O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA TA'LIM VAZIRLIGI

Farg'ona Davlat Universiteti Fizika matematika fakulteti Amaliy matematika va informatika yo'nalishi 306-guruh talabasi **Jo'rayeva Sayyora**ning Pedagogik o'lchash texnologiyalari fanidan toyyarlagan

Referati

Referati

Tekshirdi: Zaynolobidinnova S

Farg'ona 2013

LOGARIFMIK FUNKSIYA

Logarifmlarning ixtiro qilinishi astranomning ishini qisqartirish bilan uning umrini uzaytirdi.

P.S.Laplas

LOGARIFMLAR

1-masala.$x^4 = 81$ tenglamaning musbat ildizini toping.

Δ Arifmetik ildizning ta'rifiga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x = \sqrt[4]{81} = 3.$$

- **2-masala.** $3^x = 81$ tenglamani yeching.
- Berilgan tenglamani bunday yozamiz: $3^x = 3^4$, bundan $x = 4$.
- 1-masalada noma'lum darajaning asosidir, 2-masalada noma'lum daraja ko'rsatkichidir.
- 2-masalani yechish usuli tenglamaning chap va o'ng qismlarini ayni bir 3 asosli daraja ko'rinishida ifodalay olishdan iborat. Lekin, masalan, $3^x = 80$ tenglamani shunday usul bilan yechish mumkin emas. Biroq, biz bu tenglama ildizga ega ekanini bilamiz. Bunday tenglamalarni yecha olish uchun *sonning logarifmi* tushunchasi kiritilgan.
- $a^x = b \ (bunda \ a > 0, a \neq 1, b > 0)$ tenglama birgina ildizga ega ekani aytilgan edi. Bu ildiz *b* sonining *a* asosga ko'ra logarifmi deb ataladi va $\log_a b$ kabi belgilanadi. Masalan, $3^x = 81$ tenglamaning ildizi 4 sonidir, ya'ni $\log_3 81 = 4$.

Shunday qilib, *b* musbat sonning *a* asosga ko'ra logarifmi deb *b* sonni hosil qilish uchun *a* (bunda a>0 , a≠1 ,1) sonni ko'tarish kerak bo'lgan daraja ko'rsatkichiga aytiladi.

Masalan, $\log_2 8 = 3,\ chunki\ 2^3 = 8;\ \log_3 \frac{1}{9} = -2,\ chunki\ 3^{-2} = \frac{1}{9};$

$\log_7 7 = 1,\ chunki\ 7^1 = 7;\ \log_4 1 = 0,\ chunki\ 4^0 = 1.$

Logarifmning ta'rifini qisqacha bunday yozish mumkin:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Bu tenglik $b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$ bo'lganda o'rinlidir. U odatda *asosiy logarifmik ayniyat* deb ataladi.

Masalan, $4^{\log_4 5} = 5;$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 3;$ $13^{\log_{13} \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}.$

Asosiy logarifmik ayniyat yordamida, masalan, $x = \log_3 80$ qiymat $3^x = 80$ tenglamaning ildizi ekanini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham,

$$3^{\log_3 80} = 80$$

Sonning logarifmini topish amali *logarifmlash amali* deb ataladi.

3-masala. $\log_{64} 128$ ni hisoblang.

Δ $\log_{64} 128 = x$ belgilash kiritamiz. Logarifmning ta'rifiga ko'ra:

$64^x = 128.\ 64 = 2^6,\ 128 = 2^7$ bo'lgani uchun, $2^{6x} = 2^7,\ \textit{bundan}\ \ 6x = 7,\ \ x = \frac{7}{6}$

Javob. $\log_{64} 128 = \frac{7}{6}$

4-masala. $3^{-\log_3 5}$ ni hisoblang.

Δ Darajaning xossasi va asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$3^{-\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}.$$

5-masala. $\log_3(1 - x) = 2$ tenglamani yeching.

Δ Logarifmning ta'rifiga ko'ra $3^2 = 1 - x$, bundan $x = -8$

6-masala. x ning qanday qiymatlarida $\log_5 \frac{x-1}{2-x}$ mavjud bo'ladi?

Δ Logarifmning asosi $5 > 0\ va\ 5 \neq 1$ bo'lgani uchun berilgan logarifm $\frac{x-1}{2-x} > 0$ bo'lganda va faqat shundagina mavjud bo'ladi.

Bu tengsizlikni yechib, $1 < x < 2$ ekanini topamiz.

LOGARIFMNING XOSSALARI

Logarifmlar ishtirok etgan ifodalarni almashtirishda, hisoblashlarda va tenglamalarni yechishda ko'pincha *logarifmlarning* turli *xossalaridan* foydalaniladi.

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

Asosiy logarifmik ayniyatga ko'ra:
$$a^{\log_a b} = b,$$
$$a^{\log_a b} = c.$$

1)(4) va (5) tengliklarni o'zaro ko'paytirib, quydagiga ega bo'lamiz;

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc$$

Bundan logarifmning ta'rifiga ko'ra, $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ (1) formula isbotlandi.

1)(4) tenglikni (5) ga bo'lib, quydagiga ega bo'lamiz:

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c}$$

bundan, logarifmning ta'rifiga ko'ra, (2) formula kelib chiqadi.

3) $a^{\log_a b} = b$ asosiy logarifmik ayniyatni r ko'rsatkichli darajaga ko'tarib, quydagiga ega bo'lamiz:

$$a^{\log_a b} = b^r,$$

Bundan, logarifmning ta'rifiga ko'ra, (3) formula kelib chiqadi.

O’NLI VA NATURAL LOGARIFMLAR

Sonlarning logarifmlari uchun maxsus jadvallar (*logarifmlar jadvallari*) tuzilgan. Logarifmlar mikrokalkulyator yordamida ham hisoblanadi. Ikkala holda ham faqat *o’nli* yoki *natural logarifmlar* topiladi.

Sonning *o’nli logarifmi* deb shu sonning 10 asosga ko’ra logarifmiga aytiladi va

$\log_{10} b$ o’rniga $\lg b$ yoziladi.

Sonning *natural logarifmi* deb, shu sonning *e* asosga ko’ra logarifmiga aytiladi, bu yerda *e*-qiymati taqriban 2,7 ga teng irratsional son. Bunda $\log_a b$ o’rniga lg *b* yoziladi.

e irratsional son matematikada va uning tadbiqlarida muhim rol o’ynaydi. *e* sonini yig’indi sifatida quydagicha ifodalash mumkin:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots.$$

e sonini mikrokalkulyatorda hisoblanadi.

LOGARIFMIK FUNKSIYA VA UNING GRAFIGI

Matematikada va uning tadbiqlarida ko'pincha

$y = \log_a x$

logrifmik funksiya uchraydi, bu yerda *a*- berilgan son ,

$a > 0, \ a \neq 1$

.

Logarifmik funksiya *quyidagi xossalarga* ega:

1)logarifmik funksiyaning *aniqlanish sohasi-* barcha musbat sonlar to'plami.

Bu logarifmning ta'rifidan kelib chiqadi, chunki

$y = \log_a x$

ifoda faqat

$x > 0$

da ma'noga ega.

1)logarifmik funksiyaning qiymatlar to'plami barcha haqiqiy sonlar to'plami ***R***.

Bu istalgan haqiqiy *b* son uchun shunday musbat *x* son mavjud bo'lib, uning uchun

$y = \log_a b$

tenglama ildizga ega ekanidan kelib chiqadi. bunday ildiz mavjud va u

$x = a^b$

ga teng, chunki

$y = \log_a a^b = b$

.

3) $y=\log_a x$ logarifmik funksiya $x>0$ oraliqda agar $a>1$ bo'lsa, o'suvchi, agar $0<a<1$ bo'lsa, kamayuvchidir. $a>1$ bo'lsin. Agar $x_2>x_1>0$ bo'lsa, u holda

$y\ x_2\ >y\ x_1$, $ya'ni\ \log_a x_2>\log_a x_1$ bo'lishini isbotlaymiz.

Asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanib, $x_2>x_1$ shartni bunday yozish mumkin:

$$a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$$

Bu tengsizlikdan $a>1$ asosli darajaning xossasiga ko'ra $\log_a x_2>\log_a x_1$ ekani kelib chiqadi. $0<a<1$ bo'lsin. Agar $x_2>x_1>0$ bo'lsa, u holda $\log_a x_2<\log_a x_1$ bo'lishini isbotlaymiz. $x_2>x_1$ shartni

$$a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$$

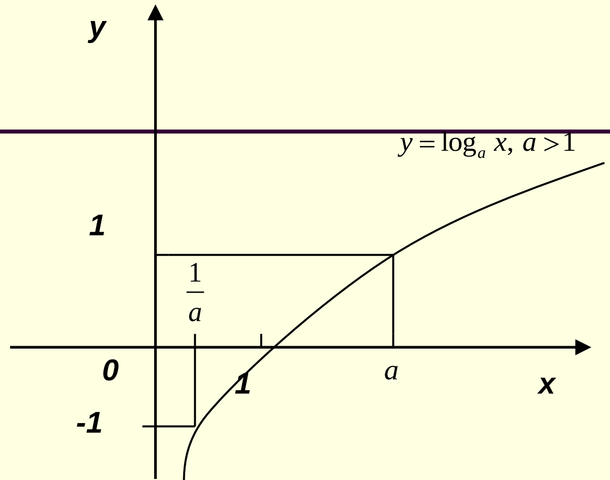
ko'rinishda yozib, $\log_a x_2<\log_a x_1$ ni hosil qilamiz, chunki $0<a<1$

4)Agar $a>1$ bo'lsa, u hoda $y=\log_a x$ funksiya $x>1$da *musbat qiymatlar,* $0<x<1$da esa *manfiy qiymatlar* qabul qiladi. Agar $0<a<1$ bo'lsa, u holda $y=\log_a x$ funksiya $0<x<1$ da musbat qiymatlar, $x>1$da manfiy qiymatlar qabul qiladi.

Bu $y=\log_a x$ funksiya $x=1$ da nolga teng qiymat qabul qilishi va $x>0$ oraliqda, agar $a>1$ bo'lsa, o'suvchiligidan hamda agar $0<a<1$ bo'lsa, kamayuvchiligidan kelib chiqadi.

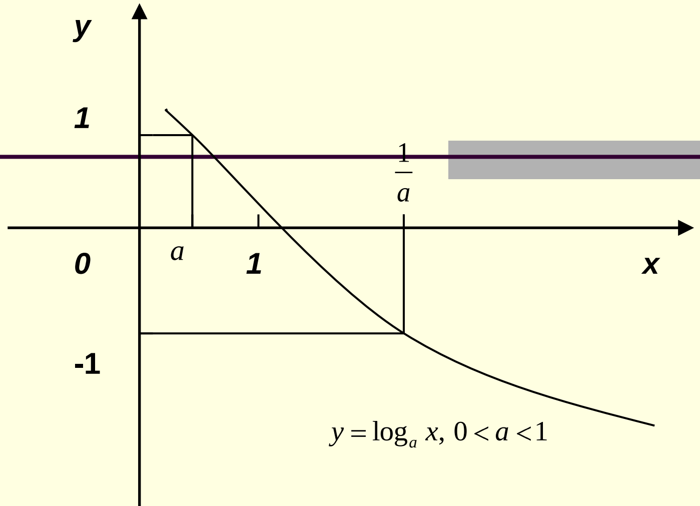
$y=\log_a x$ logarifmik funksiyaning ko'rib chiqilgan xossalaridan uning grafigi Oy o'qdan joylashganligi va $a>1$ da 7– rasmdagi ko'rinishga, $0<a<1$ da esa 8- rasmdagi ko'rinishga ega bo'lishi kelib chiadi.

9- rasmda $y=\log_3 x$ funksiyaning grafigi, 10- rasmda esa $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ funksiyaning grafigi tasvirlangan.

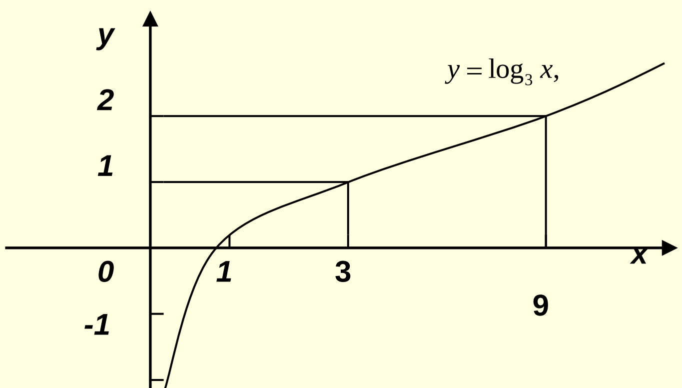


7- rasm

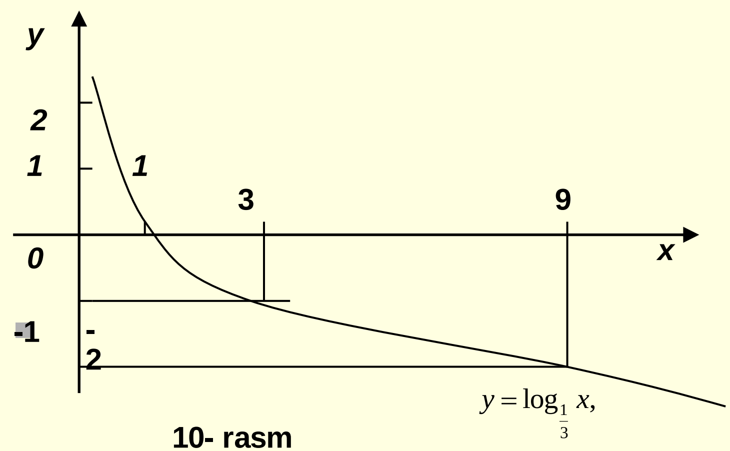
a



8- rasm



9- rasm



10- rasm

Istalgan $y = \log_a x$ logarifmik funksiyaning grafigi $1;0$ nuqtadan o’tishini ta’kidlab o’tamiz.

Tenglamalarni yechishda ko’pincha quyidagi teoremadan foydalaniladi:

Teorema. Agar $\log_a x_1 = \log_a x_2$ bo’lsa u holda $x_1 = x_2$ bo’ladi, bunda $a > 0,\ a \neq 1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\ x_1 \neq x_2$ deb faraz qilaylik, masalan $x_2 > x_1$ bo’lsin. Agar $a > 1$ bo’lsa, u holda $x_2 > x_1$ tengsizlikdan $\log_a x_2 > \log_a x_1$ bo’lishi, agar $0 < a < 1$ bo’lsa, u holda $x_2 > x_1$ tengsizlikdan $\log_a x_2 < \log_a x_1$ bo’lishi kelib chiqadi.

Ikkala holda ham $\log_a x_2 = \log_a x_1$ shartga zid hol yuz berdi. Demak, $x_1 = x_2$

LOGARIFMIK TENGLAMALAR

1- masala. Ushbu tenglamani yeching:

$$\log_2 \ x+1 \ + \log_2 \ x+3 \ = 3 \qquad (1)$$

x shunday sonki, unda (1) tenglik to’g’ri bo’ladi ya’ni *x* (1) tenglamaning ildizi deb faraz qilaylik. U holda logarifmning xossasiga ko’ra ushbu

$$\log_2 \ x+1 \quad x+3 \ = 3 \qquad 2$$

tenglik to’g’ri tenglik bo’ladi. Bu tenglikdan logarifmning ta’rifiga ko’ra quyidagiga ega bo’lamiz: $x+1 \quad x+3 \ = 8$ bundan $x^2 + 4x + 3 = 8,\ ya'ni\ \ x^2 + 4x - 5 = 0.$ Oxirgi tenglik $x_1 = 1\ \ yoki\ \ x_2 = -5$ bo’lganda to’g’ri.

Shunday qilib, *x* soni (1) tenglamaning ildizi deb faraz qilib, biz *x* yoki 1 ga, yoki -5 ga teng bo’lishi mumkin ekanini ko’rdik.

Bu sonlar (1) tenglamaning ildizi bo’lish – bo’lmasligini tekshiramiz. Berilgan tenglamaning chap qismiga *x* =1 ni qo’yib,

$$\log_2 \ 1+1 \ + \log_2 \ 1+3 \ = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$$

ni hosil qilamiz, ya’ni *x* =1 qiymat (1) tenglamaning ildizi.

x=-5 da *x* +1 va *x* +3 sonlar manfiy va shuning uchun (1) tenglamaning chap qismi ma’noga ega ems, ya’ni *x* =-5 berilgan tenglamaning ildizi emas.

Javob. *x* =1.

LOGARIFMIK TENGSIZLIKLAR

Logarifmik funksiyalarni o'rganishda $\log_a x < b \quad va \quad \log_a x \geq b$ ko'rinishdagi tengsizliklar qaralgan edi. Ancha murakkab logarifmik tengsizliklarni yechishga misollar keltiramiz. Bunday tengsizliklarni yechishning oddiy usuli ulardan nisbatan sodda tengsizliklarga yoki aynan shu yechimlar to'plamiga ega bo'lgan tengsizliklar sistemasiga o'tishdan iborat.

1.masala. Ushbu

$$\lg(x+1) \leq 2 \qquad (1)$$

tengsizlikni yeching.

Berilgan tengsizlikning o'ng qismi *x* ning barcha qiymatlarida ma'noga ega, chap qismi esa $x+1>0$ da, ya'ni $x>-1$ da ma'noga ega. $x>-1$ oraliq (1) *tengsizlikning aniqlanish sohasi* deb ataladi.

Ushbu

$$\log_{\frac{1}{2}} \; x^2+2x-8 \; \geq -4 \qquad\qquad 5$$

tengsizlikni yeching.

Tengsizlikning aniqlanish sohasi ushbu $x^2+2x-8>0$ shartdan topiladi. (5) tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\log_{\frac{1}{2}} \; x^2+2x-8 \; \geq \log_{\frac{1}{2}} 16$$

$\frac{1}{2}$ asosli logarifmik funksiya kamayuvchi funksiya bo'lgani sababli tengsizlikning aniqlanish sohasidagi barcha *x* lar uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x^2+2x-8\leq 16$$

Shunday qilib, dastlabki (5) tengsizlik

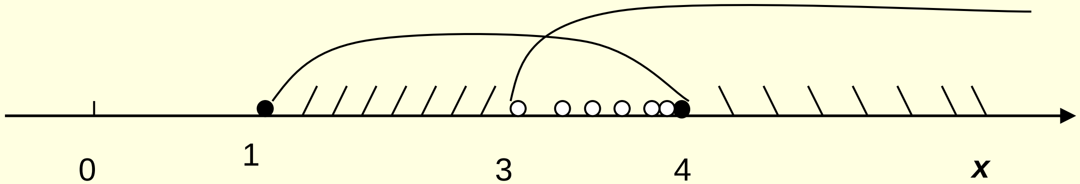
$$\begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-8\leq 16 \end{cases} \quad yoki \quad \begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-24\leq 0 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasiga teng kuchlidir.

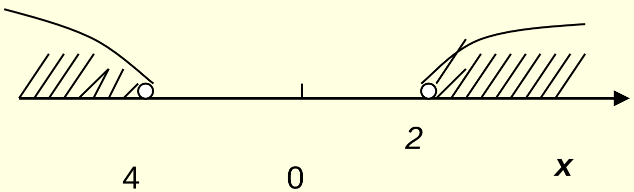
Birinchi kvadrat tengsizlikni yechib, *x* <-4, *x* >2 ga ega bo'lamiz (15- rasm). Ikkinchi kvadrat tengsizlikni yechib, $-6\leq x\leq 4$ ga ega bo'lamiz (16- rasm).

Demak, sistemaning ikkala tengsizligi $-6\leq x<4 \; da \;\; va \; 2<x\leq 4$ da bir vaqtda bajariladi. (17- rasm).

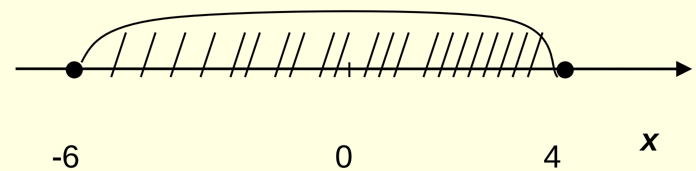
Javob. $-6\leq x<-4, \; 2<x\leq 4$



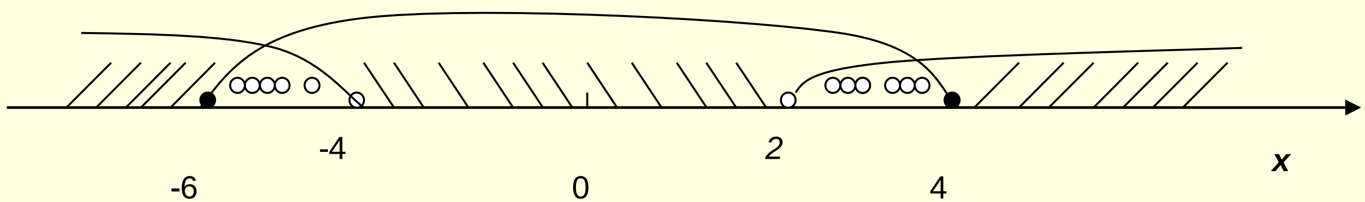
14- rasm



15- rasm



16- rasm



17-rasm

E'tiboringiz uchun raxmat!