

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

Qo'lyozma huquqida

UDK 519.21

RASULOVA MUHAYYO AKBARJON QIZI

KELI DARAXTIDA BA'ZI MODELLAR UCHUN KUCHSIZ
DAVRIY ASOSIY HOLATLAR VA GIBBS O'LCHOVLARI

5A130102 – Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

Magistr
akademik darajasini olish uchun yozilgan
dissertatsiya

Ilmiy rahbar:
f.-m.f.n. M.M.Raxmatullayev

Namangan-2014

M U N D A R I J A

KIRISH	3
I bob. Dastlabki tushunchalar	11
1.1. Keli daraxtining gruppali tasvirlanishi.....	11
1.2. Konfiguratsiyalar fazosi va Gamiltonianlar.....	16
1.3. Kuchsiz davriy asosiy holatlar va Gibbs o'lchovlari.....	16
I bob bo'yicha xulosa	20
II bob. O'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Potts modeli uchun kuchsiz davriy asosiy holatlar	21
2.1. Indeksi ikkiga teng bo'lgan hol.....	26
2.2. Indeksi to'rtga teng bo'lgan hol.....	52
II bob bo'yicha xulosa	57
III bob. Izing modeli uchun kuchsiz davriy asosiy holatlar	58
3.1. Tashqi maydonli oddiy Izing modeli uchun	58
3.2. Tashqi maydonli o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan hol.....	59
3.3. Bir jinsli bo'lmagan oddiy Izing modeli uchun	60
3.4. Bir jinsli bo'lmagan o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan hol.....	62
III bob bo'yicha xulosa	65
IV bob. Kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari	66
4.1. Potts modeli uchun.....	66
4.2. Tashqi maydonli Izing modeli uchun.....	77
IV bob bo'yicha xulosa	80
XULOSA	81
ADABIYOTLAR RO'YXATI	82

KIRISH

Bizning muqaddas vazifamiz – Vatan shon-u shuhrati, qudrati va salohiyatining yuksalishi uchun o'zimizning fidoyi mehnatimiz bilan munosib hissa qo'shishdir.

I.A. Karimov.

Mamlakatimizda jismoniy sog'lom, ma'naviy yetuk, har tomonlama uyg'un va barkamol rivojlangan, mustaqil fikrlaydigan, intellektual salohiyatga, chuqur bilim va zamonaviy dunyoqarashga ega, Vatanimizning taqdiri va kelajagi uchun mas'uliyatni o'z zimmasiga olishga qodir bo'lgan yosh avlodni tarbiyalab voyaga yetkazish vazifasini izchil davom ettirish uchun aniq maqsadga qaratilgan keng ko'lamdagi kompleks chora-tadbirlarni amalga oshirish, davlat va jamiyatning barcha kuch va imkoniyatlarini shu yo'lda safarbar etish maqsadida hamda 2014 yil «Sog'lom bola yili» deb e'lon qilinishi munosabati bilan «Sog'lom bola yili» Davlat dasturini amalga oshirishning bir qator ustuvor vazifalari va yo'nalishlari belgilandi[1].

Biz jahon sivilizatsiyasiga bosh tafakkuri va yuksak ma'naviyati bilan ulkan hissa qo'shgan, insoniyat tarixida o'chmas iz qoldirgan buyuk ajdodlarimiz bilan haqli ravishda faxrlanamiz. Ularning madaniy-ma'naviy, ilmiy merosini o'rganish, asrab-avaylash va yanada boyitish kelgusi avlodlar oldidagi burchimizdir.

Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimov rahnamoligida barcha sohalar qatori ma'naviy-ma'rifiy jabhalarda olib borilayotgan ishlar zahirida ham ana shu ezgu maqsad mujassam. Muqaddas qadamjolarini obodonlashtirish, buyuk bobolarimizning boy ma'naviy merosini chuqur o'rganish, yoshlarimizni shu asosda barkamol insonlar etib voyaga yetkazish ustuvor ahamiyat kasb etmoqda. O'zbekiston Respublikasi mustaqillikka erishgandan so'ng ko'pgina sohalar bilan bir qatorda ta'lim sohasida ham katta o'zgarishlar yuz berdi. Bunda asosan rivojlangan davlatlarning ta'lim tizimlari namuna sifatida olinib, bizning xalqimiz imkoniyatlari va yutuqlariga mos holda yangi ta'lim tizimi ishlab chiqildi.

O'zbekiston innovatsion rivojlanish turining hozirgi zamon modeliga o'tishi uchun hamma zarur sharoitlarga ega. Bu model vujudga keltirilgan ilmiy texnikaviy salohiyatdan keng va samarali foydalanishga fundamental va amaliy fanlarning yutuqlarini chuqur ilm talab qiladigan texnologiyalarni amaliyotga keng joriy etishga, yuqori malakali, iqtidorli ilmiy kadrlar sonini ko'paytirishga asoslanadi. Bu mamlakatimiz jahondagi iqtisodiyoti va sanoati rivojlangan davlatlar qatoriga kirib borishning zarur, zamonaviy sharti va mustahkam poydevori bo'lib xizmat qiladi.

Ma'lumki, O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimovning Respublika Oliy Majlisi IX sessiyasida so'zlagan nutqida takrorlaganidek: "Ta'lim-tarbiya va kadrlar tayyorlash tizimini tubdan isloh qilish barkamol avlodni voyaga yetkazishda muhim ahamiyatga ega bo'ladi". Bu esa o'qitish sistemasini isloh qilishni taqozo etadi. Shuning uchun zamon talabiga mos o'quv qo'llanmalar yaratish milliy dasturni amalga oshirish vazifalaridan biridir. Matematika o'sib kelayotgan yosh avlodni kamol toptirishda o'quv fani sifatida keng imkoniyatlarga ega. U o'quv tafakkurini rivojlantirib, aqlni charxlaydi, fikrlashni tartibga soladi. Shu bilan bir qatorda teoremlarni isbotlash va mulohazalarning to'g'ri, go'zal tuzilganligi, talabalarni go'zallikka ehtiyojli qalb sifatida tarbiyalab boradi. Matematikaning imkoniyatlari juda keng va boy. U nafaqat fizika, astronomiya, ximiya, biologiya, geologiya, iqtisod fanlarida, balki tibbiyot, tilshunoslik, atrof-muhitni himoya qilish tabiatdagi turli-tuman hodisalarni o'rganishga ham dadillik bilan kirib boryapti va samarali natijalar bermoqda. Mamlakatning ijtimoiy-iqtisodiy taraqqiyotini jadallashtirish yangi texnologiyalarni yaratish va ishga tushirishni, bu esa o'z navbatida juda murakkab matematik hisob-kitoblarni taqozo etadi. Shunday qilib, matematik kadrlar sifatini tubdan yaxshilash masalasi yuzaga kelmoqda. Mamlakatimizga ko'plab yuqori malakali matematiklar kerak. Ularni tayyorlash ishi maktabdan, hattoki, bog'chadan boshlanishi kerak.

Buni biz prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimovning «O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: xavfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari» nomli kitoblarida keltirilgan quyidagi so'zlardan ham bilib olsak

bo'ladi: «Respublikada quyidagi yo'nalishlar bo'yicha jahon darajasidagi ilmiy maktablar yaratilgan bo'lib, ularda tadqiqotlar muvafaqqiyatli olib borilmoqda. Jumladan, matematika, ehtimollar nazariyasi, tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni matematik modellash, informatika va hisoblash texnikasi sohasidagi tadqiqotlar.

Matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, differensial tenglama, algebra va sonlar nazariyasi, funksional tahlil sohasidagi yutuqlari Respublikadan ancha uzoqda ham mashhur».

Xalqning boy intellektual merosi va umumbashariy qadriyatlar asosida, zamonaviy madaniyat, iqtisodiyot, fan, texnika va texnologiyalarning yutuqlari asosida kadrlar tayyorlashning mukammal tizimini shakllantirish O'zbekiston taraqqiyotining muhim shartidir.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturi "Ta'lim to'g'risida"gi O'zbekiston Respublikasi Qonunining qoidalariga muvofiq holda tayyorlangan bo'lib, milliy tajribaning tahlili va ta'lim tizimidagi jahon miqyosidagi yutuqlar asosida tayyorlangan hamda yuksak umumiy va kasb-hunar madaniyatiga, ijodiy va ijtimoiy faollikka, ijtimoiy-siyosiy hayotda mustaqil ravishda mo'ljalni to'g'ri ola bilish mahoratiga ega bo'lgan, istiqbol vazifalarini ilgari surish va hal etishga qodir kadrlarning yangi avlodini shakllantirishga yo'naltirilgandir.

Mazkur dasturning maqsadi – ta'lim sohasini tubdan isloh qilish, uni o'tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to'la xalos etish, rivojlangan demokratik davlatlar darajasida, yuksak ma'naviy va axloqiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlash Milliy tizimini yaratishdir.

Prezidentimiz I.A.Karimov ta'limni rivojlantirish, yosh avlodga jahon andozalariga mos bilim, iqtidor va ko'nikmalar berish, ularni ona-Vatanga, milliy istiqbolga sadoqat ruhida tarbiyalash borasida ko'rsatayotgan g'amxo'rligi tufayli ta'lim-tarbiya ishlarining bugungi qiyofasi tubdan o'zgardi. U mustaqillikka erishib taraqqiyot yo'lidan dadil borayotgan mamlakatimiz ruhini, g'oyalari va intilishlarini o'zida aks ettirgan ta'lim tizimiga aylanmoqda. Eng asosiysi, mamlakatimizda ta'limning hali jahon amaliyotida kam uchraydigan betakror milliy modeli yaratildi. Shu o'rinda Prezidentimizning quyidagi gaplarini keltirib

o'tmoqchiman: "Sog'lom, bilimli va fidoyi farzandlari bo'lgan xalq, albatta, o'zining buyuk kelajagini barpo etadi"[6].

Mavzuning dolzarbligi. Juda ko'p zarralardan tashkil topgan sistemaning xossalari klassik yoki kvant mexanika tenglamalari orqali o'rganib bo'lmaydi. Demak, makroskopik sistema holatini aniqlash uchun yangi tipdagi qonuniyat – statistik qonuniyatni yaratish masalasiga olib keladi. Bu masala ehtimollik nazariyasi bilan uzviy bog'langandir. Shunday qilib, statistik fizikaning asosiy vazifasi ehtimollik nazariyasiga asoslanib, taqsimot funksiyalarini topish, makroskopik sistemaning fundamental qonuniyatlarini kashf etish, tushuntirish, sistema holatini xarakterlovchi termodinamik kattaliklarni va ular orasidagi asosiy munosabatlarni topishdan iboratdir.

Gibbs o'lchovlari nazariyasi statistik fizika va Yevklid kvant nazariyasini o'rganishning asosiy ob'yekti bo'lishi bilan birga, bu o'lchov, o'lchovlar nazariyasining nisbatan yangi sohasini tashkil qiladi.

Gibbsning limit o'lchovlari umumiy xarakteristikasi R.L.Dobrushin, O.Lenford va D.Ryuellarning ishlarida keltirilgan. Bu tushunchaning xususiy hollari avvalroq N.N.Bogolyubov va B.I.Xatsetlar tomonidan o'rganilgan. Yuqoridagi ishlarning kengaytirilgan va zamonaviylashtirilgan ko'rinishi N.N.Bogolyubov, D.Ya.Petrina va B.I.Xatsetlarning ilmiy maqolalarida tadqiq etilgan. Shuningdek, R.A.Minlos va D.Ryuellarning ilmiy ishlarini ham eslatib o'tamiz. Shu mavzu bo'yicha O'zbek olimlaridan professorlar N.N.G'anixo'jayev, U.A.Roziqov, F.Muhammedovlar, fan nomzodlari N.N.Xatamov, E.Normatov va boshqalar ilmiy izlanishlar olib borishmoqda.

Gibbsning limit o'lchovlarining nazariy–ehtimollik ko'rinishlarini K.Prestonning kitobidan ko'rish mumkin.

Gibbsning limit o'lchovlari nuqtai nazaridan Gauss o'lchovlarini Yu.A.Rozanov, F.Spitser, R.L.Dobrushinlarning ilmiy ishlarida muhokama qilingan.

Gibbs o'lchovining mavjudligi haqidagi teorema va uning isboti R.L.Dobrushin tomonidan keltirilgan. Kvant maydonlari nazariyasining

panjarasimon modellariga taaluqli va bu teoremani qo'llanishiga K.M.Xinin tomonidan misol ko'rilgan. Uning ilmiy ishida bir nechta umumiy hollar o'rganilgan.

$\varphi(x)$ chegaralanmagan to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi modellar uchun Gibbsning limit o'lchovlari mavjudligi haqidagi teoremlar J. Libovits va E. Prezuttillar ilmiy ishlarida ko'rilgan.

Yang va Li ishlarida, ilk bor, termodinamik limitga o'tishni statistik mexanikaning turli masalalariga va ayniqsa faza almashishlar nazariyasiga qo'llashning ahamiyati ko'rsatilgan.

Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usullaridan foydalanib, xususan P.M.Blexer, N.G'anixo'jayev, S.Zaxari, F.Spitser, Yu.Suxov, U.Roziqov va boshqalar tomonidan Keli daraxtida statistik mexanikaning modellari o'rganilgan, davriy Gibbs o'lchovlar to'plami bayon etilgan. Bunday o'lchovlar faqat yoki translatsion-invariant, yoki davri ikkiga teng bo'lgan davriy o'lchovlar bo'lishi isbotlangan.

Shuning uchun davriylikni umumiyroq ta'rifini keltirish va yangi Gibbs o'lchovlarini olish zarur bo'ldi. SHu boisdan U.A.Roziqov va M.M.Rahmatullayevlar tomonidan ilk bor kuchsiz davriy asosiy holat va kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi tushunchalari kiritildi hamda Keli daraxtida Izing modeli uchun ma'lum shartlar ostida kuchsiz davriy asosiy holatlar va kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari olindi.

Quyidagi ishda kuchsiz davriy asosiy holatlar va kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlarini Potts va tashqi maydonli Izing modellari uchun o'rganiladi. Yuqoridagilardan xulosa qilib aytish mumkinki, Dissertatsiya ishining mavzusi dolzarbdir.

Har bir Gibbs o'lchoviga bitta fizik sistemaning fazasi mos qo'yiladi. Agar bittadan ko'p Gibbs o'lchovi mavjud bo'lsa, u holda fazoviy o'tish bor deb ataladi. Asosiy fazoviy o'tishlar nazariyasi S.A.Pirogov va Ya.G.Sinay ishlarida mujassamlashgan. Zamonaviy Gibbs o'lchovlari nazariyasi va fazoviy o'tishlar nazariyasi quyidagi kitoblarda yoritilgan: «Baus M., Nejero C.F. Equilibrium

Statistical Physics. –Springer. 2008. 364p.», «Benik C. Ising type Antiferromagnetics. – Springer. 2003. 120p.», «Gallavotti G., Bonetto F., Gentile G. Aspects of Ergodic, Qualitative and Statistical Theory of Motion. – Springer. 2004. 435p.», «Jean Zinn-Justin. Phase Transitions and Renormalization Group. – OXFORD University press. 2007. 452p.», «Palmer J. Planar Ising Correlations. – Prog. Math. Phys. Birkhuser.2007.363p.», «Pierre Brymaud. Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues. –Springer.1999, 445p.».

Ba'zi modellar (Izing, Potts, SOS, Hard-Core, λ – model va h.k.) uchun translatsion-invariant va davriy Gibbs o'lchovlari N.N.G'anixo'jayev, U.A.Roziqov, F.Muxammedov, Dj.Libovits, Ye.Prezutti, Yu.M.Suxov va boshqalar tomonidan, Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usullaridan foydalanib o'rganilgan. Shuningdek, ba'zi bir davriy bo'lmagan Gibbs o'lchovlari sinfi ham o'rganilgan.

Keli daraxtida p –adik Gibbs o'lchovlari nazariyasi U.A.Roziqov va F.M.Muxammedovlar tomonidan rivojlantirilgan. Asosan Izing, Potts, λ – model va bu modellarning ba'zi bir umumlashmalari uchun fazoviy o'tish mavjud emasligi (p – adik Gibbs o'lchovi yagonaligi) isbotlangan. Shuningdek, parametrlarning fazoviy o'tish mavjud bo'ladigan qiymatlari ko'rsatilgan. Masalan, spin qiymatlari $\{1,2,...,q\}$ to'plamga tegishli bo'lgan p – adik Potts modeli uchun faqat va faqat q son p ga karrali bo'lganda fazoviy o'tish mavjud bo'lishi isbotlangan.

U.A.Roziqov tomonidan Keli daraxtida sanoqli davriy Gibbs o'lchovlari tushunchasi kiritilgan va bunday o'lchovlar to'plami bir jinsli bo'lmagan Izing modeli uchun ko'rsatilgan.

Modellar gamiltonianlariga bog'liq masalalarga bag'ishlangan ilmiy ishlar ko'pligiga qaramasdan, haligacha yechilmagan (ochiq) masalalar qolmoqda. Masalan, limit Gibbs o'lchovlari to'plamini to'la tasniflash masalasi hal bo'lishiga (yakunlanishiga) hali ancha bor.

Ushbu ishda o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Potts modeli uchun, tashqi maydonli va bir jinsli bo'lmagan Izing modellari uchun kuchsiz davriy

asosiy holatlar izlaniladi. Kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlarini Potts va tashqi maydonli Izing modellari uchun o'rganiladi.

Dissertatsiyaning barcha asosiy natijalari yangi. Asosiy natijalar sifatida quyidagilarni ko'rsatish mumkin:

- k – tartibli Keli daraxtida o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan uch holatli Potts modeli uchun ixtiyoriy 2 va 4 indeksli normal bo'luvchilarga nisbatan barcha kuchsiz davriy asosiy holatlar to'plami tasvirlangan.
- $k \geq 1$ tartibli Keli daraxtida $\alpha \neq 0$ tashqi magnit maydonli oddiy va o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Izing modellari uchun (kiritilgan birlik shardagi konfiguratsiya energiyasi bo'yicha) ixtiyoriy indeksli normal bo'luvchiga nisbatan barcha kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'lishi isbotlangan.
- k – tartibli Keli daraxtida oddiy va o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan bir jinsli bo'lmagan Izing modellari uchun ixtiyoriy kuchsiz davriy konfiguratsiya kuchsiz davriy asosiy holat bo'lishi isbotlangan.
- Potts modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari o'rganilgan. Jumladan, ma'lum shartlarda kritik qiymatlar topilgan, ba'zi shartlarda barcha H_A – kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari translatsion-invariant bo'lishi, barcha $G_k^{(4)}$ – kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari H_A – kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari bilan ustma-ust tushishi isbotlangan.
- Tashqi maydonli Izing modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari o'rganilgan. Jumladan, ba'zi shartlarda barcha H_A – kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari translatsion-invariant bo'lishi isbotlangan.

Ishning ba'zi natijalari “Matematik analizning dolzarb muammolari” respublika ilmiy anjumanida (Urganch, 2012, 9-10-noyabr), “Yosh matematiklarning yangi teoremlari-2013” (Namangan, 2013, 15-16-aprel) respublika ilmiy-amaliy anjumanida muhokama qilingan hamda mexanika va

matematikadan butunrossiya konferensiyasi materiallarida (Toms, 2013, 2-4-oktabr) e'lon qilingan, "XXI asr – intellektual avlod asri" shiori ostidagi ilmiy-amaliy konferensiyada (Namangan, 2014, 6-7-iyun) muhokama qilingan.

Muallif o'zining ilmiy rahbari f.-m.f.n., dotsent M.M.Raxmatullayevga masalaning qo'yilishi, doimiy e'tibori va dissertatsiya ishidagi yordami uchun chuqur minnatdorchiligini izhor etadi.

I BOB. DASTLABKI TUSHUNCHALAR

1.1. Keli daraxtining gruppali tasvirlanishi

Siklga ega bo'lmagan bog'lamli graf daraxt deyiladi. Daraxtlar sinfi graflar nazariyasida muhim ahamiyatga ega. Hozirgi paytda daraxt tipidagi graflarda statistik mexanika, ehtimollar nazariyasi, matematik tahlil va matematikaning boshqa bo'limlarini ko'plab masalalari o'rganilmoqda.

Daraxtlarning xususiy hollaridan biri Keli daraxtidir. Keli daraxtida statistik mexanika modellari masalalarini o'rganish uchun Keli daraxtining gruppali tasvirlanishidan foydalanilmoqda.

Oxirgi yillarda daraxtlarning avtomorfizmlar gruppasini o'rganishga doir juda ko'p ilmiy maqolalar vujudga kela boshladi, ayniqsa Keli daraxti $\mathfrak{T}^k$ da (Keli daraxti ba'zi bir terminalogiyada Bete panjarasi ham deyiladi). Keli daraxti $\mathfrak{T}^k$, bu $k \geq 1$ tartibli cheksiz daraxt bo'lib, ya'ni har bir uchidan roppa-rosa $k + 1$ dona qirra chiquvchi, siklsiz cheksiz grafdir.

Faraz qilaylik, $\mathfrak{T}^k = (V, L, i)$, bu yerda $V - \mathfrak{T}^k$ ni uchlar to'plami, L - uning qirralar to'plami va i - insidentlik funksiyasi, har bir $l \in L$ qirrasi uning oxirgi nuqtalari $x, y \in V$ ni mos qo'yadi.

Agar $i(l) = \{x, y\}$ bo'lsa, u holda x, y yaqin qo'shnilar deyiladi va bunda $l = \langle x, y \rangle$ ko'rinishda yozamiz.

Keli daraxtida $d(x, y)$, $x, y \in V$ masofa

$$d(x, y) = \min \{d : \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\},$$

bu yerda $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ - yaqin qo'shnilar, formula yordamida kiritiladi.

Yuqoridagi minimumni aniqlovchi $\pi = \{x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\}$ ketma-ketlik x dan y ga yo'l deyiladi.

Bizga N.N.G'anixo'jaev va Blexerlarning birgalikdagi ishlaridan va U.A.Roziqov ilmiy maqolalaridan ma'lumki, Keli daraxtini, barpo etuvchilari $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ bo'lgan ikkinchi tartibli $(k+1)$ ta siklik gruppalarni erkin ko'paytmasidan iborat bo'lgan G_k gruppaga orqali tasvirlash mumkin. Buning uchun asosiy tushuncha va tasdiqlarni beramiz.

Ta'rif 1.1.1. G gruppaga A_α qism gruppalarni erkin ko'paytmasi deyiladi, agar A_α qism gruppalar birgalikda butun G gruppani hosil qilsa, ya'ni G ning har bir g elementi A_α dan olingan chekli elementlar ko'paytmasidan iborat bo'lsa:

$$g = a_1 a_2 \dots a_n, a_i \in A_\alpha, \overline{i = 1, n} \quad (1.1.1)$$

va agar G ning har bir elementi quyidagi shartlar ostida yagona (1.1.1) ko'rinishda bo'lsa

- 1) barcha a_i elementlar birdan farqli;
- 2) (1.1.1) da A_α qism gruppadan ikkita element yonma-yon turmaydi, umuman olganda (1.1.1) ko'paytmada bitta qism gruppaga kirgan bir necha ko'paytuvchini o'z ichiga olgan bo'lsa ham.

Faraz qilaylik, G_k – barpo etuvchilari $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ bo'lgan $(k+1)$ ta ikkinchi tartibli siklik gruppalarni erkin ko'paytmasi bo'lsin.

Tasdiq 1.1.1. Keli daraxtining V uchlar to'plami bilan G_k gruppaga orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud.

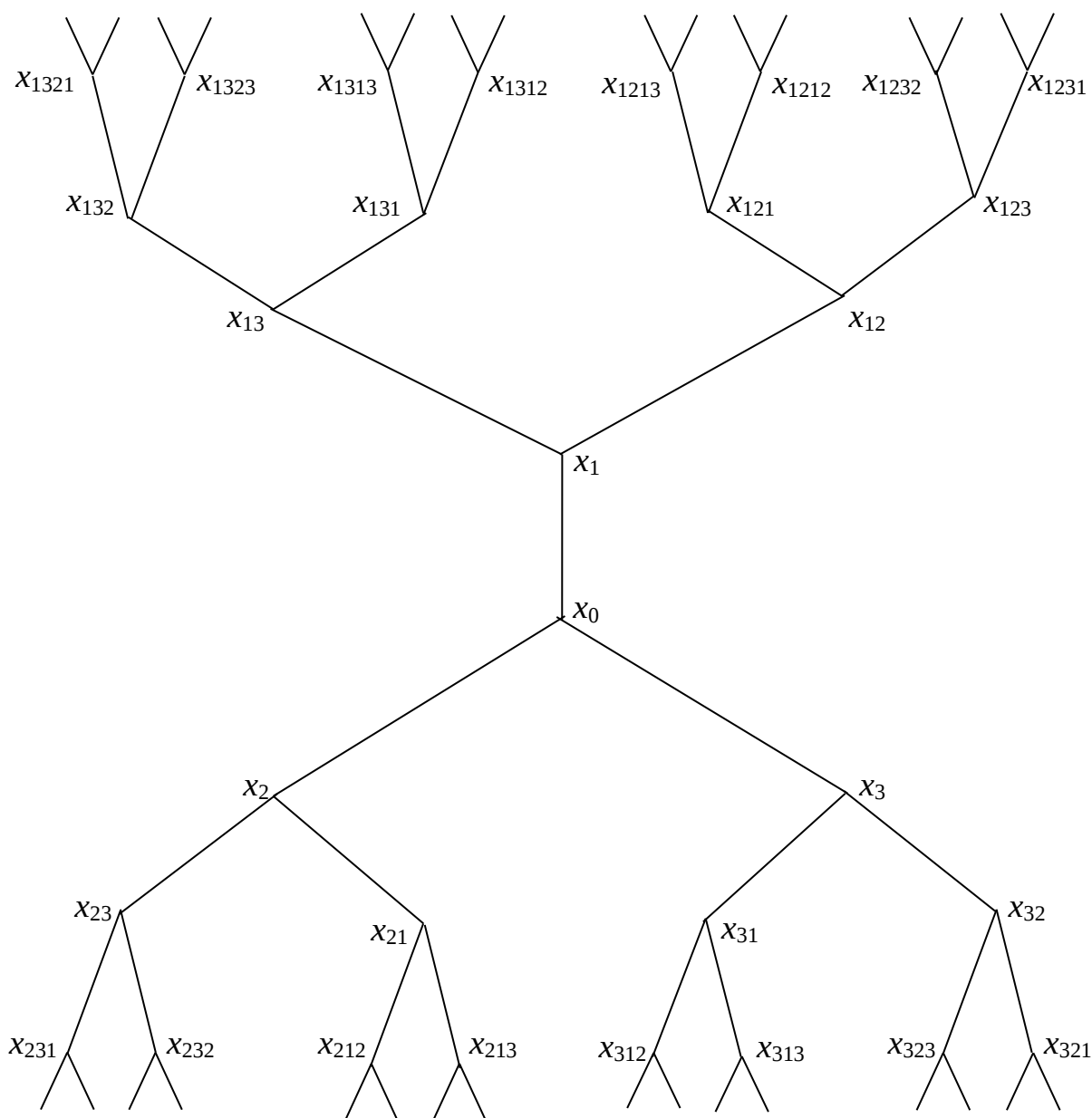
Isbot.

Bu moslik quyidagicha quriladi. Fiksrlangan ixtiyoriy $x_0 \in V$ uchga G_k gruppaning e birlik elementini mos qo'yamiz. Umumiylikka zid bo'lmagan holda, ko'rilyotgan grafni tekislikda deb qarashimiz mumkin. Keyin x_0 uchga qo'shni bo'lgan uchlarni soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalish bilan $x_i \in V$ lar bilan nomerlab chiqamiz.

Har bir $x_i \in V$ uch uchun gruppaning $a_i, i = \overline{1, k+1}$ tashkil etuvchilarini mos qo'yamiz. Endi har bir $x_i \in V$ uchlar uchun ikkilik x_{ij} nomerlashni

aniqlaymiz, bular x_i ni qo'shnilar bo'ladi. x_i ni qo'shnilaridan biri x_0 bo'lib, unga $x_{ii} = x_0$ mos qo'yamiz va u holda qolgan $x_i \in V$ qo'shnilarini nomerlash yuqoridagi nomerlash qoidasi bo'yicha bo'ladi. Har bir x_{ij} uch uchun $a_i a_j$, $i, j = \overline{1, k+1}$ so'zni mos qo'yamiz, $x_{ii} = x_0$ va $a_i^2 = e$ bo'lgani uchun, u holda bu akslantirish keyingi qadamlarda ham saqlanadi.

x_{ij} uchlarning qo'shnilarini uchun uchta nomerlashni quyidagicha kiritamiz. x_{ij} ni bitta qo'shnisi x_i bo'lgani uchun unga $x_{ijj} = x_i$ mos qo'yamiz va u holda qolgan qo'shnilarini nomerlash yuqoridagi kabi bir qiymatli aniqlanadi. Har bir x_{ijk} uch uchun $a_i a_j a_k$ so'zni mos qo'yamiz. Bu akslantirish oldingi qadam bilan mos keladi, chunki $x_{ijj} = x_i$ va $a_i a_j a_j = a_i a_j^2 = a_i$. Shunday qilib, $\mathfrak{S}^k$ Keli daraxtida uchlarning to'plami V bilan G_k gruppasi orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin. Tasdiq **isbot bo'ldi**. Uni quyidagi rasmdan ham ko'rish mumkin.



Rasm 1.1.1

Yuqoridagi ko'rinishni o'ng ko'rinish deyiladi, chunki bu holda x va y - yon qo'shnilar va ularga mos keluvchi g va l G_k - grupp elementlari yoki $g = ha_i$ yoki $h = ga_j$ ba'zi bir i, j uchun bo'lishi mumkin. Chap ko'rinishi ham xuddi yuqoridagiday aniqlanadi.

Faraz qilaylik, G_k - $\mathfrak{S}^k$, $k \geq 1$ Keli daraxtining o'ng ko'rinishi bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in G_k$ element quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \dots a_{i_n}, \text{ bu yerda } 1 \leq i_m \leq k+1, \quad m = \overline{1, n}$$

n -soni x so'zining uzunligi deyiladi va $l(x)$ ko'rinishda belgilanadi.

x so'zning qisqarmaydigan yozilishda $a_i, i = 1, 2, \dots, k+1$ harflar sonini $w_x(a_i)$ bilan belgilaymiz. Masalan, $x = a_3 a_5 a_4 a_5 a_2$, u holda

$$w_x(a_2) = w_x(a_3) = w_x(a_4) = 1, \quad w_x(a_5) = 2.$$

Ravshanki, x so'zning uzunligi $l(x) = \sum_{i=1}^{k+1} w_x(a_i)$ bo'ladi, yuqoridagi

misolda $l(x) = l(a_3 a_5 a_4 a_5 a_2) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$.

N.N.G'anixo'jayev va U.A.Roziqov ishlarida quyidagicha ta'riflar va teorema bor.

Ta'rif 1.1.2. Faraz qilaylik, $M_1, M_2, \dots, M_m$ biror bir to'plamlar va

$M_i \neq M_j, i \neq j \quad (i, j = \overline{1, m})$ bo'lsin. $\bigcap_{i=1}^m M_i$ kesishma qisqaruvchi deyiladi, agar

shunday $i_0 (1 \leq i_0 \leq m)$ mavjud bo'lib,

$$\bigcap_{i=1}^m M_i = \left(\bigcap_{i=1}^{i_0-1} M_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=i_0+1}^m M_i \right)$$

o'rinli bo'lsa.

$N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$ belgilash kiritaylik.

Teorema 1.1.1. Ixtiyoriy $\emptyset \neq A \subset N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$ uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $H_A \subset G_k$ qism gruppasi mavjud:

a) H_A – indeks 2 ga teng normal bo'luvchi;

b) ixtiyoriy $A \neq B \subset N_k$ uchun $H_A \neq H_B$;

s) $|H_A \cap H_B| = \infty$ va $H_A \cap H_B \subset H_{A \Delta B}, A, B \subset N_k$;

d) Agar $A_1, A_2, \dots, A_m \subset N_k$ va $A_i \cap A_j = \emptyset$ bo'lsin, ixtiyoriy $i \neq j, i, j = \overline{1, m}$, u holda

$$\bigcap_{i=1}^m H_{A_i} \subset H_{\bigcup_{i=1}^m A_i};$$

e) Faraz qilaylik, $A_1, A_2, \dots, A_m \subset N_k$, agar $\bigcap_{i=1}^m H_{A_i}$ - qisqarmaydigan bo'lsa, u holda u indeksi 2^m ga teng normal bo'luvchi bo'ladi;

f) Har bir $m = \overline{1, 2k}$ uchun qisqarmaydigan

$$H_m = \bigcap_{i=1}^m H_{A_i}$$

kesishma qurish mumkin.

1.2 va 1.3 qismlarni ustozim M.Raxmatullayevning nomzodlik dissertatsiyalaridan ko'rishimiz mumkin.

1.3. Kuchsiz davriy asosiy holatlar va Gibbs o'lchovlari

Faraz qilaylik, $\mathfrak{T}^k = (V, L)$, $k \geq 1$ – k -tartibli Keli daraxti bo'lsin, ya'ni har bir uchidan roppa-rosa $k + 1$ dona qirra chiquvchi siklsiz cheksiz graf va V – bu daraxtning uchlari to'plami, L esa $\mathfrak{T}^k$ daraxtning qirralari to'plami bo'lsin.

Yuqorida ko'rsatildiki, $\mathfrak{T}^k$ daraxtni G_k – $k + 1$ ta barpo etuvchilari mos ravishda $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ bo'lgan ikkinchi tartibli siklik gruppalarining erkin ko'paytmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin edi.

Quyidagicha belgilashlar qilib olamiz, ixtiyoriy fiksirlangan $x^0 \in V$ nuqta uchun

$$W_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\},$$

$$V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m,$$

$$L_n = \{ \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n \},$$

bu yerda $d(x, y)$ – $\mathfrak{T}^k$ daraxtning x va y uchlari orasidagi masofa, ya'ni x va y uchlarni tutashtiruvchi yo'ldagi (eng qisqa yo'ldagi) qirralar sonidir.

Faraz qilaylik, $\Phi = \{-1, 1\}$ va $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ – konfiguratsiya, ya'ni $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$ hamda $A \subset V$ bo'lsin. Ω_A bilan A to'plamda aniqlangan va $\Phi = \{-1, 1\}$ to'plamdan qiymat qabul qiluvchi barcha konfiguratsiyalar fazosini belgilaymiz.

Izing modeli Gamiltonianini qaraymiz, u quyidagicha bo'lishi bizga ma'lum edi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y), \quad (1.3.1)$$

bu yerda, $J \in R$, $\langle x, y \rangle$ -eng yaqin qo'shnilar.

Faraz qilaylik, $h_x \in R$, $x \in V$ bo'lsin. Har bir n uchun μ_n o'lchovni Ω_{V_n} da quyidagicha aniqlaymiz :

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x)\}, \quad (1.3.2)$$

bu yerda $\beta = \frac{1}{T}$ ($T > 0$ - temperatura), $\sigma_n = \{\sigma(x), x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$, Z_n^{-1} esa normallashtiruvchi ko'paytuvchi.

$$H(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y).$$

$\mu_n(\sigma_n)$, $n \geq 1$, o'lchov uchun muvofiqlik sharti quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (1.3.3)$$

bu yerda $\sigma^{(n)} = \{\sigma(x), x \in W_n\}$.

Faraz qilaylik, μ_n , $n \geq 1$ lar Ω_{V_n} dagi o'lchovlar ketma-ketligi bo'lsin hamda bu ketma-ketlik (1.3.3) muvofiqlik shartini bajarsin. U holda Kolmogorov teoremasiga ko'ra $\Omega_V = \Omega$ da aniqlangan limit o'lchov mavjud va u yagona bo'ladi,

(Uni limit Gibbs o'lchovi deb ataladi) bu o'lchov, har bir $n = 1, 2, \dots$ uchun quyidagi tenglikni qanoatlantiradi:

$$\mu(\sigma_n) = \mu_n(\sigma_n).$$

Gibbs o'lchovlariga oid ilmiy maqolalar va risolalardan bizga ma'lumki, (1.3.2) o'lchov (1.3.3) shartni faqat va faqatgina bajaradiki, bunda quyidagi $h = \{h_x, x \in G_k\}$ qiymatlar ushbu tenglikni bajaradi

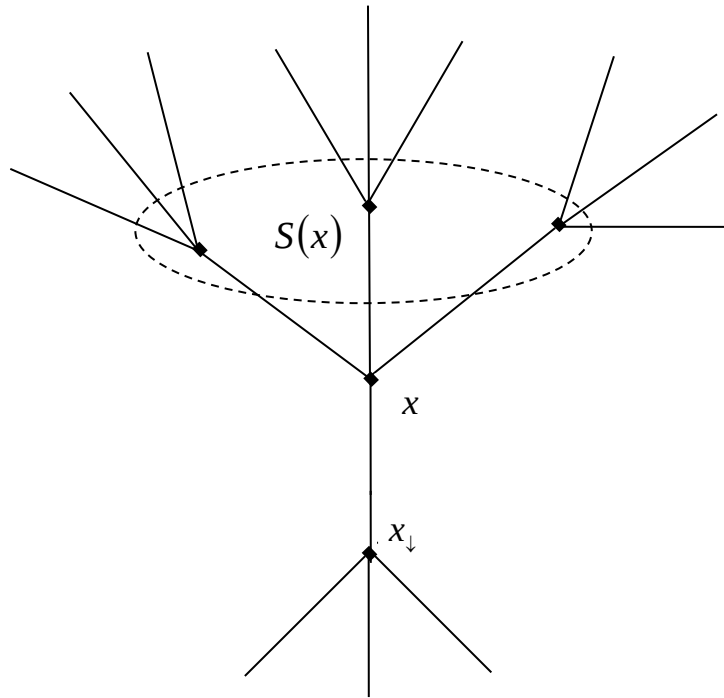
$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta), \quad (1.3.4)$$

bu yerda $S(x)$ -to'plam $x \in V$ nuqtaning «bevosita avlodlari» to'plami va $f(x, \theta) = \text{arcth}(\theta \text{th } x)$, $\theta = \text{th}(J\beta)$, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ temperatura.

Xuddi shunga o'xshash g'oyalarni boshqa modellar uchun ham keltirish mumkin.

Ta'rif 1.3.1. Ushbu miqdorlar $h = \{h_x, x \in G_k\}$ ni $\hat{G}_k$ - davriy deyiladi, agar $h_{xy} = h_x$ tenglik har bir $x \in G_k, y \in \hat{G}_k$ lar uchun bajarilsa. G_k - davriy o'lchov translatsion-invariant deyiladi.

Ixtiyoriy $x \in G_k$ uchun quyidagicha belgilash qilamiz:
 $x_{\downarrow} = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ (quyidagi rasmga qarang 1.3.1).



Rasm 1.3.1.

$G_k / \hat{G}_k = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ - faktor gruppasi bo'lsin, bu yerda $\hat{G}_k$ - indeksi $r \geq 1$ bo'lgan normal bo'luvchi.

Ta'rif 1.3.2. Ushbu miqdorlar $h = \{h_x, x \in G_k\}$ ni $\hat{G}_k$ - kuchsiz davriy deb ataymiz, agar $h_x = h_{ij}$ tenglik $x \in H_i, x_{\downarrow} \in H_j$ lar va ixtiyoriy $x \in G_k$ uchun bajarilsa.

Yuqorida kiritilgan ta'riflardan ko'rishimiz mumkinki, agar h_x miqdor $x_{\downarrow}$ nuqtaga bog'liq bo'lmasa, kuchsiz davriy miqdorlar to'plami h odatiy davriy miqdorlar to'plami bo'ladi.

Ta'rif 1.3.3. μ o'lchovni $\hat{G}_k$ - (kuchsiz) davriy deb ataymiz, agar u $\hat{G}_k$ - (kuchsiz) davriy miqdorlar to'plami h miqdorlarga mos kelsa.

I bob bo'yicha xulosa

I bobda Keli daraxtining V uchlar to'plami bilan G_κ gruppasi orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekanligi isbotlanadi va dastlabki tushunchalarni Izing modeli uchun keltiriladi.

II BOB. O'ZARO TA'SIR RADIUSI 2 GA TENG BO'LGAN POTTS MODELİ UCHUN KUCHSIZ DAVRIY ASOSIY HOLATLAR

$\mathfrak{S}^k = (V, L)$, $k \geq 1$ k -tartibli Keli daraxti bo'lsin, bunda V – $\mathfrak{S}^k$ ning uchlari to'plami, L – qirralari to'plami. Ma'lumki, $\mathfrak{S}^k$ ni G_k – $k+1$ ta ikkinchi tartibli siklik gruppalarining erkin ko'paytmasi kabi berish mumkin. Biz spin qiymatlarni $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$ to'plamdan qabul qiladigan modelni qaraymiz. U holda V da σ konfiguratsiya $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ funksiya kabi aniqlanadi. Barcha konfiguratsiyalar to'plami $\Omega = \Phi^V$ dan iborat.

$x \in G_k$ nuqtaning bevosita avlodlar to'plamini $S(x)$ orqali, barcha qo'shni nuqtalar to'plamini $S_1(x)$ orqali belgilaymiz, ya'ni $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\}$ va $x_{\downarrow} = S_1(x) \setminus S(x)$.

$G_k/G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ faktor gruppasi bo'lsin, bunda G_k^* – $r \geq 1$ indeksli normal bo'luvchi.

Ta'rif 2.1. Agar $\forall x \in G_k$ da $x_{\downarrow} \in H_i, x \in H_j$ uchun $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ bo'lsa, u holda $\sigma(x)$, $x \in V$ konfiguratsiya G_k^* – kuchsiz davriy konfiguratsiya deyiladi.

O'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Potts modeli quyidagi gamiltonian bilan aniqlanadi:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle, \\ x, y \in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x, y \in V: \\ d(x, y) = 2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (2.1)$$

bunda $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$,

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{agar } u = v, \\ 0, & \text{agar } u \neq v. \end{cases}$$

M – uchlari V da bo'lgan birlik sharlar to'plami bo'lsin. $b \in M$ shardagi konfiguratsiyani $x \in b \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ funksiya kabi aniqlaymiz va uni σ_b bilan belgilaylik. σ_b konfiguratsiya energiyasini quyidagi tarzda aniqlaymiz:

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle, \\ x, y \in b}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{\langle \langle x, y \rangle \rangle, \\ x, y \in b}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (2.2)$$

bunda $J = (J_1, J_2) \in R^2$.

Ishda $q = 3$ bo'lgan holni qaraymiz. b birlik sharning markazini c_b orqali belgilaymiz va barcha $t \in \Phi$ uchun $B_t = \{x \in S_1(c_b) : \varphi_b(x) = t\}$ to'plamni aniqlaymiz.

$\varphi_b(c_b) = d$, $|B_d| = i$, $|B_f| = n$ bo'lsin, u holda $|B_g| = k + 1 - i - n$, bunda $d \neq f$, $d \neq g$, $f \neq g$, $d, f, g \in \Phi$.

Quyidagi lemmani isbotlash qiyin emas.

Lemma 2.1. Har bir φ_b konfiguratsiya uchun quyidagiga egamiz:

$$U(\varphi_b) \in \left\{ U_{i,n} : i = 0, 1, \dots, k+1, \quad n = 0, \dots, \left\lfloor \frac{k+1-i}{2} \right\rfloor \right\},$$

bunda

$$U_{i,n} = \frac{J_1}{2} i + \frac{J_2}{2} [i(i-1) + (k-n-i)(k-n-i+1) + n(n-1)] \quad (2.3)$$

va $\left\lfloor \frac{k+1-i}{2} \right\rfloor - \frac{k+1-i}{2}$ ning butun qismi.

Ta'rif 2.2. Agar $\forall b \in M$ uchun

$$U(\varphi_b) = \min \left\{ U_{i,n} : i = 0, \dots, k+1, \quad n = 0, \dots, \left\lfloor \frac{k+1-i}{2} \right\rfloor \right\}$$

o'rinli bo'lsa, φ konfiguratsiya H gamiltonianga nisbatan asosiy holat deyiladi.

$$C_{i,n} = \{\varphi_b : U(\varphi_b) = U_{i,n}\} \text{ va}$$

$$A_{\xi,\eta} = \left\{ J \in R^2 : U_{\xi,\eta} = \min \left\{ U_{i,n} : i = 0, 1, \dots, k+1, \quad n = 0, \dots, \left\lfloor \frac{k+1-i}{2} \right\rfloor \right\} \right\} \quad (2.4)$$

belgilashlarni kiritamiz.

Ko'rish osonki, $k = 2$ bo'lgan holda ixtiyoriy σ_b uchun $U(\sigma_b) \in \{U_{0,0}, U_{0,1}, U_{1,0}, U_{1,1}, U_{2,0}, U_{3,0}\}$, bunda

$$U_{0,0} = 3J_2, U_{0,1} = J_2, U_{1,0} = \frac{1}{2}J_1 + J_2, U_{1,1} = \frac{1}{2}J_1, U_{2,0} = J_1 + J_2, U_{3,0} = \frac{3}{2}J_1 + 3J_2.$$

(2.4) yordamida quyidagilarni topamiz:

$$A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 \leq 0\}, \quad A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_2 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0\},$$

$$A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}, \quad A_{1,1} = \{J \in R^2 : J_2 \geq 0, -2J_2 \leq J_1 \leq 2J_2\},$$

$$A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_2 \geq 0, -4J_2 \leq J_1 \leq -2J_2\}, \quad A_{3,0} = \{J \in R^2 : J_1 \leq 0, J_1 + 4J_2 \leq 0\},$$

$$\text{va } R^2 = \bigcap_{i,n} A_{i,n}.$$

$k = 3$ da lemmadan foydalanib, $\forall \sigma_b$ uchun quyidagilarni hosil qilamiz:

$$U(\sigma_b) \in \{U_{0,0}, U_{0,1}, U_{0,2}, U_{1,0}, U_{1,1}, U_{2,0}, U_{2,1}, U_{3,0}, U_{4,0}\},$$

bunda

$$U_{0,0} = 6J_2, U_{0,1} = 3J_2, U_{0,2} = 2J_2, U_{1,0} = \frac{1}{2}J_1 + 3J_2, U_{1,1} = \frac{1}{2}J_1 + J_2,$$

$$U_{2,0} = J_1 + 2J_2, U_{2,1} = J_1 + J_2, U_{3,0} = \frac{3}{2}J_1 + 3J_2, U_{4,0} = 2J_1 + 6J_2.$$

(2.5)dan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$$A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 \leq 0\}, \quad A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\},$$

$$A_{0,2} = \{J \in R^2 : 0 \leq J_2 \leq \frac{J_1}{2}\}, \quad A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\},$$

$$A_{1,1} = \{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_1 - 2J_2 \leq 0\}, \quad A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$$

$$A_{2,1} = \{J \in R^2 : J_1 \leq 0, J_1 + 4J_2 \geq 0\}, \quad A_{3,0} = \{J \in R^2 : J_1 \leq 0, -\frac{J_1}{6} \leq J_2 \leq -\frac{J_1}{4}\},$$

$$A_{4,0} = \{J \in R^2 : J_1 \leq 0, J_1 + 6J_2 \leq 0\}, \quad R^2 = \bigcap_{i,n} A_{i,n}.$$

$k = 4$ bo'lganda lemmadan foydalanib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$U_{0,0} = 10J_2, \quad U_{0,1} = 6J_2, \quad U_{0,2} = 4J_2,$$

$$U_{1,0} = \frac{J_1}{2} + 6J_2, \quad U_{1,1} = \frac{J_1}{2} + 3J_2, \quad U_{1,2} = \frac{J_1}{2} + 2J_2,$$

$$U_{2,0} = J_1 + 4J_2, \quad U_{2,1} = J_1 + 2J_2, \quad U_{3,0} = \frac{3J_1}{2} + 4J_2, \quad U_{3,1} = \frac{3J_1}{2} + 3J_2,$$

$$U_{4,0} = 2J_1 + 6J_2, \quad U_{5,0} = \frac{5J_1}{2} + 10J_2.$$

(2.4) dan foydalanib,

$$A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}, \quad A_{0,2} = \{J \in R^2 : 0 \leq J_2 \leq \frac{J_1}{4}\}.$$

Demak, $k = 4$ bo'lganda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A_{0,1} \cap A_{0,2} = A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}.$$

Endi $k > 4$ holni qaraymiz.

$U_{i,n}$ larni hisoblaymiz, bunda $i = 0, 1, \dots, k+1, \quad n = 0, \dots, \left\lfloor \frac{k+1-i}{2} \right\rfloor$;

$\left\lfloor \frac{k+1-i}{2} \right\rfloor - \frac{k+1-i}{2}$ ning butun qismi

$$U_{0,0} = \frac{J_2}{2} k(k+1), \quad U_{0,1} = \frac{J_2}{2} k(k-1), \quad U_{0,2} = \frac{J_2}{2} [(k-2)(k-1) + 2], \quad U_{0,3} = \frac{J_2}{2} [(k-3)(k-2) + 6],$$

⋮

$$U_{k-1,0} = \frac{J_1}{2} (k-1) + \frac{J_2}{2} ((k-1)(k-2) + 2), \quad U_{k-1,1} = \frac{J_1}{2} (k-1) + \frac{J_2}{2} (k-1)(k-2),$$

$$U_{k,0} = \frac{J_1}{2} k + \frac{J_2}{2} k(k-1), \quad U_{k+1,0} = \frac{J_1}{2} (k+1) + \frac{J_2}{2} k(k+1).$$

(2.4) yordamida $A_{0,1}$ va $A_{0,2}$ to'plamlarni topamiz. Avval $A_{0,1}$ ni topaylik:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{0,1} \leq U_{0,0} \\ U_{0,1} \leq U_{0,2} \\ U_{0,1} \leq U_{0,3} \\ \mathbf{K} \\ U_{0,1} \leq U_{k,0} \\ U_{0,1} \leq U_{k+1,0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{J_2}{2} k(k-1) \leq \frac{J_2}{2} k(k+1) \\ \frac{J_2}{2} k(k-1) \leq \frac{J_2}{2} [(k-2)(k-1) + 2] \\ \frac{J_2}{2} k(k-1) \leq \frac{J_2}{2} [(k-3)(k-2) + 6] \\ \mathbf{K} \\ \frac{J_2}{2} k(k-1) \leq \frac{J_1}{2} k + \frac{J_2}{2} k(k-1) \\ \frac{J_2}{2} k(k-1) \leq \frac{J_1}{2} (k+1) + \frac{J_2}{2} k(k+1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} kJ_2 \geq 0 \\ (k-2)J_2 \leq 0 \\ (k-3)J_2 \leq 0 \\ \text{K} \\ \frac{J_2}{2}k(k-1) \leq \frac{J_1}{2}k + \frac{J_2}{2}k(k-1) \\ \frac{J_2}{2}k(k-1) \leq \frac{J_1}{2}(k+1) + \frac{J_2}{2}k(k+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_2 = 0 \\ \text{K} \\ \frac{J_1}{2}k \geq 0 \\ \frac{J_1}{2}(k+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_2 = 0 \\ J_1 \geq 0. \end{cases}$$

Bundan

$$A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}.$$

Endi $A_{0,2}$ ni topamiz:

$$\begin{cases} U_{0,2} \leq U_{0,0} \\ U_{0,2} \leq U_{0,1} \\ U_{0,2} \leq U_{0,3} \\ \text{K} \\ U_{0,2} \leq U_{k,0} \\ U_{0,2} \leq U_{k+1,0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{J_2}{2}[(k-2)(k-1)+2] \leq \frac{J_2}{2}k(k+1) \\ \frac{J_2}{2}[(k-2)(k-1)+2] \leq \frac{J_2}{2}k(k-1) \\ \frac{J_2}{2}[(k-2)(k-1)+2] \leq \frac{J_2}{2}[(k-3)(k-2)+6] \\ \text{K} \\ \frac{J_2}{2}[(k-2)(k-1)+2] \leq \frac{J_1}{2}k + \frac{J_2}{2}k(k-1) \\ \frac{J_2}{2}[(k-2)(k-1)+2] \leq \frac{J_1}{2}(k+1) + \frac{J_2}{2}k(k+1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (k+1)J_2 \geq 0 \\ (k-2)J_2 \geq 0 \\ (k-4)J_2 \leq 0 \\ \text{K} \\ \frac{J_2}{2}[(k-2)(k-1)+2] \leq \frac{J_1}{2}k + \frac{J_2}{2}k(k-1) \\ \frac{J_2}{2}[(k-2)(k-1)+2] \leq \frac{J_1}{2}(k+1) + \frac{J_2}{2}k(k+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_2 = 0 \\ \text{K} \\ \frac{J_1}{2}k \geq 0 \\ \frac{J_1}{2}(k+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_2 = 0 \\ J_1 \geq 0. \end{cases}$$

Bundan

$$A_{0,2} = \{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}.$$

Demak, $k > 4$ da quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A_{0,1} = A_{0,2} = \{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}.$$

$k > 3$ da xuddi shu tarzda $A_{i,0}, i = 0, 1, \dots, k, k+1$, to'plamlarni ham hisoblashimiz mumkin:

$$A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 \leq 0\},$$

$$A_{i,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}, i = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$A_{k,0} = \{J \in R^2 : J_1 \leq 0, -\frac{J_1}{2k} \leq J_2 \leq -\frac{J_1}{2(k-1)}\},$$

$$A_{k+1,0} = \{J \in R^2 : J_1 \leq 0, J_1 + 2kJ_2 \leq 0\}.$$

2.1. Normal bo'luvchi indeksi 2 ga teng bo'lgan hol

$A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$ bo'lsin. $H_A = \left\{x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{juft}\right\}$, bunda $w_j(x) = x$

so'zdagi a_j lar soni

$G_k/H_0 = \{H_0, H_1\}$ faktor gruppani qaraymiz, bunda $H_0 = H_A, H_1 = G_k \setminus H_0$.

H_A – kuchsiz davriy konfiguratsiya quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{00}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ a_{01}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \\ a_{10}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ a_{11}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (2.5)$$

bunda $a_{ij} \in \Phi, i, j \in \{0, 1\}$.

Teorema 2.1.1. $|A|=1$ bo'lsin. $k \geq 2$ da barcha H_A – kuchsiz davriy asosiy holatlar H_A – davriy yoki translatsion-invariant bo'ladi.

Isbot.

1) $\forall i, j \in \{0, 1\}$ uchun $a_{ij} = p, p \in \Phi$ bo'lgan holni qaraymiz. U holda, ravshanki, unga mos konfiguratsiya translatsion-invariant asosiy holat bo'ladi.

2) a_{ij} , bunda $i, j \in \{0, 1\}, \Phi$ to'plamdan 2 ta turli qiymatlarni qabul qiladigan holni qaraymiz.

2.1) $a_{00} = a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a)c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

$b)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a)c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, bulardan $\varphi_b \in C_{1,0}$;

$b)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, bulardan $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

$c)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$.

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{1,0} \cap A_{k-1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.2) $a_{00} = a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a)c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

$b)c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$;

$c)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{0,0}$.

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.3) $a_{00} = a_{10} = a_{11} = l, a_{01} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{k+1,0}$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{0,0}$;

$A_{k,0} \cap A_{k+1,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.4) $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = a_{11} = l$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi birlik konfiguratsiyalar sanoqlita topiladi:

$c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, $c_b \in H_0$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, bulardan $\varphi_b \in C_{1,0}$.

$A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.5) $a_{00} = a_{01} = l, a_{10} = a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi birlik konfiguratsiyalar sanoqlita topiladi:

$c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, $c_b \in H_0$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan $\varphi_b \in C_{1,0}$.

$A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.6) $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = a_{10} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$, bulardan $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{0,0}$.

$A_{k,0} \cap A_{k-1,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmisligi kelib chiqadi.

2.7) $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$. U holda mos kuchsiz davriy konfiguratsiya quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varphi(x) = \begin{cases} l, & x_{\downarrow} \in H_0 \ x \in H_0 \\ m, & x_{\downarrow} \in H_0 \ x \in H_1 \\ l, & x_{\downarrow} \in H_1 \ x \in H_0 \\ m, & x_{\downarrow} \in H_1 \ x \in H_1 \end{cases} = \begin{cases} l, & x \in H_0 \\ m, & x \in H_1. \end{cases}$$

Bundan $\varphi(x)$ kuchsiz davriy konfiguratsiyani davriy konfiguratsiya bo'lishini hosil qilamiz.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$.

$$A_{k,0} = \{J \in R^2 : J_1 \leq 0, -\frac{J_1}{2k} \leq J_2 \leq -\frac{J_1}{2(k-1)}\}.$$

Bundan $\varphi(x)$ davriy konfiguratsiya $A_{k,0}$ to'plamda asosiy holat bo'lishi kelib chiqadi, shuningdek, kuchsiz davriy asosiy holat ham bo'ladi.

3) a_{ij} , bunda $i, j \in \{0,1\}$, Φ to'plamdan 3 ta turli qiymatlarni qabul qiladigan holni qaraymiz.

3.1) $a_{00} = a_{01} = l, a_{10} = m, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda

$$l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n.$$

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$, bulardan $\varphi_b \in C_{0,1}$.

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.2) $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = m, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$, bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k$, bulardan $\varphi_b \in C_{0,1}$;

$A_{k,0} \cap A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmashligi kelib chiqadi.

3.3) $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = m, a_{10} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 1$, bulardan $\varphi_b \in C_{k-1,1}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{0,0}$.

$A_{k,0} \cap A_{k-1,1} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmashligi kelib chiqadi.

3.4) $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, $|B_n| = 0$, bulardan $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 1$, bulardan $\varphi_b \in C_{0,1}$.

$A_{k,0} \cap A_{k-1,0} \cap A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmashligi kelib chiqadi.

3.5) $a_{00} = m, a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$,
bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k-1$, $|B_n| = 1$,
bulardan $\varphi_b \in C_{k-1,1}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$,
bulardan $\varphi_b \in C_{0,1}$.

$A_{k,0} \cap A_{k-1,1} \cap A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos
kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmisligi kelib chiqadi.

3.6) $a_{00} = m, a_{01} = n, a_{10} = a_{11} = l$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k-1$, $|B_n| = 1$,
bulardan $\varphi_b \in C_{k-1,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 1$,
bulardan $\varphi_b \in C_{k,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$,
bulardan $\varphi_b \in C_{1,0}$.

$A_{k-1,1} \cap A_{k,0} \cap A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos
kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmisligi kelib chiqadi.

Teorema 2.1.1 isbotlandi.

Teorema 2.1.2. $k \geq 2$ va $|A| = k$ da quyidagilar o'rinli:

I. $A_{0,1}$ to'plamda 6 ta H_A –kuchsiz davriy asosiy holatlar mavjud va ular
quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} l, & x_{\downarrow} \in H_0 \ x \in H_0 \\ m, & x_{\downarrow} \in H_0 \ x \in H_1 \\ n, & x_{\downarrow} \in H_1 \ x \in H_0 \\ l, & x_{\downarrow} \in H_1 \ x \in H_1, \end{cases}$$

bunda $l, m, n \in \Phi$ va $l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

II. $\varphi^*(x)$ ko'rinishdagi kuchsiz davriy asosiy holatdan tashqari barcha H_A – kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'ladi.

Isboti.

I. $\varphi^*(x)$ konfiguratsiyani qaraymiz.

$s = \min\{2, k-1\}$ belgilash kiritamiz.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = n$, u holda $\varphi_b^*(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 1$,

bulardan $\varphi_b^* \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b^*(c_b) = n$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, $|B_n| = 0$,

bulardan $\varphi_b^* \in C_{0,s}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b^*(c_b) = n$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$,

bulardan $\varphi_b^* \in C_{0,1}$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b^*(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k-1$,

bulardan $\varphi_b^* \in C_{0,s}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = n$, u holda $\varphi_b^*(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k$,

bulardan $\varphi_b^* \in C_{0,1}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b^*(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = k$,

bulardan $\varphi_b^* \in C_{0,1}$.

Demak, berilgan $\varphi^*(x)$ konfiguratsiya $A_{0,1} \cap A_{0,s} = A_{0,1}$ to'plamda kuchsiz davriy asosiy holat bo'ladi.

$\varphi^*(x)$ kuchsiz davriy konfiguratsiya translatsion-invariant ham, davriy ham emas, shuning uchun bunday kuchsiz davriy asosiy holatlarni sof kuchsiz davriy asosiy holatlar deymiz.

$\varphi^*(x)$ ko'rinishdagi konfiguratsiyalar soni 6 ga teng.

II.

1) $\forall i, j \in \{0,1\}$ uchun $a_{ij} = p$, $p \in \Phi$ bo'lgan holni qaraymiz. U holda, ravshanki, unga mos konfiguratsiya translatsion-invariant asosiy holat bo'ladi.

2) a_{ij} , bunda $i, j \in \{0,1\}$, Φ to'plamdan 2 ta turli qiymatlarni qabul qiladigan holni qaraymiz.

2.1) $a_{00} = a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$.

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.2) $a_{00} = a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

$b)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$.

$A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.3) $a_{00} = a_{10} = a_{11} = l, a_{01} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, bulardan, $\varphi_b \in C_{1,0}$;

$A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.4) $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = a_{11} = l$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$.

$A_{0,0} \cap A_{k,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.5) $a_{00} = a_{01} = l, a_{10} = a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$.

$A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.6) $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = a_{10} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

Bo'lsin $c_b \in H_0$. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k+1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

$A_{0,0} \cap A_{k,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.7) $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, bulardan, $\varphi_b \in C_{1,0}$;

$A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3) a_{ij} , bunda $i, j \in \{0,1\}$, Φ to'plamdan 3 ta turli qiymatlarni qabul qiladigan holni qaraymiz.

3.1) $a_{00} = a_{01} = l, a_{10} = m, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$;

$A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.2) $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = m, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$,

bulardan, $\varphi_b \in C_{1,0}$;

$A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy

konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.3) $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = m, a_{10} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

Bu hol I bandda ko'rildi.

3.4) $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$,

bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$,

bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

$A_{0,0} \cap A_{k,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos

kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.5) $a_{00} = m, a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$,

bulardan, $\varphi_b \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$,

bulardan, $\varphi_b \in C_{0,1}$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = k-1$,

bulardan, $\varphi_b \in C_{1,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k$, bulardan, $\varphi_b \in C_{1,0}$.

$A_{0,1} \cap A_{1,1} \cap A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.6) $a_{00} = m, a_{01} = n, a_{10} = a_{11} = l$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = k - 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{1,1}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = k$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,1}$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

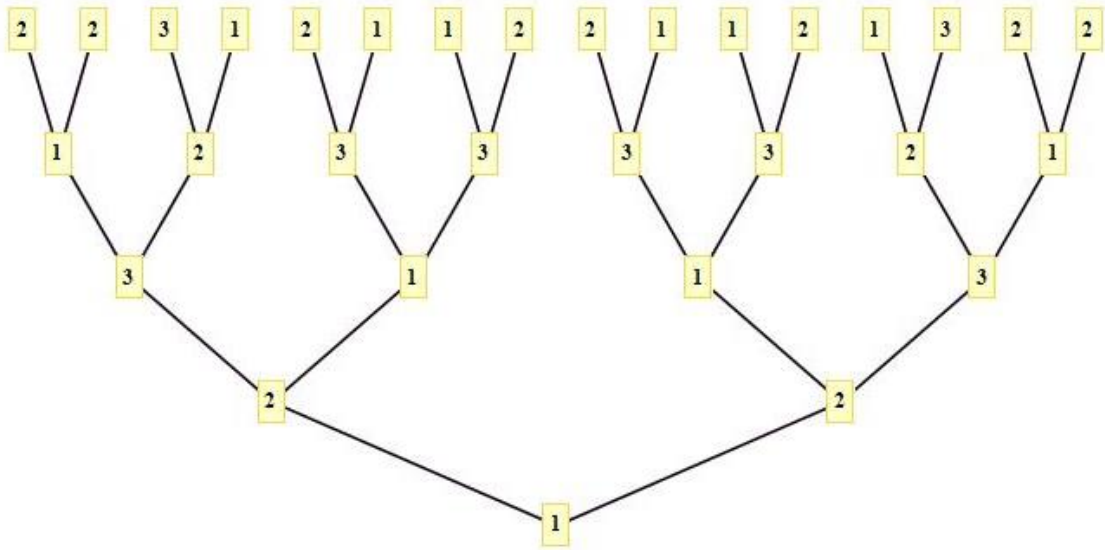
a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = n$, $|B_l| = k + 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$;

$A_{0,1} \cap A_{1,1} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

Teorema 2.1.2 isbotlandi.

Quyidagi rasmda $k = 2$ tartibli Keli daraxtida $(|A| = k)$ H_A – kuchsiz davriy

asosiy holat $\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ 2, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \\ 3, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$ ni tasvirlanishini keltiramiz:



Rasm 2.1.1

Teorema 2.1.3. $|A|=2$ bo'lsin. $k \geq 3$ da barcha H_A – kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'ladi.

Isbot.

1) $\forall i, j \in \{0,1\}$ uchun $a_{ij} = p$, $p \in \Phi$ bo'lgan holni qaraymiz. U holda, ravshanki, unga mos konfiguratsiya translatsion-invariant asosiy holat bo'ladi.

2) a_{ij} , bunda $i, j \in \{0,1\}$, Φ to'plamdan 2 ta turli qiymatlarni qabul qiladigan holni qaraymiz.

2.1) $a_{00} = a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = k-2$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k-2,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k-1,0}$.

$$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{2,0} \cap A_{k-2,0} \cap A_{k-1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}. \quad \text{Hosil}$$

qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmisligi kelib chiqadi.

2.2) $a_{00} = a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$.

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmisligi kelib chiqadi.

2.3) $a_{00} = a_{10} = a_{11} = l, a_{01} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$.

$A_{k-1,0} \cap A_{k,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmisligi kelib chiqadi.

2.4) $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = a_{11} = l$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

$A_{k-1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmisligi kelib chiqadi.

2.5) $a_{00} = a_{01} = l, a_{10} = a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$;

d) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{1,0}$.

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} \cap A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmisligi kelib chiqadi.

2.6) $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = a_{10} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{1,0}$;

$A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.7) $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$. U holda mos kuchsiz davriy konfiguratsiya quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varphi(x) = \begin{cases} l, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ m, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ l, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ m, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1 \end{cases} = \begin{cases} l, & x \in H_0 \\ m, & x \in H_1. \end{cases}$$

Bundan $\varphi(x)$ kuchsiz davriy konfiguratsiyani davriy konfiguratsiya bo'lishini hosil qilamiz. Bu holda barcha birlik shardagi konfiguratsiyalar $C_{k-1,0}$ sinf vakili bo'ladi, ya'ni $\forall \varphi_b \in C_{k-1,0}$. $A_{k-1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3) a_{ij} , bunda $i, j \in \{0,1\}$, Φ to'plamdan 3 ta turli qiymatlarni qabul qiladigan holni qaraymiz.

3.1) $a_{00} = a_{01} = l, a_{10} = m, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$;

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.2) $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = m, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a) c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$, $|B_n| = 0$,

bulardan, $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

$A_{k-1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy

konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi..

3.3) $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = m, a_{10} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a) c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$, $|B_n| = 0$,

bulardan, $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

$A_{k-1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy

konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.4) $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a) c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$,

$|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

$A_{k-1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy

konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.5) $a_{00} = m, a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a) c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$,

$|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

$A_{k-1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy

konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.6) $a_{00} = m, a_{01} = n, a_{10} = a_{11} = l$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a)c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k-1$, $|B_n| = 2$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

$A_{k-1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmisligi kelib chiqadi.

Teorema 2.1.3 isbotlandi.

Teorema 2.1.4. $k \geq 4$ va $|A| = k-1$ da barcha H_A – kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'ladi.

Isbot.

1) $\forall i, j \in \{0,1\}$ uchun $a_{ij} = p$, $p \in \Phi$ bo'lgan holni qaraymiz. U holda, ravshanki, unga mos konfiguratsiya translatsion-invariant asosiy holat bo'ladi.

2) a_{ij} , bunda $i, j \in \{0,1\}$, Φ to'plamdan 2 ta turli qiymatlarni qabul qiladigan holni qaraymiz.

2.1) $a_{00} = a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a)c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

$b)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

$c)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a)c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k-1,0}$;

$b)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{1,0}$;

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{k-1,0} \cap A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmashligi kelib chiqadi.

2.2) $a_{00} = a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$.

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmashligi kelib chiqadi.

2.3) $a_{00} = a_{10} = a_{11} = l, a_{01} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = k-2$, bulardan, $\varphi_b \in C_{3,0}$.

$A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmashligi kelib chiqadi.

2.4) $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = a_{11} = l$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a)c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$, bulardan, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

$A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmashligi kelib chiqadi.

2.5) $a_{00} = a_{01} = l, a_{10} = a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a)c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

$b)c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

$c)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$;

$d)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{1,0}$.

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} \cap A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmashligi kelib chiqadi.

2.6) $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = a_{10} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$a)c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

$A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmashligi kelib chiqadi.

2.7) $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$. U holda mos kuchsiz davriy konfiguratsiya quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varphi(x) = \begin{cases} l, & x_{\downarrow} \in H_0 \ x \in H_0 \\ m, & x_{\downarrow} \in H_0 \ x \in H_1 \\ l, & x_{\downarrow} \in H_1 \ x \in H_0 \\ m, & x_{\downarrow} \in H_1 \ x \in H_1 \end{cases} = \begin{cases} l, & x \in H_0 \\ m, & x \in H_1. \end{cases}$$

Bundan $\varphi(x)$ kuchsiz davriy konfiguratsiyani davriy konfiguratiya bo'lishini hosil qilamiz. Bu holda barcha birlik shardagi konfiguratsiyalar $C_{2,0}$ sinf vakili bo'ladi, ya'ni $\forall \varphi_b \in C_{2,0}. A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3) a_{ij} , bunda $i, j \in \{0,1\}$, Φ to'plamdan 3 ta turli qiymatlarni qabul qiladigan holni qaraymiz.

3.1) $a_{00} = a_{01} = l, a_{10} = m, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k+1,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = k$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{k,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k+1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{0,0}$;

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.2) $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = m, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, $|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

$A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi..

3.3) $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = m, a_{10} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, u holda $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k-1$, $|B_n| = 0$,

bulardan, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

$A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.4) $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$,

$|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

$A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.5) $a_{00} = m, a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = k-1$, $|B_m| = 2$,

$|B_n| = 0$, bulardan, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

$A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.6) $a_{00} = m, a_{01} = n, a_{10} = a_{11} = l$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, u holda $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 2$,

$|B_n| = k-1$, bulardan, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

$A_{2,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

Teorema 2.1.4 isbotlandi.

Teorema 2.1.5. $k \geq 5$ va $|A| = i$, $i \in \{3, 4, \dots, k-2\}$ da barcha H_A – kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'ladi.

Isbot.

1) $\forall i, j \in \{0, 1\}$ uchun $a_{ij} = p$, $p \in \Phi$ bo'lgan holni qaraymiz. U holda, ravshanki, unga mos konfiguratsiya translatsion-invariant asosiy holat bo'ladi.

2) a_{ij} , bunda $i, j \in \{0, 1\}$, Φ to'plamdan 2 ta turli qiymatlarni qabul qiladigan holni qaraymiz.

2.1) $a_{00} = a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$$\varphi_b \in C_{i,0} \vee \varphi_b \in C_{k-i,0} \vee \varphi_b \in C_{k+1-i,0}.$$

$A_{i,0} \cap A_{k-i,0} \cap A_{k+1-i,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.2) $a_{00} = a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$$\varphi_b \in C_{k+1,0} \vee \varphi_b \in C_{k,0} \vee \varphi_b \in C_{0,0}.$$

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.3) $a_{00} = a_{10} = a_{11} = l, a_{01} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$$\varphi_b \in C_{k+1,0} \vee \varphi_b \in C_{k,0} \vee \varphi_b \in C_{0,0}.$$

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.4) $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = a_{11} = l$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$$\varphi_b \in C_{k+1-i,0} \vee \varphi_b \in C_{k-i,0} \vee \varphi_b \in C_{i,0}.$$

$A_{k+1-i,0} \cap A_{k-i,0} \cap A_{i,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.5) $a_{00} = a_{01} = l, a_{10} = a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$$\varphi_b \in C_{k+1,0} \vee \varphi_b \in C_{k,0} \vee \varphi_b \in C_{0,0} \vee \varphi_b \in C_{1,0}.$$

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} \cap A_{1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.6) $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = a_{10} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$$\varphi_b \in C_{k+1-i,0} \vee \varphi_b \in C_{k-i,0} \vee \varphi_b \in C_{i,0} \vee \varphi_b \in C_{i-1,0}.$$

$A_{k+1-i,0} \cap A_{k-i,0} \cap A_{i,0} \cap A_{i-1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

2.7) $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = a_{11} = m$ bo'lsin, bunda $l, m \in \Phi, l \neq m$. U holda mos kuchsiz davriy konfiguratsiya quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varphi(x) = \begin{cases} l, & x_{\downarrow} \in H_0 \ x \in H_0 \\ m, & x_{\downarrow} \in H_0 \ x \in H_1 \\ l, & x_{\downarrow} \in H_1 \ x \in H_0 \\ m, & x_{\downarrow} \in H_1 \ x \in H_1 \end{cases} = \begin{cases} l, & x \in H_0 \\ m, & x \in H_1. \end{cases}$$

Bundan $\varphi(x)$ kuchsiz davriy konfiguratsiyani davriy konfiguratsiya bo'lishini hosil qilamiz. Bu holda barcha birlik shardagi konfiguratsiyalar $C_{k+1-i,0}$ sinf vakili bo'ladi, ya'ni $\forall \varphi_b \in C_{k+1-i,0} \cdot A_{k+1-i,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3) a_{ij} , bunda $i, j \in \{0,1\}$, Φ to'plamdan 3 ta turli qiymatlarni qabul qiladigan holni qaraymiz.

3.1) $a_{00} = a_{01} = l, a_{10} = m, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$$\varphi_b \in C_{k+1,0} \vee \varphi_b \in C_{k,0} \vee \varphi_b \in C_{0,0} \vee \varphi_b \in C_{0,1}.$$

$A_{k+1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{0,0} \cap A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.2) $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = m, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

$$\varphi_b \in C_{k+1-i,0} \vee \varphi_b \in C_{k+1,0};$$

$A_{k+1-i,0} \cap A_{k+1,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$. Hosil qilingan tenglikdan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.3) $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = m, a_{10} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin: $\varphi_b \in C_{k+1-i,0}$;

$A_{k+1-i,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.4) $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin: $\varphi_b \in C_{k+1-i,0}$;

$A_{k+1-i,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.5) $a_{00} = m, a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = n$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin: $\varphi_b \in C_{k+1-i,0}$;

$A_{k+1-i,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmasligi kelib chiqadi.

3.6) $a_{00} = m, a_{01} = n, a_{10} = a_{11} = l$ bo'lsin, bunda $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

$c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin: $\varphi_b \in C_{k+1-i,0}$;

$A_{k+1-i,0} = \{J \in R^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}$ ekanligidan mos kuchsiz davriy konfiguratsiya asosiy holat bo'lmashligi kelib chiqadi.

Teorema 2.1.5 isbotlandi.

2.2. Normal bo'luvchi indeks 4 ga teng bo'lgan hol

$$A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}, H_A = \left\{ x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{juft} \right\},$$

$G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{juft}\}$ va $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ bo'lsin, bunda $w_j(x) - x$ so'zdagi a_j lar soni. Ravshanki, $G_k^{(4)}$ gruppasi G_k da indeks 4 ga teng bo'lgan normal bo'luvchi bo'ladi.

$G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ faktor gruppani qaraymiz, bunda $H_0 = G_k^{(4)}$,

$$H_0 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{juft}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{juft} \right\},$$

$$H_1 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{juft}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{toq} \right\},$$

$$H_2 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{toq}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{juft} \right\},$$

$$H_3 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{toq}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{toq} \right\}.$$

$G_k^{(4)}$ – kuchsiz davriy konfiguratsiya quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{02}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_2 \text{ bo'lsa,} \\ a_{03}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_3 \text{ bo'lsa,} \\ a_{12}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_2 \text{ bo'lsa,} \\ a_{13}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_3 \text{ bo'lsa,} \\ a_{20}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_2, x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ a_{21}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_2, x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \\ a_{30}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_3, x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ a_{31}, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_3, x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bunda $a_{ij} \in \Phi$, $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Bundan keyin qulaylik uchun $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy konfiguratsiyani $(a_{02}, a_{03}, a_{12}, a_{13}, a_{20}, a_{21}, a_{30}, a_{31})$ ko'rinishda yozamiz.

Quyidagi teoremlar normal bo'luvchi indeksi 2 ga teng bo'lgan holdagi kabi isbotlanadi.

Teorema 2.2.1. $k \geq 2$ va $|A|=1$ bo'lsin.

I. a) $A_{0,0}$ to'plamda translatsion-invariant bo'lmagan, lekin $G_k^{(2)}$ –davriy bo'lgan 6 ta $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega: (l, l, l, l, m, m, m, m) ;

b) $A_{k,0}$ to'plamda translatsion-invariant bo'lmagan, lekin H_A –davriy bo'lgan 6 ta $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega: (l, m, l, m, l, m, l, m) ;

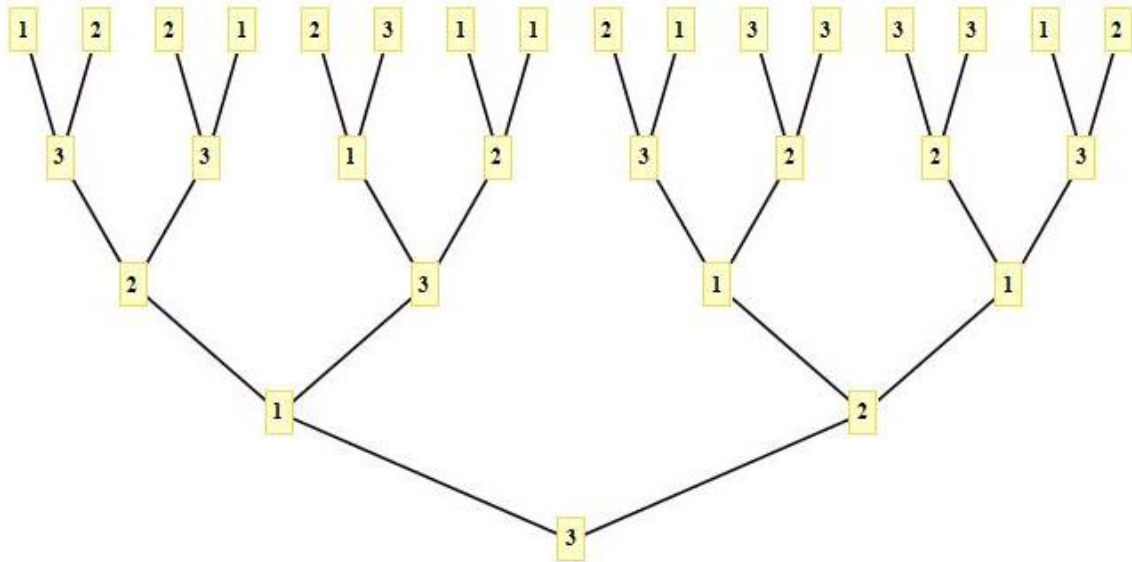
c) $A_{0,1}$ to'plamda translatsion-invariant bo'lmagan 6 ta $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega: (l, m, m, n, n, m, m, l) ;

d) $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}$ to'plamda a) va c) bandda ko'rsatilgan asosiy holatlardan tashqari translatsion-invariant bo'lmagan 150 ta $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega:

(l, l, l, l, m, m, m, n) , (l, l, l, m, n, n, n, n) , (l, l, l, l, m, m, n, m) , (l, l, m, l, n, n, n, n) ,
 (l, l, l, l, m, n, m, m) , (l, m, l, l, n, n, n, n) , (l, l, l, l, m, n, n, n) , (l, m, m, m, n, n, n, n) ,
 (l, l, l, l, m, m, n, n) , (l, m, m, l, n, m, m, n) , (l, l, m, m, n, n, n, n) , (l, l, l, l, m, n, m, n) ,
 (l, m, l, m, n, n, n, n) , (l, l, l, l, m, n, n, m) , (l, m, m, l, n, n, n, n) , (l, m, l, l, n, m, m, n) ,
 (l, l, m, l, n, m, m, n) , (l, l, l, m, m, n, n, n) , (l, l, m, l, n, n, m, n) , (l, l, m, l, m, n, n, n) ,
 (l, m, l, l, n, n, m, n) , (l, m, l, l, n, m, n, n) , (l, m, m, m, n, n, n, l) , (l, m, m, l, n, n, m, n) ,
 (l, m, m, l, n, m, n, n) , bunda $l, m, n \in \Phi$ va $l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

II. I bandda ko'rsatilgan kuchsiz davriy asosiy holatlardan tashqari barcha $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'ladi.

Quyidagi rasmda $k = 2$ tartibli Keli daraxtida ($|A|=1$) $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat $(1, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 1)$ ni tasvirlanishini keltiramiz:



Rasm 2.2.1

Teorema 2.2.2. $k \geq 2$ va $|A|=k$ bo'lsin.

I. a) $A_{0,0}$ to'plamda translatsion-invariant bo'lmagan, lekin $G_k^{(2)}$ –davriy bo'lgan 6 ta $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega: $(1, 1, 1, 1, m, m, m, m)$;

b) $A_{k,0}$ to'plamda translatsion-invariant bo'lmagan, lekin $G_k^{(4)}$ –davriy bo'lgan 6 ta $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega: $(1, m, 1, m, m, l, m, l)$;

c) $A_{0,1}$ to'plamda translatsion-invariant bo'lmagan, lekin H_A –kuchsiz davriy bo'lgan 6 ta $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega: $(1, m, n, l, l, m, n, l)$;

d) $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}$ to'plamda a) va c) bandda ko'rsatilgan asosiy holatlardan tashqari translatsion-invariant bo'lmagan 150 ta $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega:

$(l, l, l, l, m, m, m, n), (l, l, l, m, n, n, n, n), (l, l, l, l, m, m, n, m), (l, l, m, l, n, n, n, n),$
 $(l, l, l, l, m, n, m, m), (l, m, l, l, n, n, n, n), (l, l, l, l, m, n, n, n), (l, m, m, m, n, n, n, n),$
 $(l, l, l, l, m, m, n, n), (l, m, m, l, l, n, n, l), (l, l, m, m, n, n, n, n), (l, l, l, l, m, n, m, n),$
 $(l, m, l, m, n, n, n, n), (l, l, l, l, m, n, n, m), (l, m, m, l, n, n, n, n), (l, l, l, m, n, n, n, m),$
 $(l, m, m, m, l, n, n, l), (l, l, l, m, m, n, n, m), (l, l, l, m, m, n, n, n), (l, l, m, l, n, n, m, n),$
 $(l, m, l, l, n, m, n, n), (l, m, m, m, n, n, n, l), (l, m, m, m, l, n, n, n), (l, m, m, l, n, n, n, l),$
 $(l, m, m, l, l, n, n, n),$ bunda $l, m, n \in \Phi$ va $l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

II. I bandda ko'rsatilgan kuchsiz davriy asosiy holatlardan tashqari barcha $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'ladi.

Teorema 2.2.3. $k \geq 3$ va $|A| \in \{2, \dots, k-1\}$ bo'lsin.

I. a) $A_{0,0}$ to'plamda translatsion-invariant bo'lmagan, lekin $G_k^{(2)}$ –davriy bo'lgan 6 ta $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega: (l, l, l, l, m, m, m, m) ;

b) $A_{0,1}$ to'plamda translatsion-invariant bo'lmagan 108 ta $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega:

$(l, l, l, l, m, m, m, n), (l, l, l, m, n, n, n, n), (l, l, l, l, m, m, n, m), (l, l, m, l, n, n, n, n),$
 $(l, l, l, l, m, n, m, m), (l, m, l, l, n, n, n, n), (l, l, l, l, m, n, n, n), (l, m, m, m, n, n, n, n),$
 $(l, l, l, l, m, m, n, n), (l, l, m, m, n, n, n, n), (l, l, l, l, m, n, m, n), (l, m, l, m, n, n, n, n),$
 $(l, l, l, l, m, n, n, m), (l, m, m, l, n, n, n, n), (l, l, l, m, m, n, n, n), (l, l, m, l, n, n, m, n),$
 $(l, m, l, l, n, m, n, n), (l, m, m, m, n, n, n, l),$ bunda $l, m, n \in \Phi$ va $l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

II. I bandda ko'rsatilgan kuchsiz davriy asosiy holatlardan tashqari barcha $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'ladi.

Izoh. Teorema 2.2.3 ning *I.b)* bandidagi $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holatlardan 12 tasi $G_k^{(4)}$ –davriy asosiy holatdir, ya’ni (l, l, l, l, m, n, m, n) , (l, m, l, m, n, n, n, n) ko’rinishdagi asosiy holatlar $G_k^{(4)}$ – davriy asosiy holatlar bo’ladi, qolgan asosiy holatlarning barchasi $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy asosiy holatlardir.

II bob bo'yicha xulosa

II bobda Keli daraxtida o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Potts modeli uchun indeksi 2 ga va 4 ga teng bo'lgan ixtiyoriy normal bo'luvchiga nisbatan barcha kuchsiz davriy asosiy holatlar tasvirlangan.

2.1 qismda olingan 5 ta teoremani umumlashtirib quyidagi bitta teoremda ifodalashimiz mumkin:

Teorema. $k \geq 2$ va $|A| \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ bo'lsin.

I. $|A| = k$ bo'lganda $A_{0,1}$ to'plamda 6 ta H_A -kuchsiz davriy asosiy holat mavjud va ular quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} l, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ m, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \\ n, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ l, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bunda $l, m, n \in \Phi$ va $l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

II. $|A| \neq k$ bo'lganda $\varphi^*(x)$ ko'rinishdagi kuchsiz davriy asosiy holatlardan tashqari barcha H_A -kuchsiz davriy asosiy holatlar H_A -davriy yoki translatsion-invariant bo'ladi.

2.2 qismda $k \geq 2$ tartibli Keli darxtida barcha $G_k^{(4)}$ -kuchsiz davriy konfiguratsiyalar kuchsiz davriy asosiy holatga tekshirib chiqilgan va natija sifatida 3 ta teorema olingan.

III bob. IZING MODELLARI UCHUN KUCHSIZ DAVRIY ASOSIY HOLATLAR

Keli daraxtida aniqlangan spin qiymatlarni $\Phi = \{-1, +1\}$ to'plamdan qabul qiladigan Izing modellarini qaraymiz.

U holda V da σ konfiguratsiya $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ funksiya kabi aniqlanadi. Barcha konfiguratsiyalar to'plami $\Omega = \Phi^V$ dan iborat. V uchlar to'plamidan tuzilgan birlik sharlar to'plamini M bilan belgilaymiz. $b \in M$ shardagi konfiguratsiyani $x \in b \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ funksiya kabi aniqlaymiz va uni σ_b bilan belgilaylik. $b \in M$ sharining markazini c_b bilan, qolgan nuqtalari to'plamini ω_b bilan belgilaylik.

3.1. Tashqi magnit maydonli oddiy Izing modeli uchun kuchsiz davriy asosiy holatlar

Tashqi magnit maydonli oddiy Izing modeli quyidagi Gamiltonian orqali beriladi:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x),$$

bunda $J, \alpha \in \mathbb{R}$, α – tashqi magnit maydon.

$$\sigma_b \text{ konfiguratsiya energiyasini } U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J \sum_{\substack{\langle x, c_b \rangle: \\ x \in \omega_b}} \sigma(x)\sigma(c_b) + \alpha \sigma(c_b) \text{ kabi}$$

kiritib, quyidagi lemmani hosil qilamiz.

Lemma 3.1.1. *Har bir σ_b konfiguratsiya uchun quyidagiga egamiz:*

$$U(\sigma_b) \in \{U_{-(k+1)}, \dots, U_{-0}, U_{+0}, \dots, U_{+(k+1)}\},$$

$$\text{bunda } U_{\pm i} = \pm \left(\alpha + \left(i - \frac{k+1}{2} \right) J \right), i = \overline{0, k+1}.$$

Ta'rif 3.1.1. Agar $\forall b \in M$ uchun $U(\varphi_b) = \min \{U_{\pm i} : i = 0, 1, \dots, k+1\}$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda φ konfiguratsiya H gamiltonianga nisbatan asosiy holat deyiladi.

Har bir $m = -(k+1), \dots, -1, -0, +0, +1, \dots, +(k+1)$ da $U_m(\varphi_b, (J, \alpha))$ energiya eng kichik bo'ladigan to'plamni A_m orqali belgilaymiz:

$$A_m = \{(J, \alpha) : U_m(\sigma_b) \leq U_{\pm i}, i = 0, 1, \dots, k+1\}.$$

Endi ularning har birini topamiz:

$$A_{\pm(k+1)} = \{(J, \alpha) : \pm J \leq 0, \pm \alpha \leq 0\},$$

$$A_{\pm j} = \{(J, \alpha) : J = 0, \pm \alpha \leq 0\}, \text{ bunda } j = \overline{1, k},$$

$$A_{\pm 0} = \{(J, \alpha) : \pm J \geq 0, \pm \alpha \leq 0\}.$$

Yuqoridagilardan foydalanib, quyidagi teoremani isbotlash qiyin emas.

Teorema 3.1.1. $k \geq 1$ tartibli Keli daraxtida, σ_b konfiguratsiya energiyasini

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J \sum_{\substack{\langle x, c_b \rangle : \\ x \in \omega_b}} \sigma(x) \sigma(c_b) + \alpha \sigma(c_b) \text{ ko'rinishda aniqlaganimizda, } \alpha \neq 0 \text{ tashqi}$$

magnit maydonli oddiy Izing modeli uchun barcha kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'ladi.

3.2. Tashqi magnit maydonli o'zaro ta'sir radiusi 2ga teng bo'lgan

Izing modeli uchun kuchsiz davriy asosiy holatlar

Tashqi magnit maydonli o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Izing modeli quyidagi Gamiltonian orqali beriladi:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x) \sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{\langle \langle x, y \rangle \rangle : \\ x, y \in V}} \sigma(x) \sigma(y) + \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x),$$

bunda $J_1, J_2, \alpha \in R$, α – tashqi magnit maydon.

σ_b konfiguratsiya energiyasini

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in b}} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{\langle\langle x, y \rangle\rangle: \\ x, y \in b}} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha \sigma(c_b)$$

ko'rinishda aniqlab, quyidagini hosil qilamiz.

Lemma 3.2.1. *Har bir σ_b konfiguratsiya uchun quyidagiga ega bo'lamiz:*

$$U(\sigma_b) \in \{U_{-(k+1)}, \dots, U_{-0}, U_{+0}, \dots, U_{+(k+1)}\},$$

$$\text{bunda } U_{\pm i} = \left(\frac{k+1}{2} - i \right) J_1 + \left(\frac{k(k+1)}{2} + 2i(i-k-1) \right) J_2 \pm \alpha, \quad i = \overline{0, k+1}.$$

Har bir $m = -(k+1), \dots, -1, -0, +0, +1, \dots, +(k+1)$ da $U_m(\varphi_b, (J_1, J_2, \alpha))$ energiya eng kichik bo'ladigan to'plamni A_m orqali belgilaymiz:

$$A_m = \{(J, \alpha) : U_m(\sigma_b) \leq U_{\pm i}, i = \overline{0, k+1}\}.$$

A_m larning har birini ko'rinishini bilgan holda, osongina quyidagi teorema kelamiz:

Teorema 3.2.1. $k \geq 1$ tartibli Keli daraxtida $\alpha \neq 0$ tashqi magnit maydonli o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Izing modeli uchun (kiritilgan σ_b konfiguratsiya energiyasi bo'yicha) barcha kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'ladi.

Tashqi magnit maydon nolga teng bo'lgan holatda o'zaro ta'sir radiusi 2ga teng bo'lgan Izing modeli uchun [19] ishda kuchsiz davriy asosiy holatlar topilgan.

3.3. Bir jinsli bo'lmagan oddiy Izing modeli uchun kuchsiz davriy asosiy holatlar

Bir jinsli bo'lmagan oddiy Izing modeli gamiltoniani quyidagi ko'rinishga ega:

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in V}} J_{xy} \sigma(x) \sigma(y),$$

bunda $J_{xy} \in R$.

J_{xy} ning qiymatini quyidagicha olaylik:

$$J_{xy} = \begin{cases} J_1, & \text{agar } \sigma(x) = \sigma(y) \text{ bo'lsa,} \\ J_2 (J_2 \neq J_1), & \text{agar } \sigma(x) \neq \sigma(y) \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

σ_b konfiguratsiya energiyasini quyidagicha aniqlaylik:

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in b, \\ \sigma(x) = \sigma(y)}} \sigma(x) \sigma(y) + \frac{1}{2} J_2 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in b, \\ \sigma(x) \neq \sigma(y)}} \sigma(x) \sigma(y),$$

$$J = (J_1, J_2) \in R^2.$$

Quyidagini isbotlash qiyin emas.

Lemma 3.3.1. *Har bir σ_b konfiguratsiya uchun quyidagiga egamiz:*

$$U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, \dots, U_{k+2}\},$$

$$\text{bunda } U_{i+1} = \frac{k+1-i}{2} J_1 - \frac{i}{2} J_2, \quad i = \overline{0, k+1}.$$

Ta'rif 3.3.1. *Agar $\forall b \in M$ uchun $U(\varphi_b) = \min \{U_1, U_2, \dots, U_{k+2}\}$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda φ konfiguratsiya H gamiltonianga nisbatan asosiy holat deyiladi.*

Har bir $m = 1, 2, \dots, k+2$ da $U_m(\varphi_b, J)$ energiya eng kichik bo'ladigan to'plamni A_m orqali belgilaymiz, ya'ni

$$A_m = \{J \in R^2 : U_m(J) = \min \{U_1(J), U_2(J), \dots, U_{k+2}(J)\}\}.$$

Endi ularning har birini topamiz:

$$A_1 = \{J \in R^2 : J_1 + J_2 \leq 0\},$$

$$A_i = \{J \in R^2 : J_1 + J_2 = 0\}, \quad i = \overline{2, k+1},$$

$$A_{k+2} = \{J \in R^2 : J_1 + J_2 \geq 0\} \text{ va } \bigcap_{m=1}^{k+2} A_m = R^2.$$

$\bigcap_{m=1}^{k+2} A_m = \{J \in R^2 : J_1 + J_2 = 0\}$. Bundan quyidagi teorema ega bo'lamiz.

Teorema 3.3.1. *k – tartibli Keli daraxtida bir jinsli bo'lmagan Izing modeli uchun ixtiyoriy kuchsiz davriy konfiguratsiya $\{J \in R^2 : J_1 + J_2 = 0\}$ to'plamda kuchsiz davriy asosiy holat bo'ladi.*

Isbot. Keli daraxti ustida ham translatsion-invariant, ham davriy bo'lmagan ixtiyoriy kuchsiz davriy konfiguratsiyani qarasak, shunday $b^* \in M$ shar topiladiki, $U(b^*) \neq U_1$, $U(b^*) \neq U_{k+2}$. Bundan ixtiyoriy kuchsiz davriy konfiguratsiya $\{J \in R^2 : J_1 + J_2 = 0\}$ to'plamda kuchsiz davriy asosiy holat bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

Ko'rish osonki, $\{J \in R^2 : J_1 + J_2 = 0\}$ to'plamda faqatgina kuchsiz davriy konfiguratsiya emas, balki ixtiyoriy konfiguratsiya asosiy holat bo'ladi.

3.4. Bir jinsli bo'lmagan o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Izing modeli uchun kuchsiz davriy asosiy holatlar

O'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan bir jinsli bo'lmagan Izing modeli gamiltoniani quyidagicha beriladi:

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in V}} J_{xy}^1 \sigma(x) \sigma(y) + \sum_{\substack{\langle\langle x, y \rangle\rangle: \\ x, y \in V}} J_{xy}^2 \sigma(x) \sigma(y),$$

bunda $J_{xy}^1, J_{xy}^2 \in R$.

J_{xy}^1 va J_{xy}^2 larning qiymatlarini quyidagicha aniqlaylik:

$$J_{xy}^1 = \begin{cases} J_1, & \text{agar } \sigma(x) = \sigma(y) \text{ bo'lsa,} \\ J_2 (J_2 \neq J_1), & \text{agar } \sigma(x) \neq \sigma(y) \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

$$J_{xy}^2 = \begin{cases} J_3, & \text{agar } \sigma(x) = \sigma(y) \text{ bo'lsa,} \\ J_4 (J_4 \neq J_3), & \text{agar } \sigma(x) \neq \sigma(y) \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

σ_b konfiguratsiya energiyasini quyidagicha aniqlaylik:

$$\begin{aligned}
U(\sigma_b) = & \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in b, \\ \sigma(x) = \sigma(y)}} \sigma(x) \sigma(y) + \frac{1}{2} J_2 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in b, \\ \sigma(x) \neq \sigma(y)}} \sigma(x) \sigma(y) + \\
& + J_3 \sum_{\substack{\langle \langle x, y \rangle \rangle: \\ x, y \in b, \\ \sigma(x) = \sigma(y)}} \sigma(x) \sigma(y) + J_4 \sum_{\substack{\langle \langle x, y \rangle \rangle: \\ x, y \in b, \\ \sigma(x) \neq \sigma(y)}} \sigma(x) \sigma(y)
\end{aligned}$$

bunda $J = (J_1, J_2, J_3, J_4) \in R^4$.

Quyidagini isbotlash qiyin emas.

Lemma 3.4.1. *Har bir σ_b konfiguratsiya uchun quyidagiga egamiz:*

$$U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, \dots, U_{k+2}\},$$

bunda

$$U_{i+1} = \frac{k+1-i}{2} J_1 - \frac{i}{2} J_2 + \left(\frac{k(k+1)}{2} - i(k+1-i) \right) J_3 - i(k+1-i) J_4, \quad i = \overline{0, k+1}.$$

Ta'rif 3.4.1. *Agar $\forall b \in M$ uchun $U(\varphi_b) = \min \{U_1, U_2, \dots, U_{k+2}\}$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda φ konfiguratsiya H gamiltonianga nisbatan asosiy holat deyiladi.*

Har bir $m = 1, 2, \dots, k+2$ da $U_m(\varphi_b, J)$ energiya eng kichik bo'ladigan to'plamni A_m orqali belgilaymiz:

$$A_m = \{J \in R^4 : U_m(J) = \min \{U_1(J), U_2(J), \dots, U_{k+2}(J)\}\}.$$

Endi ularning har birini topamiz:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{J \in R^4 : J_1 + J_2 \leq 0, J_1 + J_2 + 2k(J_3 + J_4) \leq 0\}, \\
A_i &= \{J \in R^4 : J_3 + J_4 \geq 0, 2(2i - k - 4)(J_3 + J_4) \leq J_1 + J_2 \leq 2(2i - k - 2)(J_3 + J_4)\}, \\
& \quad i = \overline{2, k+1},
\end{aligned}$$

$$A_{k+2} = \{J \in R^4 : J_1 + J_2 \geq 0, J_1 + J_2 - 2k(J_3 + J_4) \geq 0\} \quad \text{va} \quad \bigcap_{m=1}^{k+2} A_m = R^4.$$

$\bigcap_{m=1}^{k+2} A_m = \{J \in R^4 : J_1 + J_2 = 0, J_3 + J_4 = 0\}$ Bundan quyidagi teorema ega

bo'lamiz.

Teorema 3.4.1. *k – tartibli Keli daraxtida o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan bir jinsli bo'lmagan Izing modeli uchun ixtiyoriy kuchsiz davriy konfiguratsiya $\{J \in R^4 : J_1 + J_2 = 0, J_3 + J_4 = 0\}$ to'plamda kuchsiz davriy asosiy holat bo'ladi.*

Isbot. Keli daraxti ustida ham translatsion-invariant, ham davriy bo'lmagan ixtiyoriy kuchsiz davriy konfiguratsiyani qarasak, shunday $b^* \in M$ shar topiladiki, $U(b^*) \neq U_1, U(b^*) \neq U_{k+2}$. Bundan ixtiyoriy kuchsiz davriy konfiguratsiya $\{J \in R^4 : J_1 + J_2 = 0, J_3 + J_4 = 0\}$ to'plamda kuchsiz davriy asosiy holat bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

Ko'rish osonki, $\{J \in R^4 : J_1 + J_2 = 0, J_3 + J_4 = 0\}$ to'plamda faqatgina kuchsiz davriy konfiguratsiya emas, balki ixtiyoriy konfiguratsiya asosiy holat bo'ladi.

III bob bo'yicha xulosa

III bobda Keli daraxtida tashqi magnit maydonli va bir jinsli bo'lmagan Izing modellari qaraladi.

3.1 qismda α tashqi magnit maydonli oddiy Izing modeli uchun birlik shardagi konfiguratsiya energiyasi ko'rinishi kiritilgan va shu kiritilgan energiya bo'yicha $\alpha \neq 0$ tashqi magnit maydonli oddiy Izing modeli uchun barcha kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'lishi isbotlangan.

3.2 qismda α tashqi magnit maydonli o'zaro ta'sir radiusi 2ga teng bo'lgan Izing modeli uchun birlik shardagi konfiguratsiya energiyasi ko'rinishi kiritilgan va shu kiritilgan energiya bo'yicha $\alpha \neq 0$ tashqi magnit maydonli o'zaro ta'sir radiusi 2ga teng bo'lgan Izing modeli uchun barcha kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'lishi isbotlangan.

3.3 qismda bir jinsli bo'lmagan oddiy Izing modeli uchun barcha kuchsiz davriy konfiguratsiyalar $\{J \in R^2 : J_1 + J_2 = 0\}$ to'plamda asosiy holat bo'lishi isbotlangan.

3.4 qismda bir jinsli bo'lmagan o'zaro ta'sir radiusi 2ga teng bo'lgan Izing modeli uchun barcha kuchsiz davriy konfiguratsiyalar $\{J \in R^4 : J_1 + J_2 = 0, J_3 + J_4 = 0\}$ to'plamda asosiy holat bo'lishi isbotlangan.

IV BOB. KUCHSIZ DAVRIY GIBBS O'LCHOVLARI

4.1. Potts modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari

Biz spin qiymatlarni $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$ to'plamdan qabul qiladigan modelni qaraymiz. U holda V da σ konfiguratsiya $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ funksiya kabi aniqlanadi. Barcha konfiguratsiyalar to'plami $\Omega = \Phi^V$ dan iborat.

Potts modelining gamiltoniani quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \quad (4.1.1)$$

bunda $J \in \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle$ – yaqin qo'shnilar va δ_{ij} – Kroneker simvoli, ya'ni

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } i = j \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

V_n hajmdagi ehtimollik o'lchovini

$$\mu_n(\sigma_n) = \frac{e^{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x}}}{Z_n} \quad (4.1.2)$$

kabi aniqlaymiz, bunda $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ – temperatura, $\frac{1}{Z_n}$ – normalovchi

ko'paytuvchi, $\{h_x = (h_{1,x}, \dots, h_{q,x}) \in \mathbb{R}^q, x \in V\}$ – vektorlar to'plami va

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

Agar barcha $n \geq 1$ lar va $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$ uchun

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \cup \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}) \quad (4.1.3)$$

tenglik bajarilsa, (4.1.2) ehtimollik taqsimoti muvofiqlashgan deyiladi. Bu holda barcha n va $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$ uchun Φ^V da $\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n)$ bo'ladigan yagona μ o'lchov mavjud.

Quyidagi teorema h_x ga, $\mu_n(\sigma_n)$ ni muvofiqlashgan bo'lishini ta'minlovchi, shartni tasvirlaydi.

Teorema 4.1.1. [22] Agar ixtiyoriy $x \in V$ uchun quyidagi

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta) \quad (4.1.4)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, faqat va faqat shu holda, (4.1.2)da $\mu_n(\sigma_n), n=1,2,\dots$

ehtimollik taqsimoti muvofiqlashgan bo'ladi, bunda

$F: h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \rightarrow F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in R^{q-1}$ quyidagicha aniqlanadi:

$$F_i = \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right)$$

va $\theta = e^{J\beta}$, $S(x)$ – x nuqtaning bevosita avlodlari to'plami.

$G_k / G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ faktor grupp bo'lsin, bunda $G_k^* - r \geq 1$ indeksli normal bo'luvchi.

Ta'rif 4.1.1. Agar $\forall x \in G_k, y \in G_k^*$ lar uchun $h_{yx} = h_x$ o'rinli bo'lsa, $h = \{h_x, x \in G_k\}$ vektorlar to'plami G_k^* – davriy deyiladi. G_k – davriy to'plam translatsion-invariant deyiladi.

Ta'rif 4.1.2. Agar $\forall x \in G_k$ uchun $x_{\downarrow} \in H_i, x \in H_j$ bo'lganda $h_x = h_{ij}$ o'rinli bo'lsa, $h = \{h_x, x \in G_k\}$ vektorlar to'plami G_k^* – kuchsiz davriy deyiladi.

Ta'rif 4.1.3. Agar μ o'lchov G_k^* – davriy (kuchsiz davriy) h vektorlar to'plamiga mos kelsa, uni G_k^* – davriy (kuchsiz davriy) deyiladi.

$$A \subset \{1, 2, \dots, k+1\} \text{ bo'lsin. } H_A = \left\{ x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{juft} \right\} \text{ grupp } G_k \text{ da}$$

indeksi 2 ga teng bo'lgan normal bo'luvchi bo'ladi. $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{juft}\}$ va

$G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ bo'lsin, bunda $w_j(x)$ – x so'zdagi a_j lar soni. Ravshanki, $G_k^{(4)}$ grupp G_k da indeksi 4 ga teng bo'lgan normal bo'luvchi bo'ladi.

Indeks 2 ga teng bo'lgan hol. $G_k / H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ faktor gruppani qaraymiz. Qulaylik uchun $H_A = H_0$, $G_k \setminus H_A = H_1$ belgilab olamiz. H_A –kuchsiz davriy $h = \{h_x \in R^{q-1} : x \in G_k\}$ vektorlar to'plami quyidagi ko'rinishga ega:

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, \ x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ h_2, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, \ x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \\ h_3, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, \ x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ h_4, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, \ x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

bu yerda $h_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{i,q-1})$, $i = 1, 2, 3, 4$. (4.1.4) muvofiqlashish shartiga asosan:

$$\begin{cases} h_1 = (k - |A|)F(h_1, \theta) + |A|F(h_2, \theta), \\ h_2 = (|A| - 1)F(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_4, \theta), \\ h_3 = (|A| - 1)F(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_1, \theta), \\ h_4 = (k - |A|)F(h_4, \theta) + |A|F(h_3, \theta). \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Belgilash kiritamiz: $e^{h_{ij}} = z_{ij}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \dots, q - 1$, U holda (4.1.6)

sistemani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\left\{ \begin{aligned} z_{1j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|}, \\ z_{2j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z_{3j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z_{4j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|}, \end{aligned} \right. \quad (4.1.7)$$

bunda $j = 1, 2, \dots, q-1$.

Quyidagicha aniqlangan $W : R^{4q-4} \rightarrow R^{4q-4}$ akslantirishni qaraymiz:

$$\left\{ \begin{aligned} z'_{1j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|}, \\ z'_{2j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z'_{3j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z'_{4j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|}, \end{aligned} \right. \quad (4.1.8)$$

bunda $j = 1, 2, \dots, q-1$.

(4.1.7) sistema $z = W(z)$ tenglamalar sistemasiga teng kuchli.

Lemma 4.1.1. W akslantirish quyidagi invariant to'plamlarga ega:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{z \in R^{4q-4} : z_{11} = \dots = z_{1q-1} = z_{21} = \dots = z_{2q-1} = z_{31} = \dots = z_{3q-1} = z_{41} = \dots = z_{4q-1}\}, \\ I_2 &= \{z \in R^{4q-4} : z_{11} = \dots = z_{1q-1} = z_{41} = \dots = z_{4q-1}, \quad z_{21} = \dots = z_{2q-1} = z_{31} = \dots = z_{3q-1}\}, \\ I_3 &= \{z \in R^{4q-4} : z_{1j} = z_{2j} = z_{3j} = z_{4j}, \quad j = 1, 2, \dots, q-1\}, \\ I_4 &= \{z \in R^{4q-4} : z_{1j} = z_{4j}, \quad z_{2j} = z_{3j}, \quad j = 1, 2, \dots, q-1\}. \end{aligned}$$

Isbot. W akslantirish uchun I_4 to'plamni invariant ekanligini isbotlaymiz.

I_1, I_2, I_3 to'plamlarning ham invariantligi shundan kelib chiqadi.

$$\forall z^* = (z_{11}, \dots, z_{1q-1}, z_{21}, \dots, z_{2q-1}, z_{31}, \dots, z_{3q-1}, z_{41}, \dots, z_{4q-1}) \in I_4 \text{ uchun}$$

$$\left\{ \begin{aligned} z'_{1j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j}^* + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i}^* + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i}^* + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j}^* + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i}^* + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i}^* + \theta} \right)^{|A|}, \\ z'_{2j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j}^* + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i}^* + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i}^* + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j}^* + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i}^* + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i}^* + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z'_{3j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j}^* + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i}^* + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i}^* + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j}^* + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i}^* + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i}^* + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z'_{4j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j}^* + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i}^* + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i}^* + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j}^* + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i}^* + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i}^* + \theta} \right)^{|A|}, \end{aligned} \right.$$

$$j = 1, 2, \dots, q-1,$$

$$\text{ya'ni } z'_{1j} = z'_{4j}, \quad z'_{2j} = z'_{3j}, \quad j = 1, 2, \dots, q-1, \Rightarrow z' = W(z^*) \in I_4.$$

Lemma 4.1.1 isbotlandi.

Quyidagi teoremani isbotlash qiyin emas.

Teorema 4.1.2. 1) I_1, I_2, I_3 to'plamlarda barcha H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari translatsion-invariant bo'ladi;

2) $k=2$, $|A|=1,2$ da shunday $\theta_{kr}=1+2\sqrt{q-1}$ kritik qiymat mavjudki, $\theta < \theta_{kr}$ bo'lganda kamida 1 ta H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi, $\theta = \theta_{kr}$ bo'lganda kamida 2 ta H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi, $\theta > \theta_{kr}$ bo'lganda kamida 3 ta H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi mavjud;

3) $k=3$, $q=3$, $|A|=1,2,3$ da shunday $\theta_{kr}=-2+\sqrt{9+6\sqrt{3}}$ kritik qiymat mavjudki, $\theta < \theta_{kr}$ bo'lganda kamida 1 ta H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi, $\theta = \theta_{kr}$ bo'lganda kamida 2 ta H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi, $\theta > \theta_{kr}$ bo'lganda kamida 3 ta H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi mavjud;

(4.1.7) sistemani I_3 to'plamda qarasak, u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$z_{1j} = \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^k, \quad j=1,2,\dots,q-1.$$

$$\sqrt[k]{z_{1j}} = \frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta}, \quad j=1,2,\dots,q-1.$$

$$\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} (\sqrt[k]{z_{1j}} - 1) + \theta \sqrt[k]{z_{1j}} = (\theta-1)z_{1j} + 1, \quad j=1,2,\dots,q-1.$$

$$\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} (\sqrt[k]{z_{1j}} - 1) - \theta z_{1j} + \theta \sqrt[k]{z_{1j}} = z_{1j} - 1 = 0, \quad j=1,2,\dots,q-1.$$

$$\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} (\sqrt[k]{z_{1j}} - 1) - \theta \sqrt[k]{z_{1j}} (\sqrt[k]{z_{1j}^{k-1}} - 1) + (\sqrt[k]{z_{1j}} - 1) = 0, \quad j=1,2,\dots,q-1.$$

$k=2$ bo'lsin. U holda oxirgi tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} (\sqrt{z_{1j}} - 1) - \theta \sqrt{z_{1j}} (\sqrt{z_{1j}} - 1) + (\sqrt{z_{1j}} - 1) = 0, \quad j=1,2,\dots,q-1.$$

$$(\sqrt{z_{1j}} - 1) \cdot \left(\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} - \theta \sqrt{z_{1j}} + 1 \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q-1.$$

Shunday qilib, $z_{1j} = 1 \quad \forall \quad z_{1j} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\theta} \right)^2 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q-1$ ga ega bo'lamiz.

Bundan Keli daraxtida Potts modeli uchun barcha translatsion-invariant Gibbs o'lchovlarining sonini aniqlashimiz mumkinligi kelib chiqadi.

Indeks 4 ga teng bo'lgan hol. $G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ faktor gruppani qaraymiz, bunda $H_0 = G_k^{(4)}$,

$$H_0 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{juft}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{juft} \right\},$$

$$H_1 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{juft}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{toq} \right\},$$

$$H_2 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{toq}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{juft} \right\},$$

$$H_3 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{toq}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{toq} \right\}.$$

$G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy $h = \{h_x \in R^{q-1} : x \in G_k\}$ vektorlar to'plami quyidagi ko'rinishga ega:

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_2 \text{ bo'lsa,} \\ h_2, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_3 \text{ bo'lsa,} \\ h_3, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_2 \text{ bo'lsa,} \\ h_4, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_3 \text{ bo'lsa,} \\ h_5, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_2, x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ h_6, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_2, x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \\ h_7, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_3, x \in H_0 \text{ bo'lsa,} \\ h_8, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_3, x \in H_1 \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (4.1.9)$$

bunda $h_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{iq-1})$, $i = 1, 2, \dots, 8$.

Muvofiqlashish shartiga asosan quyidagiga egamiz:

$$\begin{cases} h_1 = (k - |A|)F(h_5, \theta) + |A|F(h_6, \theta), \\ h_2 = (|A| - 1)F(h_7, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_8, \theta), \\ h_3 = (|A| - 1)F(h_6, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_5, \theta), \\ h_4 = (k - |A|)F(h_8, \theta) + |A|F(h_7, \theta), \\ h_5 = (k - |A|)F(h_1, \theta) + |A|F(h_2, \theta), \\ h_6 = (|A| - 1)F(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_4, \theta), \\ h_7 = (|A| - 1)F(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_1, \theta), \\ h_8 = (k - |A|)F(h_4, \theta) + |A|F(h_3, \theta). \end{cases} \quad (4.1.10)$$

$e^{h_i} = z_i$, $e^{h_{ij}} = z_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, 8$, $j = 1, 2, \dots, q - 1$, kabi belgilash kiritsak, tenglamalar

sistemi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\left\{ \begin{array}{l}
z_{1j} = \left(\frac{(\theta - 1)z_{5j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{5i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{5i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{6j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{6i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{6i} + \theta} \right)^{|A|}, \\
z_{2j} = \left(\frac{(\theta - 1)z_{7j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{7i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{7i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{8j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{8i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{8i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\
z_{3j} = \left(\frac{(\theta - 1)z_{6j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{6i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{6i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{5j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{5i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{5i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\
z_{4j} = \left(\frac{(\theta - 1)z_{8j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{8i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{8i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{7j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{7i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{7i} + \theta} \right)^{|A|}, \\
z_{5j} = \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|}, \\
z_{6j} = \left(\frac{(\theta - 1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\
z_{7j} = \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\
z_{8j} = \left(\frac{(\theta - 1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta - 1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|},
\end{array} \right.$$

$$j = 1, 2, \dots, q-1.$$

$$(4.1.11)$$

Quyidagicha aniqlangan $W: R^{8q-8} \rightarrow R^{8q-8}$ akslantirishni qaraymiz:

$$\left\{ \begin{aligned}
z'_{1j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{5j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{5i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{5i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{6j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{6i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{6i} + \theta} \right)^{|A|}, \\
z'_{2j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{7j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{7i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{7i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{8j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{8i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{8i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\
z'_{3j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{6j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{6i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{6i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{5j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{5i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{5i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\
z'_{4j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{8j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{8i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{8i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{7j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{7i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{7i} + \theta} \right)^{|A|}, \\
z'_{5j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|}, \\
z'_{6j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\
z'_{7j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|-1} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\
z'_{8j} &= \left(\frac{(\theta-1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k-|A|} \cdot \left(\frac{(\theta-1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|},
\end{aligned} \right.$$

$$j = 1, 2, \dots, q-1. \quad (4.1.12)$$

(4.1.11) sistema $z = W(z)$ tenglamalar sistemasiga teng kuchli.

Quyidagi lemmani ham lemma 4.1.1 singari osongina isbotlashimiz mumkin.

Lemma 4.1.2. W akslantirish quyidagi invariant to'plamlarga ega:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{z \in R^{8q-8} : z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = z_7 = z_8\}, \\ I_2 &= \{z \in R^{8q-8} : z_1 = z_4 = z_5 = z_8, z_2 = z_3 = z_6 = z_7\}, \\ I_3 &= \{z \in R^{8q-8} : z_1 = z_4, z_2 = z_3, z_5 = z_8, z_6 = z_7\}, \\ I_4 &= \{z \in R^{8q-8} : z_1 = z_5, z_2 = z_6, z_3 = z_7, z_4 = z_8\}, \\ I_5 &= \{z \in R^{8q-8} : z_1 = z_8, z_2 = z_7, z_3 = z_6, z_4 = z_5\}, \end{aligned}$$

Quyidagi teoremani isbotlash qiyin emas.

Teorema 4.1.3. I_1, I_2, I_5 to'plamlarda barcha $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari bilan ustma-ust tushadi.

4.2. Tashqi maydonli Izing modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari

Biz spin qiymatlarni $\Phi = \{-1, 1\}$ to'plamdan qabul qiladigan modelni qaraymiz. U holda V da σ konfiguratsiya $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ funksiya kabi aniqlanadi. Barcha konfiguratsiyalar to'plami $\Omega = \Phi^V$ dan iborat.

Tashqi maydonli Izing modelining gamiltoniani quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) - \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad (4.2.1)$$

bu yerda $J, \alpha \in R$, α – tashqi maydon, $\langle x, y \rangle$ – yaqin qo'shnilar.

Ma'lumki [20], tashqi maydonli Izing modeli uchun har bir limit Gibbs o'lchoviga

$$h_x = \alpha\beta + \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta)$$

shartni qanoatlantiruvchi $h = \{h_x \in R : x \in G_k\}$ qiymatlar to'plamini mos qo'yish

mumkin, bunda $\theta = th(J\beta)$, $f(h, \theta) = \text{arcth}(\theta th h)$, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ – temperatura.

$$A \subset \{1, 2, \dots, k+1\} \text{ bo'lsin. } H_A = \left\{ x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{juft} \right\} \text{ gruppaga } G_k \text{ da}$$

normal bo'luvchi bo'ladi, bunda $w_j(x) - x$ so'zdagi a_j lar soni.

$G_k / H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ faktor gruppani qaraymiz.

H_A – kuchsiz davriy qiymatlar to'plami $h = \{h_x \in R : x \in G_k\}$ quyidagi ko'rinishga ega:

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_A, x \in H_A \text{ bo'lsa,} \\ h_2, & \text{agar } x_{\downarrow} \in H_A, x \in G_k \setminus H_A \text{ bo'lsa,} \\ h_3, & \text{agar } x_{\downarrow} \in G_k \setminus H_A, x \in H_A \text{ bo'lsa,} \\ h_4, & \text{agar } x_{\downarrow} \in G_k \setminus H_A, x \in G_k \setminus H_A \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Ta'rif 4.2.1. H_A – kuchsiz davriy h qiymatlar to'plamiga mos kelgan μ o'lchov

H_A – kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi deb ataladi.

Muvofiqlashish shartiga asosan :

$$\begin{cases} h_1 = (k - |A|) f(h_1, \theta) + |A| f(h_2, \theta) + \alpha\beta, \\ h_2 = (|A| - 1) f(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|) f(h_4, \theta) + \alpha\beta, \\ h_3 = (|A| - 1) f(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|) f(h_1, \theta) + \alpha\beta, \\ h_4 = (k - |A|) f(h_4, \theta) + |A| f(h_3, \theta) + \alpha\beta. \end{cases}$$

Quyidagi tarzda aniqlangan $W : R^4 \rightarrow R^4$ akslantirishni qaraymiz:

$$\begin{cases} h_1' = (k - |A|) f(h_1, \theta) + |A| f(h_2, \theta) + \alpha\beta, \\ h_2' = (|A| - 1) f(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|) f(h_4, \theta) + \alpha\beta, \\ h_3' = (|A| - 1) f(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|) f(h_1, \theta) + \alpha\beta, \\ h_4' = (k - |A|) f(h_4, \theta) + |A| f(h_3, \theta) + \alpha\beta. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini $h = W(h)$ ko'rinishida yozishimiz mumkin.

Lemma 4.2.1. W akslantirish quyidagi invariant to'plamlarga ega:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{h \in R^4 : h_1 = h_2 = h_3 = h_4\}, \\ I_2 &= \{h \in R^4 : h_1 = h_4, h_2 = h_3\}. \end{aligned}$$

Teorema 4.2.1. 1) Tashqi maydonli Izing modeli uchun I_1, I_2 to'plamlarda barcha H_A – kuchsiz davriy o'lchovlar translatsion-invariant bo'ladi.

2) $J > 0$ va $|A| = k$ bo'lganda barcha H_A – kuchsiz davriy o'lchovlar translatsion-invariant bo'ladi.

Isbot.

1) Isboti ustozim M.M. Raxmatullayevning nomzodlik dissertatsiyalaridan kelib chiqadi;

2)

$$\begin{cases} h_1 = (k - |A|) f(h_1, \theta) + |A| f(h_2, \theta) + \alpha\beta, \\ h_2 = (|A| - 1) f(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|) f(h_4, \theta) + \alpha\beta, \\ h_3 = (|A| - 1) f(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|) f(h_1, \theta) + \alpha\beta, \\ h_4 = (k - |A|) f(h_4, \theta) + |A| f(h_3, \theta) + \alpha\beta. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini $|A| = k$ shartda qaraymiz, u holda sistema quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} h_1 = k f(h_2, \theta) + \alpha\beta, \\ h_2 = (k-1) f(h_3, \theta) + f(h_4, \theta) + \alpha\beta, \\ h_3 = (k-1) f(h_2, \theta) + f(h_1, \theta) + \alpha\beta, \\ h_4 = k f(h_3, \theta) + \alpha\beta. \end{cases}$$

bundan

$$\begin{cases} h_2 = (k-1) f(h_3, \theta) + f(k f(h_3, \theta) + \alpha\beta, \theta) + \alpha\beta, \\ h_3 = (k-1) f(h_2, \theta) + f(k f(h_2, \theta) + \alpha\beta, \theta) + \alpha\beta. \end{cases}$$

$$h_2 - h_3 = (k-1)(f(h_3, \theta) - f(h_2, \theta)) + f(k f(h_3, \theta) + \alpha\beta, \theta) - f(k f(h_2, \theta) + \alpha\beta, \theta)$$

$f(h)$ funksiya $J > 0$ bo'lganda qat'iy o'suvchi ekanligidan hosil bo'lgan oxirgi sistema $J > 0$ shartda faqatgina $h_2 = h_3$ va dastlabki sistema faqatgina $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ yechimga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema 4.2.1 isbotlandi.

IV bob bo'yicha xulosa

IV bobda kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlarini Potts va tashqi maydonli Izing modellari uchun o'rganiladi.

4.1 qismda Potts modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari o'rganilgan. Jumladan, ma'lum shartlarda kritik qiymatlar topilgan, ba'zi shartlarda barcha H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari translatsion-invariant bo'lishi, barcha $G_k^{(4)}$ –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari bilan ustma-ust tushishi isbotlangan.

4.2 qismda tashqi maydonli Izing modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari o'rganilgan. Jumladan, ba'zi shartlarda barcha H_A –kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari translatsion-invariant bo'lishi isbotlangan.

XULOSA

Ishda o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Potts modeli, Izing modellari uchun kuchsiz davriy asosiy holatlar hamda Potts va tashqi maydonli Izing modellari uchun kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari o'rganilgan bo'lib, olingan asosiy natijalar sifatida quyidagilarni keltirish mumkin:

- Keli daraxtida o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan uch holatli Potts modeli uchun ixtiyoriy 2 va 4 indeksli normal bo'luvchilarga nisbatan barcha kuchsiz davriy asosiy holatlar to'plami tasvirlangan.
- Keli daraxtida $\alpha \neq 0$ tashqi magnit maydonli oddiy va o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Izing modellari uchun (kiritilgan birlik shardagi konfiguratsiya energiyasi bo'yicha) ixtiyoriy indeksli normal bo'luvchiga nisbatan barcha kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant bo'lishi isbotlangan.
- Keli daraxtida oddiy va o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan bir jinsli bo'lmagan Izing modellari uchun ixtiyoriy kuchsiz davriy konfiguratsiya kuchsiz davriy asosiy holat bo'lishi isbotlangan.
- Potts modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari o'rganilgan. Jumladan, ma'lum shartlarda kritik qiymatlar topilgan, ba'zi shartlarda barcha H_A – kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari translatsion-invariant bo'lishi, barcha $G_k^{(4)}$ – kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari H_A – kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari bilan ustma-ust tushishi isbotlangan.
- Tashqi maydonli Izing modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari o'rganilgan. Jumladan, ba'zi shartlarda barcha H_A – kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari translatsion-invariant bo'lishi isbotlangan.

Adabiyotlar

1. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining ““Sog'lom bola yili” davlat dasturi to'g'risida”gi qarori.// O'z. Res. Qonun hujjatlari to'plami, 2014-y., 9-son, 87-modda.
2. Каримов И.А. Баркамол авлод орзуси. Ўзбекистон. Тошкент. 1999 йил.
3. Каримов И.А. “Ўзбекистон XXI аср бўсағасида, хавфсизликка таҳдид, барқарорлик шартлари ва кафолатлари ” Ўзбекистон. Тошкент. 1997 йил.
4. Каримов И.А. “Юксак маънавият енгилмас куч” Тошкент. “Маънавият” 1997 йил.
5. Каримов И.А. “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури ” Тошкент. 1997 йил.
6. “Ma'rifat” gazetasi. 2014-yil
7. Розиков У.А. Структура разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли и их применения для описания периодических распределений Гиббса // Теор. и матем. физика, 1997, т.112, №1.-с.170-176.
8. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Групповое представление леса Кэли и его некоторые применения. Известия РАН. - Москва, 2003-Т.67.-С.17-27.
9. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Классы нормальных делителей конечного индекса группового представления дерева Кэли //УзМЖ.- Тошкент, 1997.-№4. –С.31-39.
10. Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков. О периодических гиббсовских распределениях модели Изинга на решетке Бете. Узматжур. 1995 №4. С.12-21.
11. Н. Н. Ганиходжаев. Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли. ДАН АНРУз. 1994. №6. С.3-5
12. К. Престон. Гиббсовские состояния на счетных множествах. М.Мир. 1977.
13. U. A. Rozikov. “A constructive Description of Ground States and Gibbs Measures for Ising Model with two step interactions on Cayley tree”. Journal of statistical Physics. Vol. 122. N2. 2006.

14. Синай Я.Г., Теория фазовых переходов. Строгие результаты. Наука.М.1980.
15. Блехер П.М., Ганиходжаев Н.Н. О чистых фазах модели Изинга на решетке Бете//Теория вероят. и ее примен., 1990.т.35, вып.2.-с.920-930.
16. Minlos R.A., Introduction to mathematical statistical physics. University lecture series, v.19, 2000.
17. Rozikov U.A., Suhov Yu.M. Inf. Dim. Anal.Quant.Prob. RT, 2006, V.9, N3, p.471-488.
18. Ботиров Г.И., Розиков У.А. Модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли: контурный метод, ТМФ, 2007, Т .153, N1,с. 86-97.
19. Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. Слабо периодические основные состояние и мер Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. ТМФ, 2009, Т.160, N3, с. 507-516.
20. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. 2010.
21. Ганиходжаев Н.Н. Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли. //Доклады АНРУз, 1994.-№4.-С.3-5.
22. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых моделей на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика, 1997.-Т.111.-№1.-С.109-117.
23. Добрушин Р.Л. Задача единственности гиббсовских случайных полей и проблема фазовых переходов. // Функ. Анал. и его прилож. – 1968. – Т. 2. – №. 4. – С. 44-57.
24. Курош А.Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
25. Пирогов С.А., Синай Я.Г. Фазовые диаграммы классических решетчатых систем // Теор. и матем. физика, 1975. Т.25.-с.378-389 и 1976.Т.26.-с.61-76.
26. Розанова Ю.А. Марковские случайные поля. //Теория вероятн. и ее прим., 1967, т.12, №3, с.433.

27. Розиков У.А. Построение несчетного числа гиббсовских мер неоднородной модели Изинга // Теор. и матем. физика, 1999, т.118, №1.- с.95-104.
28. Baus M., Nejero C.F. Equilibrium Statistical Physics. –Springer. 2008. 364p.
29. Benik C. Ising type Antiferromagnets. – Springer. 2003. 120p.
30. Botirov G.I., Rozikov U.A. On q – component models on Cayley tree: the general case. Jour. Stat. Mech.: Theory and Exper. 2006. P10006, 8 pages.
31. Botirov G.I., Rozikov U.A. Potts model with competing interactions on the Cayley tree: The contour method. Theor. Math. Phys. 2007, V.153, No.1, p.1423–1433.
32. Bratteli O., Robinson D. Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics. II. Berlin: Spriner-Verlag, 1981.
33. Ganikhodjaev N.N., Rozikov U.A. On Potts model with countable set of spin values on Cayley tree. Letters in Math. Phys. 2006, V.75, No. 1, p.99-109.
34. Ganikhodjaev N.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A. Existence of phase transition for the Potts p -adic model on the set Z . Theor. Math. Phys. 2002, v.130. n.2, 500-507.
35. Mukhamedov F.M., Rozikov U.A. On inhomogeneous p – adic Potts model on a Cayley tree. Inf.Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields 2005. V.8, No.2, p.277-290.
36. Mukhamedov F.M., Rozikov U.A., J.F.F. Mendes. On phase transitions for p – adic Potts model with competing interactions on a Cayley tree. p – adic Math. Phys.; 2nd Inter. Conf. on p – adic Math.Phys., edited by A.Khrennikov, Z.Raki'c and I.Volovich. American Inst. of Phys. 2006, p.140-150.
37. Rozikov U.A. Description of periodic Gibbs measures of the Ising model on the Cayley tree. Russian Math. Surv. 2001, V.56, n.1, p.172-173.
38. Rozikov U.A. On countable - periodic Gibbs measures of the Ising model on the Cayley tree. Theor. Math. Phys. 2002, V.130, No.1, p.109-118.

39. Rozikov U.A. Representation of trees and its applications. Math. Notes. 2002, v.72, No.4, p.516-527.
40. Rozikov U.A., Nazarov Kh.A. Periodic Gibbs measures for the Ising model with competing interactions. Theor. and Math. Phys. 2003, V.135, No.3, p.881-888
41. Rozikov U.A. On q – component models on Cayley tree: contour method. Letters in Math. Phys. 2005, V.71, No. 1, p.27-38.
42. Rozikov U.A. Constructive description of ground states and Gibbs measures for Ising model with two-step interactions on Cayley tree. Jour. Stat .Phys. 2006. V.122, No.2, p.217-235.
43. Rozikov U.A. An example of one–dimensional phase transition. Sib. Adv. Math. 2006, V.16, No.2, p.121-125.
44. Rozikov U.A., Shoyusupov Sh.A. Gibbs measures for the SOS model with four states on a Cayley tree. Theor. Math. Phys. 2006, V.149, No.1, p.1312-1323.
45. Rozikov U.A., Suhov Yu.M. Gibbs measures for SOS model on a Cayley tree. Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields. 2006. V.9, No.3, p.471-488.
46. Rozikov U.A. A contour method on Cayley trees. Jour. Stat. Phys. 2008, V.130, No.2, p.801-813.
47. Ruelle D. Classical Statistical Mechanics of System of Particles. Helv. Phys. Acta, 1963, v.36, p.183.
48. Zachary, Countable state space Markov random fields and Markov chains on trees. Ann. Prob., 11: 894-903 (1983).
49. Рахматуллаев М.М. Розиков У.А. О слабо периодических гиббсовских мерах модели Изинга на дереве Кэли. // Доклады АН РУз, 2008. - №4. - с.12-15.
50. Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика, 2008, т.156, №2.-с292-302.
51. Рахматуллаев М.М. Новые гиббсовские меры модели Изинга на дереве Кэли. // УзМЖ, 2009, №2-с144-152.

52. Рахматуллаев М.М., Расулова М.А. Изучение слабо периодических основных состояний для модели Поттса.// Matematik analizning dolzarb muammolari. Urganch, 2012, 9-10-noyabr. 49-50-betlar.
53. Расулова М.А. О слабо периодических основных состояниях для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.// Iqtidorli yoshlar ilmiy jurnali. Namangan, 2013, 1-son, 121-124-betlar.
54. Рахматуллаев М.М., Расулова М.А. Существование слабо периодических основных состояний для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.// Доклады АН РУз, Ташкент, 2013, №3. - с.10-13.
55. Рахматуллаев М.М., Расулова М.А. Слабо периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.// “Yosh matematiklarning yangi teoremalari-2013”. Namangan, 2013, 15-16-aprel.160-163-betlar.
56. Рахматуллаев М.М., Расулова М.А. Слабо периодические основные состояния для модели Поттса.// Тез. докл. Всероссийской конф. по матем. и мех. Томск, 2013, 2-4 октября. –с.239.
57. Рахматуллаев М. М. Слабо периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли .// Тез. докл. Всероссийской конф. по матем. и мех. Томск, 2013, 2-4 октября. –с.238.
58. Рахматуллаев М.М. ТМФ, 2013, Т.176, N3, с. 477-493.