda tutish kerakki, korrelyatsiya koeffitsienti o'zgaruvchilar orasidagi umuman bog'liqlikni emas, balki faqat chiziqli bog'liqlik darajasini ko'rsatadi. Shu sabab, korrelyatsiya koeffitsientining nolga tengligi o'zgaruvchilar orasida umuman bog'liqlik yo'q degani emas, va ba'zan bunday hollarda yaxshi egri chiziqli regressiya tenglamasini qurish mumkin bo'ladi.

Y natijaviy va X tushuntiruvchi o'zgaruvchi bo'lgan holda: tanlanmaviy regressiya koeffitsientisi

$$l_0 = \rho_T \frac{\sqrt{D_Y}}{\sqrt{D_X}} = \frac{\text{cov}_T(X, Y)}{D_X};$$

chiziqli regressiya tenglamasi

$$\tilde{y}_x - \tilde{y} = l_0(x - \tilde{x}).$$

X natijaviy va Y tushuntiruvchi o'zgaruvchi bo'lgan holda: tanlanmaviy regressiya koeffitsientisi

$$l_1 = \rho_T \frac{\sqrt{D_X}}{\sqrt{D_Y}} = \frac{\text{cov}_T(X, Y)}{D_Y};$$

Chiziqli regressiya tenglamasi:

$$\tilde{x}_y - \tilde{x} = l_1(y - \tilde{y}).$$

Shunday qilib, chiziqli regressiya tenglamasi

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 x.$$

X o'zgaruvchining berilgan qiymatlarida natijaviy o'zgaruvchi Y ning nazariy qiymatini hisoblash imkoniyatini beradi. Olingan nazariy qiymatlarning grafik tasviriga regressiya chizig'i deb ataladi.

Amalda chiziqli regressiya tenglamasini qurish uchun regression tenglama parametrlari β_0 va β_1 ni baholash kerak.

β_0 Y - kesishma, ya'ni regressiya chizig'ining OY o'qini kesish nuqtasi bo'lib, qiymati $X = 0$ dagi Y o'zgaruvchining qiymatiga teng.

β_1 - regressiya chizig'ining burchak koeffitsientiga teng bo'lib, X o'zgaruvchi bir birlikka o'zgarganda Y o'zgaruvchi necha birlikka o'zgarishini ko'rsatadi.

Tanlanmaning chiziqli regressiyasi – tanlanma (X, Y) qiymatlarini eng yaxshi tushuntiruvchi to'g'ri chiziqdir.

Kuzatilgan qiymatlar asosida tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti:

$$\rho_r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}.$$

Chiziqli regressiya tenglamasi koeffitsientlari:

$$\beta_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

va

$$\beta_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \beta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

formulalar yordamida hisoblanadi, n – kuzatishlar soni.

Guruhlangan ma'lumotlar uchun chiziqli regressiya tenglamasi parametrlarini aniqlash. Kuzatishlar soni katta bo'lsin va ma'lum bir x qiymat n_x marotaba va y qiymat n_y marotaba, (x, y) juftlik n_{xy} marotaba kuzatilgan bo'lishi mumkin. Bunday hollarda kuzatish natijalari umumlashtirib guruhlarga ajratiladi, ya'ni n_x , n_y , n_{xy} chastotalar hisoblanib, jadval ko'rinishda jamlanadi. Bu jadvalga *korrelyatsion jadval* deyiladi. Jadval ko'rinishda berilgan kuzatish natijalari uchun regressiya tenglamasi quyidagicha aniqlanadi.

Miqdoriy o'zgaruvchilar sistemasi (X, Y) o'rganilayotgan va N ta bog'liqsiz kuzatishlar asosida $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, k}$; $j = \overline{1, m}$; juftlik natijalar olingan

bo'lsin. Bunda $(x_i; y_i)$ juftlik n_{ij} marotaba kuzatilgan. $N = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij}$.

	x_1	x_2	x_3	...	x_n	n_{0j}
y_1	n_{11}	n_{21}	n_{31}	...	n_{k1}	n_{01}
y_2	n_{12}	n_{22}	n_{32}	...	n_{k2}	n_{02}

...
y_m	n_{1m}	n_{2m}	n_{3m}	...	n_{km}	n_{om}
n_{io}	n_{1o}	n_{2o}	n_{3o}	...	n_{ko}	

(X, Y) miqdorning *tanlanmaviy kovariatsiyasi* quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\text{cov}_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} x_i y_j - \bar{x}\bar{y},$$

bunda $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_{io} x_i$ va $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m n_{oj} y_j$ - X va Y o'zgaruvchilarning

tanlanmaviy o'rtachalari.

Tanlanma dispersiyalari:

$$D_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_{io} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_{io} x_i^2 - (\bar{x})^2;$$

$$D_y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m n_{oj} (y_j - \bar{y})^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m n_{oj} y_j^2 - (\bar{y})^2.$$

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti:

$$\rho_T = \text{cor}_T(X, Y) = \frac{\text{cov}_T(X, Y)}{\sqrt{D_x} \sqrt{D_y}}$$

Guruhlangan ma'lumotlar asosida chiziqli regressiya tenglamasini aniqlash uchun tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti va chiziqli regressiya tenglamasi koeffitsientlarini quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\rho_T = \frac{N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} x_i y_j - \left(\sum_{i=1}^k n_{io} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^m n_{oj} y_j \right)}{\sqrt{N \sum_{i=1}^k n_{io} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k n_{io} x_i \right)^2} \sqrt{N \sum_{j=1}^m n_{oj} y_j^2 - \left(\sum_{j=1}^m n_{oj} y_j \right)^2}},$$

$$\beta_T = \frac{N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} x_i y_j - \left(\sum_{i=1}^k n_{io} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^m n_{oj} y_j \right)}{N \sum_{i=1}^k n_{io} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k n_{io} x_i \right)^2},$$

$$\beta_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m n_{oj} y_j - \beta_1 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_{io} x_i$$

Chiziqli regressiya tenglamasining sifatini baholash uchun maxsus *determinatsiya* koeffitsienti deb ataladigan va qiymati tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining kvadrati $(\rho_T)^2$ ga teng kattalik hisoblanadi. Bu kattalik natijaviy o'zgaruvchi y dispersiyasining regressiya tenglamasi yordamida tushuntiriladigan ulushini aniqlaydi. Mos ravishda $1 - (\rho_T)^2$ kattalik natijaviy o'zgaruvchi y dispersiyasining regressiya tenglamasida hisobga olinmagan boshqa omillar orqali tushuntiriladigan ulushini aniqlaydi.

15-16-mazvu: Gipotezalarni tekshirish

1. Asosiy ma'lumotlar.
2. Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish.
3. Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish.
4. Bosh to'plam ulushi haqidagi gipotezani tekshirish.
5. Ikki bosh to'plam dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirish.
6. Bosh to'plam dispersiyalari ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish.
7. Bosh to'plam dispersiyalari noma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish
8. Bosh to'plam ulushi haqidagi gipotezani tekshirish

Tanlanma asosida olingan ma'lumotlar bosh to'plam haqidagi ayrim farazlarning haqqoniyligi borasida xulosa chiqarish imkoniyatini beradi.

Gipoteza shunday qo'yilishi kerakki, uning o'rinli ekanligini tekshirish jarayonida ma'lum taqsimot qonunlaridan foydalanish mumkin bo'lsin. Bunday boshlang'ich gipoteza 0 – chi (H_0) gipoteza deyiladi. H_0 gipoteza qarama-qarshi gipoteza H_1 bilan belgilanadi.

Normal taqsimot asosida gipotezalarni tekshirish bosh to'plam dispersiyasi σ^2 aniq bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi a sifatida tanlanmaviy o'rtacha \bar{x} qiymatini olish haqqoniy ekanligini tekshirishda ishlatiladi. Tanlanma ulushi uchun qo'yilgan gipotezalarni tekshirishda ham normal taqsimotni qo'llash mumkin, chunki, tanlanma hajmi katta bo'lsa: $np > 5$ va $|p - \rho|n > 5$, binominal taqsimotni normal taqsimot bilan yaqinlashtirish mumkin bo'ladi.

Styudent taqsimoti (t-kriteriy) ixtiyoriy hajmdagi tanlanma asosida bosh to'plam dispersiyasi σ^2 noaniq bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezalarni tekshirish jarayonida ishlatiladi.

Fisher taqsimoti (F- kriteriy) bosh to'plam dispersiyalarini solishtirish gipotezalarida qo'llaniladi.

χ^2 taqsimot (χ^2 -kriteriy) o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlikni tekshirishda yoki kuzatilayotgan taqsimotning biror standart taqsimotga mosligini tekshirishda qo'llaniladi.

Barcha xulosalar tekshirilayotgan H_0 gipotezaga nisbatan qabul qilinadi. Aslida H_0 gipoteza o'rinli bo'lib, tekshirish natijasida uni inkor etsak, 1-turdagi xatolikka yo'l qo'yilgan bo'ladi.

Aslida H_1 gipoteza o'rinli bo'lib, tekshirishda H_0 gipotezani qabul qilsak, 2-turdagi xatolikka yo'l qo'yilgan bo'ladi.

α ishonchlilik darajasi bilan gipotezalarni tekshirgan ularning sifat ko'rsatkichi sifatida gipoteza o'rinli bo'lganda H_0 gipotezani qabul qilish ehtimoli ishlatiladi. Bu ehtimollik *kriteriy quvvati* deb ataladi.

1. A) *Biryoqlama test* (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: bosh to‘plam o‘rtachasi berilgan a_0 qiymatga teng, alternativ gipoteza esa bosh to‘plam o‘rtachasi berilgan a_0 iymatdan katta (kichik) degan taxminlardan iborat bo‘lsin, ya’ni

$$H_0 : a = a_0,$$

$$H_1 : a > a_0 (a < a_0)$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$Z = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}},$$

bunda n - tanlanma hajmi; \bar{x} - tanlanmaning o‘rtachasi; σ^2 - bosh to‘plam dispersiyasi.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning untegral funktsiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $Z_k > Z$ yoki $Z > -Z_k$ bo‘lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo‘lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: bosh to‘plam o‘rtachasi berilgan a_0 qiymatga teng va alternativ gipoteza: bosh to‘plam o‘rtachasi berilgan a_0 qiymatdan farqli degan taxminlardan iborat:

$$H_0 : a = a_0,$$

$$H_1 : a \neq a_0$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$Z = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

bunda n - tanlanma hajmi; \bar{x} - tanlanmaning o‘rtachasi; σ^2 - bosh to‘plam dispersiyasi.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning untegral funktsiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - \alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $-Z_k < Z < Z_k$ yoki $Z > -Z_k$ bo‘lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo‘lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

2. A) Biryoyqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatga teng va alternativ gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatdan katta (kichik) degan taxminlardan iborat:

$$H_0 : a = a_0,$$

$$H_1 : a > a_0 (a < a_0)$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$T = \frac{\bar{x} - a_0}{\bar{\sigma} / \sqrt{n}}$$

bunda n -tanlanma hajmi; \bar{x} - tanlanmaning o'rtachasi; $\bar{\sigma}$ - bosh to'plam dispersiyasi.

3. Ilovada keltirilgan Styudentning untegral funktsiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 7-jadvaldan T uchun kritik qiymat $T_k = t(\alpha; n-1)$ aniqlanadi.

4. Agar $T_k > T$ yoki $T > -T_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

agar $T_k < T$ yoki $T < -T_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatga teng va alternativ gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatdan katta (kichik) degan taxminlardan iborat:

$$H_0 : a = a_0,$$

$$H_1 : a \neq a_0$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$T = \frac{\bar{x} - a_0}{\bar{\sigma} / \sqrt{n}}$$

bunda n -tanlanma hajmi; \bar{x} - tanlanmaning o'rtachasi; $\bar{\sigma}$ - bosh to'plam dispersiyasi.

3. Ilovada keltirilgan Styudentning untegral funktsiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 7-jadvaldan T uchun kritik qiymat $T_k = t(\alpha/2; n-1)$ aniqlanadi.

4. Agar $-T_k < T < T_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

agar $T_k < T$ yoki $T < -T_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

3. Ulush binominal taqsimotga ega, lekin tanlanmaning hajmi katta bo'lganda binominal taqsimotni normal taqsimot bilan yaqinlashtirish mumkin.

A) Biryuqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza bosh to'plam ulushi berilgan p_0 qiymatga teng va alternativ gipoteza bosh to'plam ulishi berilgan p_0 qiymatdan katta (kichik) degan taxminlardan iborat:

$$H_0 : p = p_0,$$

$$H_1 : p > p_0 (p < p_0)$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$T = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}},$$

bunda n - tanlanma hajmi; \bar{p} - tanlanma ulush.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning untegral funktsiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $-Z_k < Z < Z_k$ yoki $Z > -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: bosh to'plam ulushi berilgan p_0 qiymatga teng va alternativ gipoteza bosh to'plam o'rtachasi berilgan p_0 qiymatdan farqli degan taxminlardan iborat:

$$H_0 : p = p_0,$$

$$H_1 : p > p_0 (p < p_0)$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$T = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

bunda n - tanlanma hajmi; \bar{p} - tanlanma ulush.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning untegral funktsiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\phi(Z_k) = 1 - \alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $-Z_k < Z < Z_k$ yoki $Z > -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

4. Ikki dispersiya nisbati Fisherning taqsimotiga bo'ysunadi

A) Biryoyqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza ikki tanlanma bir-biriga bog'liq emas va bir xil dispersiyaga ega bo'lgan $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ normal bosh to'plamlardan olingan;

alternativ gipoteza: birinchi tanlanmaning bosh to'plam dispersiyasi 2-chi tanlanmaning bosh to'plam dispersiyasidan katta degan taxminlardan iborat:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2;$$

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

2. Fisherning taqsimot qiymati hisoblanadi:

$$F = \frac{\bar{\sigma}_1^2}{\sigma_2^2},$$

bunda $\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2$ - talanmalar asosida hisoblangan siljigan dispersiyalar.

3. Ilovada keltirilgan Fisher taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 8-jadvaldan F uchun kritik qiymat $F_k = F(\alpha; n_1 - 1; n_2 - 1)$ aniqlanadi, bunda n_1 - katta tanlanmaviy dispersiyaga ega bo'lgan tanlanma hajmi; n_2 - kichik tanlanmaviy dispersiyaga ega bo'lgan tanlanma hajmi.

4. Agar $F_k > F$ yoki $F > -F_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

agar $F_k < F$ yoki $F < -F_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq emas va bir xil dispersiyaga ega bo'lgan $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ normal bosh to'plamlardan olingan;

alternativ gipoteza: bu tanlanmaning bir xil dispersiyaga ega bo'lgan normal bosh to'plamlardan olinmagan degan taxminlardan iborat:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2;$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

2. Fisherning taqsimot qiymati hisoblanadi:

$$F = \frac{\bar{\sigma}_1^2}{\sigma_2^2},$$

bunda $\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2$ - talanmalar asosida hisoblangan siljigan dispersiyalar.

3. Ilovada keltirilgan Fisher taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 8-jadvaldan F uchun kritik qiymat $F_k = F(\alpha/2; n_1 - 1; n_2 - 1)$ aniqlanadi, bunda n_1 - katta tanlanmaviy dispersiyaga ega bo'lgan tanlanma hajmi; n_2 - kichik tanlanmaviy dispersiyaga ega bo'lgan tanlanma hajmi.

4. Agar $F_k > F$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

Agar $F_k < F$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

5. A) Biryoyqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq emas, bosh to'plamlar dispersiyalari ma'lum bo'lgan va bir xil o'rtachaga ega bo'lgan $a_1 = a_2$ normal bosh to'plamlardan olingan;

alternativ gipoteza: 1-to'planning bosh to'plam o'rtachasi 2- to'planning bosh to'plam o'rtachasidan katta:

$$H_0 : a = a_0,$$

$$H_1 : a > a_0 (a < a_0)$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\sigma_1/n_1 + \sigma_2/n_2}}$$

bunda n_1, n_2 - tanlanmalar hajmi; \bar{x}_1, \bar{x}_2 - tanlanmalarning o'rtachalari; σ_1, σ_2 - bosh to'plamlarning siljigan dispersiyalari.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning untegral funktsiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $Z_k > Z$ yoki $Z > -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

Agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq emas, bosh to'plamlar dispersiyalari ma'lum bo'lgan va bir xil o'rtachaga ega bo'lgan $a_1 = a_2$ normal bosh to'plamlardan olingan;

alternativ gipoteza: 1-to'planning bosh to'plam o'rtachasi 2- to'planning bosh to'plam o'rtachasidan farqli:

$$H_0 : a = a_0,$$

$$H_1 : a \neq a_0$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\sigma_1/n_1 + \sigma_2/n_2}}$$

bunda n_1, n_2 - tanlanmalar hajmi; \bar{x}_1, \bar{x}_2 - tanlanmalarning o'rtachalari; σ_1, σ_2 - bosh to'plamlarning siljigan dispersiyalari.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning untegral funktsiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - \alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $-Z_k < Z < Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

Agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

6. A) Ikki (bir)yoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq emas, bosh to'plamlar dispersiyalari ma'lum bo'lgan va bir xil o'rtachaga ega bo'lgan $a_1 = a_2$ normal bosh to'plamlardan olingan;

alternativ gipoteza: 1-to'planning bosh to'plam o'rtachasi 2- to'planning bosh to'plam o'rtachasidan farqli (katta yoki kichik):

$$H_0 : a = a_0,$$

$$H_1 : a_1 = a_2 (a > a_0 (a < a_0))$$

2. Ikki hol bo'lishi mumkin: bosh to'plam dispersiyalari teng va teng emas. Bu ikki holni farqlab olish uchun avval bosh to'plamlar dispersiyalari tengligi haqidagi gipotezani tekshirish kerak (4-p.ga qarang). Tekshirish natijasiga qarab qaror qabul qilinadi:

Bosh to'plam dispersiyalari teng (A hol);

Bosh to'plam dispersiyalari teng (B).

3. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad (\text{A})$$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}} \quad (\text{B})$$

bunda n_1, n_2 - tanlanmalar hajmi; \bar{x}_1, \bar{x}_2 - tanlanmalarning o'rtachalari; s_1^2, s_2^2 - bosh to'plamlarning siljigan dispersiyalari.

1. So'ngra:

(A) ilovada keltirilgan Styudent taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 9-jadvaldan T uchun kritik qiymat $T_k = t(\alpha/2; n_1 + n_2 - 2)$ (biryoqlama test uchun $T_k = t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)$) aniqlanadi.

Agar $-T_k < T < T_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

Agar $T_k < T$ yoki $T < -T_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi (biryoqlama test uchun Agar $T_k > T$ yoki $T > -T_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul etiladi, H_1 gipoteza inkor qilinadi. Agar $T_k < T$ yoki $T < -T_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi).

(B) Ushbu stastistika

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$$

normal taqsimotga ham Styudent taqsimotiga ham bo'ysunmaydi. Agar talanmalar hajmlari katta bo'lsa (>30), bu stastistika taqsimoti normal taqsimotga yaqinlashadi. Bu holda ilovada keltirilgan Laplasning integral funktsiyasi qiymatlari 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - \alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi (biryoqlama test uchun $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$).

Agar $-Z_k < Z < Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

Agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi (biryoqlama test uchun : Agar $Z_k > Z$ yoki $Z > -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi; Agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi).

7. Agar ikkita katta hajmdagi tanlanmalar bo'gliqsiz binomial taqsimlangan bosh to'plamlardan olingan bo'lsa, tanlanmalar ulushlarining ayirmasi normal taqsimlangan bo'ladi.

A) Biryoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq bo'lmagan, bir xil ulushga ega bo'lgan $p_1 = p_2$ binomial taqsimlangan bosh to'plamlardan olingan; alternativ gipoteza: 1-to'plamning bosh to'plam ulushi 2- tanlanmaning bosh to'plam ulushidan katta yoki kichik:

$$H_0 : p = p_0,$$

$$H_1 : p > p_0 (p < p_0)$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n_1 + p_2(1-p_2)/n_2}}$$

bunda n - tanlanma hajmi; \bar{p} - tanlanma ulush.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning integral funktsiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $Z_k > Z$ (yoki $Z > -Z_k$) bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

Agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq bo'lmagan, bir xil ulushga ega bo'lgan $p_1 = p_2$ binomial taqsimlangan bosh to'plamlardan olingan; alternativ gipoteza: bosh to'plam ulushlari teng emas degan taxminlardan iborat:

$$H_0 : p = p_0,$$

$$H_1 : p > p_0 (p < p_0)$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n_1 + p_2(1-p_2)/n_2}}$$

bunda n_1, n_2 - tanlanmalar hajmi; p_1, p_2 - tanlanmalarning ulushlari.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning integral funktsiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - \alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $-Z_k < Z < Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

Agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

8. H_0 gipoteza n hajmdagi x_1, x_2, \dots, x_n tanlanma $F_0(x)$ taqsimot funktsiyasiga bo'ysungan X tasodifiy miqdorga mos keladi degan taxmindan iborat bo'lsin. Bu gipotezani statistik tekshirish uchun χ^2 - kriteriyasi ishlatiladi. Sonlar o'qini m ta kesishmaydigan h_1, h_2, \dots, h_m intervallarga bo'lamiz. $p_i = P\{X \in h_i\}, i = \overline{1, m}$ ehtimolliklarni $F_0(x)$ taqsimot funktsiyasi orqali

hisoblaymiz. v_i orqali talanmaning h_i intervalga tushgan x_i elementlar sonini aniqlaymiz. Gipotezani tekshirish uchun quyidagi statistikani hisoblaymiz:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{v_i}{np_i} \right) - n$$

1-2 mashg'lot: Kombinatorika elementlariga doir masalalar yechish

Namunaviy masala yechish

1-masala: 1, 2 va 3 raqamlardan ularning har biri tarkibida faqat bir marta uchraydigan nechta 3 xonali son tuzish mumkin?

Yechish: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ta.

2-masala: Universitet Ilmiy Kengashi turli lavozimlarga 10 ta nomzoddan 3 tasini tanlanmoqda. Har bir nomzod bir xil imkoniyatga ega. 10 ta nomzoddan 3 kishidan iborat nechta guruh tuzish mumkin?

Yechish: $N = A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ ta guruh tuzish mumkin.

EXSEL: O'rinlashtirishlar sonining qiymati maxsus PEREST(SON;TALANGAN _SON) nomli funktsiyaga murojaat qilib topiladi: PEREST(10;3).

3-masala: Universitet Ilmiy Kengashi turli lavozimlarga 10 ta nomzoddan 3 tasini tanlanmoqda. Har bir nomzod bir xil imkoniyatga ega. 10 ta nomzoddan 3 kishidan iborat har xil tarkibli nechta guruh tuzish mumkin?

Yechish: $N = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = 120$ ta guruh tuzish mumkin.

EXSEL: Matematik funktsiyalar. Mosliklar sonining qiymati maxsus CHISLKOMB(SON;TALANGAN _SON) nomli funktsiyaga murojaat qilib topiladi: CHISLKOMB(10;3).

4-masala: 4 ta A, A, B va C elementlardan nechta guruh tuzish mumkin?

Yechish: $P_{takr} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$ ta.

5-masala: Seyfning shifrlı kodi 6 xonali sondan iborat. Kodlashtirganda nechta turli kombinatsiya tuzish mumkin?

Yechish: $A_{10,takr}^6 = n^m = 10^6 = 1000000$.

5-masala: 1-4 kurs talabalaridan 6 tasini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

Yechish: $C_{4,takr}^6 = \frac{9!}{6!3!} = 84$.

EXSEL: Matematik funktsiyalar. Mosliklar sonining qiymati maxsus CHISLKOMB(SON;TALANGAN _SON) nomli funktsiyaga murojaat qilib topiladi: CHISLKOMB(6+4-1;6).

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Universitet bitiruvchilarni ishga taklif etilgan 9 ta yopiq konvert oldi. Konvertlarni ochish tartibining nechta usuli mavjud? (J.: 362 880)

2. Universitetning 15 ta kafedrasining laboratoriyalari uchun uskunalar olishi kerak. Lekin universitetning 8 ta uskunalar olishga mablag'i etadi. Universitet 8 ta uskunalarni nechta xil usul bilan tanlab olishi mumkin? (J.:6435)

3. Aviakopaniya Qarshi-Toshkent yo‘nalishida 6 ta, Toshkent-Anqara yo‘nalishida 2 ta reysga ega. Agar reyslar har xil kunlarda bajarilsa, Qarshidan Anqaragacha nechta usul bilan chipta buyurish mumkin?

4. 20 ta odam qatnashayotgan majlis 2 ta konferentsiyaga 2 ta vakilni saylamoqda. Buni necha usul bilan bajarish mumkin? Bitta konferentsiyaga 2 ta vakilni nechta usul bilan tanlash mumkin?

5. Kompyuter tarmoq‘iga kirish uchun operator 4 ta raqamdan iborat kodni terishi kerak. Operator kerakli kodni unitib qo‘ydi. Agar koddagi raqamlar: a) takrorlanmasa; b) takrorlansa u kodni terish uchun hammasi bo‘lib nechta kombinatsiya tuzish mumkin?

3-4- mashg‘lot: Hodisa. Elementar va diskret hodisalar fazosi.

Ehtimollikning klassik, geometrik va statistik ta‘riflariga doir misollar yechish.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Shoshqol toshi bir marta tashlangan bo‘lsa, juft ochko tushish ehtimolini toping.

$$\text{Yechish: } P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Masala: Tashish vaqtida 20 000 ta tarvuzdan 52 tasi yorilgan. Yorilgan tarvuzning nisbiy chastotasini toping.

$$\text{Yechish: } W(A) = \frac{m}{n} = \frac{52}{20000} = 0,0026.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Tanga ketma-ket 3 marta tashlandi. Tajriba natijasi (x_1, x_2, x_3) ketma-ketlikdan iborat bo‘lib, har bir x_i “G” –gerb yoki “R” – raqam tushishini bildiradi.

a) Elementar hodisalar fazosini quring.

b) Kamida 2 marta tanga “gerb” tomoni bilan tushishidan iborat bo‘lgan A hodisani ifodalang.

2. a). $A \cup A$ va $A \cdot A$ hodisalarini ta‘riflang.

b) A va $\overline{A \cup B}$ hodisalar birgalikdami?

3. Tekislikka tasodifiy ravishda nuqta tashlanmoqda. A – “nuqta A doiraga tushishi” va B – “nuqta B doiraga tushishi”dan iborat hodisalar bo‘lsin. \overline{A} , \overline{B} , $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$ hodisalarini izohlang.

4. Tasodifiy sonlar jadvalidan tasodifiy ravishda bir son olingan. A hodisa – “tanlangan son 5 ga bo‘linadi”; B hodisa – “bu sonning oxirgi raqami nol” ekanini bildirsa, $A \setminus B$ va $\overline{A \cap B}$ hodisalar nimani bildiradi?

5. Qutida 10 ta: 7 ta qora va 3 ta oq shar bor. Qutidan tasodifiy ravishda bir shar olindi. Bu shar: a) oq; b) qora bo‘lishining ehtimolini toping.

6. “Daftar” so‘zidan tasodifiy ravishda bir harf tanlandi. Bu harf “D” yoki unli harf bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

7. 3 ta tanga tashlandi. 2 ta tanga “gerb” tomoni bilan tushish ehtimoli nimaga teng?

8. Shoshqol toshi bir marta tashlanganda, 4 raqami yoki 4 dan katta raqam tushish ehtimoli nimaga teng?

9. Nishonga otishda tekkizishlar nisbiy chastotasi 0,6 bo'lgan. Agar mergan 12 marta nishonga tekkiza olmagan bo'lsa, jami bo'lib necha marta o'q otilgan?

10. 64 ta katakdan iborat shaxmat taxtasiga 2 ta shaxmat donasi – oq va qora rangli fil qo'yildi. Ularning bir-birini “urish” ehtimoli nimaga teng?

11. Kitob javonining bir bo'limida 10 ta kitob tasodifiy ravishda taxlandi. 3 ta ma'lum bir kitoblar yonma-yon qo'yilishi ehtimolini toping.

12. Bo'rondan so'ng 40- va 70- kilometrlar orasida telefon simi uzildi. Uzilish 50- va 55- kilometrlar orasida sodir bo'lganligining ehtimolini toping.

13. Uzunligi 1 ga teng bolgan kesma tasodifiy ravishda 3 bo'lakka bo'lindi. Hosil bo'lgan bo'laklardan uchburchak yasash mumkinligining ehtimolini toping.

5-6- amaliy mashg'ulot: Shartli ehtimollik. Ehtimollikning ko'paytirish va qo'shish teoremlariiga doir masalalar yechish.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Firma 2 ta yirik A va B korxonalaridan 2 ta buyurtma olishga harakat qilmoqda. Ekspertlarning fikricha, A korxonadan buyurtma olish ehtimoli 0,45 ga teng. Agar firma A korxonadan buyurtma olsa, u holda B korxonadan ham buyurtma olish ehtimoli 0,9 ga teng. Firmaning ikkala buyurtmani ham olish ehtimolini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $P(A) = 0,45$ va $P(B|A) = 0,9$;

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,45 \cdot 0,9 = 0,405.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Kuzatuvchining taxminiga ko'ra, agar ma'lum muddatda foiz me'yori pasaysa, xuddi shu davrda aksiyalar bozorining o'sish ehtimoli 0,8 ga teng. Kuzatuvchi shu davrda foiz me'yori pasayishi ehtimoli 0,4 ga teng deb hisoblaydi. Aytilgan davrda aksiyalar bozori rivojlangan holda foiz me'yori pasayishi ehtimolini toping.

2. Har bir tajribada hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va 0,2 ga teng. Tajribalar ketma-ket ravishda hodisa ro'y berganga qadar o'tkazildi. Hodisaning 1-marta ro'y berish 4 - marta tajriba o'tkazishga to'g'ri kelish ehtimoliligini toping.

3. 1-dastgohda tayyorlangan mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimoli 0,7 ga va 2-dastgohda shu mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng. Agar 1-dastgohda 2 ta, 2-dastgohda 3 ta mahsulot tayyorlangan bo'lsa, barcha mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimolini toping.

4. Tasodifiy sonlar jadvalidan olingan sonlarning hech bo'lmaganda bittasi juft bo'lish ehtimoli kamida 0,9 ga teng bo'lishiga kafolat berish uchun tasodifiy sonlar jadvalidan nechta son olish kerak?

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Gulzorda 20 ta qizil, 30 ta binafsha rang va 40 ta oq rangli astra ochilgan. Agar kech tushgandan so'ng bitta gul uzilgan bo'lsa, uning qizil yoki binafsha rang bo'lish ehtimolini toping.

$$Yechish: P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{20}{90} + \frac{30}{90} - 0 = \frac{5}{9}.$$

Masala: 1- va 2- to'pdan otilganda, nishonga tegish ehtimoli mos ravishda 0,7 va 0,8 ga teng. Ikkala to'pdan bir vaqtda o'q otilganda hech bo'lmaganda bittasining nishonga tegish ehtimolini toping.

$$Yechish: P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Korxonada ishlaydigan 550 ishchining 380 tasi oily, 412 tasi o'rta maxsus va 357 tasi ham oily, ham o'rta maxsus ma'lumotli. Tasodifiy ravishda tanlab olingan ishchining yoki oily, yoki o'rta maxsus, yoki ham oily, ham o'rta maxsus ma'lumotli bo'lishi ehtimolini toping.

2. Iste'mol bozorini o'rganish uchun tish pastasiga tegishli so'rov o'takazildi. Agar aholining 14% i A turdagi, 9% i B turdagi tish pastasidan foydalanishi ma'lum bo'lsa, tasodifiy ravishda tanlab olingan kishi A yoki B turdagi tish pastalaridan foydalanishi ehtimolini toping.

3. Kompyuter va amamliy dasturlar paketini sotib olmoqchi bo'lgan xaridorning faqat kompyuter sotib olish ehtimoli 0,15 ga teng. Faqat amaliy dasturlar paketini sotib olish ehtimoli 0,1 ga teng. Ham kompyuter, ham amaliy dasturlar paketini sotib olish ehtimoli 0,05 ga teng. Yoki kompyuter, yoki amaliy dasturlar paketini sotib olish ehtimolini toping.

4. Korxonaning A firma bilan shartnoma tuzish ehtimoli 0,4 ga, B firma bilan shartnoma tuzish ehtimoli 0,3 ga teng. Ikkala firma bilan ham shartnoma tuzish ehtimoli 0,12 ga teng. Korxonaning bu firmalarning hech bo'lmaganda bittasi bilan shartnoma tuzish ehtimolini toping.

7-8- amaliy mashg'ulot: To'la ehtimollik. Bayes formulasi. Bernulli sxemasi. Bernulli va Puasson formulalariga doir masalalar yechish.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Dushman kemasi 3 ta to'pdan o'qqa tutilmoqda. Ularning nishonga tegish ehtimoli mos ravishda 0,8; 0,7; 0,9. Agar kemani cho'ktirish uchun bitta o'q tekkizishi etarli bo'lsa, dushman kemasi 3 ta to'pdan bir otishda cho'ktirish ehtimolini toping.

$$Yechish: q_1 = 1 - p_1 = 0,2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0,3; \quad q_3 = 1 - p_3 = 0,1.$$

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

Masala: Basketbolchining bir tashlashda koptokni savatga tushirish ehtimoli 0,4 ga teng ekanligi ma'lum. 0,9 dan kam bo'lmagan ehtimollik bilan hech bo'lmaganda bir marta savatga tushirishi uchun basketbolchi koptokni necha marta tashlashi kerak?

Yechish: Hodisalar o'zaro bog'liq emas, shuning uchun $P(A) = 1 - q^n$. Masalaning shartiga ko'ra: $P(A) = 0,9$; $p = 0,4$. Demak, $q = 1 - 0,4 = 0,6$.

$$P(A) = 1 - q^n = 1 - 0,6^n \geq 0,9 \text{ yoki } 0,6^n \leq 0,1.$$

$$n \lg 0,6 \leq \lg 0,1; \quad \lg 0,6 \leq 0; \quad n \geq \frac{\lg 0,1}{\lg 0,6} = \frac{-1}{-0,2218} = 4,5;$$

Shunday qilib, $n \geq 5$, ya'ni basketbolchi savatga ko'ptokni kamida 5 marta tashlashi kerak ekan.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Shahar avtotransporti muammolarini o'rganish maqsadida so'rov o'tkazildi. So'rov o'tkaziladigan joyda 75% aholi ishga jamoat transportida qatnaydi. Agar 3 kishi so'rovga rozi bo'lgan bo'lsa, ulardan hech bo'lmaganda bittasining ishga jamoat transportida qatnash ehtimolini toping.

2. Firma muammolarini o'rganish maqsadida so'rov o'tkazdi. So'rov o'tkaziladigan joyda 1% aholi firmani qiziqtirgan mahsulotlarni iste'mol qiladi va ular baho bera oladi. Ular ichidan tasodifiy ravishda 10 kishi tanlab olindi. Bulardan hech bo'lmaganda bittasi mahsulotni asosli baholay olish ehtimoli qancha?

3. Sifat nazorati ishlab chiqarilgan ruchkaning har 100 tasidan bittasi singanligini ta'kidladi. Tasodifiy ravishda olingan 2 ta ruchkaning hech bo'lmaganda bittasi siniq bo'lishi ehtimoli qancha?

4. 2 ta ovchi bo'riga qarab bir martadan o'q uzishdi. 1-ovchi uchun tekkizish ehtimoli 0,7 ga, 2-ovchi uchun tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng. Bo'riga o'q tekkanlik ehtimoli qancha?

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Kelasi yilda mamlakat iqtisodiyoti ko'rsatkichlari yuqori bo'lsa, ma'lum bir kompaniya aksiyalari narxining oshish ehtimoli 0,75 ga, past bo'lsa oshish ehtimoli 0,3 ga teng ekan. Shu bilan birga kelasi yilda mamlakat iqtisodiyoti ko'rsatkichlari yuqori bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng ekan. Kelasi yilda kompaniya aksiyalari narxining oshish ehtimolini toping?

Yechish: Masala shartiga ko'ra, $P(H_1) = 0,8$ va $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - 0,8 = 0,2$

$P(A|H_1) = 0,75$ va $P(A|H_2) = 0,3$. To'la ehtimollik formulasidan:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,8 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,66.$$

Masala: O'qituvchi imtihonga 50 ta masala tuzgan: 30 tasi ehtimolliklar nazariyasi, 20 tasi matematik statistika kursidan. Agar talaba ehtimolliklar nazariyasidan 15 ta, matematik statistikasidan 18 ta masala yechishni bilsa, uning imtihon topshirish ehtimoligini toping.

Yechish: $P(H_1) = 30/50 = 0,6$; $P(H_2) = 20/50 = 0,4$;

$$P(A|H_1) = 15/30 = 0,5; \quad P(A|H_2) = 18/20 = 0,9.$$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,9 = 0,66.$$

Masala: Yuqori iqtisodiy o'sish davrida Amerika dollari kursining o'sish ehtimoligini 0,7 o'rtacha o'sish davrida 0,4 past ko'rsatkichli o'sish davrida esa 0,2 ga teng. Iqtisodiy o'sish davri ko'rsatkichlari yuqori, o'rtacha va past bo'lishi ehtimolliklari mos ravishda 0,3; 0,5 va 0,2 ga teng. Hozir dollarning narxi o'smoqda, u holda bu davr yuqori ko'rsatkichli o'sish davri bo'lishi ehtimoligini qancha?

Yechish: Masala shartiga ko'ra:

$$P(H_1) = 0,3; \quad P(H_2) = 0,5; \quad P(H_3) = 0,2.$$

Shuningdek, $P(A|H_1) = 0,7; \quad P(A|H_2) = 0,5; \quad P(A|H_3) = 0,2.$

Demak, Bayes formulasiga asosan

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,7}{0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,2} = 0,467.$$

Masala: Telegraf xabari “nuqta” va “chiziq” signallaridan tashkil topgan. Signallarning statistik xossalari shundayki, “nuqta” signallarning o‘rtacha 2/5 qismi, “chiziq” signallarning o‘rtacha 1/3 qismi buzilganda qabul qilinarkan. Jo‘natilayotgan signallar ichida “nuqta” va “chiziq” signallari 5:3 nisbatda uchraydi. Agar a) “nuqta” signali; b) “chiziq” signali qabul qilingan bo‘lsa, aynan jo‘natilgan signal qabul qilinganligi ehtimolligini toping.

Yechish: Shartga ko‘ra, $P(H_1):P(H_2) = 5:3$; Undan tashqari $P(H_1) + P(H_2) = 1$; Shuning uchun $P(H_1) = 5/8$, $P(H_2) = 3/8$. Ma’lumki,

$$P(A|H_1) = 3/5, \quad P(A|H_2) = 1/3, \quad P(B|H_1) = 2/5, \quad P(B|H_2) = 2/3;$$

$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \quad P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}}{1/2} = \frac{3}{4}.$$

$$P(H_2|B) = \frac{P(H_2)P(B|H_2)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Iqtisodiy o‘shish davrida mijozning bankdan olgan zayomini qaytarmaslik ehtimolligi 0,04 ga, iqtisodiy tanglik davrida esa 0,13 ga teng. Faraz qilaylik, iqtisodiy o‘shish davri boshlanish ehtimolligi 0,65 ga teng. Tasodifiy ravishda tanlab olingan mijozning qarzini qaytarmaslik ehtimolligi nechaga teng?

2. 2 ta firma aksionerlik kapitallarini birlashtirish jarayonida aksiyalarning kontrol paketini olayotgan firmaning fikricha, qo‘shib olinayotgan firma direktorlar kengashining raisi iste’foga chiqsa, bu birlashtirishning foyda keltirish ehtimoliigi 0,65 ga teng. Aks holda bu ehtimollik 0,3 ga teng ekan. Raisning iste’foga chiqish ehtimolligi 0,7 ga teng bo‘lsa, birlashtirishning foyda keltirish ehtimolligini toping.

3. 2 ta bir xil quti bo‘lib, ularning 1-sida 2 ta oq, 1 ta qora shar, 2-sida esa 1 ta oq va 4 ta qora shar bor. Tasodifiy ravishda bitta quti tanlanadi va undan shar olinadi. Olingan sharning oq bo‘lish ehtimolligini toping.

4. 2 xil detallar to‘plami bor. 1-to‘plamdagi detallarning standart bo‘lish ehtimolligi 0,8 ga, 2-siniki esa 0,9 ga teng. Tasodifiy tanlangan to‘plamdan tasodifiy ravishda olingan detalning standart bo‘lish ehtimolligini toping.

5. Dominoning to‘la to‘plamidan 2 tasi tanlab olindi. Ularning 2-sini 1-chisining yoniga qo‘yish mumkin bo‘lish ehtimolligini toping.

6. Iqtisodchi mamlakatdagi iqtisodiy ahvolni shartli ravishda “yaxshi”, “o‘rtacha”, “yomon” hollarga bo‘ladi va ayni paytda ularning ehtimolliklarini mos ravishda 0,15; 0,7; 0,15 deb baholaydi. Ma’lum bir iqtisodiy indeks mamlakatdagi iqtisodiy ahvol “yaxshi” bo‘lganda 0,6 ehtimollik bilan, “o‘rtacha” bo‘lganda 0,3 ehtimollik bilan, “yomon” bo‘lganda 0,1 ehtimollik bilan o‘sadi. Aytaylik, ayni paytda ana shu indeks o‘zgardi. Mamlakatdagi iqtisodiyotni yaxshi ahvolda, ya’ni ko‘tarilishda ekanligining ehtimolligi nimaga teng?

7. Kasallikni aniqlashda maxsus meditsina testi quyidagi natijalarni beradi:

a). agar tekshiriluvchi kasal bo‘lsa, test 0,92 ehtimollik bilan ijobiy natija beradi;

b). agar tekshiriluvchi kasal bo‘lmasa, test 0,92 ehtimollik bilan ijobiy natija beradi;

Bu kasallik kam uchraydigan bo‘lib, unga aholining 0,1% i chalingan. Tasodifan tanlab olingan odam testdan o‘tkazilganida ijobiy natija olindi, ya’ni u kasallangan bo‘lib chiqdi. Bu odamning haqiqatan ham kasal bo‘lish ehtimolligi qanchaga teng?

8. 18 ta mergandan 5 tasining nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga, 7 tasiniki 0,7 ga, 4 tasiniki 0,6 ga va 2 tasiniki 0,5 ga teng. Tasodufiy ravishda tanlangan mergan nishonga tekkiza oladi. Uning qaysi guruhga tegishli bo‘lish ehtimoli qanchaga teng?

9. Ishlab chiqarilgan mahsulotning 96%i standart talablariga javob beradi. Soddashtirilgan sifat nazorati standart mahsulotni 0,98 ehtimollik bilan va no standart mahsulotni 0,05 ehtimollik bilan sifatli deb qabul qiladi. Soddashtirilgan sifat nazoratidan sifatli deb qabul qilingan mahsulotning standart talablariga javob berish ehtimolligi qanchaga teng?

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Ma’lum bir mahsulotlarning 5%i sifatsiz. Tasodifan olingan 5 ta mahsulot ichida 2 tasining sifatsiz bo‘lish ehtimolligini toping.

$$Yechish: P_3(2) = C_3^2(0,05)^2(0,95)^{5-2} = \frac{5!}{2!3!}(0,05)^2(0,95)^3 = 0,02$$

Masala: 2 ta teng kuchli raqib shaxmat o‘ynamoqda. 4 partiyadan kamida 2 tasini yutish ehtimolligi kattami yoki 5 partiyadan kamida 3 tasini yutish ehtimolligi kattami?

Yechish:

$$P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) - P_4(1) = 1 - C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 - C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}$$

$$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{8}{16}$$

Demak, $\frac{11}{16} > \frac{8}{16}$, ya’ni 4 partiyadan kamida 2 tasini yutish ehtimolligi kattaroq ekan.

Masala: Mahsulot katta partiyasining 1%i sifatsiz. Hech bo‘lmaganda bitta sifatsiz mahsulot uchratish ehtimolligi 0,95 dan kichik bo‘lmasligi uchun tasodifiy tanlanma hajmi qancha bo‘lishi kerak?

Yechish: Ma’lumki, $n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$. Shartga ko‘ra $P=0,95$; $p=0,5$. Demak, $n \geq \frac{\ln 0,5}{\ln 0,95} \approx 296$. Ya’ni, tanlanma hajmi kamida 296 bo‘lgan taqdirda tekshiruv davomida kamida bitta sifatsiz mahsulot uchrashi ehtimoli 0,95 dan kam bo‘lmaydi.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Auditor tekshirish paytida tasodifiy ravishda 5 ta hisob varaqasini tanladi. Agar hisob varaqalarining 3%i da xatolarga yo‘l qo‘yilgan bo‘lsa, auditorning:

a) faqat bitta hisob varaqasida xato topishi;
b) hech bo‘lmaganda bitta hisob varaqasida xato topishi ehtimolligini toping.

2. Guruhdagi 20 ta talabadan 10%i yakuniy nazoratda qoniqarsiz baho olar ekan. Bunday holda:

a) 2 ta talabaning yakuniy nazoratda qoniqarsiz baho olish ehtimolligi qancha?

b) 4 ta talabaning yakuniy nazoratda qoniqarsiz baho olish ehtimolligii qancha?

c) kamida 3 ta talabaning yakuniy nazoratda qoniqarsiz baho olish ehtimolligi qancha?

d) yakuniy nazoratda qoniqarsiz baho olmaydigan talabalar soni qancha?

3. Tanga 6 marta tashlandi:

a) Tanga “gerb” tomoni bilan 2 martadan kam tushishi;

b) “gerb” tomoni kamida 2 marta tushish ehtimolligini toping.

4. Sexda 6 ta motor ishlaydi. Ularning har biri uchun ayni paytda ishlayotganligi ehtimolligi 0,8 ga teng bo‘lsa,

a) 4 ta motor ishlayotganligi;

b) Hamma motor o‘chirilganligi;

c) Hamma motor ishlayotganligi ehtimolligini toping.

9-10- amaliy mashg‘ulot: Muavr-Laplas teoremlariga

доир масалалар ечиш

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Agar A hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimolligi 0,2 ga teng bo‘lsa, tajriba 400 marta o‘tkazilganda uning aynan 80 martaba ro‘y berish ehtimolligini toping.

Yechish: Shartga ko‘ra $n=400$; $m=80$; $p=0,2$; $q=0,8$. Muavr-Laplasning lokal teoremasidan foydalanamiz:

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \varphi\left(\frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \frac{1}{8} \varphi(0).$$

Ilovadagi Laplas funktsiyasining qiymatlari keltirilgan 3-jadvaldan $\varphi(x)$ ning $x = 0$ ga mos qiymatini topamiz: $\varphi(0) = 0,3989$. U holda $P_{400}(80) = 0,4986$.

EXSEL: Maxsus funktsiyaga murojaat: $\frac{1}{8}\varphi(0)$ qiymat:

$$NORMRASP(0;0;1;YOLG"ON); \text{ yoki } P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \varphi\left(\frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right).$$

Agar erinmasdan katta hajmdagi hisoblashlari bajarsak, Bernulli formulasidan ham ushbu $P_{400}(80) = 0,498$ natijani olishimiz mumkin..

EXSEL: Maxsus funktsiyaga murojaat qilib topiladi:

$$NORMRASP(80;400;0,2;YOLG"ON)$$

Masala: Tajriba vaqtida uskunaning ishda chiqish ehtimolligi 0,8 ga teng. 100 ta tajriba o'tkazilganda: a) kamida 75 ta uskunaning; b) ko'pi bilan 75 ta uskunaning; d) 75 tadan 90 tagacha uskunaning ishdan chiqish ehtimolliklarini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $n = 100$; $p = 0,8$; $q = 0,2$.

a) kamida 75 ta uskunaning ishda chiqish ehtimolligi:

$$P\{75 \leq m\} = P\{75 \leq m \leq 100\} = \Phi\left(\frac{100 - 0,8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,05 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = \Phi(5) - \Phi(-1,25),$$

Ilovadagi Laplas funktsiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\Phi(x)$ funktsiyasining $x = 1,25$ va $x = 5$ ga mos qiymatlarini topamiz: $\Phi(1,25) = 0,3944$, $\Phi(5) = 0,5$. U holda

$$P\{75 \leq m\} \approx \Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944$$

bo'ladi.

EXSEL: Maxsus funktsiyaga murojaat qilib: $P\{75 \leq m\} \approx \Phi(5) - \Phi(-1,25)$ ning qiymati: $NORMRASP(5) - NORMRASP(-1,25)$.

b) ko'pi bilan 75 ta uskunaning ishda chiqish ehtimoli:

$$P\{m \leq 74\} = 1 - P\{75 \leq m\} = 1 - 0,8944 = 0,1056.$$

d) 75 tadan 90 tagacha uskunaning ishda chiqish ehtimoli:

$$P\{75 \leq m \leq 90\} = \Phi\left(\frac{90 - 0,8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,05 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

Ilovadagi Laplas funktsiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\phi(x)$ funktsiyasining $x = 1,25$ va $x = 2,5$ ga mos qiymatlarini topamiz: $\Phi(1,25) = 0,3944$, $\Phi(2,5) = 0,4938$. U holda

$$P\{75 \leq m \leq 90\} \approx 0,4938 + 0,3944 = 0,8882 \text{ bo'ladi.}$$

EXSEL: Maxsus funktsiyaga murojaat qilib:

$$P\{75 \leq m \leq 90\} \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) \text{ ning qiymati:}$$

$$NORMRASP(2,5) - NORMRASP(-1,25).$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. 1-sinfga 200 ta o'quvchi qabul qilinishi kerak. Agar o'g'il bola tug'ilish ehtimolligi 0,515 bo'lsa, 1-sinfga qabul qilinganlarning roppa-rosa 100 tasi qiz bo'lishining ehtimolligini toping.

2. Agar hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimolligi 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta tajriba o'tkazilganda uning aynan 104 marta ro'y berish ehtimolligini toping.

3. Tasodifiy ravishda 100 ta tanga ustma-ust qilib taxlandi. Ualrning ichida "gerb" tomoni tepaga qilib taxlanganlari 45 dan 55 tagacha bo'lish ehtimolligini toping.

4. Ishlab chiqarishdagi 1% mahsulot sifatsiz. Tekshirish uchun tasodifiy ravishda olingan 1100 ta mahsulotdan 17 tasining sifatsiz chiqish ehtimolligini toping.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: O'zaro bog'liq bo'lmagan 625 tajribaning har birida hodisaning ro'y berish ehtimolligi 0,8 ga teng. Hodisaning ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolligidan chetlashishi absolut qiymati bo'yicha 0,04 dan katta bo'lmashligi ehtimolligini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $n = 625$; $m = 80$; $p = 0,8$; $q = 0,2$. $\varepsilon = 0,04$

$$P = P\left\{\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right\} = 2 \cdot \Phi\left(0,04 \sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi(2,5)$$

Ilovadagi Laplas funktsiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\Phi(2,5) = 0,4938$ ni topamiz.

EXSEL: Maxsus funktsiyaga murojaat qilib: $\Phi(2,5)$ ning qiymati:

$$NORMRASP(2,5) - 0,5; \text{ va } P = P\left\{\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right\} \approx 2 \cdot 0,438 = 0,9876$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. 10000 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro'y berishini ehtimolligi 0,75, Uning ro'y berishlari nisbiy chastotaning ehtimolligidan chetlashish absolyut qiymati ko'pi bilan 0,001 ga teng bo'lishi ehtimolligini toping.

2. 900 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro'y berishi ehtimoli 0,5 teng. Uning ro'y berishlari nisbiy chastotaning ehtimolligidan chetlashishi absolyut qiymati bo'yicha 0,02 dan oshmasligi ehtimolligini toping.

3. Tanga tashlaganda 0,6 ehtimollik bilan "gerb" tomoni tushishining nisbiy chastotasi uning ehtimolligidan chetlashishi absolyut qiymati bo'yicha ko'pi bilan 0,01 ga teng bo'lishi uchun tangani necha marta tashlash kerak bo'ladi?

4. Idishdagi oq va qora sharlar nisbati 4:1 kabi. Tajriba shundan iboratki, idishdan bitta shar olinadi, uning rangi qayd qilinadi va yana idishga qaytib solinadi. Oq shar chiqishi nisbiy chastotasining uning ehtimolligidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,01 dan oshmasligi uchun nechta tajriba o'tkazish kerak?

11-12- amaliy mashg'ulot: Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar, ularning sonly xarakteristikalariga doir masalalar yechish

Masala: 10 ta detal ichida 8 ta nostandarti bor. Tasodifiy ravishda 2 ta detal tanlab olindi. Tanlab olingan detallar orasidagi standart detallar sonining taqsimot qonunini tuzing va poligonini yasang.

Yechish: X diskret tasodifiy miqdor – tanlangan 2 ta detal orasidagi standartlari soni. U $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ qiymatlarni qabul qiladi. X ning mumkin bo‘lgan qiymatlari ehtimolliklarini topamiz.

$N = 10$; $n = 8$; $m = 2$; $k = 0; 1; 2$; bo‘lganda:

$$P\{X = k\} = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}; \quad P\{X = 0\} = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45};$$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}; \quad P\{X = 2\} = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45};$$

Izlanayotgan taqsimot qonunini:

$$X: \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

$$P: \quad 1/45 \quad 16/45 \quad 28/45$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Firma buxgalteriya hisoblarida 5% xatoga yo‘l qo‘yadi. Tekshiruvchi tasodifiy ravishda 3 ta hujjatni tanlab oldi:

a) X tasodifiy miqdorning, ya‘ni tekshiruvchi topgan xatolar sonining taqsimot qonunini toping.

b) X tasodifiy miqdorning, ya‘ni tekshiruvchi topgan xatolar sonining taqsimot funksiyasini toping.

d) Tekshiruvchining bittadan ortiq xato topish ehtimolligini toping.

2. Ishlab chiqarilgan 25 ta mahsulotning 6 tasi sifatsizligi ma‘lum bo‘lsa, tasodifan tanlab olingan 3 ta mahsulot orasidagi X sifatsizlari sonining taqsimot qonunini toping.

3. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

$$X: \quad 1 \quad 3 \quad 5$$

$$p: \quad 0,4 \quad 0,1 \quad 0,5$$

$Y = 3X$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

4. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini berilgan:

$$X: \quad p/4 \quad p/2 \quad 3p/4$$

$$p: \quad 0,2 \quad 0,7 \quad 0,1$$

$Y = \sin X$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Masala: Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X tasodifiy miqdorning MX , DX va σX sonli xarakteristikalari topilsin:

$$X: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$R: \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,3 \quad 0,1$$

Yechish:

$$MX = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,1 = 3,1$$

$$MX^2 = 1 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,1 = 10,9$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{1,29} = 1,1357$$

Masala: $MX = 5$; $DX = 7$; $Z = 4X + 3$; $M(Z) = ?$; $D(X) = ?$

Yechish: $M(4X + 3) = M(4X) + M(3) = 4 \cdot MX + 3 = 4 \cdot 5 + 3 = 23$

$$D(4X + 3) = 4^2 DX + 0 = 16 \cdot 7 = 112.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Kompaniya bitta aksiyasini 16 shartli pul birligi narxida sotmoqda. Investor aksiyalar paketini sotib olib, ularni 1 yil davomida saqlamoqchi. X bitta aksiyaning 1 yildan keyingi narxini bildiruv tasodifiy miqdor. X ning taqsimot qonuni quyidagicha:

$$\begin{array}{l} X: \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \\ P(X): 0,35 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,1 \quad 0,05 \end{array}$$

a) Berilgan qatorning taqsimot qonuni barcha xossalari ega ekanini ko'rsating.

b) 1 yildan so'ng aksiyaning kutilayotgan o'rtacha qiymati nimaga teng?

d) 1 yildan so'ng aksiyadan kutilayotgan o'rtacha yutuq nimaga teng?

e) 1 yildan so'ng $DX = ?$

2. $X: 0,21 \quad 0,54 \quad 0,61$
 $P: 0,1 \quad 0,5 \quad 0,4$ bo'lganda $MX = ?$

3. $MX = 2$; $MY = 6$; $Z = 3X + 4Y$; $MZ = ?$

4. $DX = 4$; $DY = 5$; $Z = 2X + 3Y$; $DZ = ?$

Masala: 25 ta mahsulotdan 6 tasi sifatsiz. Tasodifan 3 ta mahsulot olindi. X tasodifiy miqdor tanlanmadagi sifatli mahsulotlar sonining taqsimot qonunini tuzing. $MX = ?$ va $DX = ?$

Yechish: ($N = 25$; $M = 6$; $n = 3$); $P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_6^m C_{19}^{3-m}}{C_{25}^3}$, $m = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{array}{l} X: \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ p: \quad 0,421 \quad 0,446 \quad 0,124 \quad 0,008 \end{array}$$

EXSEL: $P(X = k)$ ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funktsiyaga murojaat qilinadi: $GIPERGEOMET(k; 3; 6; 25)$.

$$MX = \frac{nM}{N} = \frac{18}{25}; \quad DX = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = \frac{3762}{7500} = 0,5016.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. 100 ta detaldan 10 tasi sifatsiz. 5 ta detal tasodifiy ravishda tanlab olindi. Tanlanmadagi sifatsiz detallarning matematik kutilmasini toping.

2. 10 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinovda biror qurilmaning ishdan chiqishlari sonini bildiruvchi X -diskert tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping. Har bir sinovda qurilmaning ishdan chiqish ehtimolligi 0,9 ga teng.

3. $MX = 0,9$ ekanligi ma'lum bo'lganda 2 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinovlarda A hodisaning ro'y berishlar soni X -diskert tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

4. 1000 ta elementdan tashkil topgan radioapparatning bir yil davomida bitta elementining ishdan chiqish ehtimoli 0,001 ga teng va qolganlari bunga bog'liq emas. 2 ta hamda kamida 2 ta elementning ishdan chiqish ehtimolligini toping.

Mustahkamlash uchun masalalar

2. X tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ (x-2)^2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

a) zichlik funksiyasini;

b) X ning $(1; 1,25)$ oraliqqa tushish ehtimolligini toping.

2. $[0;1]$ da tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiyasiga ega bo'lsa, zichlik funksiyasini toping:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

3. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x) = \frac{A}{1+x^2}, \quad (-\infty; \infty).$$

a) A koeffitsientni; b) taqsimot funksiyasini; d) $P(0 < X < 1)$ ehtimollikni toping.

4. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,5 \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

a) taqsimot funksiyasini; b) X ning $(1; \pi/4)$ oraliqqa tushish ehtimolligini toping.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases} \quad MX = ? \quad DX = ? \quad \sigma(X) = ?$$

Yechish:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0,5 \int_0^2 x^2 dx = 4/3;$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x-4/3)^2 f(x)dx = 0,5 \int_0^2 (x-4/3)^2 x dx = 2/9;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} \approx 0,47.$$

Masala: X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/4, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning 3-tartibli boshlang'ich va markaziy momentlarini toping.

Yechish:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0,25 \int_0^4 x dx = 2; \quad v_3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx = 0,25 \int_0^4 x^3 dx = 16;$$

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^3 f(x)dx = 0,25 \int_0^4 (x - 2)^3 dx = 16/3.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Sotishga qo'yilgan har biri 100 sh.p.b. dan 10 ta motordan hech bo'lmaganda 1 ta nosozi chiqsa, xaridorga partiyaning 2 barobari miqdoridagi narxi qaytariladi. Har bir motorning nosoz bo'lish ehtimoli 0,08 ga teng bo'lsa, sotuvchining kutilayotgan daromadini toping.

2. Imtihon testlarida 15 ta savol bo'lib, ularning har birida 5 tadan javob variantlari bor. Javoblarning faqat bittasi to'g'ri. Aytaylik, talaba birorta ham savolga to'g'ri javobni bilmaydi. Uning hech bo'lmaganda 10 ta savolga to'g'ri javob berish ehtimolligii qancha?

3. X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{x}{4} + 0,5, & -2 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \quad MX = ? \quad DX = ?$$

Namunaviy masalalar yechish

Masala: X diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti berilgan:

$$\begin{array}{cccc} \xi_i & \pi/4 & \pi/2 & 3\pi/4 & \pi \\ p_i & 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{array}$$

$\eta = \sin \xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish:

$$\begin{array}{cccccc} \eta_i & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & \Rightarrow & \eta_i & 0 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ p_i & 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 & & p_i & 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{array}$$

Masala: $f_{\xi}(x)$ - (a; b) oraliqda o'zgaruvchi X tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi. $\eta = 5\xi + 2$ tasodifiy miqdorning $f_{\eta}(y)$ zichlik funktsiyasini toping.

Yechish: $y = 5x + 2$ funktsiya differentsiallanuvchi va o'suvchi bo'lgani uchun $f_{\eta}(y) = f_{\xi}(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'$ formula o'rinli. $g(x) = 5x + 2$ funktsiyaga teskari funktsiya

$$g^{-1}(y) = x = \frac{y-2}{5}.$$

$$f_{\xi}(g^{-1}(y)) = f_{\xi}\left(\frac{y-2}{5}\right); \quad (g^{-1}(y))' = 1/5; \quad f_{\eta}(g^{-1}(y)) = \frac{1}{5} f_{\xi}\left(\frac{y-2}{5}\right);$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti berilgan:

$$\xi: 1 \quad 3 \quad 5$$

$$p: 0,4 \quad 0,1 \quad 0,5'$$

$\eta = 3\xi$ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni yozing.

2. ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti berilgan:

$$\xi: \pi/4 \quad \pi/2 \quad 3\pi/4$$

$$p: 0,2 \quad 0,7 \quad 0,1'$$

$\eta = \sin \xi$ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni yozing.

3. ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti berilgan:

$$\xi: -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

$$p: 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,3 \quad 0,1'$$

$\eta = \xi^2 + 1$; $\mu = |\xi|$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni yozing.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: O'zaro bog'liqbo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X: 1 \quad 3 \qquad Y: 2 \quad 4$$

$$p: 0,3 \quad 0,7' \qquad p: 0,6 \quad 0,4$$

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimoti topilsin.

Yechish: Z ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini topamiz: $z_1 = 1 + 2 = 3$; $z_2 = 1 + 4 = 5$; $z_3 = 3 + 2 = 5$; $z_4 = 3 + 4 = 7$. Bu qiymatlarning ehtimolliklarini topamiz. $Z = 3$ bo'lishi uchun $x_1 = 1, y_1 = 2$ bo'lishi yetarli. Tasodifiy miqdorning bu qiymatlarni qabul qilish ehtimolliklari taqsimot qonuniga asosan mos ravishda 0,3 va 0,6 ga teng. X va Y o'zaro bog'liq bo'lmagani uchun $X = 1$ va $Y = 2$ hodisalar ham o'zaro bog'liq emas. Demak, bu hodisalarning bir paytda ro'y berish ehtimolliklari $0,3 \cdot 0,6 = 0,18$ ga teng. Xuddi shuningdek:

$$P\{Z = 1 + 4 = 5\} = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

$$P\{Z = 3 + 2 = 5\} = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$

$$P\{Z = 3 + 4 = 7\} = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$$

Izlanaayotgan taqsimot qonunini topamiz:

$$Z: 3 \quad 5 \quad 7$$

$$p \quad 0,16 \quad 0,54 \quad 0,28'$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. O'zaro bog'liqbo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X: 10 \quad 12 \quad 16 \qquad Y: 1 \quad 2$$

$$p: 0,4 \quad 0,1 \quad 0,5 \qquad p: 0,2 \quad 0,8$$

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimoti topilsin.

2. O'zaro bog'liqbo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X: 4 \quad 10 \qquad Y: 1 \quad 7$$

$$p: 0,7 \quad 0,3 \qquad p: 0,8 \quad 0,2$$

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimoti topilsin.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: 2 o‘lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

	X=2	X=5	X10
Y=1	0,3	0,1	0,1
Y=4	0,15	0,25	0,1

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing va ularning miqdoriy xarakteristikalarini, hamda sochilish markazini toping.

Yechish:

$$P(x_1) = 0,3 + 0,15 = 0,45;$$

$$P(x_2) = 0,1 + 0,25 = 0,35;$$

$$P(x_3) = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

X tashkil etuvchining taqsimot qonunini yozamiz:

$$X : \quad 2 \quad 5 \quad 10$$

$$P : \quad 0,45 \quad 0,35 \quad 0,2$$

Tashkil etuvchilarning:

$$MX = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot P\{X = x_i\} = 2 \cdot 0,45 + 5 \cdot 0,35 + 10 \cdot 0,2 = 4,65$$

$$DX = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot P\{X = x_i\} - (MX)^2 = 2^2 \cdot 0,45 + 5^2 \cdot 0,35 + 10^2 \cdot 0,2 = 8,9275 ;$$

$$\sigma(X) = 2.988 .$$

Satrlar bo‘yicha ehtimolliklarini qo‘shib chiqarish, Y ning qabul qiladigan qiymatlarining ehtimolliklarini topamiz.

$$P(y_1) = 0,3 + 0,1 + 0,1 = 0,5$$

$$P(y_2) = 0,15 + 0,25 + 0,1 = 0,5$$

Y tashkil etuvchining taqsimot qonunini, MX, DX va $\sigma(X)$ xuddi shunday topiladi.

Sochilish markazi: $(MX;MY) = (4,65;2.5)$.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. 2 o‘lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

	X=3	X=10	X=12
Y=4	0,17	0,13	0,25
Y=5	0,1	0,3	0,05

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing

2. 2 o‘lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

	26	30	41	50
40	0,05	0,12	0,08	0,04
45	0,09	0,3	0,11	0,05

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing

Namunaviy masalalar yechish

Masala: 2 o‘lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
--	---------	---------	---------

$y_1=0,4$	0,15	0,3	0,35
$y_2=0,8$	0,05	0,12	0,03

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing. X tashkil etuvchining Y tashkil etuvchi 0,4 qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping. Y tashkil etuvchining X tashkil etuvchi 5 qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping.

Yechish: Ustunlar bo'yicha ehtimolliklarni qo'shib, X tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

$$X: \quad 2 \quad 5 \quad 8$$

$$P: \quad 0,2 \quad 0,42 \quad 0,38$$

Satrlar bo'yicha ehtimolliklarni qo'shib, Y tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

$$Y: \quad 0,4 \quad 0,8$$

$$P: \quad 0,8 \quad 0,2$$

$p(y_1)=0,8$ ekanligini e'tiborga olib, $p(x_i | y_j) = p(x_i, y_j) / p(y_j)$ dan foydalanib quyidagi shartli ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$p(x_1 | y_1) = p(x_1, y_1) / p(y_1) = 0,15 / 0,8 = 3/16;$$

$$p(x_2 | y_1) = p(x_2, y_1) / p(y_1) = 0,3 / 0,8 = 3/8;$$

$$p(x_3 | y_1) = p(x_3, y_1) / p(y_1) = 0,35 / 0,8 = 7/16$$

Izlanayotgan shartli taqsimot qonuni:

$$X: \quad 2 \quad 5 \quad 8$$

$$P(X/y_1): \quad 3/16 \quad 3/8 \quad 7/16$$

Hisob natijalarini tekshirish uchun topilgan ehtimolliklarni qo'shib, ularning yig'indisi 1 ga teng ekaniga ishonch hosil qilamiz.

$p(x_2)=0,42$ ekanligini e'tiborga olib, $p(y_i / x_j) = p(x_i, y_j) / p(x_j)$ dan foydalanib quyidagi shartli ehtimolliklarni hisoblab, Y tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

$$Y: \quad 0,4 \quad 0,8$$

$$P(X/Y): \quad 5/7 \quad 2/7$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. 2 o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,15	0,3	0,35
y_2	0,05	0,12	0,03

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing. X tashkil etuvchining $Y=y_1$ qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping. Y tashkil etuvchining $X=x_3$ qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping.

2. 2 o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

	x_1	x_2
y_1	0,25	0,1
y_2	0,15	0,05
y_2	0,32	0,13

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing. X tashkil etuvchining $Y=10$ qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping. Y tashkil etuvchining $X=6$ qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping.

13-14 amaliy mashg'ulot: Kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlari.

Chiziqli regressiya tenglamasiga doir masalalar yechish.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: (X, Y) 2 o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/6\pi, & (x, y) \in D = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\} \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. X, Y o'zaro bog'liq va korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar ekanini isbotlang.

Yechish: X, Y tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalaridan foydalanamiz:

$$f_x(X) = \begin{cases} 2\sqrt{9-x^2}/9\pi, & |x| < 3 \\ 0 & |x| \geq 3 \end{cases} \quad \text{va} \quad f_y(Y) = \begin{cases} 2\sqrt{4-y^2}/4\pi, & |y| < 2 \\ 0 & |y| \geq 2 \end{cases}$$

$f(x, y) \neq f_x(x)f_y(y)$ o'rinli bo'lgani uchun X va Y o'zaro bog'liq bo'lgan tasodifiy miqdorlar. X bilan Y korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar ekanini isbotlash uchun

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)(y - MY)f(x, y)dx dy = 0$$

ekanligini korsatish kifoya.

$f_x(x)$ zichlik funksiyasi OY o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun $MX = 0$. Demak,

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dx dy = f(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} xy dx \right) dy.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} xy dx = 0$, chunki integral ostidagi funksiya toq, integrallash chegarasi

koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik. Demak, $\text{cov}(X, Y) = 0$, ya'ni X, Y korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Quyidagi berilgan taqsimot qonuni bilan aniqlangan (X, Y) 2 o'lchovli tasodifiy miqdor tashkil etuvchilarining sonli xarakteristikalari, kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlarini toping.

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0,1	0,15	0,2
1	0,15	0,25	0,15

2. Agar quyidagi berilgan taqsimot qonuni bilan aniqlangan (X, Y) 2 o'lchovli tasodifiy miqdor bo'lsa, to'g'ri va teskari regressiya tenglamasini toping:

Y\X	-1	0	1
0	0,1	0,15	0,2
1	0,15	0,25	0,15

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Omonat kassasiga qo'yilgan jamg'armalar miqdori 20 mln. so'mga teng. Tasodifiy tanlangan jamg'armaning miqdori 100 ming so'mdan kichik bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng bo'lsa, shu omonat kassasiga pul qo'ygan mijozlarning soni nechta?

Yechish: X tasodifiy miqdor tasodifiy ravishda tanlangan jamg'armaning miqdori va n esa omonat kassasiga pul qo'ygan barcha mijozlarning soni bo'lsin. Masalaning shartiga ko'ra:

$$MX = \frac{20000000}{n}, \quad P(X < 100000) = 0,8;$$

$$\text{Markov tengsizligidan: } P(X < 100000) \geq 1 - \frac{MX}{100000}$$

$$0,8 \geq 1 - 20000000 / (n \cdot 100000); \quad n \leq 1000$$

Masala: (3 sigma qoidasi). Chebishev tengsizligidan foydalanib, tasodifiy miqdor o'zining matematik kutulmasidan 3 karra o'rtacha kvadratik chetlashishdan kamroq miqdorda farq qilish ehtimolini baholang.

Yechish: Masala shartiga asosan $\varepsilon = 3\sigma(X)$. Bu qiymatni Chebishev tengsizligiga qo'ysak,

$$P\{|X - MX| < 3\sigma(X)\} \geq 1 - \frac{DX}{9(\sigma(X))^2} = 1 - 1/9 = 8/9.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Har birining dispersiyasi 3 dan katta bo'lmagan 1 500 ta bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarning o'rtacha arifmetik qiymati ularning matematik kutilishlarining o'rtacha arifmetigidan chetlashishi 0,6 dan katta bo'lmaslik ehtimolini baholang.

2. Diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X: 0,1 \quad 0,4 \quad 0,6$$

$$P: 0,2 \quad 0,3 \quad 0,5$$

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|X - MX| < \sqrt{0,4}$ bo'lish ehtimolligini baholang.

3. Diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X: 0,3 \quad 0,6$$

$$P: 0,2 \quad 0,8$$

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|X - MX| < 0,2$ bo'lish ehtimolligini baholang.

15-16- amaliy mashg'ulot: Tanlanma. Statistika va interval baholar tanlanmasining korrelyatsiya koeffitsientlari. Empirik taqsimot funksiyasi.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Hajmi $n=20$ ga teng bo'lgan tanlanma chastotalar taqsimoti

$$\begin{pmatrix} x_i : & 1 & 5 & 7 & 8 \\ n_i : & 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

Yechish: Nisbiy chastotalarni topish uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo'lamiz:

$$\omega_1 = n_1/n = 4/20 = 0,2; \quad \omega_2 = 7/20 = 0,35; \quad \omega_3 = 6/20 = 0,3; \quad \omega_4 = 3/20 = 0,15$$

Tanlanmaning nisbiy chastotalar taqsimoti:

$$\begin{pmatrix} x_i : & 1 & 5 & 7 & 8 \\ \omega_i : & 0,2 & 0,35 & 0,3 & 0,15 \end{pmatrix}$$

17-19 - amaliy mashg'ulot: Gipotezalarni tekshirishga doir masalalar yechish.

1. (Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish). Ipni g'altakka o'rab beruvchi uskuna tekshirilmoqda. O'ramlarning o'rtacha soni 500 teng bo'lishi kerak. G'altaklar partiyasidan olingan tanlanma o'ramlarning o'rtacha soni 502,5 ga teng ekanligini ko'rsatdi. Uskuna to'g'ri sozlanganmi, degan savolga javob bering. (Ishonchlilik darajasi $\alpha = 0,005$).

2. (Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish). O'rtacha kvadrat chetlashishi $\sigma = 2,1$ ga teng bo'lgan normal bosh to'plamdan hajmi $n = 49$ ga teng tanlanmaning o'rtachasi $\bar{x} = 4,5$ ga teng ekan. Ishonchlilik darajasi 0,05 teng bo'lsa, quyidagi 0-chi gipotezani tekshiring.

3. (Ikki bosh to'plam dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirish). Investitsion kompaniya xizmatchisi ikkita A va B investitsiya loyihalarini tahlil qilmoqda. A investitsiya 15 yil muddatga mo'ljallangan bo'lib, undan bu vaqt davomida yiliga 15,6% foyda kutulmoqda. B investitsiya 12 yil muddatga mo'ljallangan bo'lib, undan yiliga 15,6% foyda kutulmoqda. Bu ikki investitsiyalardan tushadigan yillik foydani ("tuzatilgan") dispersiyalari 4,6 va 3,42 ga teng. A va B investitsiyalarning muvaffaqiyatli bo'lmaslik xavfi (risk) teng emas degan xulosaga asos bormi? Investitsiyalarda tushadigan yillik foyda normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

4. (Ikki bosh to'plam dispersiyasi haqida gipotezani tekshirish) X va Y ikki bosh to'plamda 10 va 16 hajmdagi 2 ta tanlanma olindi va ularning "tuzatilgan" dispersiyalari hisoblandi: $S_X^2 = 3,6$ va $S_Y^2 = 2,4$. Ishonchlilik darajasi $\alpha = 0,5$ bo'lganda bosh to'plamlar dispersiyasi tengligi haqidagi 0-chi $H_0 : D_X = D_Y$ gipotezani tekshiring. Alternativ gipotezani quyidagicha aniqlang: $H_1 : D_X > D_Y$.

5. (2 bosh to'plam dispersiyasi noma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish). Batareykalar ishlab chiqarish fabrikasida 2 ta ishlab chiqarish konveyeri o'rnatilgan ekan. Batareykalarning o'rtacha xizmat vaqti $\bar{x} = 34,2$ soat va $s_x = 5,9$ soat ("tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlashish) ekan. 2- konveyerdan olingan 10 ta batareyka uchun o'rtacha xizmat vaqti $\bar{x} = 28,7$ soat va $s_x = 6,1$ soat ekan. Har xil konveyerda ishlab chiqarilgan batareykalarning o'rtacha xizmat vaqti har xil deyishga asos bormi?

6. (2 bosh to'plam dispersiyasi noma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish). X va Y 2 bosh to'plamdan 5 va 6 hajmdagi 2 ta tanlanma olindi va ularning o'rtachalari: $\bar{x} = 15,9$; $\bar{y} = 14,1$ va "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlashish $S_x^2 = 14,76$ va $S_y^2 = 2,4$. Ishonchlilik darajasi $\alpha = 0,05$ bo'lganda bosh to'plamlar dispersiyasi tengligi haqidagi 0-chi $H_0 : M_x = M_y$ gipotezani tekshiring. Alternativ gipotezani quyidagicha aniqlang: $H_1 : M_x > M_y$.

GLOSSARIY

Matritsa – Biror elementlar – sonlar, ifodalardan tuzilgan to'g'ri burchakli jadval.

Kompleks tekislik – Barcha kompleks sonlardan tashkil topgan to'plam kompleks tekislik deyiladi.

Kocosimmetrik matritsa – qiyshiq simmetrik matritsa .

Analitik funksiya – Qatorga yoyilishi mumkin bo'lgan golomorf funksiya analitik funksiya deyiladi.

Soha – Agar to'plam ham ochiq ham bog'lamli to'plam bo'lsa, u soha deb ataladi.

Uzluksizlik – Agar $\Delta z \rightarrow 0$ da Δf ham nolga intilsa, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f = 0$ $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Diz`yunksiya – Bog'lovchining mantiqiy ekvivalenti yoki shu bog'lovchi xossalarni rasmiylashtiruvchi amal.

Kon`yunksiya - Bog'lovchining mantiqiy ekvivalenti yoki shu bog'lovchi xossalarni rasmiylashtiruvchi amal.

Algoritm – Amal(hisoblash)larning belgili sistemasini tayin tartibda bajarish yo'l-yo'riqlari.

Algebra – Matematikada algebraik amallarni o'rganadigan qism, masalan, chiziqli algebra, topologik algebralarni: maydon, halqa, gruppalarni o'rganadigan fan.

Determinant – Kvadrat matritsa elementlari ustida ma'lum qoidalar bo'yicha amallar bajarish natijasida hosil qilingan ifoda.

Kombinatorika – bu diskret matematikaning diskret to'plam elementlarini berilgan qoidalar asosida tanlash va joylashtirish bilan boqliq masalalarni yechish usullarini o'rganuvch bo'limdir.

O`rin almashtirish – berilgan barcha predmetlardan foydalangan holda birikmalar (guruhlar) tuzish;

n! (n factorial) – 1 dan n gacha bo'lgan sonlar ko'paytmasi;

ILOVALAR

e^{-x} funktsiyaning qiymatlari

1-jadval

x	exp(-x)	x	exp(-x)	x	exp(-x)	x	exp(-x)
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,0	0,0498
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,2	0,0408
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,4	0,0334
0,06		0,46	0,631	0,86	0,423	3,6	0,0273
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,8	0,0224
0,10	0,905	0,50	0,607	0,90	0,407	4,0	0,0183
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,2	0,0150
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,4	0,0123
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,6	0,0101
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,8	0,0082
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,0	0,0067
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,301	5,2	0,0055
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,4	0,0045
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,6	0,0037
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,8	0,0030
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,0	0,0025
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,2	0,0020
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,4	0,0017
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,6	0,0014
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,8	0,0011
0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050	7,0	0,0009

$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ funktsiya qiymatlari

2-jadval

M	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,2$	$\lambda = 0,3$	$\lambda = 0,4$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,6$
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030
5				0,0001	0,0002	0,0004
M	$\lambda = 0,7$	$\lambda = 0,8$	$\lambda = 0,9$	$\lambda = 1,0$	$\lambda = 2,0$	$\lambda = 3,0$
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1347	0,1879	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,09,2	0,1680
5	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,1008

6	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0120	0,0504
7				0,0001	0,0034	0,216
8					0,0009	0,0081
9					0,0002	0,0027
10						0,0008
11						0,0002
12						0,0001
M	$\lambda = 4,0$	$\lambda = 5,0$	$\lambda = 6,0$	$\lambda = 7,0$	$\lambda = 8,0$	$\lambda = 9,0$
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15		0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16		0,0001	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109
17			0,0001	0,0006	0,0021	0,0058

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ Laplas funksiyasining qiymatlari}$$

3-jadval

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	0,398	0,398	0,398	0,398	0,398	0,398	0,398	0,398	0,397	0,397
0	9	9	9	8	6	4	2	0	7	3
0,	0,397	0,396	0,396	0,395	0,395	0,394	0,393	0,393	0,392	0,391
1	0	5	1	6	1	5	9	2	5	8
0,	0,391	0,390	0,389	0,388	0,387	0,386	0,385	0,384	0,383	0,382
2	0	2	4	5	6	7	7	7	6	5
0,	0,381	0,380	0,389	0,377	0,376	0,375	0,373	0,372	0,371	0,353
3	4	2	0	8	5	2	9	5	2	8
0,	0,368	0,366	0,365	0,363	0,362	0,360	0,358	0,357	0,355	0,353
4	3	8	3	7	1	5	9	2	5	8
0,	0,352	0,350	0,348	0,346	0,344	0,342	0,341	0,339	0,337	0,335
5	1	3	5	7	8	9	0	1	2	2
0,	0,333	0,331	0,329	0,327	0,325	0,323	0,320	0,318	0,316	0,314

6	2	2	2	1	1	0	9	7	6	4
0,	0,312	0,310	0,307	0,305	0,303	0,301	0,298	0,296	0,294	0,292
7	3	1	9	6	4	1	9	6	3	0
0,	0,289	0,287	0,285	0,282	0,280	0,278	0,275	0,273	0,270	0,268
8	7	4	0	7	3	0	6	2	9	5
0,	0,266	0,263	0,261	0,258	0,256	0,254	0,251	0,249	0,246	0,244
9	1	7	3	9	5	1	6	2	8	4
1,	0,242	0,239	0,237	0,234	0,232	0,229	0,227	0,225	0,222	0,220
0	0	6	1	7	3	9	5	1	7	3
1,	0,217	0,215	0,213	0,210	0,208	0,205	0,203	0,201	0,198	0,196
1	9	5	1	7	3	9	6	2	9	5
1,	0,194	0,191	0,189	0,187	0,184	0,182	0,180	0,178	0,175	0,173
2	2	9	5	2	9	6	4	1	8	6
1,	0,171	0,169	0,166	0,164	0,162	0,160	0,158	0,156	0,153	0,151
3	4	1	9	7	6	4	2	1	9	8
1,	0,149	0,147	0,145	0,143	0,141	0,139	0,137	0,135	0,133	0,131
4	7	6	6	5	5	4	4	4	4	5
1,	0,129	0,127	0,125	0,123	0,121	0,120	0,118	0,116	0,114	0,112
5	5	6	7	8	9	0	2	3	5	7
1,	0,110	0,109	0,107	0,105	0,104	0,102	0,100	0,098	0,097	0,095
6	9	2	4	7	0	3	6	9	3	7
1,	0,094	0,092	0,090	0,089	0,087	0,086	0,084	0,083	0,081	0,080
7	0	5	9	3	8	3	8	3	8	4
1,	0,079	0,077	0,076	0,074	0,073	0,072	0,070	0,069	0,068	0,066
8	0	5	1	8	4	1	7	4	1	9
1,	0,065	0,064	0,063	0,062	0,060	0,059	0,058	0,057	0,056	0,055
9	6	4	2	0	8	6	4	3	2	1
2,	0,054	0,052	0,051	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045	0,044
0	0	9	9	8	8	8	8	8	9	9
2,	0,044	0,043	0,042	0,041	0,040	0,039	0,038	0,037	0,037	0,036
1	0	1	2	3	4	5	7	9	1	3
2,	0,035	0,034	0,033	0,033	0,032	0,031	0,031	0,030	0,297	0,029
2	5	7	9	2	5	7	0	3		0
2,	0,028	0,027	0,027	0,026	0,025	0,252	0,024	0,024	0,023	0,022
3	3	7	0	4	8		6	1	5	9
2,	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	0,018	0,018	0,018
4	4	9	3	8	3	8	4	9	4	0
2,	0,017	0,017	0,167	0,016	0,015	0,015	0,015	0,014	0,014	0,013
5	5	1		3	8	4	1	7	3	9
2,	0,013	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,011	0,011	0,110	0,010
6	6	2	9	6	2	9	6	3		7
2,	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009	0,009	0,008	0,008	0,008	0,008
7	4	1	9	6	3	1	8	6	4	4
2,	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006

8	9	7	5	3	1	9	7	5	3	1
2,	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,004	0,004	0,004
9	0	8	6	5	3	1	0	8	7	6
3,	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
0	4	3	2	0	9	8	7	6	5	4
3,	0,003	0,003	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
1	3	2	1	0	9	8	7	6	5	5
3,	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001
2	4	3	2	2	1	0	0	9	8	8
3,	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
3	7	7	6	6	5	5	4	4	3	3
3,	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000
4	2	2	2	1	1	0	0	0	9	9
3,	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	9	8	8	8	8	7	7	7	7	6
3,	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	4
3,	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3
3,	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
3,	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1

$\varphi(x) = \varphi(-x)$; $x \geq 4$ qiymatlar uchun $\varphi(x) = 0$.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{Laplas integral funksiyasining qiymatlari}$$

4-jadval

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,65	0,2422	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,66	0,2454	1,31	0,4049	1,96	04750
0,02	0,0080	0,67	0,2486	1,32	0,4066		1,97
0,03	0,0120	0,68	0,2517	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,69	0,2549	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,70	0,2580	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,71	0,2611	1,36	.4131	2,02	04783
0,07	0,0279	0,72	0,2642	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,73	0,2673	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,74	0,2703	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,75	0,2734	140	0,4192	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,76	0,2764	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,77	0,2794	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,13	0,0517	0,78	0,2823	1,43	0,4236	2,16	0,4846

0,14	0,0557	0,79	0,2852	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,15	0,0596	0,80	0,2881	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,81	0,2910	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,82	0,2939	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,83	0,2967	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,84	0,2995	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,85	0,3023	150	0,4332	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,86	0,3051	151	0,4345	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,87	0,3078	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,88	0,3106	153	0,4370	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,89	0,3133	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,90	0,3159	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,91	0,3186	156	0,4406	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,92	0,3212	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,28	0,1103	0,93	0,3238	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,94	0,3264	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,95	0,3289	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,96	0,3315	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,32	0,1255	0,97	0,3340	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,33	0,1293	0,98	0,3365	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,34	0,1331	0,99	0,3389	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,35	0,1368	1,00	0,3413	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,36	0,1406	1,01	0,3438	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,37	0,1443	1,02	0,3461	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,39	0,1480	1,03	0,3485	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,39	0,1517	1,04	0,3508	169	0,4545	2,68	0,4963
0,40	0,1554	1,05	0,3531	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,41	0,1391	1,06	0,3554	1,71	0,4564	2,72	0,4967
0,42	0,1628	1,07	0,3577	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,43	0,1,664	1,08	0,3599	1,73	0,4582	2,76	0,4971
0,44	0,1,700	1,09	0,3621	1,74	0,4591	2,78	0,4973
0,45	0,1,736	1,10	0,3643	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,46	0,1,772	1,11	0,3665	1,76	0,4508	2,82	0,4976
0,47	0,1808	1,12	0,3686	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,48	0,1844	1,13	0,3708	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,49	0,1879	1,14	0,3729	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,50	0,1915	1,15	0,3749	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,51	0,1950	1,16	0,3770	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,52	0,1985	1,17	0,3790	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,53	0,2019	1,18	0,3810	1,83	0,4664	2,96	0,4985
0,54	0,2054	1,19	0,3830	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,55	0,2088	1,20	0,3849	1,85	0,4678	3,00	0,49865

0,56	0,2123	1,21	0,3869	1,86	0,4686	3,20	0,49931
0,57	0,2157	1,22	0,3883	1,87	0,4693	3,40	0,49966
0,58	0,2190	1,23	0,3907	1,88	0,4699	3,60	0,499841
0,59	0,2224	1,24	0,3944	1,89	0,4706	3,80	0,499928
0,60	0,2257	1,25	0,3962	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,61	0,2291	1,26	0,3980	1,91	0,4719	4,25	0,499989
0,62	0,2324	1,27	0,4945	1,92	0,4726	450	0,499997
0,63	0,2357	1,28	0,3997	1,93	0,4732	4,75	0,499999
0,64	0,2389	1,29	0,4015	1,94	0,4738	5,00	0,500000

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ qiymatlari

5-jadval

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	2,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97		1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

$q = q(\gamma, n)$ qiymatlari

6-jadval

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,4032	1,95	0,4744
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31

15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

χ^2 – taqsimotning kritik nuqtalari

7-jadval

k	α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	3,06	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

St'yudent taqsimotning kritik nuqtalari

8-jadval

k	α					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001

1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	292	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005

Асосий дарсликлар ва ўқув қўлланмалар

1. Б.В.Гнеденко «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука» 1987 г.
2. А.А.Боровков «Теория вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
3. С.Ҳ.Сирожиiddинов, М.Маматов «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
4. Б.А.Севостьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.
5. А.А.Абдушукуров, Т.А.Азларов, А.А.Джамирзаев «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами» Тошкент, «Университет», 2003 й.

Қўшимча адабиётлар

6. Севостьянов Б.А. «Курс теории вероятностей и математической статистики», Москва, «Наука», 1982 г.
7. Ширяев А.Н. «Вероятность», 2-е изд., Москва, «Наука», 1989 г.
8. Чистяков Р.П. «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
9. А.А.Абдушукуров «Эҳтимоллар назариясидан маърузалар матни», Тошкент, «ЎзМУ», 2000 й.
10. Гмурман В.Е. «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
11. <http://www.nsu.ru/icem/grants/etfm/> ;
12. <http://www.lib.homelinux.org/math/>;
13. <http://www.eknigu.com/lib/mathematics/>;
14. http://www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MS
15. <http://www.rsl.ru/> - Российская государственная библиотека;
16. <http://www.msu.ru/> - Московский государственный университет;
17. <http://www.nlr.ru/> - Российская национальная библиотека;
18. <http://www.el.tfi.uz/pdf/enmcoq22.uzk.pdf>;
19. <http://www.el.tfi.uz/pdf/enmcoq22.uzl.pdf>;