

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

## **САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА**

По предметам «Вычислительные методы» студентки группы 09.407р  
направления  
«Прикладная математика и информатика»

*Азимовой Хаётхона Кодиралиевной*

на тему

**«В-сферические функции и применение их для  
решения граничных задач»**

## **ПЛАН**

### **ВВЕДЕНИЕ**

### **ГЛАВА 1. ПОНЯТИЕ О В-СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ**

1.1. Оператор  $\Delta_B$  в сферических координатах

1.2. Понятие о В-сферических функциях

### **ГЛАВА 2. В-СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ**

2.1. Дифференциальное уравнение для В-сферических функций

2.2. Разложение функции, заданной на полусфере единичного радиуса с центром в начале координат, в ряд Фурье по В-сферическим функциям

2.3. Задача Дирихле

### **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

### **ЛИТЕРАТУРА**

## ВВЕДЕНИЕ

«Я, часто размышляю над строками известного узбекского поэта Абдулы Авлони «Воспитание – это для нас вопрос жизни, смерти, возможности, катастрофы, счастья и крушения».

Эти слова великого просветителя, если в начале прошлого века были насколько важными для нашей нации, то они не потеряли эту значимость и сегодня. Либо воспитание – это продукт мышления, и в тоже время оно определяет степень развитости мышления. Именно по этому без изменения структуры воспитания не возможно достичь наши цели, – которые мы поставили перед собой»<sup>1</sup>.

В настоящее время в нашей стране реализуется национальная программа по подготовке кадров. Основной целью этой программы является подготовка конкурентоспособных, высококвалифицированных специалистов. И немаловажное место в этом процессе занимает развитие компьютерных технологий в нашей республике.

Как отмечал в своей книге «Узбекистан на пороге XXI века: угрозы безопасности, условия и гарантии прогресса» Президент Республики Узбекистан И.А. Каримов: «Успех деятельности предприятий, да и в целом государства, в силу ограниченности естественных, природных ресурсов, в значительной мере сегодня определяется тем, насколько широко внедряются достижения научно-технического прогресса, наукоемкие технологии, уровнем профессиональной подготовленности кадров».

Основополагающие принципы государственной политики в области информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), определенные Президентом Исламом Каримовым, подразумевают их широкое внедрение во все сферы жизни общества с тем, чтобы в нашей стране велась интенсивная работа по интеграции в мировое информационное пространство.

---

<sup>1</sup> «Баркамол авлод орзуси» Тошкент – 1999 йил 3-бет.

Для реализации поставленных задач при хокимиятах областей и городов создаются государственные унитарные предприятия «Центры компьютеризации». На них возложены разработка и реализация мероприятий по развитию компьютеризации и информационно-коммуникационных технологий на местах в соответствии с современными международными тенденциями и стратегией социально-экономического развития регионов.

В настоящее время ученые республики ведут фундаментальные и прикладные исследования по многим направлениям современной науки и по математике в частности.

В данной квалификационной работе вводятся общие сведения о линейных уравнениях в частных производных, элементы функционального анализа, понятия Бесселевых функций и в основном понятия  $V$ -сферических функций, изучаются их свойства и, в частности, ортогональность. Дается разложение функции, заданной на полусфере единичного радиуса с центром в начале координат, в ряд по  $V$ -сферическим функциям. Также рассматриваются вопросы о применении теории  $V$ -сферических функций к решению задач Дирихле для  $V$ -гармонических функций в полушаре.

# ГЛАВА 1. ПОНЯТИЕ О В-СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

## 1.1. Оператор $\Delta_B$ в сферических координатах

Пусть  $E_3^+$  – полупространство  $z > 0$  трехмерного евклидова пространства  $E_3$  точек  $t = (x, y, z)$ .

Рассмотрим В-эллиптическое уравнение вида в  $E_3^+$ :

$$\Delta_B u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_z u = 0, \quad (79)$$

где  $B_z \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{k}{z} \frac{\partial}{\partial z}$  – оператор Бесселя,  $k > 0$ .

Рассмотрим сферические координаты  $(r, \theta, \varphi)$ , связанные с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  по формулам

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad (80)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\theta$  – угол между вектором  $t$  и осью  $z$ , а  $\varphi$  – угол между вектором  $t$  и осью  $x$ .

Вычисляем следующее:

$$u(x, y, z) = u(r, \theta, \varphi);$$

$$u_x = \alpha_{11} u_r + \alpha_{12} u_\theta + \alpha_{13} u_\varphi;$$

$$u_y = \alpha_{21} u_r + \alpha_{22} u_\theta + \alpha_{23} u_\varphi;$$

$$u_z = \alpha_{31} u_r + \alpha_{32} u_\theta + \alpha_{33} u_\varphi;$$

$$\begin{aligned} u_{xx} = & \alpha_{11}^2 u_{rr} + \alpha_{11} \alpha_{12} u_{r\theta} + \alpha_{11} \alpha_{13} u_{r\varphi} + \alpha_{12} \alpha_{11} u_{\theta r} + \alpha_{12}^2 u_{\theta\theta} + \alpha_{12} \alpha_{13} u_{\theta\varphi} + \\ & + \alpha_{13} \alpha_{11} u_{\varphi r} + \alpha_{13} \alpha_{12} u_{\varphi\theta} + \alpha_{13}^2 u_{\varphi\varphi} + u_r r_{xx} + u_\theta \theta_{xx} + u_\varphi \varphi_{xx}; \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} u_{yy} = & \alpha_{21}^2 u_{rr} + \alpha_{21} \alpha_{22} u_{r\theta} + \alpha_{21} \alpha_{23} u_{r\varphi} + \alpha_{22} \alpha_{21} u_{\theta r} + \alpha_{22}^2 u_{\theta\theta} + \alpha_{22} \alpha_{23} u_{\theta\varphi} + \\ & + \alpha_{23} \alpha_{21} u_{\varphi r} + \alpha_{23} \alpha_{22} u_{\varphi\theta} + \alpha_{23}^2 u_{\varphi\varphi} + u_r r_{yy} + u_\theta \theta_{yy} + u_\varphi \varphi_{yy}; \end{aligned} \quad (b)$$

$$u_{zz} = \alpha_{31}^2 u_{rr} + \alpha_{31} \alpha_{32} u_{r\theta} + \alpha_{31} \alpha_{33} u_{r\varphi} + \alpha_{32} \alpha_{31} u_{\theta r} + \alpha_{32}^2 u_{\theta\theta} + \alpha_{32} \alpha_{33} u_{\theta\varphi} +$$

$$+ \alpha_{33} \alpha_{31} u_{r\varphi} + \alpha_{33} \alpha_{32} u_{\varphi\theta} + \alpha_{33}^2 u_{\varphi\varphi} + u_r r_{zz} + u_\theta \theta_{zz} + u_\varphi \varphi_{zz}; \quad (\text{B})$$

$$\alpha_{11} = r_x, \alpha_{12} = \theta_x, \alpha_{13} = \varphi_x, \alpha_{21} = r_y, \alpha_{22} = \theta_y, \alpha_{23} = \varphi_y, \alpha_{31} = r_z.$$

Вычисляем коэффициенты  $\alpha_{ij}$ :

$$\alpha_{11} = r_x = \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)_x = \frac{x}{r};$$

$$\alpha_{12} = \theta_x = \left( \arccos \frac{z}{r} \right)_x = \frac{xz}{r^2 \sqrt{r^2 - z^2}};$$

$$\alpha_{13} = \varphi_x = \left( \arctg \frac{y}{x} \right)_x = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\alpha_{21} = r_y = \frac{y}{r};$$

$$\alpha_{22} = \theta_y = \left( \arccos \frac{z}{r} \right)_y = \frac{zy}{r^2 \sqrt{r^2 - z^2}};$$

$$\alpha_{23} = \varphi_y = \left( \arctg \frac{y}{x} \right)_y = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\alpha_{31} = r_z = \frac{z}{r};$$

$$\alpha_{32} = \theta_z = \left( \arccos \frac{z}{r} \right)_z = -\frac{r^2 - z^2}{r^2 \sqrt{r^2 - z^2}};$$

$$\alpha_{33} = \varphi_z = \left( \arctg \frac{y}{x} \right)_z = 0.$$

$$r_{xx} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}; \quad r_{yy} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}; \quad r_{zz} = \frac{r^2 - z^2}{r^3};$$

$$\theta_{xx} = \frac{zr^2 \sqrt{x^2 + y^2} - 2x^2 z \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 z r^2 (x^2 + y^2)^{-1/2}}{r^4 (x^2 + y^2)};$$

$$\theta_{yy} = \frac{zr^2 \sqrt{x^2 + y^2} - 2y^2 z \sqrt{x^2 + y^2} - y^2 z r^2 (x^2 + y^2)^{-1/2}}{r^4 (x^2 + y^2)};$$

$$\theta_{zz} = \frac{2z(x^2 + y^2)}{r^4 \sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\varphi_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \varphi_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \varphi_{zz} = 0.$$

$$u_z = \frac{z}{r} u_r - \frac{r^2 - z^2}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} u_\theta;$$

$$\begin{aligned} u_{xx} = & \frac{x^2}{r^2} u_{rr} + \frac{2x^2 z}{r^3 \sqrt{r^2 - z^2}} u_{r\theta} - \frac{2xy}{r(x^2 + y^2)} u_{r\varphi} + \frac{x^2 z^2}{r^4 (x^2 + y^2)} u_{\theta\theta} - \\ & - \frac{2xyz}{r^2 (x^2 + y^2) \sqrt{r^2 - z^2}} u_{\theta\varphi} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)} u_{\varphi\varphi} + \frac{r^2 - x^2}{r^3} u_r + \\ & + \frac{zr^2 \sqrt{x^2 + y^2} - 2x^2 z \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 z r^2 (x^2 + y^2)^{-1/2}}{r^4 (x^2 + y^2)} u_\theta + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} u_\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} = & \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + \frac{2y^2 z}{r^3 \sqrt{r^2 - z^2}} u_{r\theta} + \frac{2xy}{r(x^2 + y^2)} u_{r\varphi} + \frac{y^2 z^2}{r^4 (r^2 - z^2)} u_{\theta\theta} + \\ & + \frac{2xyz}{r^2 (x^2 + y^2) \sqrt{r^2 - z^2}} u_{\theta\varphi} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)} u_{\varphi\varphi} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} u_r + \\ & + \frac{zr^2 \sqrt{x^2 + y^2} - 2y^2 z \sqrt{x^2 + y^2} - y^2 z r^2 (x^2 + y^2)^{-1/2}}{r^4 (x^2 + y^2)} u_\theta - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} u_\varphi; \end{aligned}$$

$$u_{zz} = \frac{z^2}{r^2} u_{rr} + \frac{2z^2 (x^2 + y^2)}{r^3 \sqrt{x^2 + y^2}} u_{r\theta} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{r^4 (x^2 + y^2)} u_{\theta\theta} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} u_r + \frac{2z(x^2 + y^2)}{r^4 \sqrt{x^2 + y^2}} u_\theta;$$

Поставляя последнее выражение в (а)-(в) и используя формул (80) а затем поставляя полученного выражения в (79) имеем

$$\begin{aligned}
& u_{rr} + \frac{k+2}{r}u_r + \frac{1}{r^2} \left[ u_{\theta\theta} - k \operatorname{tg} \theta u_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} u_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} \right] = \\
& = u_{rr} + \frac{k+2}{r}u_r + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta - k \operatorname{tg} \theta u_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} \right] = \\
& = u_{rr} + \frac{k+2}{r}u_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{B\alpha} u = 0,
\end{aligned} \tag{81}$$

где  $\Delta_{B\alpha}$  – составляющая оператора  $\Delta_B$  по угловым координатам,  $\alpha = (\theta, \varphi)$ .

Оператор  $\Delta_{B\alpha}$  – самосопряженный.

**Доказательство.** Доказательство этого утверждения нетрудно получить из следующей формулы Грина:

$$\iiint_{D^+} (v \Delta_B u - u \Delta_B v) x_3^k dx = \iint_{\Gamma^+} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) x_3^k d\Gamma^+, \tag{82}$$

где  $D^+$  – область в  $E_3^+$ , ограниченная частью  $\Gamma_0$  плоскости  $x_3 = 0$  и поверхностью  $\Gamma^+$ ,  $n$  – внешняя нормаль к границе  $\Gamma^+$ . Применяя к функциям

$\psi_1(\theta, \varphi) = \psi_1\left(\frac{x}{|x|}\right)$  и  $\psi_2(\theta, \varphi) = \psi_2\left(\frac{x}{|x|}\right)$ , заданным в полушаровом слое,

$Q_{a,b}^+ = \{x \in E_3^+ : a \leq r \leq b\}$ , формулу Грина (37), получим

$$\begin{aligned}
& \iiint_{Q_{a,b}^+} (\psi_1 \Delta_B \psi_2 - \psi_2 \Delta_B \psi_1) x_3^k dx = \\
& = \iint_{S_b^+} \left( \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) x_3^k dS_b^+ - \iint_{S_a^+} \left( \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) x_3^k dS_a^+,
\end{aligned} \tag{83}$$

где  $S_R^+ = \{x \in E_3^+ : |x| = R\}$ , поскольку  $\frac{\partial \psi_j}{\partial r} = 0$ ,  $j = 1, 2$ .

Пользуясь тем, что  $\Delta_B \psi_j = \frac{1}{r^2} \Delta_{B\alpha} \psi_j$ , и отбрасывая в интеграле

множитель, зависящий только от  $r$ , получим из (83) формулу

$$\iint_{S_1^+} (\psi_1 \Delta_{B\alpha} \psi_2 - \psi_2 \Delta_{B\alpha} \psi_1) \theta^k d\theta d\varphi = 0.$$

Отсюда следует самосопряженность оператора  $\Delta_{B\alpha}$ .

## 1.2. Понятие о В-сферических функциях

В-сферические функции тесно связаны с В-гармоническими функциями, то есть с четными по  $x_3$  регулярными решениями уравнения (34).

Однородный многочлен  $P(x)$ ,  $x \in E_3^+ = \{x \in E_3, x_3 > 0\}$ , четный по  $x_3$  и удовлетворяющий уравнению

$$\Delta_B P(x) = 0 \quad (84)$$

называется В-шаровым многочленом. В-шаровые многочлены степени  $n$  образуют подпространство  $H_{mk}$  линейного пространства всех четных по  $x_3$ , однородных многочленов степени  $n$ . Размерность подпространства  $H_{mk}$  обозначим через  $\sigma(m)$ .

Известно, что имеет место

*Теорема 1.* Любой четный по  $x_3$  однородный многочлен  $P_m(x)$  степени  $m$  может быть представлен, и притом единственным образом, в виде

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{[m/2]} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{2i} P_{m-2i}^k(x). \quad (85)$$

Из представления (84) следует, что  $\sigma(m) = m + 1$ .

*Определение.* В-сферической функцией порядка  $n$  называется В-шаровой многочлен степени  $n$ , рассматриваемый на единичной полусфере  $S_1^+$ .

Отсюда следует, что равенство

$$Y_n^k(s) = P_n^k\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^n} P_n^k(x), \quad s = \frac{x}{|x|},$$

устанавливает взаимнооднозначное соответствие между В-сферическими функциями  $Y_n^k(s)$ ,  $s \in S_1^+$ , порядка  $n$  и В-шаровыми многочленами  $P_n^k(x)$ ,  $x \in E_3^+$ , степени  $n$ .

## ГЛАВА 2. В-СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

### 2.1. Дифференциальное уравнение для В-сферических функций

Рассмотрим уравнение (0.1) в сферических координатах

$$u_{rr} + \frac{k+2}{r}u_r + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta - k \operatorname{tg} \theta u_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} \right] = 0. \quad (86)$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = r^n Y_n^k(\theta, \varphi). \quad (87)$$

Подставляя функцию (87) в уравнение (86), получим

$$r^n \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_n^k}{\partial \theta} \right) - k \operatorname{tg} \theta \frac{\partial Y_n^k}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n^k}{\partial \varphi^2} \right] + n(n+k+1)r^n Y_n^k = 0.$$

Сокращая на  $r^n$ , имеем

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_n^k}{\partial \theta} \right) - k \operatorname{tg} \theta \frac{\partial Y_n^k}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n^k}{\partial \varphi^2} + n(n+k+1)Y_n^k = 0. \quad (88)$$

Это уравнение есть дифференциальное уравнение для В-сферических функций. Таким образом, В-сферические функции  $Y_n^k(\theta, \varphi)$  являются собственными функциями дифференциального уравнения вида

$$\Delta_{B\alpha} y + \lambda y = 0, \quad (89)$$

где

$$\Delta_{B\alpha} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - k \operatorname{tg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\alpha = (\theta, \varphi), \quad \lambda = n(n+k+1).$$

Через  $L_{2,k}(S_1^+)$  обозначим гильбертово пространство функций, заданных на полусфере  $S_1^+$ , четных по  $\theta$ , со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{S_1^+} u(\theta, \varphi) v(\theta, \varphi) \theta^k d\theta d\varphi.$$

В-сферические функции  $Y_n^k$  и  $Y_m^k$  различных порядков ортогональны в  $L_{2,k}(S_1^+)$ ,

$$(Y_n^k, Y_m^k) = \int_{S_1^+} Y_n(s) Y_m(s) s_3 ds = 0, \quad n \neq m. \quad (90)$$

Действительно, применяя формулу Грина для полушара  $Q_1^+$  к В-гармоническим полиномам

$$P_n^k(x) = |x|^n Y_n^k\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad P_m^k(x) = |x|^m Y_m^k\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad (91)$$

получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S_1^+} \left[ |x|^m Y_m^k \frac{\partial(|x|^n Y_n^k)}{\partial n} - |x|^n Y_n^k \frac{\partial(r^m Y_m^k)}{\partial n} \right] s_3^k dS = \\ &= \int_{S_1^+} \left[ Y_m^k \frac{\partial(r^n Y_n^k)}{\partial r} - Y_n^k \frac{\partial(r^m Y_m^k)}{\partial r} \right] s_3^k dS = \\ &= (n-m) \int_{S_1^+} Y_n^k(s) Y_m^k(s) s_3^k ds \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

## 2.2. Разложение функции, заданной на по-лу сфере единичного радиуса с центром в нача-ле координат, в ряд Фурье по В-сферическим функциям

Среди В-сферических функций данного порядка  $n$  существует  $\sigma(n)$  линейно независимых, которые можно считать ортонормальными в  $L_{2,k}(S_1^+)$ . Тем самым в  $L_{2,k}(S_1^+)$  имеем ортонормированную систему В-сферических функций

$$\begin{aligned} & \{Y_{n,m}^k(\theta, \varphi)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ & m = 1, 2, \dots, \sigma(n). \end{aligned} \quad (92)$$

*Теорема 1.* Система (92) В-сферических функций образуют полную ортонормированную систему в  $L_{2,k}(S_1^+)$ .

*Доказательство.* Множество всех линейных комбинаций функций (92) плотно в  $L_{2,k}(S_1^+)$ . В самом деле, любую функцию  $\psi(\theta, \varphi)$ , непрерывную на единичной полусфере  $S_1^+$ , можно приблизить сколь угодно точно с помощью многочлена от  $x$  достаточно большой степени  $n$ . Согласно формуле (86) значения такого многочлена на полусфере  $S_1^+$  представляют собой линейную комбинацию В-сферических функций. Из возможности равномерного приближения любой непрерывной функции линейными комбинациями В-сферических функций следует возможность приближения ее в метрике  $L_{2,k}(S_1^+)$ .

Поскольку любой элемент из  $L_{2,k}(S_1^+)$  может быть приближен в метрике  $L_{2,k}(S_1^+)$  непрерывными функциями, то линейная оболочка В-сферических функций плотно в  $L_{2,k}(S_1^+)$ .

Отсюда следует полнота системы В-сферических функций и любая функция  $\psi(\theta, \varphi) \in L_{2,k}(S_1^+)$  может быть разложена в ряд Фурье по В-сферическим функциям, сходящийся в  $L_{2,k}(S_1^+)$  к  $\psi(\theta, \varphi)$ .

$$\psi(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\sigma(n)} a_{n,j} Y_{n,j}^k(\theta, \varphi), \quad (93)$$

где

$$a_{n,j} = \iint_{S_1^+} \psi(\theta, \varphi) Y_{n,j}^k(\theta, \varphi) \theta^k d\theta d\varphi. \quad (94)$$

Так как в разложении (93) внутренняя сумма также является В-сферической функции порядка  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то обозначая ее через  $Y_n^k(\theta, \varphi)$ , разложение (93) запишем в виде

$$\psi(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^k(\theta, \varphi). \quad (95)$$

### 2.3. Задача Дирихле

Постановка внутренней задачи Дирихле. Требуется найти четную по  $\theta$  функцию  $u(r, \theta, \varphi)$ , удовлетворяющую условиям

$$u \in C^2(Q_R^+) \cap C(\bar{Q}_R^+); \quad (96)$$

$$\Delta_{B\alpha} u = u_{rr} + \frac{k+2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{B\alpha} u = 0, \quad (r, \theta, \varphi) \in Q_R^+; \quad (97)$$

$$u|_{r=R} = f(\theta, \varphi). \quad (98)$$

Предполагается, что функция  $f(\theta, \varphi)$  разлагается в ряд по В-сферическим функциям

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^k(\theta, \varphi). \quad (99)$$

Единственность решения задачи Дирихле (96)-(98) следует из принципа максимума для В-гармонических функций.

Решение внутренней задачи Дирихле методом разделения переменных. Решение задачи (96)-(98) ищем в виде

$$u = T(r)Y(\theta, \varphi), \quad (100)$$

где  $T(r)$  и  $Y(\theta, \varphi)$  – пока неопределенные функции. Их найдем из требования, чтобы функция (100) удовлетворяла уравнению (97).

Подставляя ее в уравнение (97), получим

$$\left( T'' + \frac{k+2}{r} T' \right) Y + \frac{1}{r^2} T \Delta_{B\alpha} Y = 0.$$

Умножая это уравнение на  $\frac{r^2}{TY}$ , имеем

$$\frac{r^2 T'' + (k+2)rT'}{T} + \frac{\Delta_{B\alpha} Y}{Y} = 0.$$

Откуда

$$\frac{r^2 T'' + (k+2)rT'}{T} = -\frac{\Delta_{B\alpha} Y}{Y}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от  $r$ , правая часть – от  $\theta$  и  $\varphi$ . Так как эти переменные независимые, то такое равенство возможно только тогда, когда обе части равны одной и той же постоянной. Эту постоянную обозначим через  $\lambda$ .

В результате имеем

$$\frac{r^2 T'' + (k+2)rT'}{T} = -\frac{\Delta_{B\alpha} Y}{Y} = \lambda,$$

откуда

$$\Delta_{B\alpha} Y + \lambda Y = 0, \quad (101)$$

$$r^2 T'' + (k+2)rT' - \lambda T = 0. \quad (102)$$

В силу вышеизложенного при  $\lambda = n(n+k+1)$  уравнение (101) имеет ненулевые решения – В-сферические функции  $Y_n^k(\theta, \varphi)$  порядка  $n$ .

Найдем частные решения уравнения (102) при  $\lambda = n(n+k+1)$ , т.е. уравнения

$$r^2 T'' + (k+2)rT' - n(n+k+1)T = 0. \quad (103)$$

Это есть уравнение Эйлера. Ищем решение этого уравнения в виде

$$T = r^\mu. \quad (104)$$

Здесь  $\mu$  – неопределенная постоянная. Найдем ее из требования, что функция (104) удовлетворяет уравнению (103). Подставив (104) в уравнение (103) и сократив на  $r^\mu$ , получим

$$\mu^2 + (k+1)\mu - n(n+k+1) = 0.$$

Решениями этого уравнения являются числа:  $\mu_1 = n$ ,  $\mu_2 = -(n+k+1)$ .

Тогда частными решениями уравнения (103) являются функции:

$$r^n, r^{-(n+k+1)}. \quad (105)$$

Таким образом, частные решения уравнения (97) имеют вид

$$\bar{u}_n = r^n Y_n^k(\theta, \varphi), \quad \bar{u}_n = \frac{Y_n^k(\theta, \varphi)}{r^{n+k+1}}.$$

Частными решениями уравнения (97) также являются функции:

$$u_n = \frac{1}{R^n} r^n Y_n^k(\theta, \varphi) = \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n^k(\theta, \varphi); \quad (106)$$

$$u_n = R^{n+k+1} \frac{Y_n^k(\theta, \varphi)}{r^{n+k+1}} = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+k+1} Y_n^k(\theta, \varphi); \quad (107)$$

Решение внутренней задачи Дирихле (96)-(98) ищем в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n^k(\theta, \varphi). \quad (108)$$

Нетрудно видеть, что функция  $u$ , определяемая рядом (108) удовлетворяет всем условиям задачи (96)-(98) и, следовательно, является решением задачи Дирихле.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой дипломной работе приведены лишь немногие примеры того, как В-сферических функции позволяют решить важные задачи математической физики. Например, задача Дирихле на полусфере. Приведены нахождения периодических решений линейных дифференциальных уравнений с помощью методом Фурье. На небольшом количестве страниц изложен материал, содержащий основные факты теории функционального анализа, Бесселевы функции и понятие о В-сферических функциях.

Работа начинается с представления функции в виде тригонометрического ряда, который и является при подставлении в него соответствующих коэффициентов (коэффициентов Фурье) рядом Фурье. Далее рассматриваются некоторые признаки сходимости рядов Фурье, вывод коэффициентов Фурье и их оценка. Представлена комплексная форма рядов Фурье. Рассмотрены примеры применений преобразований Фурье и метода Фурье (метода разделения переменных).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Каримов И.А. «Модернизация страны и построение сильного гражданского общества наш главный «приоритет». Доклад на совместном заседании Законодательной палаты и Сената Олий Мажлиса Республики Узбекистан. «Правда, Востока» 28 января 2010 г.
2. Каримов И.А. Высокая духовность – непобедимая сила. Ташкент 2008 г.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1., М.: Наука- 1965, 295 с.
4. Галимова А.Р. В-сферические функции и применение их для решения граничных задач. ВЕСТНИК ТГГПУ. 2008. №4(15).
5. Киприянов И.А., Кононенко В.И. Фундаментальные решения В-эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т.3. – №1. – С.114-129.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы. москва 1973.
7. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и син-гулярные псевдодифференциальные операторы // Дифференциальные уравнения. – Минск. – 1985. – Т.ХХI. – №6. – С.1020-1032.
8. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
9. Самко С. К., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и тех., 1987.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
11. Шилов Г.Е. «Математический анализ функции одного переменного», Москва, „Наука”, 1970 г.