

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI  
OLIIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI  
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

**Qo‘lyozma huquqida**

**MAVZU:** Zanjirli kasrlarning ko‘p o‘lchovli  
umumlashmasi va uning tadbirlari.

5A130101-Matematika  
(yo‘nalishlar bo‘yicha)

**magistr akademik darajasini olish uchun**

**MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI**

**Ilmiy rahbar:** prof. A.Soleev

**Bajaruvchi:** Iskandarova Nigina Maxmudovna

**SAMARQAND-2014**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение.....</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Цепные дроби.....</b>	<b>10</b>
1.1. Что такое цепная дробь.....	10
1.2. Геометрическая теория цепных дробей.....	13
1.3. Алгоритм ”вытягивания носов”.....	13
1.4. Две леммы геометрии чисел.....	15
1.5. Многомерные цепные дроби.....	27
1.6. Обобщение теоремы Лагранжа.....	28
Заключение по главе 1.....	32
<b>Глава 2. Двумерные цепные дроби.....</b>	<b>33</b>
2.1. Цепные дроби и выпуклые оболочки целых точек.....	34
2.2. Геометрия одномерных границ выпуклых оболочек.....	45
2.3. Периодичность оболочек в инвариантных конусах операторов из $GL_n(\mathbb{Z})$ .....	50
2.4. Некоторые примеры двумерных цепных дробей.....	54
2.5. Геометрия границ выпуклых оболочек.....	58
2.6. Свойство изоморфизмов самых простых двумерных оболочек.....	60
2.7. Исследование систем уравнений для изоморфизмов самых простых оболочек.....	64
Заключение по главе 2.....	69
<b>Глава 3. Четырехмерное обобщение цепных дробей.....</b>	<b>70</b>
3.1. Постановка задачи.....	70
3.2. Описание нового алгоритма.....	73
3.3. Примеры расчетов по новому алгоритму.....	79
Заключение по главе 3.....	89
<b>Заключение.....</b>	<b>90</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>91</b>

## Введение

Подготовка высококвалифицированных кадров играет важную роль в развитии экономики и общества. Позитивные преобразования в сфере среднего и высшего образования, как отметил Президент Узбекистана И.А. Каримов [34], являются практическим воплощением политики реализации целенаправленных реформ. В этом отношении необходимо отметить постоянное внимание государства к среднему и высшему образованию, подготовке высококвалифицированных научных кадров, развитию информационных технологий.

Теория цепных дробей — одна из древнейших математических теорий. При геометрическом представлении цепным дробям соответствуют границы выпуклых оболочек целых точек в некоторых углах на плоскости. Коэффициенты цепной дроби равны целочисленным длинам отрезков, лежащих на границах выпуклых оболочек. Обобщая цепные дроби на  $n$ -мерный случай, Ф. Клейн [7], Г.Ф. Вороной [8], Г. Минковский [9] стали рассматривать границы выпуклых оболочек целых точек в  $(n+1)$ -мерных конусах. Оказывается,  $n$ -мерные границы выпуклых оболочек в специальных алгебраических конусах периодичны, что обобщает теорему Лагранжа: цепная дробь всякой квадратичной иррациональности периодична, начиная с некоторого момента. Однако пока еще совершенно не ясно, какие локальные характеристики  $n$ -мерных границ, подобные целочисленным длинам отрезков, позволяют однозначно восстановить мерную границу выпуклой оболочки и судить о ее периодичности.

Здесь вычислены границы некоторых двумерных периодических выпуклых оболочек. Одна из этих оболочек обобщает цепную дробь Фибоначчи для числа  $(\sqrt{5}+1)/2$ , в которой все неполные частные равны 1. Для двумерной оболочки Фибоначчи найдены локальные характеристики, позволяющие восстановить всю оболочку. Показано, что в некотором

смысле двумерная цепная дробь Фибоначчи является самой простой среди всех двумерных цепных дробей.

**Актуальность работы.** Теория цепных дробей связана с теорией приближений вещественных чисел рациональными, с теорией динамических систем, а также со многими другими разделами математики. В диссертации рассказано о связи цепных дробей с геометрией выпуклых многоугольников. Из этой связи следует, например, что цепная дробь периодична в тех и только тех случаях, когда выражаемое ей число является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Рассказано также о том, насколько часто среди элементов цепной дроби, выражающей произвольное вещественное число, встречается единица (двойка, тройка, ...).

В диссертации содержится обзор результатов, связанных с многомерными обобщениями классической теории цепных дробей, полученных в последнее время.

Пусть в четырехмерном комплексном пространстве заданы 2 комплексных вектора

$$L_i = (l_{i,1}, l_{i,2}, l_{i,3}, l_{i,4}) \in C^4 \quad i = 1, 2$$

Будем обозначать чертой  $\bar{L}$  вектор, комплексно сопряженный к вектору  $L$ . Введя комплексные линейные формы

$$(L_i, X) \stackrel{def}{=} l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4$$

получим неотрицательные на  $X \in R^4$  вещественные квадратичные формы

$$m_i(X) = \langle L_i, X \rangle \langle \bar{L}_i, X \rangle = \langle \text{Re } L_i, X \rangle^2 + \langle \text{Im } L_i, X \rangle^2, \quad i = 1, 2.$$

Нас будет интересовать множество, где обращается в нуль произведение  $m_1(X) m_2(X)$  этих квадратичных форм. Это — объединение в  $R^4$  двух двумерных плоскостей

$$L \stackrel{def}{=} L_1 \cup L_2 :$$

$L_i = \{ X : \langle \text{Re } L_i, X \rangle = \langle \text{Im } L_i, X \rangle = 0 \}$ .  $i = 1, 2$ . Спроектируем с помощью

отображения

$$m(x) = (m_1(X), m_2(X)) \quad (1.1)$$

пространство  $R^4$  в неотрицательный квадрант

$$R_+^2 = \{(r_1, r_2) \in R^2 : r_1 \geq 0, r_2 \geq 0\}$$

двумерной плоскости.

В интересных с теоретико-числовой точки зрения случаях общего положения плоскости  $L_1, L_2$  пересекаются только в нуле, а проекции целых точек  $Z^4 \setminus 0$  не попадают на границу квадранта  $R_+^2$ . Дальнейшие определения дадим в предположении, что эти условия выполнены.

Ненулевую целочисленную точку  $X \in Z^4 \setminus 0$  назовем наилучшим приближением к  $L$ , если в прямоугольнике без вершины  $\{(r_1, r_2) : 0 \leq r_i \leq m_i(x), i = 1, 2\} \setminus m(X)$  нет проекций других ненулевых целых точек,  $Y \in Z^4, Y \neq 0$ , т.е. таких  $Y$ , что

$$m_1(Y) \leq m_1(X), m_2(Y) \leq m_2(X), m_1(Y)m_2(Y) < m_1(X)m_2(X)$$

**Цели и задачи исследования:** Исследовать целочисленные приближения и найти наилучшие целочисленные приближения  $X$  к объединению плоскостей  $L$ .

**Степень изученности проблемы:** С точки зрения размерностей возникающих объектов, нашей задаче близка задача отыскания в трехмерном случае наилучших приближений к плоскости  $L_1$  и прямой  $L_2$ . Два разных алгоритма ее решения были предложены Вороным [15] и Брюно и Парусниковым [14]. Алгоритм Вороного основан на поиске последовательных относительных минимумов  $m(X)$  для  $X \in Z^3$ , алгоритм Брюно - Парусникова основан на вычислении границы модульного многогранника. Оба алгоритма "односторонние": у Вороного алгоритм идет в сторону плоскости  $L_1$ , т.е.  $m_1(X)$  последовательно убывают, а  $m_2(X)$  возрастают; а у Брюно - Парусникова — в сторону прямой  $L_2$ , т.е.  $m_1(X)$  возрастают, а  $m_2(X)$  убывают. При этом алгоритм Вороного более

экономный: на каждом шаге он требует перебора 5 случаев, а алгоритм Брюно - Парусникова на каждом шаге требует перебора многих случаев и удобней для вычислений на компьютере. Далее Брюно и Парусниковым [15] был предложен алгоритм, работающий в обе стороны. Он явился переработкой алгоритма из [14].

В трехмерном случае для отыскания единиц вполне вещественных кубических полей успех достигается с помощью алгоритмов Вороного (также предложенного в работе [15]), и Брюно [14]. Оба этих алгоритма — геометрические, т.е. они работают с учетом геометрии связанных с задачей выпуклых многогранников.

Также, в силу своей простоты и высокой скорости, на практике часто используются алгоритмы, так или иначе обобщающие на двумерный случай алгоритм Евклида деления с остатком (алгоритмы Эйлера, Якоби, Бруна, Пуанкаре и др.). Однако они находят алгебраические единицы не для всех кубических полей [15].

Среди алгоритмов указанного типа можно выделить алгоритм Гютинга [18], имеющий относительно большой процент успеха.

Четырехмерный вариант алгоритма Гютинга нами также тестировался. Были рассмотрены вполне вещественные поля четвертой степени, степенные базисы в которых задаются неприводимыми уравнениями с небольшими коэффициентами. Исключались тривиальные случаи алгебраических единиц и уравнений, получающихся из другого такого же заменой  $\pm \lambda + c, c \in Z$  :

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad a_j \in Z,$$

$$|a_j| \leq b, \quad j = 1, 2, 3, \quad a_0 \geq 2.$$

Из 60 полиномов, соответствующих небольшим значениям максимума  $b$  коэффициентов полинома ( $b$  не превосходило 5) алгоритм Гютинга оказался периодичен лишь в 9 случаях.

**Научная новизна:** Основные результаты являются новыми,

важными и состоят в следующем:

- Показана связь цепных дробей с геометрией выпуклых многоугольников. Из этой связи следует, например, что цепная дробь периодична в тех и только тех случаях, когда выражаемое ей число является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.
- Показано также, насколько часто среди элементов цепной дроби, выражающей произвольное вещественное число, встречается единица (двойка, тройка, ...).
- Описан новый эффективный алгоритм построения фундаментальных областей двумерных периодических парусов цепных дробей.
- Найдены наилучшие целочисленные приближения  $X$  к объединению плоскостей  $L$ .
- Вычислены дискриминанты полиномов  $R_n(w)$ .

**Объект и предмет исследования:** Объектом исследования являются цепные дроби и их обобщения на многомерный случай. Предметом исследования являются выпуклые многоугольники и многогранники, связанные с цепными дробями.

**Методы исследования:** В работе используются методы и результаты геометрической теории чисел, топологии, линейной алгебры, выпуклого анализа, геометрии, компьютерных вычислений.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- показана выпуклые многоугольники для конкретных цепных дробей.
- показано насколько часто среди элементов цепной дроби, выражающей произвольное вещественное число, встречается единица (двойка, тройка, ...).

- описан новый эффективный алгоритм построения фундаментальных областей двумерных периодических парусов цепных дробей.
- найдены наилучшие целочисленные приближения  $X$  к объединению плоскостей  $L$ .
- вычислены дискриминанты полиномов  $R_n(w)$ .

**Научная и практическая значимость результатов исследования:**

Работа носит теоретический и практический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в различных задачах геометрической теории чисел, выпуклого анализа, теории динамических систем и теории особенностей.

**Апробация работы:** Результаты диссертации докладывались на семинаре *«Методы степенной геометрии и компьютерной алгебры в исследовании алгебраических и дифференциальных уравнений»* под руководством профессоров А.Солеева и И.Икрамова (СамГУ 2012-2014 гг.)

**Опубликованность результатов:** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [35] и [36].

**Структура и объем диссертации:** Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Полный объем диссертации ... страниц, библиография включает ... наименований.

Во введении отражена история вопросов, рассмотренных в диссертации, и приведен обзор результатов, связанных с темой исследования. Кратко излагается содержание работы и формулируются основные результаты.

Первая глава посвящена основным определениям (цепных дробей, алгоритму ”вытягивания носов”, многомерных цепных дробей, алгебраически периодических многомерных цепных дробей

алгебраических иррациональностей, обобщенной теореме Лагранжа). В этой главе также обсуждается связь между цепными дробями и геометрией выпуклых многоугольников.

Во второй главе рассматриваются двумерные цепные дроби, связь между цепными дробями и выпуклыми оболочками целых точек, геометрия одномерных границ выпуклых оболочек, периодичность оболочек в инвариантных конусах операторов из  $GL_n(\mathbb{Z})$ , некоторые примеры двумерных цепных дробей, геометрия границ выпуклых оболочек, приводится свойство изоморфизмов самых простых двумерных оболочек и исследуются системы уравнений для изоморфизмов самых простых оболочек.

В третьей главе описан новый дедуктивный алгоритм построения парусов многомерных цепных дробей на примере четырехмерного обобщения цепных дробей. Приведены примеры расчетов по новому алгоритму. Вычислены дискриминанты полиномов и полиномы  $R_n(w)$  методами компьютерной алгебры.

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Самаркандского государственного университета А.С.Солееву за постановку задачи и постоянное внимание при работе над диссертацией, а также кандидату физико-математических наук, доценту Самаркандского государственного университета Х.Х.Рузимурадову за полезные обсуждения и замечания.

## ГЛАВА 1. ЦЕПНЫЕ ДРОБИ.

### § 1.1. Что такое цепная дробь.

Теория цепных дробей — одна из древнейших математических теорий. Чтобы показать, что такое цепная дробь, начнём с простого примера. Возьмём дробь  $\frac{10}{7}$ . Наибольшее целое число, не превосходящее эту дробь — это 1:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}, \quad \left( \frac{3}{7} < 1 \right),$$

«Перевернём» дробь  $\frac{3}{7}$

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}$$

Наибольшее целое число, не превосходящее дробь  $\frac{7}{3}$  — это 2.

Получаем:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

Это и есть цепная дробь для числа  $\frac{10}{7}$ , которая, между прочим, даёт очень хорошие приближения:  $\frac{10}{7}$  довольно близко к 1, но если хотите точнее, то это примерно  $1 + \frac{1}{2}$ , ну а  $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$  — это точное значение.

Таким же способом можно представлять все числа. Если число иррациональное, то этот процесс будет продолжаться бесконечно, никогда не остановится, а для рациональных чисел дробь такого вида конечна.

Цепная дробь для числа  $\pi$ .

Что такое  $\pi$ ?

Приближения числа  $\pi$  знали уже древние. Вот, например, очень хорошее приближение, которое связывают с именем Архимеда, но которое

было известно и до него:  $\pi \approx \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$ . В действительности, это как раз начало цепной дроби, в которую можно разложить число  $\pi$ . Эта дробь бесконечна, и, беря всё более длинные начальные куски этой дроби, можно получать всё более точные приближения.

Заметьте, что числитель дроби  $\frac{22}{7}$  — всего лишь двузначное число, знаменатель — однозначное, а точность приближения, которое даёт эта дробь, — три десятичных знака (а). Шесть правильных десятичных знаков можно получить, оборвав эту цепную дробь дальше (в). Новое приближение — это отношение двух трёхзначных чисел. Вот правило, помогающее запомнить эту дробь: надо записать длинное число 113355, разбить его на два трёхзначных числа и разделить большее на меньшее. Получим:

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = \frac{355}{113}$$

Математика и физика — части одной экспериментальной науки. Физикой называется та часть, где стоимость каждого эксперимента — миллиарды долларов, математикой — та, где эксперименты дешёвы. Кроме того, математика едина, её нельзя разделить на алгебру, геометрию и т. п. В частности, вычисления, которые мы проводили, возникли при изобретении календаря, когда дробью было отношение солнечного года и периода Луны. Ближайшее приближение к этому отношению — 12 (как 3 для  $\pi$ ), далее идут всякие поправки: високосные годы; в григорианской системе, которая поправляет юлианскую, не только високосные годы, но и раз в сто лет ещё одна поправка, и раз в четыреста лет — ещё одна...

Так вот, все эти поправки в соизмеримость оказались особенно важны, когда начали развиваться небесная механика и астрономия. Например, соизмеримость периодов обращений Юпитера и Сатурна вокруг Солнца (отношение  $\approx 2.5$ ) приводит к очень сильным возмущениям,

которые сбивают планеты с их орбит. Это так называемые неравенства в движении Юпитера и Сатурна, которые имеют период около 800 лет. В расчёте таких периодов цепные дроби и связанные с ними приближения имели огромное значение и потребовали серьёзного развития математического аппарата.

Это развитие привело

	Рациональное приближение числа	Количество совпавших цифр
	$\pi \approx 3,1415926535\ 8979324$	
а)	$\frac{22}{7} \approx 3,142$	2
б)	$\frac{333}{106} \approx 3,14151$	4
в)	$\frac{355}{113} \approx 3,1415929$	6
г)	$\frac{103993}{33102} \approx 3,1415926530$	9
д)	$\frac{104348}{33215} \approx 3,1415926539$	9
е)	$\frac{208341}{66317} \approx 3,1415926534\ 67$	9
ё)	$\frac{312689}{99532} \approx 3,1415926536$	9
ж)	$\frac{833719}{265381} \approx 3,1415926535\ 81$	11
з)	$\frac{1146408}{364913} \approx 3,1415926535\ 91$	10
и)	$\frac{4\ 272\ 943}{1360120} \approx 3,1415926535\ 894$	12
й)	$\frac{5419351}{1725033} \approx 3,1415926535\ 898$	12
к)	$\frac{80143857}{25510582} \approx 3,1415926535\ 897926$	14

Л)	$\frac{165707065}{527\ 46197} \approx 3,1415926535\ 897934$	15
М)	$\frac{245850922}{782\ 56779} \approx 3,1415926535\ 8979316$	15

довольно быстро к пониманию того, что эта арифметика является на самом деле геометрией.

Далее я представлю некоторые сведения из теории цепных дробей и покажу, основываясь на экспериментальных принципах, геометрический смысл этих сведений: сначала в виде примера, а потом в виде формулировок теорем.

Эта геометрия стала популярной около ста лет назад благодаря великому математику Герману Минковскому, который назвал её геометрией чисел. Предшественники Минковского пользовались этой теорией, не давая ей названия, и потому забыты.

### § 1.2. Геометрическая теория цепных дробей.

В основе геометрии чисел по Минковскому лежит школьная тетрадка в клеточку — плоскость, на которой нарисована координатная сетка. Рассмотрим прямую  $y=ax$ ; возьмём для примера  $\alpha = \frac{10}{7}$ . Если  $\alpha$  — рациональное число, то на этой прямой, кроме начала координат, будут ещё целые точки. В нашем случае прямая пройдёт через точку  $(7,10)$ . Оказывается, построение цепной дроби числа  $\alpha$  связано с нахождением целых точек, которые лежат близко от нашей прямой.

### § 1.3. Алгоритм «вытягивания носов».

Пусть  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  - единичные векторы. Между ними расположена наша прямая (рис. 1). А теперь к вектору  $\vec{e}_1$  будем прибавлять  $\vec{e}_2$ , до тех пор,

пока не перескочим через нашу прямую. Иными словами, нужно найти наибольшее натуральное число  $a_0$ , такое что конец вектора  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + a_0 \vec{e}_2$  всё ещё ниже нашей прямой. В данном случае  $a_0 = 1$ .

Продолжаем. Чтобы получить вектор  $\vec{e}_4$  прибавим к  $\vec{e}_2$  вектор  $\vec{e}_3$  (который уже построен), умноженный на коэффициент  $a_1$ . Коэффициент  $a_1$  выбираем так, чтобы не перескочить через прямую, т. е.

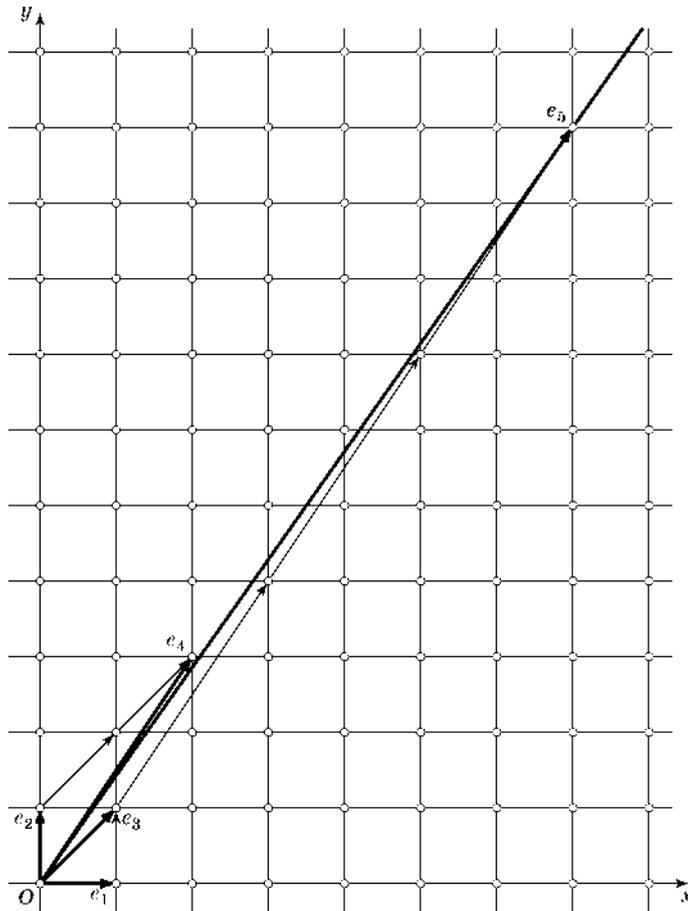


Рис. 1

чтобы вектор  $e_4$  оставался выше прямой, а если к нему прибавить  $e_3$ , то мы перескочим через прямую. Как видите,  $a_1 = 2$ .

Векторы получаются всё более длинные, поэтому алгоритм и назвали «вытягиванием носов».

Далее,  $\vec{e}_5 = \vec{e}_3 + a_2 \vec{e}_4$ . Взяв  $a_2 = 3$ , попадаем как раз на прямую.

Итак,  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$ ,

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{10}{7}$$

Можно доказать, что этот алгоритм всегда даёт целые числа  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , которые и будут получаться при разложении  $\alpha$  в цепную дробь. Точки, которые мы получаем, дают нам сразу же и элементы цепной дроби.

Доказательство этого факта несложно. Главное — это то, что прямая с уравнением  $y = Ax$  в какой-либо системе координат задается также уравнением  $x = \frac{1}{A}y$  в системе координат с переставленными осями абсцисс и ординат. А прямая с уравнением  $y = Ax$  в системе с базисными векторами  $e$  (на оси  $x$ ) и  $f$  (на оси  $y$ ) задаётся при  $A = a + B$  уравнением  $z = Bw$  в системе с базисными векторами  $e + af$  (на оси  $w$ ) и  $f$  (на оси  $z$ ). Цепная дробь получается при последовательном применении (поочерёдно) этих двух (очевидных) фактов.

#### § 1.4. Две леммы геометрии чисел.

**Лемма 1.** Рассмотрим на плоскости с координатной сеткой «пустой» параллелограмм с вершинами в узлах сетки, т. е. такой, что ни внутри, ни на его границе нет других узлов сетки. Площадь этого параллелограмма равна 1.

**Доказательство леммы 1.** Сдвигая наш параллелограмм на всевозможные комбинации векторов, на которые он натянут, мы можем

покрыть всю плоскость равными параллелограммами, подобно тому, как её покрывали единичные квадратики, образованные линиями координатной сетки.

Возьмём кусок плоскости большой площади  $A$  и посчитаем, сколько в нём, с одной стороны, наших параллелограммов, с другой стороны, целых точек. Пусть площадь параллелограмма равна  $S$ , тогда, если площадь  $A$  очень велика, число параллелограммов приблизительно равно  $A/S$  (этот кусок плоскости не обязательно состоит из целых параллелограммов, поэтому равенство будет неточным; впрочем, можно взять кусок, состоящий из целых параллелограммов, тогда получится точное равенство).

Понятно, что число целых точек примерно равно  $A$ .

Посчитаем теперь число целых точек в нашей области другим способом. На каждый параллелограмм приходится 4 точки (его вершины), но при этом мы считаем каждую вершину 4 раза, и если мы посчитаем число всех вершин всех параллелограммов, то получится в 4 раза больше, чем число всех целых точек вообще. Поэтому целых точек и параллелограммов одинаковое количество. Получается, что  $A \approx 4 \cdot (A/S)$  при очень большом  $A$ . Значит,  $S = 1$ .

**Замечание.** Это рассуждение легко обобщается на случай, когда у параллелограмма с вершинами в целых точках есть ещё  $k$  целых точек внутри и  $l$  целых точек на сторонах. Площадь такого параллелограмма

$$S = 1 + \beta k + \gamma l.$$

Векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  определяют единичный квадратик, и поэтому соответствующий определитель равен единице. Возьмём вектор  $\vec{e}_3$ . От  $\vec{e}_2$  к  $\vec{e}_3$  вращение в отрицательную сторону, внутри и на сторонах параллелограмма, натянутого на эти векторы, нет целых точек, поэтому этот определитель равен  $-1$ . Продолжая дальше, мы видим, что построение на каждом шаге такое: имеется параллелограмм (натянутый на

векторы  $\vec{e}_{k-1}$  и  $\vec{e}_k$ ), к одной его стороне  $\vec{e}_{k-1}$  мы прибавляем другую несколько раз, заменяем первую сторону на эту сумму ( $\vec{e}_{k+1} = \vec{e}_{k-1} + a_{k-2} \vec{e}_k$ ) и меняем стороны местами. Абсолютная величина площади не меняется, меняется только знак. Пусть  $(q_k, p_k)$  — координаты вектора  $\vec{e}_k$ ;  $q_k$  и  $p_k$  — целые числа.

Площадь  $S_k$  параллелограмма, натянутого на векторы  $\vec{e}_k$  и  $\vec{e}_{k-1}$  равна

$$\begin{vmatrix} q_k & p_k \\ q_{k+1} & p_{k+1} \end{vmatrix}$$

Основное утверждение теории цепных дробей:

**Теорема.**  $S_k = (-1)^{k+1}$  ( $k \geq 1$ ).

Действительно, мы показали, что  $S_k = \pm 1$  и знак каждый раз меняется, поэтому  $S_k = (-1)^k$  или  $S_k = (-1)^{k+1}$  для всех  $k$ ; при этом  $S_1 = 1$ .

**Следствие.** Дробь  $\frac{p_k}{q_k}$  является невероятно хорошим приближением для нашего числа  $\alpha$ . Формула

$$\alpha \approx \frac{p_k}{q_k}, \quad k \geq 3$$

даёт точность порядка  $\frac{1}{q_k^2}$ .

**Доказательство.** Мы докажем более точное неравенство, из которого это следует. Прямая  $y = \alpha x$  проходит внутри параллелограмма, порождённого векторами  $\vec{e}_k$  и  $\vec{e}_{k+1}$ : один из них ниже этой прямой, другой выше (какой именно — зависит от чётности  $k$ ). Следовательно,

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right|$$

потому что угол между прямой и вектором  $\vec{e}_k$  не больше угла

между векторами  $\vec{e}_{k+1}$  и  $\vec{e}_k$ .

Далее,

$$\left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{|p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1}|}{|q_k q_{k+1}|} = \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

поскольку  $|p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1}| = |S_k| = 1$  по доказанной теореме, а  $q_k$  и  $q_{k+1}$  положительны. Значит,

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2}$$

потому что  $q_{k+1} > q_k$ . Точность приближения  $\alpha \approx \frac{p_k}{q_k}$  лучше, чем

$\frac{1}{q_{k+1} q_k}$  и заведомо лучше, чем  $\frac{1}{q_k^2}$ . Вот почему цепные дроби дают такую

большую точность приближений.

### Геометрия теоремы Лагранжа: случай общих квадратичных иррациональностей

Если цепная дробь числа  $\alpha$  периодична, начиная с некоторого места, то  $\alpha$ -квадратичная иррациональность, т.е. удовлетворяет квадратному уравнению с целыми коэффициентами. Действительно,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\alpha_n + \beta}}, \quad \beta = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_n + \beta}}$$

для  $\alpha$ -цепной дроби с элементами

$$a_0, a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p; b_1, \dots, b_p; b_1, \dots, b_p; \dots$$

Для числа  $\beta$  сразу получается квадратное уравнение, поскольку правая часть его выражения является дробно-линейной функцией от  $\beta$ :

$$\beta = \frac{A\beta + B}{C\beta + D} \quad (\text{например, при } p=1: \beta = \frac{1}{b_1 + \beta}, \text{ т. е. } \beta^2 + b_1\beta - 1 = 0).$$

Справедливо и обратное утверждение:

Для любой квадратичной иррациональности  $\alpha$  цепная дробь

периодична, начиная с некоторого места.

Выше это уже доказано геометрически для случая, когда число  $\alpha$  определяет наклон прямой  $y = \alpha x$ , растягивающейся в  $\lambda$  раз под действием линейного отображения плоскости

$$M : (x; y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$$

отображающего решётку  $Z^2$  целых точек  $(x; y)$  на себя:  $MZ^2 = Z^2$ .

Условие сохранения решётки целых точек выражается в терминах коэффициентов  $a, b, c, d$  следующим образом.

Во-первых, для того, чтобы целые точки переходили в целые точки ( $MZ^2 \subset Z^2$ ) необходима и достаточна целочисленность коэффициентов.

Во-вторых, для того, чтобы образ был всей решёткой целых точек, а не более разреженной подрешёткой, необходимо и достаточно, чтобы «основной параллелограмм», натянутый на базисные векторы решётки ( $e = (1; 0)$  и  $f = (0; 1)$ ) переходил в основной же параллелограмм, натянутый на другие два базисных вектора ( $E = ae + cf$ ,  $F = be + df$ ). Чтобы параллелограмм, натянутый на  $E$  и  $F$ , был основным, необходимо и достаточно, чтобы его (ориентированная) площадь была равна либо  $+1$ , либо  $-1$ , т. е. чтобы  $ad - bc = \pm 1$ .

Укажем теперь явно для каких чисел  $\alpha$  периодичность цепной дроби тем самым уже доказана.

При введённых выше обозначениях мы получаем для  $\alpha$  и  $\lambda$  уравнения, выражающие растяжение в  $\lambda$  раз вектора  $e + \alpha f$  прямой  $y = \alpha x$  на плоскости  $\{xe + yf\}$  под действием отображения  $M$ :

$$a + b\alpha = \lambda, \quad c + d\alpha = \lambda\alpha$$

Подставляя значение коэффициента растяжения  $\lambda$  из первого уравнения во второе, мы получаем квадратное уравнение для коэффициента наклона  $\alpha$ :  $(a + b\alpha)\alpha = c + d\alpha$  т. е.  $b\alpha^2 + (a - d)\alpha - c = 0$ , откуда

$$\alpha = \frac{d - a \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2b}$$

В случае, когда преобразование  $M$  сохраняет решётку, коэффициенты разложения образов базисных векторов по исходным базисным векторам удовлетворяют соотношению  $ad - bc = \varepsilon (\varepsilon = \pm 1)$ . В этом случае  $bc = ad - \varepsilon$  так что

$$\alpha = \frac{d - a \pm \sqrt{(d + a)^2 - 4\varepsilon}}{2b}$$

**Пример.** Пусть  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $d = 2p$ . Тогда условие сохранения решётки принимает вид  $c = -\varepsilon$ , и мы приходим к заключению:

**Теорема 1.2.** Разложение в цепную дробь иррационального числа

$$\alpha = p + \sqrt{p^2 - \varepsilon} \quad (3)$$

удовлетворяющего квадратному уравнению

$$\alpha^2 - 2p\alpha + \varepsilon = 0,$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ , периодически для любого натурального числа  $p$ .

Чтобы перейти к более общему случаю, начнём со следующего замечания. Из алгоритма вытягивания носов видно, что цепная дробь для коэффициента  $\alpha$  наклона прямой  $l$  с уравнением  $y = \alpha x$  на плоскости  $R^2 = \{xe + yf\}$  с коэффициентами  $x, y$  и с решёткой  $\Gamma = Z^2$  целочисленных линейных комбинаций базисных векторов  $e$  и  $f$  зависит не столько от выбора базиса, сколько от расположения прямой  $l$  по отношению к решётке  $\Gamma$ .

Чтобы описать эту зависимость, предположим для определённости, что  $\alpha > 0$ . Рассмотрим два угла, на которые прямая  $l$  делит положительный квадрант

$$Y : y > \alpha x, \quad x > 0$$

$$Y : y < \alpha x, \quad x > 0$$

Рассмотрим точки решётки в  $Y$  ( $\notin Y$ ). Выпуклая оболочка этого множества ограничена снизу для  $Y$  (сверху для  $Y$ ) бесконечной ломаной линией. Вершинами этой ломаной являются векторы алгоритма вытягивания носов: за вершиной  $v_k = p_k e + q_k f$  на ломаной следует вершина

$v_{k+2}$  (на одной из ломаных все номера к чётные, а на другой — нечётные). Элементы  $a_i$  цепной дроби — это целочисленные длины отрезков ломаных.

Согласно алгоритму вытягивания носов,  $v_{k+2} = v_k + a_{k+1} v_{k+1}$  причём площадь параллелограмма, натянутого на  $v_k$  и  $v_{k+1}$ , есть  $p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1} = \pm 1$

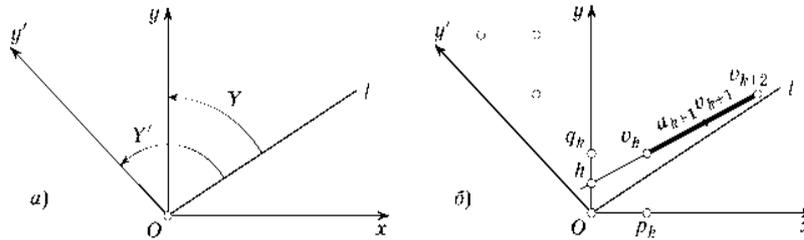


Рис. 17

При переходе от базиса  $\{e, f\}$  к новому базису  $\{e', f'\}$  и к новым коэффициентами  $x', y'$  точки  $x e + y f = x' e' + y' f'$  мы заменим уравнение  $y = \alpha x$  прямой  $l$  на новое уравнение  $y' = \alpha' x'$  той же прямой. Знаки и порядок базисных векторов можно выбрать так, что на луче  $x > 0$  прямой  $l$  выполнено условие  $x' > 0$ , а в угле  $Y$ , где  $x > 0$ ,  $y > \alpha x$  выполняются неравенства  $x' > 0$ ,  $y' > \alpha' x'$ , определяющие угол  $Y' \supset Y$  (рис. 17, а).

**Лемма.** Границы выпуклых оболочек множеств точек решётки  $\Gamma$  в углах  $Y'$  и  $Y$  совпадают, начиная с некоторого места.

**Доказательство.** Прямая, соединяющая лежащие в  $Y$  соседние вершины  $v_k$  и  $v_{k+2}$  границы выпуклой оболочки, пересекает ось  $y$  в точке с ординатой

$$h = q_k - p_k \frac{q_{k+1}}{p_{k+1}} = \frac{q_k p_{k+1} - p_k q_{k+1}}{p_{k+1}} = \frac{1}{p_{k+1}}$$

(рис. 17, б). Поскольку  $h \leq 1$ , все целые точки угла  $Y'$ , не попавшие в угол  $Y$ , лежат выше соединяющей  $v_k$  с  $v_{k+2}$  прямой. Поэтому они не влияют на вхождение этого соединяющего отрезка в границу выпуклой оболочки множества целых точек угла, которая и для угла  $Y'$  будет содержать этот отрезок.

Разумеется, граница выпуклой оболочки множества целых точек угла  $Y'$  содержит ещё и дополнительные отрезки, для которых  $x < \min \{p_k\}$  (например,  $x < 0$ ). Только они и создают разницу границ выпуклых оболочек: при достаточно больших  $x$  разницы нет. Лемма доказана.

Следствие. Если цепная дробь для числа  $\alpha$  периодична (хотя бы начиная с некоторого места), то это верно и для числа  $\alpha'$ .

**Замечание.** Число  $\alpha'$  легко явно выразить через  $\alpha$  и через коэффициенты разложения векторов нового базиса  $\{e', f'\}$  через векторы старого базиса. Получается дробно-линейное преобразование

$$\alpha' = \frac{A\alpha + B}{C\alpha + D}$$

которое унимодулярно, т. е. для которого целые коэффициенты удовлетворяют условию сохранения основного параллелограмма при переходе от одного базиса к другому:  $AD - BC = \pm 1$ .

Таким образом, всякий раз, как доказана периодичность (хотя бы начиная с некоторого места) цепной дроби для числа  $\alpha$ , мы автоматически получаем периодичность также и для всех родственных с  $\alpha'$  чисел  $\alpha'$  получающихся из  $\alpha$  унимодулярным дробно-линейным целочисленным преобразованием.

Покажем теперь, что от условия унимодулярности замены базиса здесь можно избавиться.

**Теорема.** Пусть прямая  $y = \alpha x$  растягивается сохраняющим решётку  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$  линейным преобразованием  $M$  плоскости. Тогда разложение в цепную дробь любого числа

$$\alpha' = \frac{A\alpha + B}{C\alpha + D}$$

полученного из  $\alpha$  целочисленным невырожденным ( $AD \neq BC$ ) дробно-линейным преобразованием, периодично, начиная с некоторого места.

**Доказательство.** Число  $\alpha'$  является коэффициентом уравнения  $y' = \alpha' x'$  прямой  $y = \alpha x$  записанного в координатах, порождённых парой

целочисленных векторов  $e' = Ce - Df$ ,  $f' = -Ae + Bf$  плоскости  $\{xe + yf\}$ . Если бы площадь порождённого этими новыми векторами параллелограмма равна  $\pm 1$ , то векторы  $e', f'$  составляли бы базис решётки  $\Gamma$  и всё было бы уже доказано выше. В общем случае  $|AD - BC| = N > 1$  векторы  $e'$  и  $f'$  порождают не  $\Gamma$ , а лишь более разреженную (в  $N$  раз) решётку, и наше доказательство надо слегка усовершенствовать.

Обозначим через  $\Gamma_0$  решётку, порождённую векторами  $e'$  и  $f'$ . Решётка  $\Gamma_1 = M\Gamma_0$  порождена векторами  $Me'$  и  $Mf'$ , образующими основной для неё параллелограмм такой же площади  $N$ , как и параллелограмм, порождённый векторами  $e'$  и  $f'$ , так как преобразование  $M$  сохраняет площади. Точно так же и каждая из решёток  $\Gamma_s = M^s \Gamma_0$  порождена парой векторов, образующих параллелограмм площади  $N$ .

**Лемма.** Число подрешёток в  $Z^2$ , порождённых парами векторов, образующих параллелограммы площади  $N$ , конечно (ограничено зависящей лишь от  $N$  постоянной).

**Доказательство.** Такая подрешётка содержит точку  $P$ , удалённую от  $O$  не дальше, чем на  $\sqrt{N}$  иначе площадь параллелограмма (со сторонами и диагоналями длиннее  $\sqrt{N}$ ) была бы больше, чем  $N\sqrt{3} > N$ .

Чтобы площадь параллелограмма, натянутого на векторы  $OP$  и  $OQ$ , была бы равна  $N$ , прямая  $QQ'$ , параллельная  $OP$ , должна быть удалена от прямой  $OP$  на расстояние,  $N/|OP| < N$ . Точки  $Q$  нашей подрешётки, лежащие на этой прямой, образуют прогрессию с шагом длины  $|OP| < \sqrt{N}$ . Поэтому число разных подрешёток, получающихся при разных выборах точки  $Q$ , не превосходит  $\sqrt{N}$ . Умножая это число выборов на число целых точек на расстоянии не больше  $\sqrt{N}$  от  $O$  (это число не превосходит  $CN$ ), мы получаем оценку сверху: искомое число подрешёток не превосходит  $CN^{3/2}$  (годится, например, значение  $C = 4$ ).

Теперь заметим, что наша прямая  $y = \alpha x$  растягивается не только преобразованием  $M$ , но и любой его степенью  $M^*$ .

Преобразование  $M$  переставляет наши решётки  $\Gamma_r$  с основным параллелограммом площади  $N$ . Поскольку их конечное число, найдутся целые числа  $t > s$ , такие что  $M^t \Gamma_0 = M^s \Gamma_0$ . Следовательно,  $M^{t-s} \Gamma_0 = \Gamma_0$ , так что решётка, порождённая векторами  $e'$  и  $f'$  отображается на себя преобразованием  $M^{t-s}$ , растягивающим прямую  $y = \alpha x$ , т. е. прямую  $y' = \alpha' x'$ .

Стало быть, цепная дробь для числа  $\alpha'$  периодична, начиная с некоторого места, поскольку  $\alpha'$  — коэффициент наклона прямой, растягиваемой сохраняющим решётку  $\Gamma_0$  линейным преобразованием плоскости, вычисляемый по отношению к базису  $\{e', f'\}$  этой решётки.

Из доказанной теоремы видно, что для доказательства периодичности (начиная с некоторого места) цепной дроби любой квадратичной иррациональности  $\alpha'$  достаточно представить  $\alpha'$  в виде дробно-линейного целочисленного образа

$$\alpha' = \frac{A\alpha + B}{C\alpha + D}, \quad AD \neq BC$$

квадратичной иррациональности

$$\alpha = \frac{d - a \pm \sqrt{(d + a)^2 - 4\varepsilon}}{2b}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

специального вида, для которой всё уже доказано. Но всякая квадратичная иррациональность легко преобразуется к виду  $\frac{u + \sqrt{n}}{v}$  с целыми  $u, v, n$  поэтому достаточно для каждого целого числа  $n$ , не являющегося полным квадратом, найти такого представителя чисел этого класса с данным  $n$ , который был бы коэффициентом наклона прямой, растягиваемой сохраняющим решётку целых точек преобразованием.

**Пример 1.** Пусть  $n = 2$ . Число  $\alpha = \sqrt{2} + 1$  удовлетворяет уравнению  $-\frac{1}{\alpha} = \sqrt{2} - 1$ , т.е.  $\alpha = 2 + \frac{1}{\alpha}$ , откуда



$$\alpha' = \frac{A\sqrt{11} + B}{C\sqrt{11} + D}$$

Совершенно таким же образом для преодоления иррациональностей с  $\sqrt{n}$  достаточно найти нетривиальное ( $q \neq 0$ ) целое решение  $(p; q)$  ( $p, q$ ) одного из двух уравнений

$$\sqrt{p^2 - \varepsilon} = q\sqrt{n}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

т. е. одного из двух уравнений, первое из которых несправедливо называется уравнением Пелля,

$$p^2 - nq^2 = 1, \quad p^2 - nq^2 = -1$$

**Теорема.** Для любого целого числа  $n$ , не являющегося полным квадратом целого числа, уравнение Пелля имеет нетривиальное ( $q \neq 0$ ) целочисленное решение.

Периодичность (начиная с некоторого места) цепных дробей всех иррациональных чисел вида  $\frac{A\sqrt{n} + B}{C\sqrt{n} + D}$  с целыми  $A, B, C, D$  (при  $AD \neq BC$ )

следует отсюда, как это доказано выше.

Вот несколько решений простейших уравнений Пелля:

$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$	$1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$
$2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$	
$9^2 - 5 \cdot 4^2 = 1$	$2^2 - 5 \cdot 1^2 = -1$
$5^2 - 6 \cdot 2^2 = 1$	
$8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$	
$3^2 - 8 \cdot 1^2 = 1$	
$19^2 - 10 \cdot 6^2 = 1$	$3^2 - 10 \cdot 1^2 = -1$
$10^2 - 11 \cdot 3^2 = 1$	
$7^2 - 12 \cdot 2^2 = 1$	
$649^2 - 13 \cdot 180^2 = 1$	$18^2 - 13 \cdot 5^2 = -1$
$15^2 - 14 \cdot 4^2 = 1$	

## § 1.5. Многомерные цепные дроби.

Геометрия чисел позволяет перенести многие построения теории цепных дробей на «многомерные цепные дроби», когда плоскость заменяется  $n$ -мерным (например, трёхмерным) пространством  $R^n$ , снабжённым решёткой  $Z^n$  целых точек, а прямая заменяется симплициальным конусом с вершиной в начале координат (в трёхмерном пространстве это трёхгранный угол).

Целые точки, расположенные строго внутри конуса, образуют полугруппу, а их выпуклая оболочка ограничена многогранной поверхностью (с бесконечным, как правило, числом граней). Геометрия этой многогранной поверхности (называемой парусом исходного конуса) и является многомерным обобщением теории цепных дробей (в которой роль паруса играет ломаная алгоритма вытягивания носов, рис. 1).

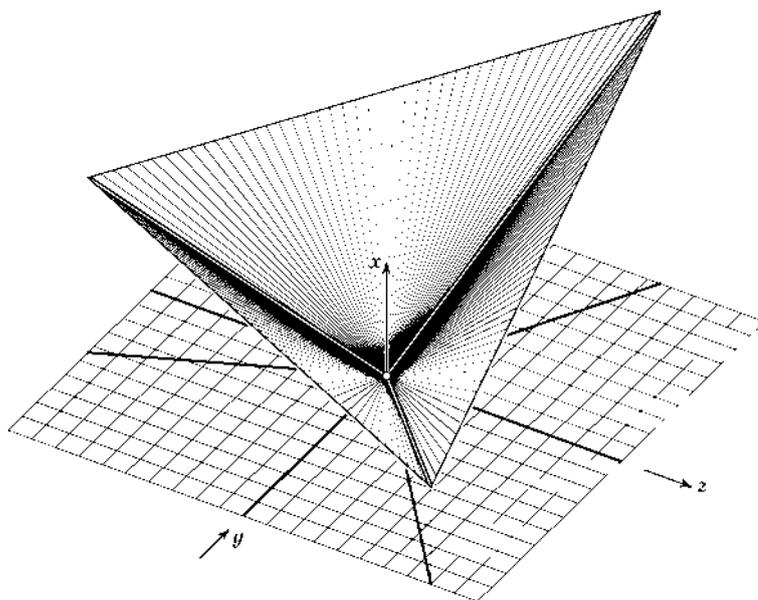
Теория многомерных цепных дробей довольно молода, и я приведу лишь очень немногие результаты.

## § 1.6. Обобщение теоремы Лагранжа

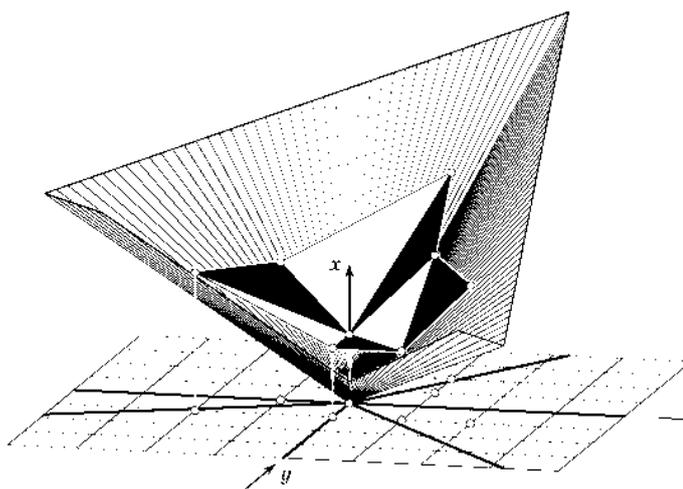
Рассмотрим целочисленное сохраняющее объёмы линейное преобразование пространства  $R^n$ , имеющее  $n$  инвариантных гиперплоскостей (простейший пример — отображение в  $R^3$ , которое задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

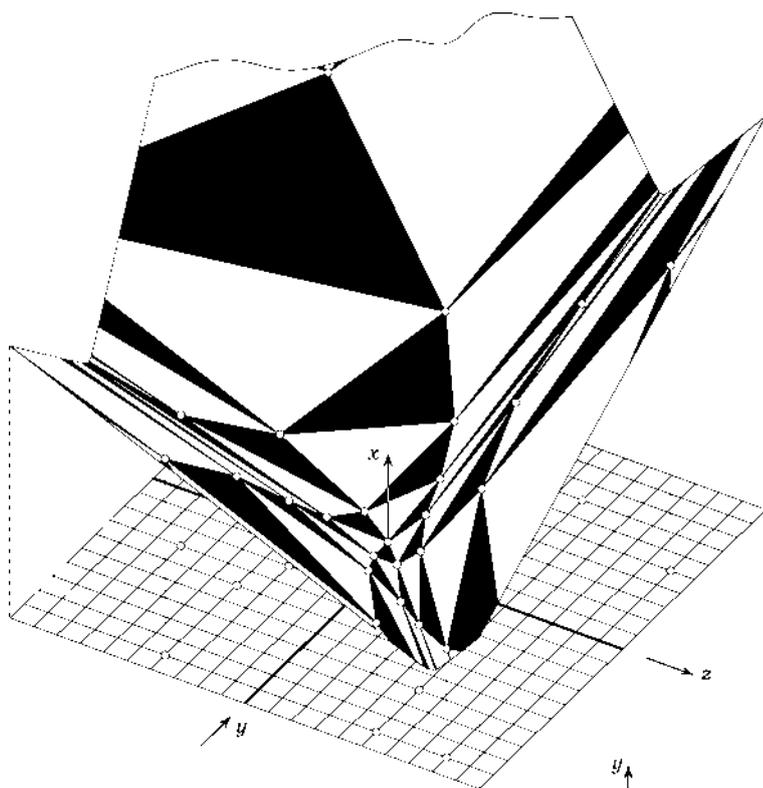
точка  $(x, y, z)$  переходит в  $(3x+2y+z, 2x+2y+z, x+y+z)$ .



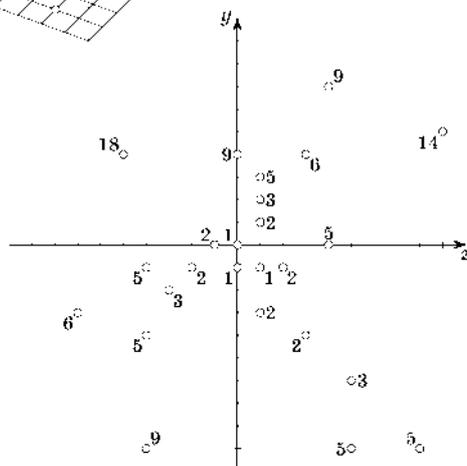
а) Трёхгранный угол, образованный плоскостями, инвариантными относительно преобразования (4).



) Фрагмент паруса трёхгранного угла рис. а в окрестности начала координат.

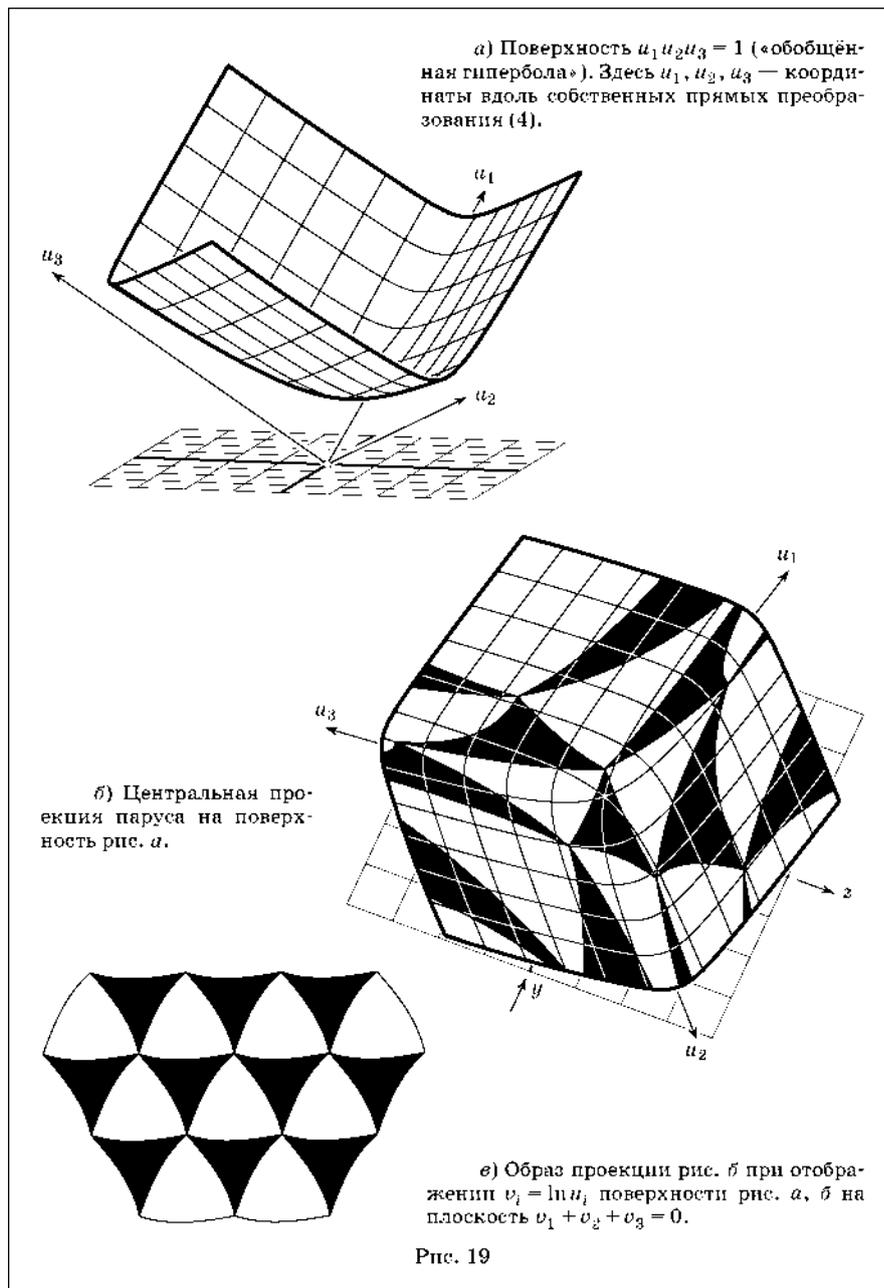


в) Большой фрагмент паруса рис. б.



г) Проекция вершин паруса рис. в на плоскость  $yz$  вдоль оси  $x$ . Рядом с каждой проекцией отмечена  $x$ -координата соответствующей вершины. (Рисунок заимствован из статьи [10].)

Рис. 2



Будем считать, что трёхгранные ( $n$ -гранные) углы, на которые эти плоскости делят пространство, переходят каждый в себя (рис. 2). Из теоремы Дирихле о единицах в алгебраической теории чисел следует, что парус каждого такого  $n$ -гранного угла обладает группой симметрий, порождённой  $n-1$  коммутирующими преобразованиями, сохраняющими и решётку целых точек, и наш  $n$ -гранный угол.

Из этого видно, что парус в трёхмерном пространстве двояко периодичен (подобно карте тора): каждая грань повторяется бесконечное число раз, подобно бесконечному числу изображений кошки на карте тора

(рис. 19). Простейшие примеры таких парусов описаны в работе [5].

Таким образом, двумерные цепные дроби, соответствующие кубическим иррациональностям, двояко периодичны, хотя обычные цепные дроби подобных чисел (соответствующие блуждающим по этой двояко периодической поверхности путям) кажутся хаотическими и периодичности не проявляют.

Обратно, из топологической периодичности комбинаторного строения паруса следует происхождение конуса из линейного преобразования и связь паруса с алгебраическим «собственным числом», степень которого равна размерности пространства. Эти обобщения теории Лагранжа (соответствующей случаю  $n=2$  и обычной периодичности) описаны в статьях [2] и [3].

Цушиаши доказал топологическую периодичность алгебраического паруса. Его доказательство основано на теореме Дирихле о единицах из алгебраической теории чисел. Его теория распространяется и на случай «комплексных собственных чисел», когда некоторые из инвариантных гиперплоскостей линейного преобразования комплексны.

Коркина доказывает алгебраическое происхождение топологически периодического паруса. В случае обычных цепных дробей это — более лёгкая часть теоремы Лагранжа, но для многомерных дробей соотношение обратное (и подробное доказательство теоремы Коркиной ещё не опубликовано).

В многомерном случае, впрочем, остался открытым уже вопрос о том, каким триангуляциям тора и каким наборам «целых точек» на гранях этих триангуляций соответствуют разбиения парусов алгебраических иррациональностей на выпуклые грани. Этот вопрос открыт уже для двумерных торов и кубических иррациональностей. (Для одномерных дробей вопроса нет: периодом может быть любая последовательность целых чисел.)

## Заключение по главе 1

Теория цепных дробей — одна из древнейших математических теорий. При геометрическом представлении цепным дробям соответствуют границы выпуклых оболочек целых точек в некоторых углах на плоскости.

Первая глава посвящена основным определениям (цепных дробей, алгоритму «вытягивания носов», многомерных цепных дробей, алгебраически периодических многомерных цепных дробей алгебраических иррациональностей, обобщенной теореме Лагранжа). В этой главе также обсуждается связь между цепными дробями и геометрией выпуклых многоугольников.

Доказана теорема Лагранжа в случае общих квадратичных иррациональностей: Если цепная дробь числа  $\alpha$  периодична, начиная с некоторого места, то  $\alpha$ -квадратичная иррациональность, т.е. удовлетворяет квадратному уравнению с целыми коэффициентами.

Доказано, двумерные цепные дроби, соответствующие кубическим иррациональностям, двояко периодичны, хотя обычные цепные дроби подобных чисел (соответствующие блуждающим по этой двояко периодической поверхности путям) кажутся хаотическими и периодичности не проявляют.

Обратно, из топологической периодичности комбинаторного строения паруса следует происхождение конуса из линейного преобразования и связь паруса с алгебраическим «собственным числом», степень которого равна размерности пространства - это обобщения теории Лагранжа.

## ГЛАВА 2. ДВУМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ.

При геометрическом представлении цепным дробям соответствуют границы выпуклых оболочек целых точек в некоторых углах на плоскости. Коэффициенты цепной дроби равны целочисленным длинам отрезков, лежащих на границах выпуклых оболочек. Обобщая цепные дроби на  $n$ -мерный случай, Ф. Клейн [7], Г.Ф. Вороной [8], Г. Минковский [9] стали рассматривать границы выпуклых оболочек целых точек в  $(n+1)$ -мерных конусах. Оказывается,  $n$ -мерные границы выпуклых оболочек в специальных алгебраических конусах периодичны, что обобщает теорему Лагранжа: цепная дробь всякой квадратичной иррациональности периодична, начиная с некоторого момента. Однако пока еще совершенно не ясно, какие локальные характеристики  $n$ -мерных границ, подобные целочисленным длинам отрезков, позволяют однозначно восстановить мерную границу выпуклой оболочки и судить о ее периодичности. Здесь вычислены границы некоторых двумерных периодических выпуклых оболочек. Одна из этих оболочек обобщает цепную дробь Фибоначчи для числа  $(\sqrt{5}+1)/2$ , в которой все неполные частные равны 1. Для двумерной оболочки Фибоначчи найдены локальные характеристики, позволяющие восстановить всю оболочку. Показано, что в некотором смысле двумерная цепная дробь Фибоначчи является самой простой среди всех двумерных цепных дробей.

Вычисления выпуклых оболочек проводились на компьютере. Более того, доказательство основных двух утверждений опирается на компьютерные вычисления.

Результаты, приведенные в этой диссертации, являются ответами на некоторые из вопросов, которые В.И. Арнольд предлагает для исследования многомерных цепных дробей.

## § 2.1 Цепные дроби и выпуклые оболочки целых точек.

В этом разделе мы объясним, почему выпуклые оболочки целых точек в симплицальных конусах являются многомерными аналогами цепных дробей. Приведем теорему, обобщающую теорему Лагранжа о периодических цепных дробях. Сформулируем основной результат статьи о наборе локальных инвариантов, позволяющих однозначно восстановить ” самую простую двумерную цепную дробь” — аналог цепной дроби Фибоначчи. Точные формулировки и доказательства будут приведены в следующих разделах.

Цепные дроби удобно представлять геометрически. Для представления цепной дроби

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} > 0$$

сделаем следующее (рис.4). В положительном октанте на плоскости проведем через  $O$  луч  $l$  с тангенсом угла наклона  $\alpha$  к оси  $Ox$ . Возьмем границы выпуклых оболочек целых точек, кроме  $O$ , лежащих ниже луча  $l$  (соответственно выше луча  $l$ ). Граница является ломаной линией специального типа. Одно ее ребро (идущее вдоль оси координат) всегда бесконечно. Будем считать его начальным. Если  $\alpha$  — рациональное число, то далее следует конечное число ребер конечной длины. Последнее конечное ребро заканчивается на луче  $l$ , далее идет бесконечное ребро вдоль  $l$ . Если  $\alpha$  иррационально, число конечных ребер бесконечно. Их последовательность уходит в бесконечность вдоль луча  $l$ , неограниченно к нему приближаясь. Конечные ребра границы нижней (верхней) оболочки обозначим последовательно  $a_0, a_2, a_4, \dots (a_1, a_3, a_5, \dots)$  считая от оси  $Ox$  (оси  $Oy$ ). Тогда неполные частные  $\alpha_i$  цепной дроби и ребра  $a_i$  границ оболочек связаны соотношением  $\alpha_i = |\alpha_i|$

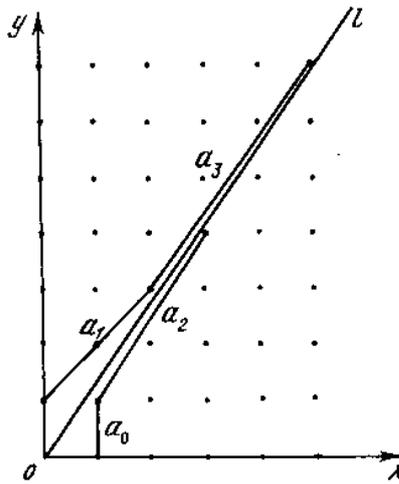


Рис. 1. Геометрическое представление дроби

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Здесь  $|\cdot|$  обозначает целочисленную длину целочисленного (т.е. концами в целых точках) вектора (или отрезка). Определяется она так. На прямой, содержащей целочисленный отрезок, имеется целочисленный отрезок минимальной длины. Любой другой целочисленный отрезок на этой прямой ему кратен. Коэффициент кратности и называется целочисленной длиной. Целочисленная длина отрезка в  $n$ -мерном пространстве является его  $GL_n(Z)$  инвариантом.

Сделав отступление, определим здесь же некоторые другие  $GL_n(Z)$ -инварианты целочисленных фигур, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Целочисленным  $k$ -мерным объемом целочисленного  $k$ -мерного многогранника, лежащего в  $n$ -мерном пространстве, называется коэффициент кратности между его евклидовым объемом и евклидовым объемом минимального симплекса, лежащего в том же  $k$ -мерном подпространстве.

Целочисленным расстоянием от целочисленной гиперплоскости (содержащей  $(n-1)$ -мерную целочисленную решетку) до целой точки

называется коэффициент кратности между соответствующим евклидовым расстоянием и евклидовым расстоянием от гиперплоскости до ближайшей к ней целой точки.

Целочисленным углом между двумя целочисленными лучами называется величина  $S(u,v)/(|u| \cdot |v|)$ , где  $u$  и  $v$  - произвольные целочисленные векторы, идущие вдоль лучей, и  $S(u,v)$  — целочисленная площадь треугольника со сторонами  $u$  и  $v$ . Как правило, слово ”целочисленный” в дальнейшем будем опускать.

**Замечание.** К предыдущему утверждению требуется уточнение: если число ребер конечно, то число неполных частных цепной дроби на 1 меньше числа ребер, а длина последнего ребра всегда равна 1.

Подобные иррегулярности около последнего ребра надо бы отмечать в нижеследующих утверждениях. Мы этого делать не будем, чтобы не отвлекаться на частности. Без дополнительных оговорок утверждения верны для иррациональных углов  $\alpha$ . Теорема о существовании и единственности числа  $\alpha$ , определенного цепной дробью с произвольно заданными коэффициентами в геометрических терминах, звучит так.

**Теорема 2.1.** Для произвольно заданных общего числа звеньев на границах выпуклых оболочек и их длин в указанном порядке существует единственный луч  $l$  с такими выпуклыми оболочками выше и ниже него.

Заданная информация о ломаной линии иначе называется комбинаторной структурой ломаной, оснащенной локальным инвариантом — длиной ребер.

Знание комбинаторной структуры, оснащенной длинами ребер, лишь одной из границ выпуклых оболочек, очевидно, недостаточно для восстановления луча  $l$ . Но, оснатив ее дополнительным инвариантом, можем получить достаточную информацию. А именно: для произвольно заданной комбинаторной структуры границы оболочки, оснащенной длинами ребер и целочисленными углами между соседними ребрами (с

начальным бесконечным ребром), существует единственный луч  $l$  с такой нижней (или верхней) оболочкой.

Легко выделить класс рациональных чисел  $\alpha$  в терминах комбинаторной структуры границ выпуклых оболочек. Им соответствуют границы с конечным числом ребер (число ребер на верхней и нижней границе конечно или бесконечно одновременно).

Теорема Лагранжа выделяет класс квадратично иррациональных чисел  $\alpha$  в терминах комбинаторной структуры границ оболочек, оснащенной теми или иными локальными инвариантами. А именно следующие три условия эквивалентны:

- 1) число  $\alpha$  квадратично-иррационально;
- 2) комбинаторная структура обеих границ, оснащенная длинами ребер, периодична, начиная с некоторого момента (попросту говоря, периодичны хвосты последовательностей  $a_0, a_2, a_4, \dots$  и  $a_1, a_3, a_5, \dots$ );

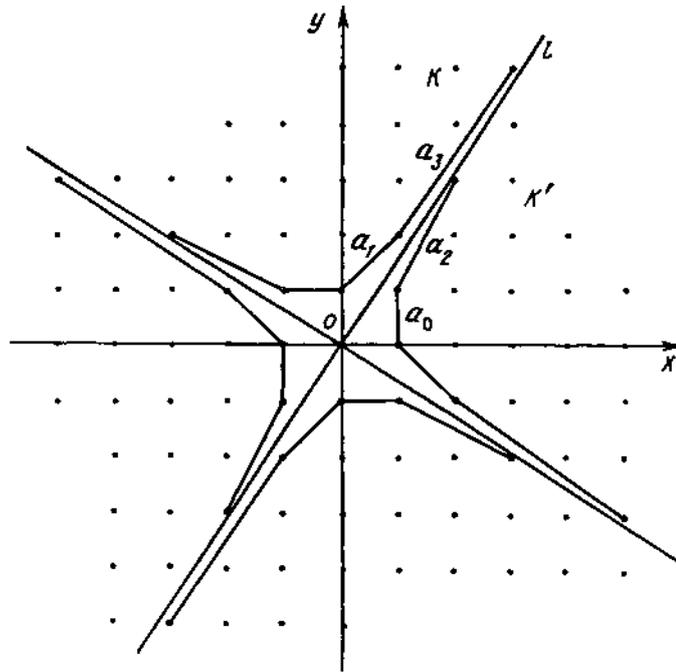


Рис. 2. Цепная дробь Фибоначчи  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$  и

выпуклые оболочки в инвариантных углах оператора

Фибоначчи  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) комбинаторная структура одной (любой) из границ, оснащенная длинами ребер и углами между соседними ребрами, периодична, начиная с некоторого момента.

Периодичность границ выпуклых оболочек для квадратично-иррациональных чисел  $\alpha$  объясняется тем, что в этом случае существует линейный изоморфизм целочисленной решетки (т.е.  $SL_n(\mathbb{Z})$ -оператор), для которого луч  $l$  инвариантен и который сдвигает хвосты границ оболочек вдоль периода. Иррегулярность границ в начале происходит из-за того, что вторые стороны углов, в которых берутся оболочки, лучи  $Ox$  и  $Oy$ , никак не связаны с  $SL_2(\mathbb{Z})$ -оператором. Возьмем произвольный угол  $K$  на плоскости с вершиной в  $O$  и границу выпуклой оболочки целых точек (исключая точку  $O$ ) в нем.

Граница является бесконечной в обе стороны ломаной (рис. 5). Бесконечность с каждой стороны достигается либо бесконечным числом

ребер, либо ребром бесконечной длины.

Аналог теоремы о существовании и единственности числа, определяемого цепной дробью, звучит так: для произвольно заданной комбинаторной структуры бесконечной в обе стороны ломаной, оснащенной длинами ребер и углами между соседними ребрами, существует и единственный с точностью до  $GL_2(\mathbb{Z})$ -изоморфизма угол, в котором граница выпуклой оболочки целых точек имеет заданную структуру прямых всегда можно, и притом однозначно (с точностью до  $GL_2(\mathbb{Z})$ -изоморфизма), восстановить также по комбинаторной структуре границ оболочек, оснащенной длинами ребер в паре смежных углов. Но в такую комбинаторную структуру надо включить еще задание естественного соответствия между ребрами и вершинами в смежных углах: каждое ребро параллельно одному из векторов, соединяющих  $O$  с вершиной в смежном угле, что и задает взаимно-однозначное соответствие между ними.

Аналог теоремы Лагранжа устанавливает эквивалентность следующих трех условий для углов на плоскости:

- 1) угол  $K$  инвариантен относительно некоторого  $SL_n(\mathbb{Z})$ -оператора с различными действительными положительными собственными числами;
- 2) комбинаторная структура границы оболочки в  $K$ , оснащенная длинами ребер и углами между соседними ребрами, периодична;
- 3) комбинаторные структуры границ оболочек в угле  $K$  и смежном с ним угле  $K'$ , оснащенные длинами ребер, периодичны.

Изоморфизм целочисленной решетки, переводящей угол  $K$  в себя, переводит в себя также выпуклые оболочки в углах  $K$  и  $K'$ , сдвигая их границы вдоль периода.

На рис. 2 луч  $l$  имеет тангенс угла наклона  $(\sqrt{5} + 2)/2$  (число Фибоначчи). Цепная дробь этого числа имеет все неполные частные 1, т.е. периодична с самого начала и период имеет длину 1. Оператор, сдвигающий границы

верхней и нижней оболочек вдоль периода, есть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  (оператор Фибоначчи). В инвариантных углах этого оператора границы оболочек остаются без изменения в положительном октанте и периодически продолжаются дальше. (Для других операторов, вообще говоря, границы в положительном октанте над и под собственным лучом в своих началах отличаются от границ в инвариантных углах. Из-за этого и нарушается периодичность в начальных коэффициентах цепной дроби.)

Заметим, что оператор  $A$  переводит ребро  $a_i$  в  $a_{i+2}$  различая тем самым период длины 2 у дроби Фибоначчи, хотя у нее есть период длины 1. Оказывается, оператор  $A$  есть квадрат оператора  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Оператор  $\alpha$  переставляет между собой углы  $K$  и  $K'$ , переводя различая период длины 1. В связи с этим дадим такое определение целочисленной длины периода оболочек в инвариантных углах оператора. Пусть  $G$  — группа всевозможных  $GL_2(\mathbb{Z})$ -операторов, переводящих заданную пару прямых (стороны углов) в себя. Целочисленной длиной периода называется мощность минимального множества целых точек на плоскости, которое разносится на все целые точки всех четырех границ применением операторов из  $G$ . Иначе говоря — это целочисленная длина фундаментальной области границ в четырех углах по отношению к группе целочисленных операторов, переводящих четверку границ в себя. По этому определению период оболочек Фибоначчи равен 1: одна точка группой, порожденной операторами —  $E$  и  $\alpha$ , разносится на все целые точки всех четырех границ.

Перейдем теперь к многомерному случаю. Пусть  $SL_n(\mathbb{Z})$ -оператор  $A$  имеет  $n$  различных действительных положительных собственных чисел. Тогда в  $R^n$  имеется базис, составленный из собственных векторов оператора  $A$ . Конус  $K$ , натянутый на собственный базис оператора  $A$ , инвариантен относительно  $A$ . Следовательно, и граница выпуклой

оболочки целых точек в  $K$  (за исключением  $O$ ) инвариантна относительно  $A$ . Граница выпуклой оболочки в  $K$  является  $(n-1)$ -мерным многогранником, гомеоморфна  $R^{n-1}$ , и оператор  $A$  действует на ней без неподвижных точек. В этом смысле граница выпуклой оболочки в  $K$  имеет период. Фактор границы по действию группы, порожденной оператором  $A$ , гомеоморфен  $(n-1)$ -мерному цилиндру  $R^{n-2} \times S^1$ . Из теоремы Дирихле вытекает гораздо более сильная периодичность границ оболочек в инвариантных конусах -  $SL_n(Z)$  операторов.

Верно следующее. Пусть характеристический многочлен оператора  $A$  неприводим над полем рациональных чисел и все его корни действительны и положительны. Тогда в собственном конусе  $K$  оператора  $A$  действует свободная группа с  $(n-1)$ -образующими, составленная из  $SL_n(Z)$ -операторов. Фактор границы выпуклой оболочки целых точек в  $K$  по действию этой группы гомеоморфен  $(n-1)$ -мерному тору. Иначе можем сказать, что оболочка имеет  $(n-1)$  период.

Комбинаторная структура любого многогранника, вложенного в  $R^n$ , не изменяется при действии линейных изоморфизмов пространства  $R^n$  (границы переходят в границы тех же размерностей, сохраняется инцидентность граней). Поэтому комбинаторная структура границы выпуклой оболочки в  $K$  имеет  $(n-1)$  период. Столько же периодов имеет и граница выпуклой оболочки в  $K$ , оснащенная любыми  $GL_n(Z)$ -инвариантами.

Комбинаторную структуру  $(n-1)$ -мерной границы выпуклой оболочки целых точек в симплицальном  $n$ -мерном конусе, оснащенную теми или иными локальными  $GL_n(Z)$ -инвариантами, мы и хотели бы назвать  $(n-1)$ -мерной дробью. Однако пока мы еще не знаем, какие именно инварианты полезно брать.

Мы вычислили границы выпуклых оболочек в инвариантных конусах некоторых  $SL_3(Z)$ -операторов. Один из этих операторов есть трехмерный

аналог двумерного оператора Фибоначчи  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \alpha^2$  где  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

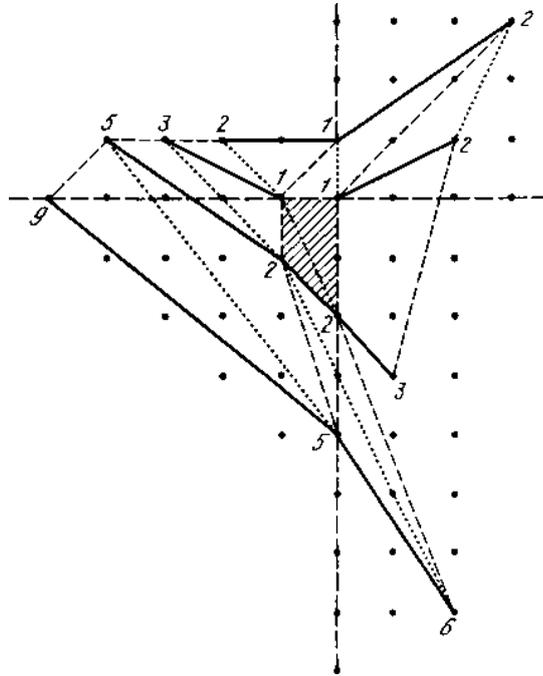


Рис. 6. Проекция границы выпуклой оболочки в инвариантном конусе трехмерного оператора Фибоначчи  $A$  на плоскость  $(z, y)$  вдоль оси  $x$

Рядом с проекцией каждой точки отмечена ее  $x$ -координата. Фундаментальная область заштрихована. Операторы  $A$  и  $B = (A - E)^2 / A$  сдвигают ее вдоль пунктирных и сплошных ребер соответственно. Из двух заштрихованных треугольников левый нижний находится на расстоянии 1 от  $O$  правый верхний — на расстоянии 2

Для оператора Фибоначчи  $A$  границы оболочек в его восьми инвариантных конусах выглядят следующим образом. Все 8 границ изоморфны между собой: они переставляются операторами  $-E$  и  $(A - E)$ . Операторы сдвигов вдоль периодов в каждом из конусов суть  $A = \alpha^2$  и  $B = (A - E)^2 / A$ . На рис. 6 изображена проекция границы оболочки на плоскость  $(z, y)$  вдоль оси  $x$ . Эта проекция устанавливает гомеоморфизм между границей оболочки и плоскости.

Гораздо лучше периодическая структура оболочки видна при другом

гомоморфизме. А именно пусть  $u_1, u_2, u_3$  - координаты вдоль собственных прямых оператора  $A$ . Возьмем границу выпуклой оболочки в конусе  $K : u_i \geq 0$ . Спроецируем ее вдоль лучей, проходящих через  $O$ , на "обобщенную гиперболу" — поверхность  $u_1 u_2 u_3 = 1$ . Затем эту поверхность отображим на гиперплоскость  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$  в пространстве  $R^3$  с координатами  $v_1, v_2, v_3$  отображением  $v_i = \ln u_i$ .

Образ границы оболочки при композиции описанных двух гомеоморфизмов представлен на рис. 7.

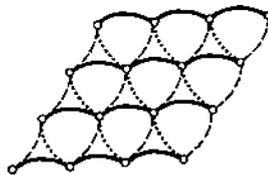


Рис. 7. Граница оболочки в собственном конусе оператора Фибоначчи  $A$  после композиции однородного проектирования на обобщенную гиперболу и логарифмической ее развертки. Операторы  $B$  и  $(A - E)^2$  сдвигают фундаментальную область соответственно вдоль пунктирных и сплошных ребер. Треугольник с меньшей площадью проекции находится на расстоянии 1 от  $O$ , с большей площадью — на расстоянии 2

Фундаментальная область (т.е. часть границы, которая операторами сдвига разносится без наложений на всю границу) состоит из двух треугольников, имеющих общее ребро (см. рис. 6).

Оба треугольника имеют целочисленную площадь 1. Целочисленное расстояние от плоскостей треугольников до  $O$  равно 1 для одного треугольника и 2 — для другого. Если обобщить определение нецелочисленной длины периода для одномерных границ, то можно считать, что период для оболочек Фибоначчи равен 1 (одна точка группой, порожденной операторами —  $E, B, (A - E)$ , разносится на все целые точки границ) или период равен 2 (фундаментальная область имеет суммарную площадь 2). (Различные числа получились из-за того, что неудачно

определили целочисленную площадь минимального треугольника. Обычно ее полагают равной  $1/2$ .)

Тем самым период оболочек Фибоначчи — минимально возможный. Основное наше утверждение устанавливает, что перечисленный набор локальных  $GL_3(\mathbb{Z})$ -инвариантов достаточен для однозначного восстановления выпуклой оболочки и конусов.

**Теорема 2.2.** Пусть некоторый  $GL_3(\mathbb{Z})$ -оператор имеет иррациональные действительные положительные собственные числа и пусть выпуклые оболочки во всех его восьми инвариантных конусах  $GL_3(\mathbb{Z})$ -изоморфны между собой. Если комбинаторная структура границы оболочки в одном из конусов, оснащенная площадями граней и их расстояниями до  $O$ , изоморфна такой же структуре для границы оболочек в собственном конусе оператора Фибоначчи, то собственный конус и выпуклая оболочка в нем  $GL_3(\mathbb{Z})$ -изоморфны собственному конусу оператора Фибоначчи и выпуклой оболочке в нем.

Следующим нашим результатом мы утверждаем, что среди всех операторов у оператора Фибоначчи в инвариантном конусе самая простая комбинаторная структура границы оболочки, оснащенная площадями граней и их расстояниями до  $O$ . В оценке простоты мы позволяем волюнтаризм. А именно сначала мы сравниваем периоды — чем меньше, тем проще. Если периоды равны, то сравниваем расстояния от граней до  $O$ . Как уже отмечалось, у оболочки Фибоначчи период минимально возможный. А вот расстояние от одной из граней до нуля (см. рис. 5), казалось бы, можно уменьшить.

**Теорема 2.2.** Не существует  $SL_3(\mathbb{Z})$ -оператора с периодом границ оболочек, равным 1, и расстоянием 1 от всех граней до  $O$ .

## § 2.2. Геометрия одномерных границ выпуклых оболочек

В этом разделе докажем для границ выпуклых оболочек в углах на плоскости аналоги теоремы о существовании числа, определяемого цепной дробью, и теоремы Лагранжа. Чтобы не вникать в частности, всюду будем предполагать, что стороны углов на плоскости являются иррациональными прямыми.

**Предложение 2.1.** Следующие условия эквивалентны:

1. Целочисленный треугольник с двумя сторонами, образованными векторами  $u$  и  $v$ , имеет площадь 1.
2. Параллелограмм, натянутый на векторы  $u$  и  $v$ , имеет площадь 2
3. Параллелограмм, натянутый на векторы  $u$  и  $v$ , не содержит целых точек, кроме своих вершин.
4. Определитель, составленный из координат векторов  $u$  и  $v$  в базисе, связанном с решеткой на плоскости, содержащей  $u$  и  $v$ , равен 1.
5. Одна (любая) сторона треугольника, образованного векторами  $u$  и  $v$ , находится на расстоянии 1 от третьей вершины треугольника.

**Предложение 2.2.** Граница выпуклой оболочки целых точек в угле с иррациональными сторонами есть бесконечнозвенная в обе стороны ломаная линия с вершинами в целых точках. Прямые, содержащие ее ребра, имеют компактные пересечения с углом и лежат на расстоянии 1 от  $O$ . Между ребрами и вершинами в двух смежных углах имеется взаимно-однозначное соотношение двойственности с сохранением порядка, определяемое свойством границ: каждое ребро границы оболочки параллельно одному из векторов, соединяющих  $O$  с вершинами границы оболочки в смежном угле и обратно. При этом длина ребра и угол в двойственной ему вершине равны по величине.

**Доказательство.** Пусть плоскость разделена четырьмя прямыми на 4 угла: два вертикальных  $K$  и  $K'$  и два смежных с ними  $L$  и  $L'$ . Укажем алгоритм построения четырех ломаных, являющихся границами выпуклых

оболочек сразу в четырех углах, и проверим, что они обладают нужными свойствами.

Найдем целочисленный отрезок в  $K$ , продолжение которого пересекает стороны угла и который лежит на расстоянии 1 от  $O$  (доказательство его существования опустим). Этот отрезок будет исходным ребром ломаной в  $K$ . Остальные ребра во всех четырех углах строим так, чтобы удовлетворить условию двойственности. А именно Пусть — все целые точки на исходном ребре в  $K$  (рис. 5).

Ребро  $[x_1, x_k]$  отразим симметрично относительно  $O$  и получим ребро  $[x'_1, x'_k]$  в  $K'$ . Вершина  $y_1$  в  $L$ , двойственная к  $[x_1, x_k]$  из  $K$  и к  $[x'_1, x'_k]$  из  $K'$ , получается параллельным перенесением в  $O$  вектора  $[x_{k-1}, x_k]$ . Ребро в  $L$ , двойственное к  $x_k$ ,

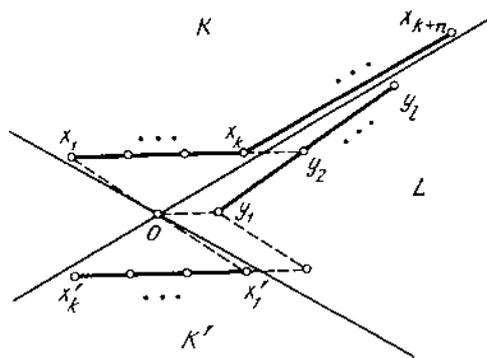


Рис. 5. Построение границ выпуклых оболочек

проводим из  $y_1$  параллельно к  $[x_1, x_k]$ . Вторую целую точку на нем, лежащую на продолжении  $[x_1, x_k]$ , обозначим  $y_2$  и последнюю -  $y_1$ . Затем в  $K$  строим ребро, двойственное к  $y_1$  откладывая от  $x_k$  отрезок параллельно отрезку  $[O, y_1]$  (на рис. 8 не изображено), и т.д. до бесконечности. От  $y_2$  двигаемся в другую сторону, откладывая от него ребро, двойственное к  $x'_1$ , затем от  $x_1$  откладывая ребро, двойственное к концу предыдущего ребра, и также до бесконечности. Отражая построенные ломаные относительно  $O$ , достраиваем ломаные в  $K$  и  $K'$  и строим ломаную в  $L$ .

Каждое следующее построенное ребро, как и исходное, лежит на расстоянии 1 от  $O$ . Так, например, второе ребро  $[y_1, y_l]$  лежит на расстоянии 1 от  $O$ , поскольку в параллелограмме  $[x_k, O, y_1, y_2]$  нет целых точек. Компактность пересечения очевидна. Поэтому все построенные ребра (их продолжения) являются опорными прямыми к выпуклым оболочкам в своих углах. Отсюда несложно вывести, что построенные ломаные являются границами оболочек. Равенство величин углов и длин для двойственных вершин и ребер проверим для вершины  $x_k$  и ребра  $[y_1, y_2]$ . Для измерения угла в  $x_k$  возьмем векторы единичной длины вдоль его сторон. Тогда угол будет равен площади треугольника, натянутого на эти векторы. Но по построению векторы, идущие вдоль сторон угла, в точке  $x_k$  равны векторам  $Oy_1$  и  $Oy_2$ . Поэтому угол равен площади треугольника  $[O, y_1, y_2]$ . Поскольку  $[y_1, y_2]$  лежит на расстоянии 1 от  $O$ , площадь этого треугольника равна длине стороны  $[y_1, y_2]$ .

**Предложение 2.3.** Любая из двух заданных структур границ выпуклых оболочек целых точек в углах на плоскости однозначно, с точностью до  $GL_2(\mathbb{Z})$  - изоморфизма, определяет пару прямых, являющихся сторонами углов:

1) комбинаторная структура бесконечнозвенной в обе стороны ломаной, оснащенная длинами ребер и углами между соседними ребрами

2) комбинаторная структура двух бесконечнозвенных в обе стороны ломаных с фиксированным соотношением двойственности между вершинами одной и ребрами другой, оснащенная длинами ребер.

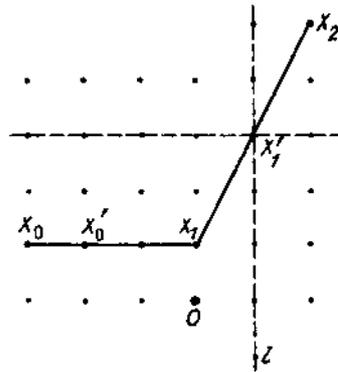


Рис. 9. Построение  
 границы оболочки по  
 заданным длинам и углам

**Доказательство.** Из соотношения двойственности следует, что пп. 1) и 2) предложения эквивалентны. Докажем п. 1).

Покажем, что всегда можно и притом однозначно с точностью до  $GL_2(Z)$ -изоморфизма построить выпуклую ломаную с заданными длинами и углами с условием, что все ребра лежат на расстоянии 1 от  $O$ , и проверим, является ли такая ломаная границей выпуклой оболочки целых точек в некотором угле (рис. 9).

Построим сначала единичный отрезок  $x_0 x'_0$ , лежащий на нулевом ребре ломаной  $x_0 x'_1$ . Отрезок  $x_0 x'_0$  лежит на расстоянии 1 от  $O$ , поэтому векторы  $Ox_0$  и  $Ox'_0$  образуют базис в  $Z^2$ . Следовательно, начальный отрезок  $x_0 x'_0$  существует и единствен с точностью до  $GL_2(Z)$ -изоморфизма. Дальнейшие построения возможны и однозначны. Строим конец  $x_1$  нулевого ребра  $x_0 x'_1$ , удлиняя начальный отрезок  $x_0 x'_0$  в нужное число раз. Затем строим единичный отрезок  $x_1 x'_1$  на следующем ребре  $x_1 x'_2$ . Для того чтобы  $x_1 x'_1$  лежал на расстоянии 1 от  $O$ , точка  $x'_1$  должна лежать на прямой  $l$ , параллельной отрезку  $Ox_1$  и лежащей на расстоянии 1 от  $O$ . Для того чтобы угол в вершине  $x_1$  равнялся заданной величине  $\varphi_1$ , точка  $x'_1$  должна лежать на прямой  $m$ , параллельной  $x_0 x'_1$  и лежащей на расстоянии  $\varphi_1$  от него. Дополнительные условия выпуклости ломаной и отделимости от  $O$

позволяют однозначно выбрать, по какую сторону от указанных отрезков надо проводить прямые  $l$  и  $m$ . Эти две прямые всегда пересекаются в целой точке. Она и есть  $x'_1$ . Вектор  $x_1 x'_1$  при этом всегда получается единичным. Вторую вершину  $x_2$  второго ребра находим, удлинив единичный вектор  $x_1 x'_1$  на нем в нужное число раз. И т.д. Аналогично, двигаясь в другую сторону, строим вершины  $x_{-1}, x_{-2}, \dots$ . Стороны угла, в которых построенная ломаная является границей выпуклой оболочки, суть предельные положения при  $k \rightarrow +\infty$  и  $k \rightarrow -\infty$  лучей, проходящих через  $O$  и  $x_k$ .

**Теорема 2.4** (Лагранж). Две иррациональные прямые инвариантны относительно некоторого  $GL_2(Z)$ -оператор  $A$  тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух условий:

- 1) комбинаторная структура границы выпуклой оболочки в одном из углов, образованных прямыми, оснащенная длинами ребер и углами между соседними ребрами, периодична;
- 2) комбинаторные структуры границ оболочек в двух смежных углах, оснащенная длинами ребер, периодичны.

**Доказательство.** Опять в силу двойственности достаточно доказать п. 1) теоремы.

Если прямые инвариантны относительно некоторого  $GL_2(Z)$ -оператора  $A$ , то угол между ними инвариантен относительно  $A^2$ . Поэтому выпуклая оболочка инвариантна относительно  $A^2$ , откуда следует периодичность границы. Обратно, пусть граница периодична с периодом  $k$ . Перенумеруем элементы границы, сдвинув нумерацию на  $k$ . В силу периодичности получим ту же самую комбинаторную структуру, оснащенную длинами и углами. Из предложения 2.3 следует, что существует  $GL_2(Z)$  оператор  $A$ , переводящий исходную ломаную в перенумерованную. Иначе говоря, оператор  $A$  сдвигает границу вдоль

периода. Следовательно, и выпуклая оболочка точек в угле, и сам угол, и его стороны инвариантны относительно  $A$ .

**Замечание 2.5.** Если комбинаторные структуры границ оболочек в двух смежных углах, оснащенные длинами ребер, периодичны и равны между собой, то существует  $GL_2(\mathbb{Z})$ -оператор  $A$ , сдвигающий оболочку в каждом из углов вдоль периода, и  $GL_2(\mathbb{Z})$ -оператор  $B$ , переставляющий оболочки между собой. Умножая  $B$  на подходящую (положительную или отрицательную) степень оператора  $A$ , можно найти оператор  $B' = BA^m$  такой, что  $(B')^2 = A$ . Оператор  $B'$  различает самый короткий период цепной дроби, соответствующей собственному направлению оператора  $A$ .

### § 2.3. Периодичность оболочек в инвариантных конусах операторов из $GL_n(\mathbb{Z})$

В этом разделе мы по-своему сформулируем и докажем известную теорему о периодичности многомерной границы выпуклой оболочки. При этом реализуем действие  $GL_n(\mathbb{Z})$ -оператора как умножение на число в подходящем алгебраическом расширении поля рациональных чисел. Такой реализацией иногда будем пользоваться в дальнейшем.

**Определение 3.1.** Полным модулем в конечном расширении  $P$  степени  $n$  поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  называется произвольная аддитивная подгруппа из  $P$  ранга  $n$ .

В дальнейшем рассматриваем только полные модули и слово ”полный” часто опускаем.

Всякий полный модуль имеет базис, состоящий из  $n$  линейно независимых над  $\mathbb{Q}$  элементов. Любой элемент модуля есть целочисленная комбинация базисных элементов. Таким образом, в полном модуле имеется структура  $n$ -мерной целочисленной решетки  $\mathbb{Z}^n$ . Эта решетка вложена в поле  $P$ , имеющее структуру  $n$ -мерного линейного пространства

над  $Q$ . Означим это линейное пространство и будем считать, что модуль вложен также в  $R^n$ .

Умножение элементов поля  $P$  на один фиксированный элемент из  $P$  является линейным оператором в  $Q^n$ , действие которого продолжается на  $R^n$ . Элемент  $\alpha \in P$  называется единицей модуля  $M$ , если  $\alpha M = M$ . Таким образом, единицы модуля — это такие линейные операторы в  $R^n$ , которые реализуются как умножение на элемент из поля и которые являются изоморфизмами решетки модуля.

**Предложение 2.4.** Для любого оператора  $A \in GL_n(R)$ , характеристический многочлен  $\chi$  которого неприводим, найдется модуль  $M$  в алгебраическом расширении  $Q$ , порожденном корнем  $\alpha$  многочлена  $\chi$ , для которого  $\alpha$  является единицей и действие его умножением в  $M$  изоморфно действию  $A$  в  $Z^n$ .

**Доказательство.** В  $Z^n$  выберем произвольный вектор  $e$ . Векторы  $e, Ae, A^2e, \dots, A^{n-1}e$  линейно независимы, так как иначе у оператора  $A$  имелось бы инвариантное подпространство и характеристический многочлен  $\chi$  был бы приводим. Выразим базис  $\{e_i\}$  решетки  $Z^n$  через эти векторы:  $e_i = \sum a_{ij} A^{j-1} e$  где  $a_{ij} \in Q$ . Те же линейные комбинации  $f_i = \sum a_{ij} \alpha^{j-1}$  степеней корня  $\alpha$  многочлена  $\chi$  образуют базис модуля  $M$ .

Ниже сформулируем теорему Дирихле лишь для частного случая алгебраического расширения поля  $Q$ , все автоморфизмы которого в поле комплексных чисел действительны.

**Теорема 2.5.** (Дирихле). Пусть поле  $P$  порождено корнем  $\alpha$  рационального неприводимого многочлена  $\chi$  степени  $n$ , все корни которого действительны, и  $M$  — полный модуль в  $P$ . Тогда группа единиц модуля  $M$  является прямым произведением  $n-1$  бесконечных циклических групп и группы  $\{\pm 1\}$ .

Рассмотрим теперь многомерный аналог цепной дроби. Пусть  $K$  — симплицальный конус в  $R^n$  (т.е.  $K$  состоит из неотрицательных линейных

комбинаций  $n$  линейно независимых векторов из  $R^n$ ). Обозначим через  $V(K)$  выпуклую оболочку всех целых точек из  $K$ , исключая  $O$ , и через  $\partial V(K)$  — границу оболочки.

**Предложение 2.5.** Пусть границы  $n$ -мерного симплицеального конуса  $K$  и двойственного  $k$  ему конуса  $K'$  не содержат целых точек. Тогда выпуклая оболочка целых точек  $V(K)$  и ее границы обладают следующими свойствами:  $V(K)$  есть замкнутое множество; любая опорная гиперплоскость  $H$  к  $V(K)$  компактно пересекает конус  $K$ ; соответствующая "грань" множества  $V(K)$ , т.е. пересечение  $H \cap V(K)$ , совпадает с выпуклой оболочкой конечного множества  $H \cap K \cap Z^n$ , в частности является выпуклым многогранником; граница  $\partial V(K)$  является объединением  $(n-1)$ -мерных "граней" оболочки  $V(K)$ ; граница  $\partial V(K)$  гомеоморфна пространству  $R^{n-1}$ . Линейный гомеоморфизм можно получить, например, спроецировав границу  $\partial V(K)$  вдоль любого внутреннего луча из  $K$  на любую опорную гиперплоскость к  $V(K)$ . Образ граней при линейном проецировании устанавливает разбиения  $R^{n-1}$  на конечные выпуклые многогранники.

Назовем  $(n-1)$ -мерным аналогом цепной дроби комбинаторную структуру границы оболочки  $\partial V(K)$ , оснащенную теми или иными локальными  $GL_n(Z)$ -инвариантами.

Пусть теперь конус  $K$  инвариантен относительно некоторого оператора  $A \in GL_n(Z)$ . Очевидно, что выпуклая оболочка  $V(K)$  и ее граница  $\partial V(K)$  также инвариантна относительно  $A$ . Тем самым оператор  $A$  действует на  $\partial V(K)$ .

**Теорема 2.6.** Пусть  $GL_n(Z)$ -оператор  $A$  имеет неприводимый характеристический многочлен  $\chi$ , все корни которого действительны. Такой оператор  $A$  имеет действительный собственный базис. Пусть  $K$  —

конус, натянутый на такой базис. Тогда на границе оболочки  $\partial V(K)$  действует свободная абелева группа с  $n-1$  образующей. Фактор оболочки  $\partial V(K)$  по действию этой группы является  $(n-1)$ -мерным тором.

**Доказательство.** Согласно предложению 3.2 действие оператора  $A$  в  $Z^n$  можно реализовать как умножение на число в подходящем модуле  $M$  алгебраического расширения  $Q$ , порожденного корнем многочлена  $\chi$ . Согласно теореме Дирихле в модуле  $M$  действует свободная абелева группа  $G$  с  $n-1$  образующей. Поскольку все операторы из  $G$  коммутируют с  $A$ , имеющим различные собственные значения, собственный базис для  $A$  является собственным и для всей  $G$ . Возьмем в  $G$  подгруппу  $G^2$ , состоящую из квадратов элементов. Группа  $G^2$  имеет  $n-1$  образующую. Она действует на внутренность конуса  $K$  без неподвижных точек. Следовательно, группа  $G^2$  действует на  $\partial V(K)$  также без неподвижных точек и фактор по ее действию является  $(n-1)$ -мерным тором.

Группа линейных  $GL_n(Z)$  изоморфизмов, действуя на многогранной поверхности, сохраняет, очевидно, ее комбинаторную структуру и любые ее локальные  $GL_n(Z)$ -инварианты. Тем самым комбинаторная структура границы оболочки, оснащенная любыми локальными  $GL_n(Z)$ -инвариантами, в собственном конусе оператора  $A$  с  $n-1$  неприводимым характеристическим многочленом имеет  $n-1$  период.

**Замечание.** У каждого оператора  $A \in GL_n(Z)$  с различными положительными собственными числами имеется  $2^n$  инвариантных конуса. Выпуклые оболочки в противоположных конусах  $K$  и  $K$ , очевидно,  $GL_n(Z)$ -изоморфны между собой (переводятся друг в друга оператором  $-E$ ). В оставшихся  $2^{n-1}$  конусах оболочки, вообще говоря, могут быть различными. В разд. 4 приведен пример  $GL_n(Z)$ -оператора, у которого даже комбинаторные структуры оболочек в разных конусах различны.

**Замечание.** Быть может, более естественно границы оболочек ставить в соответствие не оператору, а модулю. А именно: пусть  $P$  —

алгебраическое расширение степени  $p$  поля  $Q$ , все автоморфизмы которого в  $C$  действительны. Все элементы поля  $P$ , действуя умножением, имеют один и тот же собственный базис в оветствии с линейного пространства поля  $P$ . По каждому модулю  $M$  можно построить  $2^n$  выпуклых оболочек в соответствующих инвариантных конусах. Ту же систему конусов и оболочек получим для любого из  $GL_n(Z)$ -операторов, соответствующих единицам этого модуля  $M$ .

**Предложение 2.6.** Пусть  $A - GL_n(Z)$ -оператор с неприводимым характеристическим многочленом и  $B - GL_n(Z)$  - оператор, коммутирующий с  $A$ . Тогда  $B$  есть многочлен степени  $n-1$  от  $A$ , т.е. оператор  $B$  реализуется как единица того же модуля, что и оператор  $A$ .

Доказательство. Поскольку характеристический многочлен оператора  $A$  неприводим, для любого вектора  $e$  все векторы  $e, Ae, \dots, A^{n-1}e$  линейно независимы, т.е. являются базисом в  $R^n$ . Взяв  $e$  из  $Z^n$ , получим целочисленный базис, в котором вектор  $Be$  раскладывается с рациональными коэффициентами  $Be = b_0e + b_1Ae + \dots + b_{n-1}A^{n-1}e$ . Покажем, что тогда  $B = b_0 \cdot 1 + b_1A + \dots + b_{n-1}A^{n-1}$ . Для этого достаточно проверить действие левой и правой части на базисе. Имеем

$$\begin{aligned} B(A^k e) &= A^k (Be) = A^k (b_0e + b_1Ae + \dots + b_{n-1}A^{n-1}e) = \\ &= b_0A^k e + b_1A \cdot A^k e + \dots + b_{n-1}A^{n-1}A^k e = (b_0 \cdot 1 + b_1 A + \dots + b_{n-1} A^{n-1}) A^k e. \end{aligned}$$

## § 2.4..Некоторые примеры двумерных цепных дробей

Мы посчитали выпуклые оболочки в инвариантных конусах для двух однопараметрических (с дискретным параметром) серий  $SL_3(Z)$ -операторов, каждая из которых начинается оператором Фибоначчи. Часть вычислений проводилась на компьютере, однако ответы можно проверить и вручную.

Напомним, что трехмерным оператором Фибоначчи мы называем оператор

$$A = \alpha^2, \text{ где } \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Предложение 2.7.** У оператора  $A$  имеется 3 разных иррациональных действительных положительных собственных числа. Все 8 конусов, натянутые на собственные векторы оператора  $A$ ,  $GL_3(\mathbb{Z})$ -изоморфны между собой. Изоморфизмы осуществляются операторами  $\pm E$ ,  $\pm \alpha$ ,  $\pm(A - E)$  и  $\pm \alpha(A - E)$ . Группа операторов, оставляющих решетку и каждый из конусов на месте, порождена операторами  $A$  и  $B = (A - E)^2 / A$ . Фундаментальная область границы выпуклой оболочки в каждом из конусов состоит из двух треугольников  $\Delta_1 = (e, Ae, Be)$  и  $\Delta_2 = (Ae, Be, ABe)$  где  $e$ -произвольная вершина выпуклой оболочки. Одной из вершин одной

из оболочек является точка  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Каждый из треугольников  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  имеет

целочисленную площадь 1. Плоскость первого треугольника лежит на расстоянии 1 от 0, плоскость второго — на расстоянии 2 (см. рис.6).

**Доказательство.** Остановимся лишь на некоторых моментах.

Два параллелепипеда,  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , образованные векторами, идущими из  $O$  в вершины треугольников  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , имеют объемы 1 и 2 соответственно. Следовательно, в  $\Pi_1$  нет целых точек, кроме вершин, поэтому их нет и в симплексе  $S_1$ , натянутом на  $O$  и  $\Delta_1$ . В  $\Pi_2$  есть целая точка. Она находится в центре  $\Pi_2$ , поэтому в симплексе  $S_2$ , натянутом на  $O$  и  $\Delta_2$ , тоже нет целых точек. Операторами  $A$  и  $B$  пара симплексов  $S_1$  и  $S_2$  разносится на всю внутренность конуса, лежащую вне поверхности, образованной образами треугольника  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  по действием  $A$  и  $B$ . Следовательно, вне построенной поверхности целых точек нет.

Проверим еще, что эта поверхность выпукла. Если на поверхности, образованной треугольниками  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , ввести какую-нибудь ориентацию, то лучи, исходящие из  $O$ , будут пересекать эту поверхность с одной стороны, так как симплексы  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются лишь по границе. Свойства лучей пересекать поверхность с одной стороны сохранятся при действии операторов  $A$  и  $B$ . Следовательно, наша поверхность однозначно проектируется на любую плоскость, компактно пересекающую конус. Для выпуклости такой поверхности достаточно ее локальная выпуклость. Последнюю достаточно проверить для трех сторон треугольника  $\Delta_1$ , что легко сделать.

Далее используем реализацию  $SL_3(Z)$ -операторов в виде единиц для подходящих модулей подходящих кубических расширений поля  $Q$ .

Пусть  $X$  — корень уравнения

$$X^3 - (m+1)X^2 + mX - 1 = 0 \quad (1)$$

или

$$X^3 - (m+3)X^2 + mX - 1 = 0. \quad (2)$$

Обозначим через  $P$  кубическое расширение поля  $Q$ , порожденное элементом  $X$ , и через  $M$  — модуль в нем с базисом  $\{1, X, X^2\}$ . Оператор умножения на элемент из поля будем обозначать той же буквой, что и сам элемент.

### **Предложение 2.8.**

1. Уравнения (1) и (2) неприводимы. Уравнение (1) при  $m \geq 5$  и уравнение (2) при любых  $t$  имеют только действительные корни, и, следовательно, поле  $P$  имеет три плоскости, инвариантные относительно умножения на элементы поля, которые делят о вещественное трехмерное линейное пространство поля на 8 симплицальных конусов.

2. Для уравнения (1) при  $m=5$  конусы и оболочки изоморфны конусам и оболочкам Фибоначчи. При  $m \geq 5$  четыре конуса изоморфны между собой, изоморфизмы суть  $\pm 1$  и  $\pm(X-1)$ . Группа периодов в одном

конусе порождена элементами  $X$  и  $Y$ , где  $Y = (X - 1)^2 / X$ . Фундаментальная область границы оболочки в конусе, содержащем 1, состоит из двух треугольников  $(1, X, Y)$  и  $(X, Y, XY)$ . Оба треугольника имеют площадь 1. Расстояние до нуля от плоскости первого треугольника равно 1, от плоскости второго равно  $m - 1$ . Для  $m = 6$  граница оболочки в одном из конусов приведена на рис. 7.

3. Для уравнения (2) конусы и оболочки для  $m$  и  $(-m - 3)$  изоморфны между собой. Для  $m = -1$  и  $m = -2$  они изоморфны конусу и оболочке Фибоначчи. Для любых  $m$  все 8 конусов изоморфны между собой. Изоморфизмы осуществляются операторами  $\pm 1, \pm X, \pm(X - 1), \pm X(X - 1)$ . Пусть  $\varphi = X^2, \Psi = (X - 1)^2$ . Фундаментальная область границы оболочки в одном из конусов состоит из двух

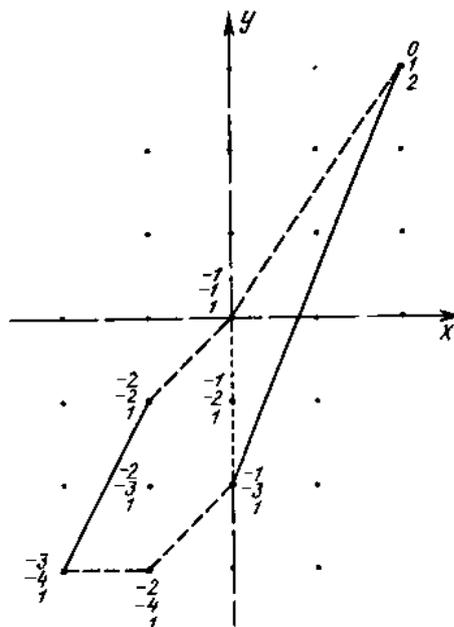


Рис. 10. Граница выпуклой оболочки в одном из конусов для оператора умножения на  $x$ , удовлетворяющего уравнению  $x^3 - 7x^2 + 6x - 1 = 0$  в базисе  $1, x,$

Изображена проекция фундаментальной области на первые две координаты вдоль вектора  $(-1, -1, 1)$ . Рядом с вершинами отмечены их координаты до проецирования. Операторы сдвигов вдоль периодов совмещают границы области, помеченные одинаковыми типами линий

треугольников  $\Delta_1 = (1, \varphi, \psi)$  и  $\Delta_2 = (\varphi, \psi, \varphi\psi)$ . Первый треугольник имеет площадь 1 и его плоскость находится на расстоянии 2 от нуля. Второй треугольник имеет площадь  $m^2 + 3m + 3$  и находится на расстоянии 1 от нуля.

Доказательство этого предложения подобно доказательству предыдущего

## § 2.5. Геометрия границ выпуклых оболочек

Для оболочек в двумерных смежных конусах, т.е. углах на плоскости, имеется соотношение двойственности (предложение 2.2): всякое ребро оболочки, будучи перенесенным в начало координат, проходит через вершину оболочки в смежном угле. Для конусов большей размерности это свойство не выполнено. Однако перенесенные в  $O$  ребра проходят через другой, более широкий класс точек в смежных конусах, через так называемые минимальные точки. Это свойство ребер позволит нам в дальнейшем выписать конечный набор уравнений, которым должны удовлетворять изоморфизмы границ оболочек с той же структурой, что и оболочка Фибоначчи, или с более простой структурой.

**Определение.** Целая точка в конусе называется минимальной в нем, если она не является суммой никаких двух других ненулевых целых точек из того же конуса.

Легко видеть, что каждая целая точка, лежащая на границе выпуклой оболочки, является минимальной. Обратное верно лишь для двумерных конусов.

**Предложение 2.9.** Пусть  $R^n$  разбито  $p$  плоскостями на  $2p$  симплициальных конуса. Вектор единичной длины на любом из ребер выпуклой оболочки в одном из конусов, будучи перенесенным в  $O$ , оканчивается в одной из минимальных точек в одном из оставшихся  $2^n - 2$  (учитывая симметричный) конусов.

**Доказательство.** Пусть  $v$  — единичный вектор и точки  $P$  и  $P+v$  принадлежат одному ребру границы оболочки в конусе  $K$ . Поскольку  $P$  и  $P+v$  — минимальные точки в  $K$ , вектор  $v$  не принадлежит ни  $K$ , ни  $-K$ . Следовательно,  $v \in K'$ , где  $K'$  — один из оставшихся  $2^n - 2$  конусов. Допустим  $v$  — не минимальная точка в  $K'$ . Тогда  $v = u + w$ , где  $u, w \in K'$ , и поскольку вектор  $v$  — единичный, векторы  $u$  и  $w$  не пропорциональны вектору  $v$ .

Выберем координаты, идущие вдоль ребер конуса  $K'$  и положительные на них. Тогда координаты векторов  $v, u$  и  $w$  будут положительны и  $v_i \leq u_i, v_i \leq w_i$ . В силу этих неравенств векторы  $P+u$  и  $P+w$  принадлежат конусу  $K$ . Следовательно, выпуклая оболочка в  $K$  содержит параллелограмм с вершинами  $P, P+u, P+v, P+w$ . Отрезок  $[P, P+v]$  является диагональю этого параллелограмма, следовательно, не может являться частью ребра выпуклой оболочки.

**Определение.** Разобьем границу выпуклой оболочки каким-нибудь образом на симплексы. Граничными кубами в конусе (определяемыми данным симплициальным разбиением) назовем кубы, натянутые на каждую тройку векторов, идущих из  $O$  в вершины симплекса.

**Предложение 2.10.** Для любого симплициального разбиения границы выпуклой оболочки в конусе все минимальные точки либо являются вершинами симплексов, либо лежат строго внутри граничных кубов.

**Доказательство.** Любая точка  $P$  из конуса принадлежит одному из конусов, натянутых на симплексы. Если  $v_1, \dots, v_n$  — вершины такого симплекса, то  $P = \sum \alpha_i v_i, \alpha_i \geq 0$ . Соответствующий этому симплексу куб выделяется условием  $\alpha_i < 1$ . Если точка  $P$  лежит вне этого куба, то одно из  $\alpha_k \geq 1$ . Тогда

$$P = \left[ \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i + (\alpha_k - 1) v_k \right] + v_k$$

Если  $P$  — минимальная точка, выражение в квадратных скобках равно нулю и  $P$  совпадает с вершиной симплекса  $v_k$ .

**Следствие.** Для любых симплициальных разбиений границ оболочек в конусах единичный вектор любого ребра оболочки, будучи перенесенным в  $O$ , либо является вершиной симплекса, либо лежит строго внутри граничного куба в одном из оставшихся конусов.

## § 2.6. Свойства изоморфизмов самых простых двумерных оболочек

Самыми простыми оболочками мы называем простые и сверхпростые оболочки (последних, как мы докажем, не существует). Простые оболочки определяются условиями: они  $GL_3(Z)$ -изоморфны между собой во всех восьми конусах и имеют ту же комбинаторную структуру, оснащенную площадями граней и их расстояниями до  $O$ , что и оболочка Фибоначчи (см. разд. 4). Сверхпростые оболочки определяются всеми перечисленными выше свойствами с одним исключением — расстояния от всех их граней до  $O$  равны 1 (у Фибоначчи есть расстояние 2). Для того чтобы в дальнейшем доказать, что самая простая оболочка существует ровно одна, а именно оболочка Фибоначчи (см. теоремы 1.1 и 1.2), в этом разделе устанавливаем свойства  $GL_3(Z)$ -изоморфизмов соответствующих конусов.

Фундаментальная область границы самой простой оболочки состоит из двух треугольников, поэтому сдвиг оболочки вдоль любого из ребер является сдвигом на (минимальный) период и, следовательно, задается некоторым  $GL_3(Z)$ -оператором.

На границе оболочки типа Фибоначчи треугольник, находящийся на

расстоянии 2 от  $O$ , обозначим  $\Delta$  и так же обозначим любой из треугольников сверхпростой оболочки.  $SL_3(Z)$ -операторы сдвигов вдоль последовательных ребер треугольника  $\Delta$  обозначим  $A, B, (AB)^{-1}$ .

**Предложение 2.11.** Существуют  $SL_3(Z)$ -изоморфизмы  $\alpha$  и  $\beta$ , переставляющие между собой конусы, такие, что  $\alpha^2 = A, \beta^2 = B, \det \alpha = \det \beta = 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $I_1$  и  $I_2$  —  $GL_3(Z)$ -изоморфизмы, переставляющие конусы  $K$  и  $K_1, K$  и  $K_2$  соответственно, где все конусы из набора  $K, -K, K_1, -K_1, K_2, -K_2$  различны. Каждый  $I_i^2$  ( $i=1,2$ ) оставляет конусы на месте, поэтому  $I_i^2 = A^{k_i} B^{l_i}$  где  $k_i, l_i$  — целые числа. Поделив  $I_i$  на подходящие степени операторов  $A$  и  $B$  и оставив те же обозначения для новых операторов, можно добиться того, чтобы  $k_i$  и  $l_i$  равнялись каждый 0 или 1. Квадраты операторов  $I_1^2$  и  $I_2^2$  не равны между собой. Действительно, их можно реализовать как элементы кубического расширения поля  $Q$ . В поле существуют лишь два корня из элемента  $I_1^2$ . Они суть  $I_1$  и  $-I_1$ , т.е. не равны  $I_2$ . Поэтому операторы  $I_i^2$  равны двум разным операторам из набора  $A, B, AB$ . Заменяя, если надо, один из операторов  $I_i$  на  $I_i/I_j$  и меняя, если надо, знак перед оператором на ” —”, получаем требуемое.

Мы говорим, что два оператора  $GL_3(Z)$ -изоморфны между собой, если их частное есть  $GL_3(Z)$ -оператор.

Операторы  $(A-1), (B-1), ((AB)^{-1}-1)$  переводят вершину оболочки в вектор одного из ребер, т.е. в минимальную точку одного из других шести конусов. Минимальные точки в конусе со сверхпростой оболочкой — это лишь ее вершины, поскольку все граничные кубы имеют объем 1. Минимальные точки в конусе с простой оболочкой — это ее вершины и центры кубов, натянутых на грани, лежащие на расстоянии 2 от  $O$ . Следовательно, каждый из операторов  $(A-1), (B-1), ((AB)^{-1}-1)$ -это  $GL_3(Z)$ -

изоморфизм или  $GL_3(Z)$ -изоморфен оператору  $M = (1 + A + AB)/2$  переводящему вершину оболочки в центр граничного куба.

**Предложение 2.13.** Если два из операторов  $(A - 1), (B - 1), ((AB)^{-1} - 1)$   $GL_3(Z)$ -изоморфны оператору  $M$ , то третий тоже им изоморфен.

**Доказательство.** Оператор  $M$  целочисленный, но не изоморфизм решетки (изоморфизм сохраняет выпуклую оболочку), значит,  $|\det M| > 1$ . Оператор  $((AB)^{-1} - 1) = (1 - AB)/AB$   $GL_3(Z)$ -изоморфен оператору  $(AB - 1)$ .

Имеем равенство

$$\frac{AB - 1}{B - 1} - A = \frac{AB - 1 - AB + A}{B - 1} = \frac{A - 1}{B - 1} AB - 1$$

Поэтому операторы  $\frac{AB - 1}{B - 1}$  и  $\frac{A - 1}{B - 1}$  целочисленны одновременно.

Допустим, операторы  $(A - 1)$  и  $(B - 1)$  изоморфны оператору  $M$ . Тогда их частное — изоморфизм, в частности целочисленный оператор. Тогда и оператор  $\frac{AB - 1}{B - 1}$  целочисленный. Поэтому  $|\det(AB - 1)| \geq |\det(B - 1)| = |\det M| > 1$ .

Значит, оператор  $(AB - 1)$ , а вместе с ним и оператор  $((AB)^{-1} - 1)$  — не изоморфизмы. Так что для оператора  $((AB)^{-1} - 1)$  реализуется вторая возможность: быть изоморфным оператору  $M$ . Для двух других пар операторов доказательство аналогично.

**Предложение 6.3.** С точностью до переобозначения ребер треугольника  $\Delta$  в другом порядке и смены их ориентации возможны лишь следующие случаи:

- 1)  $\det(A - 1) = \pm \det(B - 1) = 1$ ,
- 2)  $\det(A - 1) = \det(B - 1) = \pm((AB)^{-1} - 1) = N$ , где  $N$  есть одно из чисел 1, 3, 9, 27.

**Доказательство.** Если два из операторов  $(A - 1), (B - 1), ((AB)^{-1} - 1)$  изоморфизмы, то заменой порядка и ориентации ребер треугольника  $\Delta$  получаем случай 1).

В противном случае все три оператора изоморфны оператору  $\underline{M}$ .

Выберем два ребра треугольника  $\Delta$  так, чтобы соответствующие им сдвиги

удовлетворяли условию  $\det(A-1) = \det(B-1) = D$ . Изменяя их порядок (и ориентацию), добиваемся того, чтобы  $D$  было положительным. При этом, очевидно,  $((AB)^{-1} - 1) = \pm D$ . Проведем следующие выкладки. Оператор  $C = M/(A-1)$  — изоморфизм. Но

$$C = \frac{1+A+AB}{2(A-1)} = \frac{2A-2-A+3+AB}{2(A-1)} = 1 + \frac{A(B-1)}{2(A-1)} + \frac{3}{2(A-1)}$$

Поскольку  $C$  — изоморфизм, оператор  $2C$  целочисленный. При этом  $2C = 2 + A(B-1)/(A-1) + 3/(A-1)$ . Первые два слагаемых, очевидно, целочисленные операторы. Следовательно, последнее слагаемое тоже. Поэтому  $\det(3/(A-1))$  — целое число. Но

$$\det\left(\frac{3}{A-1}\right) = \frac{\det(3)}{\det(A-1)} = \frac{27}{\det(A-1)},$$

Следовательно,  $\det(A-1)$  является делителем 27, т.е. равен 1, 3, 9 или 27

Возможные коэффициенты для уравнений  $x^3 + mx^2 + nx - 1 = 0$  изоморфизмов самых простых оболочек (справа — дискриминанты соответствующих уравнений).

N	m	N	Дискриминант	N	m	n	Дискриминант
1	2	-1	$49=7^2$	9	6	3	$729 = 27^2$
	0	-1	-23		-4	-5	257
3	3	-2	257	27	15	-14	72329
	-1	0	-31		-13	12	11417
	3	0	$81 = 9^2$		7	-4	2889
9	-1	-2	-31	-5	2	-279	
	6	-5	2777	7	2	1257	
	-4	3	-31	-5	-4	-231	
	4	-1	321	15	12	$35721 = 189^2$	
	-2	-1	-87	-13	-14	32009	

**Следствие.** Операторы  $\alpha$  и  $\beta$  из предложения 6.1 ( $\alpha^2 = A$ ,  $\beta^2 = B$ ,  $\det \alpha = \det \beta = 1$ ) удовлетворяют одной из систем уравнений:

$$\begin{cases} \alpha^3 + m_1 \alpha^2 + n_1 \alpha - 1 = 0 \\ \beta^3 + m_2 \beta^2 + n_2 \beta - 1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \alpha^3 + m_1 \alpha^2 + n_1 \alpha - 1 = 0 \\ \beta^3 + m_2 \beta^2 + n_2 \beta - 1 = 0 \\ (\alpha\beta)^{-3} + m_3 (\alpha\beta)^{-2} + n_3 (\alpha\beta) - 1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \alpha^3 + m_1 \alpha^2 + n_1 \alpha - 1 = 0 \\ \beta^3 + m_2 \beta^2 + n_2 \beta - 1 = 0 \\ (\alpha\beta)^3 + m_3 (\alpha\beta)^2 + n_3 (\alpha\beta) - 1 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

где коэффициенты  $m$ ,  $n$  для уравнений системы (3) взяты из таблицы для  $N=1$ , а для уравнений систем (4) и (5) — для любого  $N$ , но одного и того же для всех уравнений системы.

**Доказательство.** Из предложения 6.3 знаем, чему могут равняться определители операторов  $(A-1)$ ,  $(B-1)$ ,  $((AB)^{-1}-1)$ . Но каждый из этих трех операторов раскладывается на множители. Например,  $A-1 = (\alpha-1)(\alpha+1)$ . Если  $\det(A-1) = N$ , то  $\det(\alpha-1)$  и  $\det(\alpha+1)$  являются делителями числа  $N$ , произведение которых равно  $N$ . Зная значения  $\det(\alpha-1)$ ,  $\det(\alpha+1)$  и  $\det(\alpha) = 1$ , знаем значения характеристического многочлена оператора  $\alpha$  в трех точках, откуда многочлен однозначно восстанавливается.

## **§ 2.7. Исследование систем уравнений для изоморфизмов самых простых оболочек**

В этом разделе мы покажем, что по тем или иным причинам ни одна из систем уравнений, определенных в разд. 6, кроме одной, не задает пару операторов, осуществляющих изоморфизмы самых простых оболочек. А оставшаяся одна система определяет операторы с оболочкой, изоморфной оболочке Фибоначчи. Мы часто будем пользоваться реализацией операторов  $\alpha$  и  $\beta$  в виде операторов умножения на числа в кубическом

расширении поля  $Q$ .

Для начала заметим, что каждый из операторов  $\alpha$  и  $\beta$  имеет неприводимый характеристический многочлен, иначе выпуклая оболочка выходила бы на ребро конуса, соответствующее рациональному направлению.

**Предложение 2.14.** В кубическом расширении поля  $Q$  ни одна из систем уравнений типа (5) не имеет решения, а системы уравнений типа (4) имеют решения лишь для  $m_1 = m_2 = m_3, n_1 = n_2 = n_3$ , т.е. когда  $\alpha, \beta$  и  $(\alpha\beta)^{-1}$  являются корнями одного и того же уравнения.

**Доказательство.** Заметим сначала, что последнее уравнение в системах типа (4) эквивалентно кубическому уравнению для  $(\alpha\beta)$ :  $(\alpha\beta)^3 - n_3(\alpha\beta)^2 - m_3(\alpha\beta) - 1 = 0$ . Операторы  $\alpha$  и  $\beta$  определяют одно и то же кубическое расширение поля  $Q$  (см. предложение 3.8). Пусть  $\sigma$  — какой-нибудь автоморфизм поля, содержащего  $\alpha$  и  $\beta$ , оставляющий на месте поле  $Q$ . Тогда вместе с корнем  $(\alpha, \beta)$  системы уравнений типа (4) или (5) ее корнями являются  $(\sigma\alpha, \sigma\beta)$  и  $(\sigma^2\alpha, \sigma^2\beta)$ . Если при некотором значении  $\alpha$  система из двух последних уравнений

$$\begin{cases} \beta^3 + \dots = 0 \\ (\alpha\beta)^3 + \dots = 0 \end{cases}$$

имеет корень относительно  $\beta$ , то результат этой системы  $R(\alpha)$  (являющийся полиномом степени 9 относительно  $\alpha$ ) при этом значении  $\alpha$  равен нулю. Поэтому если система типа (4) или (5) имеет решение, то система

$$\begin{cases} \alpha^3 + m_1\alpha^2 + n_1\alpha - 1 = 0 \\ R(\alpha) = 0 \end{cases}$$

имеет три корня;  $\alpha, \sigma\alpha$  и  $\sigma^2\alpha$ . А это может быть лишь в случае, когда полином  $\alpha^3 + m_1\alpha^2 + n_1\alpha - 1$  делит  $R(\alpha)$ .

Вычисление результатов и проверка делимости для всех систем

уравнений проводились на компьютере. Оказалось, что делимость имеется лишь для систем типа (4) со всеми тремя одинаковыми уравнениями и одной системы типа (5) с коэффициентами для  $N=3$

$$\begin{cases} \alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0 \\ \beta^3 + \beta^2 - 1 = 0 \\ (\alpha\beta)^3 + (\alpha\beta)^2 - 2(\alpha\beta) - 1 = 0 \end{cases}$$

Но каждое из уравнений последней системы имеет дискриминант — 31, т.е. комплексные корни, а мы ищем операторы со всеми действительными собственными числами

**Следствие.** Операторы  $\alpha, \beta$  и  $(\alpha\beta)^{-1}$  являются корнями одного и того же уравнения.

**Доказательство.** Для систем типа (4) и (5) этот результат уже получен. Для систем типа (3) уравнение с  $m=0$  и  $n=-1$  не годится, так как имеет комплексные корни. Так что для  $\alpha$  и  $\beta$  остается первое уравнение из таблицы. Ему же удовлетворяет и  $(\alpha\beta)^{-1}$ , так как произведение корней уравнения равно свободному члену с обратным знаком, т.е. единице.

**Лемма.** Для элемента  $y$  из кубического расширения поля  $\mathcal{Q}$  верно следующее: если  $y^2 \in \mathcal{Q}$ , то  $y \in \mathcal{Q}$ .

**Доказательство.** Пусть  $y^2 = a \in \mathcal{Q}$ ,  $y \notin \mathcal{Q}$ . Тогда  $(y^2 - a)$ -минимальный многочлен, аннулирующий  $y$ . Характеристический многочлен является степенью минимального, но это невозможно для степеней 3 и 2.

**Предложение 2.15.** Если операторы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют одному и тому же кубическому уравнению  $P(x)=0$ , то дискриминант полинома  $P$  является квадратом действительного числа.

**Доказательство.** Согласно предложению 3.8  $\alpha$  и  $\beta$  принадлежат одному и тому же кубическому расширению поля  $\mathcal{Q}$ . Третий корень уравнения  $P(x)=0$  рационально выражается через два других корня, поэтому принадлежит тому же расширению. Тем самым элемент

$y = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$  лежит в кубическом расширении поля  $\mathcal{Q}$ . Но  $y^2$ -дискриминант полинома  $P$ , поэтому  $y^2 \in Z$ . Из леммы 7.3 следует, что тогда  $y \in \mathcal{Q}$  и, значит,  $y \in Z$ .

**Следствие.** Операторы  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть корнями лишь одного из уравнений:

$$x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0 \quad (6)$$

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \quad (7)$$

$$x^3 + 6x^2 + 3x - 1 = 0 \quad (8)$$

$$x^3 + 15x^2 + 12x - 1 = 0 \quad (9)$$

**Доказательство.** Мы вычислили (на компьютере) дискриминанты всех полиномов из таблицы. Все уравнения, кроме перечисленных, имеют дискриминанты, не являющиеся полными квадратами.

**Предложение 2.16.** Если один из корней любого из уравнений (6)-(9) обозначить  $x_1 = x$ , то два других корня того же уравнения имеют вид  $x_2 = -1 - 1/x$ ,  $x_3 = -1/(x+1)$

Доказательство состоит в простой проверке.

**Предложение 2.17.** Если  $\alpha$  и  $\beta$  — два корня одного из уравнений (6) ~ (9), то для  $A = \alpha^2$  и  $B = \beta^2$  операторы  $M = (1 + A + AB)/2$  и  $(A - 1)$  неизоморфны.

**Доказательство.** Наши уравнения таковы, что  $\det(A - 1) = N$ , где  $N = 1, 3, 9, 27$  для уравнений (6)-(9) соответственно. Достаточно показать, что  $\det(M) \neq N$ . А эти неравенства достаточно проверить для  $\alpha = x_1$ ,  $\beta = x_2$  и  $\alpha = x_2$ ,  $\beta = x_1$  — для остальных случаев получим то же самое, применяя автоморфизм поля.

Для подсчета определителя запишем оператор  $x$  в базисе  $1, x, x^2$ :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \end{pmatrix}$$

В первом случае  $A = x^2, B = (x+1)^2/x^2, M = (1+A+AB)/2 = x^2 + x + 1$ . Искомый определитель для уравнений (6)-(9) получается равным 7, 9, 27, 189 соответственно, т.е. не равен  $N$ .

Во втором случае определитель  $\det(M)$  даже не целочисленный. Для наших четырех уравнений он равен  $49/8, 81/8, 729/8, 35721/8$ .

**Следствие 7.8.** Операторы  $(A-1)$  и  $(B-1)$  суть  $GL_3(\mathbb{Z})$ -изоморфизмы и операторы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют уравнению (6).

Следующее предложение эквивалентно теоремам 1.1 и 1.2 Введения.

**Предложение 2.18.** Самая простая оболочка существует ровно одна с точностью до  $GL_3(\mathbb{Z})$ -изоморфизма, а именно оболочка Фибоначчи.

Доказательство. Поскольку вершинами треугольника  $\Delta$  являются точки  $1, A, AB$ , то точки  $1, A, B^{-1}$  являются вершинами смежного с  $\Delta$  треугольника, находящегося на расстоянии 1 от  $O$ . Следовательно, векторы  $1, A, B^{-1}$  образуют базис  $\mathbb{Z}^3$ -решетки. Операторы  $A$  и  $B^{-1}$  суть  $A = \alpha^2, B^{-1} = \beta^2$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — корни уравнения (1), т.е. либо 1)  $\beta = -1 - 1/\alpha$ , либо 2)  $\beta = -1/(\alpha + 1)$ .

Рассмотрим сначала 2). Имеем  $B^{-1} = 1 + 2\alpha + \alpha^2, A^{-1}B = 1 - \alpha$ . Откуда  $A^{-1}B = (B^{-1} - A - 1)/2$ , т.е.  $1, A, B^{-1}$  не образуют базис в  $\mathbb{Z}^3$ . Остается единственная возможность 1), которая в силу своей единственности и должна отвечать оболочке Фибоначчи.

## Заключение по главе 2.

При геометрическом представлении цепным дробям соответствуют границы выпуклых оболочек целых точек в некоторых углах на плоскости. Коэффициенты цепной дроби равны целочисленным длинам отрезков, лежащих на границах выпуклых оболочек. Обобщая цепные дроби на  $n$ -мерный случай, Ф. Клейн, Г.Ф. Вороной, Г. Минковский стали рассматривать границы выпуклых оболочек целых точек в  $(n+1)$ -мерных конусах. Оказывается,  $n$ -мерные границы выпуклых оболочек в специальных алгебраических конусах периодичны, что обобщает теорему Лагранжа: цепная дробь всякой квадратичной иррациональности периодична, начиная с некоторого момента. Однако пока еще совершенно не ясно, какие локальные характеристики  $n$ -мерных границ, подобные целочисленным длинам отрезков, позволяют однозначно восстановить мерную границу выпуклой оболочки и судить о ее периодичности.

Здесь вычислены границы некоторых двумерных периодических выпуклых оболочек. Одна из этих оболочек обобщает цепную дробь Фибоначчи для числа  $(\sqrt{5} + 1)/2$ , в которой все неполные частные равны 1. Для двумерной оболочки Фибоначчи найдены локальные характеристики, позволяющие восстановить всю оболочку. Показано, что в некотором смысле двумерная цепная дробь Фибоначчи является самой простой среди всех двумерных цепных дробей.

Вычисления выпуклых оболочек проводились на компьютере. Более того, доказательство основных двух утверждений опирается на компьютерные вычисления.

Результаты, приведенные в этой главе диссертации, являются ответами на некоторые из вопросов, которые В.И. Арнольд предлагает для исследования многомерных цепных дробей.

## ГЛАВА 3. ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ.

### § 3.1 Постановка задачи.

Пусть в четырехмерном комплексном пространстве заданы 2 комплексных вектора

$$L_i = (l_{i,1}, l_{i,2}, l_{i,3}, l_{i,4}) \in C^4 \quad i = 1, 2$$

Будем обозначать чертой  $\bar{L}$  вектор, комплексно сопряженный к вектору  $L$ . Введя комплексные линейные формы

$$(L_i, X) \stackrel{def}{=} l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4$$

получим неотрицательные на  $X \in R^4$  вещественные квадратичные формы

$$m_i(X) = \langle L_i, X \rangle \langle \bar{L}_i, X \rangle = \langle \text{Re } L_i, X \rangle^2 + \langle \text{Im } L_i, X \rangle^2, \quad i = 1, 2.$$

Нас будет интересовать множество, где обращается в нуль произведение  $m_1(X) m_2(X)$  этих квадратичных форм. Это — объединение в  $R^4$  двух двумерных плоскостей

$$L \stackrel{def}{=} L_1 \cup L_2 :$$

$L_i = \{X : \langle \text{Re } L_i, X \rangle = \langle \text{Im } L_i, X \rangle = 0\}$ .  $i = 1, 2$ . Спроектируем с помощью отображения

$$m(x) = (m_1(X), m_2(X)) \tag{1.1}$$

пространство  $R^4$  в неотрицательный квадрант

$$R_+^2 = \{(r_1, r_2) \in R^2 : r_1 \geq 0, r_2 \geq 0\}$$

двумерной плоскости.

В интересных с теоретико-числовой точки зрения случаях общего положения плоскости  $L_1, L_2$  пересекаются только в нуле, а проекции целых точек  $Z^4 \setminus 0$  не попадают на границу квадранта  $R_+^2$ . Дальнейшие определения дадим в предположении, что эти условия выполнены.

Ненулевую целочисленную точку  $X \in Z^4 \setminus 0$  назовем наилучшим приближением к  $L$ , если в прямоугольнике без вершины

$\{(r_1, r_2) : 0 \leq r_i \leq m_i(x), i = 1, 2\} \setminus m(X)$  нет проекций других ненулевых целых точек,  $Y \in Z^4$ ,  $Y \neq 0$ , т.е. таких  $Y$ , что

$$m_1(Y) \leq m_1(X), m_2(Y) \leq m_2(X), m_1(Y)m_2(Y) < m_1(X)m_2(X)$$

**Задача:** Найти наилучшие целочисленные приближения  $X$  к объединению плоскостей  $L$  (не обязательно все).

С точки зрения размерностей возникающих объектов, нашей задаче близка задача отыскания в трехмерном случае наилучших приближений к плоскости  $L_1$  и прямой  $L_2$ . Два разных алгоритма ее решения были предложены Вороным [13] и Брюно и Парусниковым [14]. Алгоритм Вороного основан на поиске последовательных относительных минимумов  $m(X)$  для  $X \in Z^3$ , алгоритм Брюно - Парусникова основан на вычислении границы модульного многогранника. Оба алгоритма "односторонние": у Вороного алгоритм идет в сторону плоскости  $L_1$ , т.е.  $m_1(X)$  последовательно убывают, а  $m_2(X)$  возрастают; а у Брюно - Парусникова — в сторону прямой  $L_2$ , т.е.  $m_1(X)$  возрастают, а  $m_2(X)$  убывают. При этом алгоритм Вороного более экономный: на каждом шаге он требует перебора 5 случаев, а алгоритм Брюно - Парусникова на шаге требует перебора многих случаев и удобней для вычислений на компьютере. Далее Брюно и Парусниковым [15] был предложен алгоритм, работающий в обе стороны. Он явился переработкой алгоритма из [14].

В трехмерном случае для отыскания единиц вполне вещественных кубических полей успех достигается с помощью алгоритмов Вороного (также предложенного в работе [14], и Брюно [16]). Оба этих алгоритма — геометрические, т.е. они работают с учетом геометрии связанных с задачей выпуклых многогранников.

Также, в силу своей простоты и высокой скорости, на практике часто используются алгоритмы, так или иначе обобщающие на двумерный случай алгоритм Евклида деления с остатком (алгоритмы Эйлера, Якоби, Бруна, Пуанкаре и др.). Однако они находят алгебраические единицы не

для всех кубических полей [17].

Среди алгоритмов указанного типа можно выделить алгоритм Гютинга [18], имеющий относительно большой процент успеха.

Алгоритм Гютинга сравнительно мало известен, поэтому приведем его описание (для случая размерности 4). Имеются разные модификации алгоритма, отличающиеся выбором функции  $f(x)$ , отображающей вещественные числа в целые:  $f(x)$  может быть, например, ближайшим целым к  $x$  или функцией, не симметричной в окрестности целых чисел. Мы опишем алгоритм для случая, когда  $f(x) = [x]$  — целая часть  $x$ .

Алгоритм Гютинга состоит из шагов. На шаге с номером  $n$  по упорядоченной четверке  $A_n$  положительных чисел

$$A_n = (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \alpha_{n,3}, \alpha_{n,4})$$
$$\alpha_{n,1} \geq \alpha_{n,2} \geq \alpha_{n,3} \geq \alpha_{n,4} > 0$$

последовательно получают серию неполных частных

$$f_{n,2} = [\alpha_{n,1} / \alpha_{n,2}]$$
$$f_{n,3} = [(\alpha_{n,1} - f_{n,2}\alpha_{n,2}) / \alpha_{n,3}]$$
$$f_{n,4} = [(\alpha_{n,1} - f_{n,2}\alpha_{n,2} - f_{n,3}\alpha_{n,3}) / \alpha_{n,4}]$$

после чего остаток

$$\beta_n = \alpha_{n,1} - f_{n,2}\alpha_{n,2} - f_{n,3}\alpha_{n,3} - f_{n,4}\alpha_{n,4}, \quad \beta_n < \alpha_{n,4}$$

включают в новую упорядоченную четверку

$$A_{n+1} = (\alpha_{n,2}, \alpha_{n,3}, \alpha_{n,4}, \beta_n)$$

Для исследования свойств алгоритмов нами брался набор чем-то известных кубических полиномов. Бралась полиномы, определяющих первые 19 экстремальные формы Свиннертона-Дайера и полиномы, встречавшиеся в работах Вороного и Фадеева,— всего 22 полинома. Затем для одного из корней полинома  $L$  к вектору  $(1, \lambda, \lambda^2)$   $(1, A, A^2)$  применялись разные варианты перечисленных алгоритмов и другие алгоритмы. Периодичность алгоритма, означающая отыскание единицы кубического

поля, у классического алгоритма Гютинга была отмечена в 17 случаях, и в 15 случаях — у варианта, когда  $f$ -ближайшее целое. Прочие алгоритмы были периодичны не более, чем в 11 случаях из 22.

Четырехмерный вариант алгоритма Гютинга нами также тестировался. Были рассмотрены вполне вещественные поля четвертой степени, степенные базисы в которых задаются неприводимыми уравнениями с небольшими коэффициентами. Исключались тривиальные случаи алгебраических единиц и уравнений, получающихся из другого такого же заменой  $\pm \lambda + c$ ,  $c \in Z$ :

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad a_j \in Z,$$

$$|a_j| \leq b, \quad j = 1, 2, 3, \quad a_0 \geq 2.$$

### § 3.2. Описание нового алгоритма

Вектор-функция  $MX = (m_1(X), m_2(X))$  отображает  $R^4$  в положительный квадрант плоскости  $R^2$ . Обозначим через  $Z^4$  образ целочисленной решетки  $Z^4$  без  $X = 0$ :

$$Z^4 = M(Z^4 \setminus 0).$$

Пусть далее  $M$  обозначает выпуклую оболочку этого множества  $M = \text{conv}(Z^4)$ ,

а  $\partial M$  — границу множества  $M$ .

Множество  $\partial M$  является выпуклой ломаной, состоящей из вершин и ребер. Ломаная  $\partial M$ , вообще говоря, может иметь бесконечные вертикальное или горизонтальное ребро. Всем вершинам многоугольника и некоторым точкам, лежащим на его ребрах, т.е. точкам множества  $\partial M \cap Z^4$ , отвечают целые точки  $X \in Z^4 \setminus 0$ , которые суть наилучшие приближения к  $L$ . Таким образом, чтобы решить задачу, достаточно вычислить многоугольник  $\partial M$ .

Посмотрим теперь, какие характерные черты имеет наша задача в наиболее актуальном, алгебраическом случае.

Пусть  $K = K_1 \subset C$  — вполне комплексное алгебраическое поле четвертой степени, а целое алгебраическое число  $\lambda \in C$  вместе со своими степенями  $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3$  составляет базис поля  $K : K = Q(\lambda)$ .

Обозначим

$$f(x) = x^4 + f_3 x^3 + f_2 x^2 + f_1 x + f_0, f_j \in Z, \quad (1)$$

неприводимый полином, одним из четырех корней которого является  $\lambda$ . Корни  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  полинома  $f(x)$  разбиваются на пары, состоящие из комплексно сопряженных чисел. В соответствии с этим мы и выберем их нумерацию:

$$\lambda = \lambda_1 = \bar{\lambda}_3, \lambda_2 = \bar{\lambda}_4.$$

Положим векторы  $L_i$  равными

$$L_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \lambda_i^3), i = 1, 2.$$

Линейные формы

$$\langle L_i, X \rangle = x_1 + x_2 \lambda_i + x_3 \lambda_i^2 + x_4 \lambda_i^3$$

при целых  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Z^4$  дают точки  $Z$ -модуля (решетки) лежащей в поле  $K_i$  — в  $i$ -м алгебраически сопряженном к полю  $K$  поле.

Форма четвертой степени

$$n(x) = m_1(X) m_2(X) = L_1(X) L_2(X) L_3(X) L_4(X)$$

это произведение четырех алгебраически сопряженных чисел, лежащих в четырех алгебраически сопряженных полях. Коэффициенты формы  $n(X)$  выражаются как целочисленные полиномиальные комбинации целых коэффициентов многочлена  $f(x)$ , т.е. они суть целые. Итак, при  $X \in Z^4$  число  $n(X)$  — целое. Величина  $n(X)$  пропорциональна норме в поле  $K$  алгебраического числа  $L_1(X)$ .

Отметим, что при  $X \neq 0$  значение  $n(X)$  не может быть нулем, ведь равенство  $n(X) = 0$  означало бы обращение в нуль одного из сомножителей  $L_i(X)$ , а, следовательно, и сомножителя  $L_1(X)$ . И число  $\lambda_i$  удовлетворяло

бы алгебраическому уравнению степени меньшей, чем 4. Таким образом, в нашем случае при целых  $X \in Z^4 \setminus 0$  вещественные квадратичные формы  $m_i(X) = |L_i(X)|^2$  не могут обращаться в 0, и вершины многоугольника  $\partial M$  лежат строго внутри положительного квадранта, не попадая на горизонтальную и вертикальную полуоси.

Умножению чисел решетки ( $Z$ -модуля в  $K$ ) на  $\lambda_i$  отвечает линейное преобразование, матрица которого — присоединенная матрица многочлена (1)  $f(x)$ :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_0 \\ 1 & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 & f_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Умножению на число поля  $K$ , которое записывается полиномом от  $\lambda_i$   $g(\lambda_i) = g_3 \lambda_i^3 + g_2 \lambda_i^2 + g_1 \lambda_i + g_0$ ,  $g_j \in Q$ , отвечает линейное преобразование с матрицей  $g(F) = g_3 F^3 + g_2 F^2 + g_1 F + g_0 E$  ( $E$  — единичная матрица). Умножению на число, являющееся единицей поля  $K$ , соответствует линейное преобразование с определителем  $\pm 1$ , т.е. характеристический многочлен которого имеет свободный член, равный плюс - минус единице.

Согласно теореме Дирихле, размерность группы единиц поля  $Q(\lambda_1)$  равна единице. Умножение на алгебраическую единицу группы единиц поля в фиксированном базисе записывается как умножение на матрицу  $D$  с рациональными коэффициентами и с определителем  $\pm 1$ . Преобразование  $D: X = DY$  переводит целые точки в целые, поэтому оно переводит в себя множество  $M$  и его границу  $\partial M$ . т.е. эти множества инвариантны относительно некоторой группы преобразований. Поскольку нормы чисел  $L_1(X)$  и  $L_1(DX)$  равны, орбиты образа группы единиц состоят из точек с одинаковым значением  $n(X)$ , т.е. удовлетворяют условию

$$m_1(X)m_2(X) = const.$$

В соответствии с этим соображением нами будут выбраны координаты, в которых будет исследоваться задача.

Мы будем использовать два отображения  $U = U(X)$ ,  $U = U_1(X)$ ,  $U = U_2(X)$ :

$$U_1(X) = (u_1(X), v_1(X)) = \left( \frac{m_1(X)}{m_2(X)}, m_1(X)m_2(X) \right) \quad (3)$$

$$U_2(X) = (u_2(X), v_2(X)) = \left( \log \frac{m_1(X)}{m_2(X)}, \log(m_1(X)m_2(X)) \right) \quad (4)$$

В обоих представлениях группа единиц поля оставляет на месте вторую координату образа  $U(X)$  точки. образом всего пространства  $R^4$  в первом случае будет положительный квадрант плоскости  $R^2$ , а во втором — вся плоскость  $R^2$ . Образ  $U_1(Z^4 \setminus 0)$  целых точек разместится соответственно над некоторым горизонтальным лучом (над прямой для  $U_2$ ). Причем во втором случае образ  $U_2(Z^4 \setminus 0)$  будет инвариантен относительно группы горизонтальных сдвигов на некоторый вектор.

Теперь наша задача отыскания наилучших приближений свелась к поиску точек, образы которых лежат на данных объектах (полупрямой или прямой).

Введем функцию  $\tau(A, B)$ , задающую для двух точек  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  наклон отрезка  $AB$ :

$$\tau(A, B) = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}$$

Перейдем к непосредственному описанию алгоритма.

В алгоритме на всех его шагах используется одна и та же функция  $U(X)$  из пары функций  $U_1(X), U_2(X)$ . Отправными точками для алгоритма во всех случаях служат 4 базисных точки

$$E_1 = (1,0,0,0), E_2 = (0,1,0,0), E_3 = (0,0,1,0), E_4 = (0,0,0,1).$$

В результате переупорядочивания этих точек по первой координате ( $u(E_i)$ ) мы получаем исходный набор точек  $P_1^0, P_2^0, P_3^0, P_4^0$  для выполнения первого шага:

$$u(P_1^0) \leq u(P_2^0) \leq u(P_3^0) \leq u(P_4^0) .$$

Далее на каждом шаге исходя из набора  $P_1^n, P_2^n, P_3^n, P_4^n$  отыскивается некоторая новая точка  $Q^{n+1}$ , которая заменяет собой "левую" точку  $P_1^n$ , после чего набор  $Q_1^{n+1}, P_2^n, P_3^n, P_4^n$  упорядочивается по первой координате, и мы получаем  $P_1^{n+1}, P_2^{n+1}, P_3^{n+1}, P_4^{n+1}$  со свойством

$$u(P_1^{n+1}) \leq u(P_2^{n+1}) \leq u(P_3^{n+1}) \leq u(P_4^{n+1}).$$

Каждый шаг может состоять из нескольких "прогонов". На  $k$ -м прогоне  $k \in N$  на возможное значение некоторых параметров  $a_j$  накладывается все менее и менее обременительное ограничение  $|a_j| \leq 2^k$ . Если параметры с таким свойством не нашлись, делается следующий прогон.

На каждом прогоне в качестве тестовых точек  $Q(a)$  рассматриваются только точки вида

$$Q(a) = P_1^n + \sum_{j=2}^4 P_j^n, \quad |a_j| \leq 2^k \quad (5)$$

Однако не рассматриваются такие  $Q(a)$ , которые совпали с одной из ранее найденных точек (или симметричной), т.е. с точками из набора

$$\pm P_1^0, \pm P_2^0, \pm P_3^0, \pm P_4^0, \quad \pm Q^1, \pm Q^2, \dots, \pm Q^n$$

Для каждого ( $n$ -го) шага определим 2 области  $O_L^n, O_R^n$  (от "Бей" и "Right"):  $O_L^n = \{(u, v) : u \leq u(P_4^n), v \leq (P_4^n)\}$ ,

$$O_R^n = \{(u, v) : u \geq u(P_4^n), v \leq \max(v(P_1^n), v(P_2^n), v(P_3^n), v(P_4^n))\}$$

Прогон  $n$ -го шага происходит в 2 этапа. На первом этапе рассматриваются все допустимые точки  $Q(a)$ , попадающие в область  $O_L^n$ . Среди точек  $Q(a)$  выбирается та, для которой достигается максимум функции  $\tau(Q(a))$ . Если такая точка нашлась, второй этап прогона не делается. И далее мы полагаем  $Q^{n+1} = Q(a)$ .

Если среди допустимых не оказалось точек, лежащих в области  $O_L^n$ , делается второй этап. На нем среди лежащих в области  $O_R^n$  допустимых точек  $Q(a)$  отыскивается такая, для которой достигается минимум функции

$\tau(Q(a))$ . Если такая точка была обнаружена, полагаем  $Q^{n+1} = Q(a)$ . Если же таких точек найдено не было, делаем следующий прогон шага, т.е. увеличиваем мажоранту для модулей коэффициентов  $a_j$ .

Если на очередном  $k$ -м прогоне  $n$ -го шага за заранее заданное время найти экстремальную точку не удалось, расчет прекращается.

Целью расчета является обнаружение периодичности по переменной и последовательности четверок

$$\{(U(P_1^n), U(P_2^n), U(P_3^n), U(P_4^n))\}_{n=0}^{\infty}. \quad (6)$$

Наборы точек

$$P^n = (P_1^n, P_2^n, P_3^n, P_4^n) \quad (7)$$

при  $n$  и  $n+1$  отличаются только одной точкой, вычисляемой по формуле (5). Поэтому переход от одного набора (7) к следующему задается целочисленным линейным преобразованием с определителем 1, т.е. преобразованием из  $SL(4, Z)$ . Таким образом, четыре целочисленных точки (7) образуют базис единичного объема:  $\det(P_j^n)_{j=1}^4 = 1$ .

Для детектирования периода после вычисления очередной четверки точек

(7) вычисляются  $8n$  унимодулярных преобразований  $A = A_{njs}$  перехода от этого набора  $P^{n+1}$  к наборам

$$(P_1^j, \pm P_2^j, \pm P_3^j, \pm P_4^j), \quad j = 0, \dots, n$$

( $s$  — нумерация набора знаков). Чтобы найденное преобразование  $A$  отвечало единице поля  $K$ , надо, чтобы оно записывалось в виде полинома с рациональными коэффициентами относительно матрицы  $F$  (см. (2)). Но присоединенная матрица полинома обладает свойством, что для ее степеней  $F^j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, F^0$ ) в их первом столбце только один ненулевой элемент:  $(F^j)_{k,0} = \delta_{k,j+1}$ . Поэтому первый столбец полинома от матрицы  $A = g_3 F^3 + g_2 F^2 + g_1 F + g_0 E$  это столбец  $^T(g_0, g_1, g_2, g_3)$ . Отсюда следует, что должно выполняться матричное условие

$$A = \begin{pmatrix} (A)_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ (A)_{2,1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ (A)_{3,1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ (A)_{4,1} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^4 (A)_{j,1} F^{j-1} \quad (A)_{2,1} \dots$$

Все входящие в него величины — рациональные числа и могут быть вычислены точно. Если матрица  $A$  лежит в кольце матриц  $Q(A)$ , то  $A$  и есть искомая единица кольца. Корнями ее характеристического многочлена будут единицы полей  $K_i$ .

### § 3.3. Примеры расчетов по новому алгоритму

По описанному алгоритму проводились расчеты на примере уравнений четвертой степени с небольшими целыми коэффициентами:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s = 0, \quad p, q, r, s \in Z,$$

$$|p| \leq 3, \quad |q| \leq 3, \quad |r| \leq 3, \quad 2 \leq s \leq 3.$$

Таким образом, исключались случаи  $s=0$  и  $s=1$ , означающие соответственно приводимость многочлена и то, что многочлен задает единицу поля. Также исключались полиномы, сводящиеся одно к другому заменой знака  $\lambda \rightarrow -\lambda$ . Всего полиномов с указанными свойствами оказалось 41.

При этом мы не отбрасывали биквадратные уравнения и уравнения, отношение корней которых удовлетворяют квадратным уравнениям. Из приводимой ниже таблицы 1 такая классификация может быть проведена. Чтобы пояснить это, произведем ряд выкладок.

Пусть дан многочлен вида (8). Рассмотрим результат по переменной  $\lambda$  двух многочленов  $f(\lambda)$  и

$$f(\theta\lambda) = \theta^4 \lambda^4 + p\theta^3 \lambda^3 + q\theta^2 \lambda^2 + r\theta\lambda + s = 0.$$

Это многочлен 16-й степени от  $\theta$ , тривиальным 4-кратным множителем которого является  $(\theta-1)$ :

$$\text{Resultant}(f(\lambda), f(\theta\lambda), \lambda) = (\theta-1)^4 S(\theta).$$

Корнями  $S(\theta)$  служат в точности нетривиальные (при разных  $k$  и  $l$ )

отношения  $\lambda_k / \lambda_l$  корней полинома  $f(\lambda)$ . Вместе с корнем  $\theta_0$  полином  $S(\theta)$  имеет корнем и  $1/\theta_0$ . Многочлен  $f(\lambda)$  неприводим, поэтому все его корни разные и среди них нет чисел  $\pm 1$ . Отсюда получаем, что корни полинома  $S(\theta)$  группируются в 6 пар. Вынося старший коэффициент, который обозначим  $c_{12}$ , получаем

$$S(\theta) = c_{12} \prod_{j=1}^6 (\theta - \theta_j)(\theta - 1/\theta_j) = c_{12} \prod_{j=1}^6 (\theta^2 - (\theta_j + 1/\theta_j)\theta + 1)$$

Обозначим  $w_j = \theta_j + 1/\theta_j$  6 различных отношений корней  $\lambda_k / \lambda_l$ ,  $k > 1$ , и введем новую переменную  $w = \theta + 1/\theta$ , для которой  $\theta = \frac{w + \sqrt{w-4}}{2}$ .

Мы получим

$$S(\theta) = c_{12} \theta^6 \prod_{j=1}^6 (w - w_j) = \theta^6 \sum_{j=0}^6 c_j w^j$$

$$R(w) = \frac{S\left(\frac{w + \sqrt{w-4}}{2}\right)}{\theta^6}$$

и производя необходимые выкладки, получим

$$\begin{aligned} R(w) = & s^4 w^6 + \\ & -(-4s + pr) s^3 w^5 + \\ & + (4s^2 - 4prs + p^2 qs - 2q^2 s + r^2 q) s^2 w^4 + \\ & - (p^4 s^2 + 8q^2 s^2 - 7qp^2 s^2 + 8prs^2 + prq^2 s - 7r^2 qs + r^4) s w^3 + \\ & - (3p^4 s^2 + 8prs^2 + 8q^2 s^2 \\ & - 14qp^2 s^2 - q^4 s - 14r^2 qs + p^2 r^2 s + 8prq^2 s - p^3 rqs + 3r^4 - pr^3 q) s w^2 + \\ & - (3p^4 s^2 - 8qp^2 s^2 + 16prq^2 s - 5p^3 rqs \\ & - 4q^4 s + 2p^2 r^2 s + q^3 p^2 s - 8r^2 qs + 3r^4 + p^3 r^3 + q^3 r^2 - 5pr^3 q) s w + \\ & - (p^4 s^2 + 8prq^2 s + 2q^3 p^2 s \\ & - 4p^3 rqs - 4q^4 s - 2p^2 r^2 s + r^4 - 4pr^3 q - q^2 p^2 r^2 + 2p^3 r^3 + 2q^3 r^2) s \end{aligned}$$

Для биквадратных уравнений (в наших примерах уравнения с номерами

1, 2, 4, 7, 10), т.е. при  $p = r = 0$ , все 4 корня  $f(\lambda)$  лежат на мнимой оси, все отношения корней  $w_j$  вещественны, а их квадраты  $w_j^2$  — рациональные числа. Действительно, в этом случае полином  $R(w)$  разлагается на множители:

$$R(w) = s^2 (w + 2)^2 (s w^2 - q^2)^2.$$

При других соотношениях на коэффициенты  $f(\lambda)$  также возможна ситуация, когда  $R(w)$  разлагается над  $Z$  на множители, среди которых присутствуют линейные или квадратичные. Для нашего тестового семейства многочленов  $f_n$  в полиномах  $R_n$  есть квадратичные сомножители с отрицательным дискриминантом для  $n = 29, 31, 32, 35, 40$ . При указанных  $n$  здесь также возможны упрощения, и подобные случаи следовало бы разбирать особо, применяя для поиска алгебраических единиц другие методы. Поскольку это не входило в нашу задачу, мы этим не занимались.

В Таблице 1 выписаны 41 исследованных полиномов  $f_n$ , их дискриминанты  $D_n$  и разложения на множители полиномов  $R_n(w)$ , где

$$R_n(w) = \frac{\text{Resultant}(f_n(\lambda), f_n(\theta\lambda), \lambda)}{(\theta - 1)^4 \theta^6}, \quad \left( \theta = \frac{w + \sqrt{w - 4}}{2} \right)$$

В Таблицах 3 и 4 для случаев первой и второй отображающей функции  $U = U_1(X)$  и  $U = U_1(X)$  соответственно представлены результаты тех расчетов по новому алгоритму, когда период удалось найти. В столбцах таблиц приводятся:  $n$  — номера полиномов  $f = f_n$ . Далее идут периоды  $T = T_n$ , т.е. числа шагов алгоритма, для которых совпадают четверки чисел  $(v(P_1^t), v(P_2^t), v(P_3^t), v(P_4^t))$ ,  $(v(P_1^{t+T}), v(P_2^{t+T}), v(P_3^{t+T}), v(P_4^{t+T}))$ , асами точки  $(P_1^t, P_2^t, P_3^t, P_4^t)$ ,  $(P_1^{t+T}, P_2^{t+T}, P_3^{t+T}, P_4^{t+T})$  связаны унимодулярной матрицей - полиномом с рациональными коэффициентами от присоединенной

матрицы  $A_n$  полинома  $f_n$ . Затем приводятся выражение единиц  $\mu = \mu_n(\lambda)$  поля  $K(\lambda)$  в виде полиномов от исходных алгебраических чисел  $\lambda$  — корней  $f_n$ . В последнем столбце стоят полиномы  $g_n(\mu)$ , задающие единицы  $\mu_n$  ( $g_n(\mu_n) = 0$ ).

Из таблиц видно, что для большинства полиномов  $f_n$  для обеих функций  $U = U_1, U_2$  алгоритм периодичен или не периодичен одновременно, но для ряда  $n$  алгоритм периодичен только для одной из  $U_j$ . В периодических случаях отыскиваемые алгоритмом единицы поля для разных  $U_j$  совпадают не всегда.

**Таблица 1.** Дискриминанты полиномов и полиномы  $R_n(w)$ .

$n$	$f_n$	$D_n$	$R_n$
1	$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 2$	512	$16(2 + \omega)^2 (\omega^2 - 2)^2$
2	$\lambda^4 - \lambda^2 + 2$	156 8	$4(2 + \omega)^2 (2\omega^2 - 1)^2$
3	$\lambda^4 - \lambda^2 + \lambda + 2$	125 7	$16w^6 + 64w^5 + 44w^4 - 94w^3 - 122w^2 - 20w + 18$
4	$\lambda^4 + 2$	204 8	$16w^4(2 + w)^2$
5	$\lambda^4 + \lambda^2 + 2$	202 1	$16w^6 + 64w^5 + 64w^4 - 2w^3 - 6w^2 - 6w - 2$
6	$\lambda^4 + 2\lambda + 2$	161 6	$16w^6 + 64w^5 + 64w^4 - 32w^3 - 96w^2 - 96w - 32$
7	$\lambda^4 + \lambda^2 + 2$	156 8	$4(2 + w)^2 (2w^2 - 1)^2$
8	$\lambda^4 + \lambda^2 + \lambda + 2$	182 5	$16w^6 + 64w^5 + 52w^4 - 38w^3 - 10w^2 + 40w + 10$
9	$\lambda^4 + \lambda^2 + 2\lambda + 2$	227 2	$16w^6 + 64w^5 + 64w^4 + 16w^3 + 68w^2 + 40w - 32$

1 0	$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 2$	512	$16(2+w)^2 (w^2 - 2)^2$
1 1	$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 2$	225 6	$16w^6 + 64w^5 + 32w^4 - 64w^3 + 160w^2 + 352w + 96$
1 2	$\lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$	257	$16w^6 + 72w^5 + 8w^4 - 354w^3 - 358w^2 + 392w + 538$
1 3	$\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2$	138 4	$16w^6 + 80w^5 + 88w^4 - 136w^3 - 316w^2 - 52w + 232$
1 4	$\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2$	155 6	$16w^6 + 72w^5 + 68w^4 - 90w^3 - 160w^2 - 16w + 88$
1 5	$\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + 2$	892	$16w^6 + 64w^5 + 40w^4 - 128w^3 - 196w^2 - 68w + 16$
1 6	$\lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda + 2$	302 8	$16w^6 + 80w^5 + 128w^4 - 88w^3 - 8w^2 - 136w + 24$
1 7	$\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda + 2$	267 3	$16w^6 + 72w^5 + 96w^4 + 54w^3 + 30w^2 - 36w + 2$
1 8	$\lambda^4 + \lambda^3 + 2$	194 0	$16w^6 + 64w^5 + 64w^4 - 8w^3 - 24w^2 - 24w - 8$
1 9	$\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda + 2$	112 9	$16w^6 + 56w^5 + 32w^4 - 74w^3 - 98w^2 - 40w - 6$
2 0	$\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 2$	436 0	$16w^6 + 80w^5 + 136w^4 + 200w^3 + 308w^2 - 24w - 8$
2 1	$\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2$	315 2	$16w^6 + 72w^5 + 92w^4 + 78w^3 + 164w^2 + 104w + 16$
2 2	$\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2$	139 6	$16w^6 + 56w^5 + 28w^4 - 58w^3 - 16w^2 + 32w - 8$
2 3	$\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 2$	101 6	$16w^6 + 48w^5 + 8w^4 - 72w^3 - 28w^2 + 20w - 8$
2	$\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 2$	562	$16w^6 + 80w^5 + 112w^4 + 200w^3 + 680w^2 + 680w + 184$

4		0	
2	$\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$	330	$16w^6 + 72w^5 + 56w^4 - 18w^3 + 290w^2 + 560w + 250$
5		5	
2	$\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2$	149	$16w^6 + 64w^5 + 16w^4 - 152w^3 + 8w^2 + 328w + 184$
6		2	
2	$\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2$	697	$16w^6 + 56w^5 - 8w^4 - 178w^3 - 70w^2 + 164w + 82$
7			
2	$\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 2$	788	$16w^6 + 48w^5 - 16w^4 - 120w^3 + 8w^2 + 104w - 8$
8			
2	$\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2$	656	$4(2w^2 + 10w + 13)(2w^4 + 2w^3 - 7w^2 - 14w + 16)$
9			
3	$\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda + 2$	302	$16w^6 + 96w^5 + 192w^4 + 96w^3 - 288w^2 - 480w + 224$
0		4	
3	$\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda + 2$	181	$2(2w^2 + 9w + 11)(4w^4 + 2w^3 + w^2 - 16w - 3)$
1		3	
3	$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2$	320	$16(w^2 + 2w + 2)(w^4 + 2w^3 - 2w^2 - 8w - 4)$
2			
3	$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 2$	574	$16w^6 + 96w^5 + 224w^4 + 384w^3 + 356w^2 - 328w - 32$
3		4	
3	$\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2$	388	$16w^6 + 80w^5 + 148w^4 + 194w^3 + 194w^2 - 172w - 158$
4		9	
3	$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 2$	211	$4(2w^2 + 8w + 9)(2w^4 + w^2 - 4)$
5		2	
3	$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2$	761	$16w^6 + 48w^5 + 20w^4 - 78w^3 - 118w^2 - 100w - 62$
6			
3	$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 2$	891	$16w^6 + 96w^5 + 224w^4 + 576w^3 + 1184w^2 + 416w - 32$
7		2	
3	$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$	582	$16w^6 + 80w^5 + 136w^4 + 278w^3 + 722w^2 + 434w - 98$
8		1	

3 9	$\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2$	313 6	$16w^6 + 64w^5 + 64w^4 + 64w^3 + 320w^2 + 256w - 128$
4 0	$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2$	142 1	$2(2w^2 + 7w + 7)(4w^4 - 2w^3 - 5w^2 + 14w - 7)$
4 1	$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 2$	592	$16w^6 + 32w^5 - 32w^4 - 64w^3 + 32w^2 + 32w - 32$

**Таблица 2.**  $U = U_1(X)$ . Номера  $n$  полиномов  $f_n$ , ( $f_n(\lambda) = 0$ ), для которых новый алгоритм периодичен; найденные периоды  $T_n$ ; представление единиц  $\mu = \mu_n$  поля в виде полиномов от исходных алгебраических чисел  $\lambda$ ; полиномы  $g_n$ , корнями которых служат единицы  $\mu_n$ .

$n$	$T$	$\mu(\lambda)$	$g(\mu)$
1	5	$4\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda + 7$	$\mu^4 - 12\mu^3 + 100\mu^2 - 16\mu + 1$
2	9	$-9\lambda^3 + 7\lambda^2 + 8\lambda - 15$	$\mu^4 + 46\mu^3 + 874\mu^2 + 46\mu + 1$
3	1	$-\lambda^3 + \lambda^2 - 1$	$\mu^4 - \mu^3 + 5\mu^2 - 4\mu + 1$
4	3	$\lambda^3 - \lambda^2 + 1$	$\mu^4 - 4\mu^3 + 10\mu^2 + 4\mu + 1$
5	35	$113\lambda^3 - 50\lambda^2 - 45\lambda + 247$	$\mu^4 - 649\mu^3 + 129232\mu^2 + 695\mu + 1$
6	1	$-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$	$\mu^4 - 2\mu^3 + 6\mu^2 - 4\mu + 1$
8	15	$6\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 17$	$\mu^4 - 48\mu^3 + 579\mu^2 - 37\mu + 1$
10	181	$-184\lambda^3 + 31\lambda^2 - 136\lambda - 193$	$\mu^4 + 896\mu^3 + 204546\mu^2 - 896\mu + 1$
11	8	$-14\lambda^3 + 7\lambda^2 - 25\lambda - 23$	$\mu^4 + 36\mu^3 + 1078\mu^2 + 18\mu + 1$
12	4	$-\lambda + 1$	$\mu^4 - 5\mu^3 + 7\mu^2 - 2\mu + 1$
13	1	$-\lambda + 1$	$\mu^4 - 5\mu^3 + 8\mu^2 - 3\mu + 1$
14	9	$-\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 7$	$\mu^4 + 56\mu^3 + 1018\mu^2 - 12\mu + 1$
15	18	$-6\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda - 9$	$\mu^4 + 15\mu^3 + 176\mu^2 - \mu + 1$
16	3	$\lambda^3 - \lambda + 1$	$\mu^4 - 10\mu^3 + 32\mu^2 - 8\mu + 1$

17	9	$12\lambda^3 - 15\lambda^2 + 9\lambda + 1$	$\mu^4 - 4\mu^3 + 6189\mu^2 + 131\mu + 1$
18	23	$64\lambda^3 + 173\lambda^2 - 261\lambda + 271$	$\mu^4 - 1454\mu^3 + 641396\mu^2 + 1004\mu + 1$
19	1	$-\lambda^3 - 1$	$\mu^4 + 3\mu^3 - 3\mu + 1$
20	4	$\lambda^3 - \lambda + 1$	$\mu^4 - 13\mu^3 + 44\mu^2 - 3\mu + 1$
23	2	$-\lambda^3 - \lambda^2 - 3$	$\mu^4 + 7\mu^3 + 12\mu^2 - \mu + 1$
24	54	$53\lambda^3 + 79\lambda^2 - 94\lambda + 79$	$\mu^4 - 756\mu^3 + 254690\mu^2 + 944\mu + 1$
25	7	$-3\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$	$\mu^4 + 30\mu^3 + 263\mu^2 - 15\mu + 1$
26	9	$-7\lambda^3 - 12\lambda^2 + 5\lambda - 15$	$\mu^4 + 64\mu^3 + 1704\mu^2 - 6\mu + 1$
27	1	$-\lambda^2 - 1$	$\mu^4 + \mu^3 + 3\mu^2 + 1$
28	8	$-8\lambda^3 - 2\lambda^2 - 10\lambda - 11$	$\mu^4 + 20\mu^3 + 262\mu^2 - 28\mu + 1$
29	10	$-2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$	$\mu^4 - 16\mu^3 + 130\mu^2 - 16\mu + 1$
32	4	$\lambda^3 + 1$	$\mu^4 + 4\mu^3 + 6\mu^2 - 4\mu + 1$
33	5	$2\lambda^2 - 2\lambda + 1$	$\mu^4 - 12\mu^3 + 118\mu^2 + 20\mu + 1$
34	47	$711\lambda^3 + 1405\lambda^2 + 202\lambda - 2111$	$\mu^4 + 5327\mu^3 + 8296391\mu^2 - 96\mu + 1$
35	2	$-\lambda^2 + \lambda - 1$	$\mu^4 + 8\mu^3 + 26\mu^2 + 8\mu + 1$
36	1	$-\lambda - 1$	$\mu^4 + 2\mu^3 + \mu^2 - \mu + 1$
37	3	$2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 7$	$\mu^4 + 14\mu^3 + 66\mu^2 + 16\mu + 1$
39	28	$80\lambda^3 + 132\lambda^2 + 32\lambda - 225$	$\mu^4 + 644\mu^3 + 108294\mu^2 + 132\mu + 1$
41	1	$-\lambda - 1$	$\mu^4 + 2\mu^3 + 2\mu^2 + 1$

**Таблица 3.**  $U = U_2(X)$ . Номера  $n$  полиномов  $f_n$ , ( $f_n(\lambda) = 0$ ), для которых новый алгоритм периодичен; найденные периоды  $T_n$ ; представление единиц  $\mu = \mu_n$  поля в виде полиномов от исходных алгебраических чисел  $\lambda$ ; полиномы  $g_n$ , корнями которых служат единицы  $\mu_n$ .

$n$	$T$	$\mu(\lambda)$	$g(\mu)$
-----	-----	----------------	----------

1	5	$2\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda + 3$	$\mu^4 - 4\mu^3 + 22\mu^2 - 4\mu + 1$
2	9	$-9\lambda^3 + 7\lambda^2 + 8\lambda - 15$	$\mu^4 + 46\mu^3 + 874\mu^2 + 46\mu + 1$
3	2	$-\lambda^3 + 2\lambda - 3$	$\mu^4 + 9\mu^3 + 19\mu^2 - 6\mu + 1$
4	3	$\lambda^3 - \lambda^2 + 1$	$\mu^4 - 4\mu^3 + 10\mu^2 + 4\mu + 1$
6	1	$-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$	$\mu^4 - 2\mu^3 + 6\mu^2 - 4\mu + 1$
7	128	$4\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda + 9$	$\mu^4 - 34\mu^3 + 294\mu^2 + 34\mu + 1$
8	37	$-20\lambda^3 + 70\lambda^2 - 95\lambda + 77$	$\mu^4 - 288\mu^3 + 39869\mu^2 - 397\mu + 1$
10	8	$-8\lambda^3 + 8\lambda^2 - 12\lambda + 1$	$\mu^4 + 28\mu^3 + 454\mu^2 + 28\mu + 1$
11	18	$-44\lambda^3 + 32\lambda^2 - 90\lambda - 47$	$\mu^4 + 52\mu^3 + 111046\mu^2 + 196\mu + 1$
12	2	$-\lambda^3 + \lambda - 1$	$\mu^4 + \mu^3 + 3\mu^2 + 2\mu + 1$
13	1	$-\lambda + 1$	$\mu^4 - 5\mu^3 + 8\mu^2 - 3\mu + 1$
14	16	$-110\lambda^3 + 218\lambda^2 - 172\lambda + 41$	$\mu^4 - 1100\mu^3 + 1037670\mu^2 + 1892\mu + 1$
15	37	$-59\lambda^3 + 41\lambda^2 + 12\lambda - 55$	$\mu^4 - 127\mu^3 + 31008\mu^2 - 351\mu + 1$
16	3	$\lambda^3 - \lambda + 1$	$\mu^4 - 10\mu^3 + 32\mu^2 - 8\mu + 1$
17	9	$12\lambda^3 - 15\lambda^2 + 9\lambda + 1$	$\mu^4 - 4\mu^3 + 6189\mu^2 + 131\mu + 1$
18	23	$64\lambda^3 + 173\lambda^2 - 261\lambda + 271$	$\mu^4 - 1454\mu^3 + 641396\mu^2 + 1004\mu + 1$
19	1	$-\lambda^3 - 1$	$\mu^4 + 3\mu^3 - 3\mu + 1$
20	4	$\lambda^3 - \lambda + 1$	$\mu^4 - 13\mu^3 + 44\mu^2 - 3\mu + 1$
23	2	$-\lambda^3 - \lambda^2 - 3$	$\mu^4 + 7\mu^3 + 12\mu^2 - \mu + 1$
24	20	$-3\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 3$	$\mu^4 + 42\mu^3 + 504\mu^2 - 8\mu + 1$
26	9	$-7\lambda^3 - 12\lambda^2 + 5\lambda - 15$	$\mu^4 + 64\mu^3 + 1704\mu^2 - 6\mu + 1$
27	1	$-\lambda^2 - 1$	$\mu^4 + \mu^3 + 3\mu^2 + 1$
28	8	$-8\lambda^3 - 2\lambda^2 - 10\lambda - 11$	$\mu^4 + 20\mu^3 + 262\mu^2 - 28\mu + 1$
29	9	$-2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$	$\mu^4 - 16\mu^3 + 130\mu^2 - 16\mu + 1$
32	4	$\lambda^3 + 1$	$\mu^4 + 4\mu^3 + 6\mu^2 - 4\mu + 1$
33	22	$192\lambda^3 + 186\lambda^2 - 290\lambda + 215$	$\mu^4 - 2580\mu^3 + 1729270\mu^2 - 884\mu + 1$

35	2	$-\lambda^2 + \lambda - 1$	$\mu^4 + 8\mu^3 + 26\mu^2 + 8\mu + 1$
36	1	$-\lambda - 1$	$\mu^4 + 2\mu^3 + \mu^2 - \mu + 1$
37	37	$-798\lambda^3 - 2492\lambda^2 - 3762\lambda - 817$	$7\mu^4 + 3724\mu^3 + 15272230\mu^2 - 7556\mu + 1$
38	7	$9\lambda^3 + 25\lambda^2 + 32\lambda + 1$	$\mu^4 - 3\mu^3 + 1116\mu^2 - 11\mu + 1$
41	1	$-\lambda - 1$	$\mu^4 + 2\mu^3 + 2\mu^2 + 1$

### Заключение по главе 3

Если в четырехмерном комплексном пространстве заданы 2 комплексных вектора  $L_i = (l_{i,1}, l_{i,2}, l_{i,3}, l_{i,4}) \in C^4$ ,  $i = 1, 2$ , то будем

обозначать чертой  $\bar{L}$  вектор, комплексно сопряженный к вектору  $L$ . Вводя

комплексные линейные формы  $(L_i, X) \stackrel{def}{=} l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4$

получим неотрицательные на  $X \in R^4$  вещественные квадратичные формы

$$m_i(X) = \langle L_i, X \rangle \langle \bar{L}_i, X \rangle = \langle \text{Re } L_i, X \rangle^2 + \langle \text{Im } L_i, X \rangle^2, \quad i = 1, 2.$$

Нас будет интересовать множество, где обращается в нуль произведение  $m_1(X) m_2(X)$  этих квадратичных форм. Это — объединение в  $R^4$  двух двумерных плоскостей

$$L \stackrel{def}{=} L_1 \cup L_2 :$$

$$L_i = \{X : \langle \text{Re } L_i, X \rangle = \langle \text{Im } L_i, X \rangle = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Спроектируем с помощью отображения  $m(x) = (m_1(X), m_2(X))$  пространство  $R^4$  в неотрицательный квадрант  $R_+^2 = \{(r_1, r_2) \in R^2 : r_1 \geq 0, r_2 \geq 0\}$  двумерной плоскости.

Ненулевую целочисленную точку  $X \in Z^4 \setminus 0$  назовем наилучшим приближением к  $L$ , если в прямоугольнике без вершины  $\{(r_1, r_2) : 0 \leq r_i \leq m_i(x), i = 1, 2\} \setminus m(X)$  нет проекций других ненулевых целых точек,  $Y \in Z^4$ ,  $Y \neq 0$ , т.е. таких  $Y$ , что  $m_1(Y) \leq m_1(X)$ ,  $m_2(Y) \leq m_2(X)$ ,  $m_1(Y) m_2(Y) < m_1(X) m_2(X)$ .

Требовалось найти наилучшие целочисленные приближения  $X$  к объединению плоскостей  $L$ .

Основные результаты этой главы состоят в следующем:

- описан новый эффективный алгоритм построения фундаментальных областей двумерных периодических парусов цепных дробей.
- найдены наилучшие целочисленные приближения  $X$  к объединению плоскостей  $L$ .
- вычислены дискриминанты полиномов  $R_n(w)$  при помощи методов компьютерной алгебры.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория цепных дробей — одна из древнейших математических теорий. При геометрическом представлении цепным дробям соответствуют границы выпуклых оболочек целых точек в некоторых углах на плоскости. Коэффициенты цепной дроби равны целочисленным длинам отрезков, лежащих на границах выпуклых оболочек. Обобщая цепные дроби на  $n$ -мерный случай, Ф. Клейн, Г.Ф. Вороной, Г. Минковский стали рассматривать границы выпуклых оболочек целых точек в  $(n+1)$ -мерных конусах. Оказывается,  $n$ -мерные границы выпуклых оболочек в специальных алгебраических конусах периодичны, что обобщает теорему Лагранжа: цепная дробь всякой квадратичной иррациональности периодична, начиная с некоторого момента.

Основные результаты являются новыми, важными и состоят в следующем:

- показана связь цепных дробей с геометрией выпуклых многоугольников. Из этой связи следует, например, что цепная дробь периодична в тех и только тех случаях, когда выражаемое ей число является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.
- показано насколько часто среди элементов цепной дроби, выражающей произвольное вещественное число, встречается единица (двойка, тройка, ...).
- описан новый эффективный алгоритм построения фундаментальных областей двумерных периодических парусов цепных дробей.
- найдены наилучшие целочисленные приближения  $X$  к объединению плоскостей  $L$ .
- вычислены дискриминанты полиномов  $R_n(w)$  при помощи методов компьютерной алгебры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.Я.Хинчин. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978
- [2] H.Tsuchihashi. Hingher – Dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities// Tohoku Math. J.V.35. 1983. P. 670 – 639.
- [3] E.Korkina La periodicite des frantions continues multidimensionellws // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I.V. 319. 1994. P. 777 – 780.
- [4] В.И.Арнольд. Многомерные цепные дроби //Регулярная и хаотическая динамика//. Т. 3. №3. 1998. С. 10 – 17.
- [5] Е. Коркина. Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры //Труды Мат. Ин-та им. В.А.Стеклова. Т. 209. 1995. С. 143 – 166//
- [6] В.О.Бугаенко. Уравнения Пелля. – М.: МЦНМО, 2001. – (Библиотека «Математическое просвещение». Вып.13)
- [7] Kliesin F.Ausgewahlte der Zahlentheorie. Teubner, 1907
- [8] Вороной Г.Ф. Одно обобщение цепных дробей //Собр. Соч.: В 3 т. Киев: Изд-во АН УССР. 1952. Т.1.
- [9] Minkowski H. Generalisation de la theorie des fraction continues //Ann. Ecole Super. Ser. 3. 1896. Vol. 13. P. 85 – 102.//
- [10] Korkina E.I.: The simplest 2-dimensional continued fraction //Inter. Geometrical colloquium:Absrracts. Moscow, 1993.
- [11] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [12] Борович З. И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1964.
- [13] Вороной Г.Ф. Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та. 1896. Также: Собр. Соч. в 3-х томах. Киев: Из-воАН УССР. 1952. Т. 1. С. 197-391.
- [14] Брюно А.Д., Парусников В.И. Двустороннее обобщение ценной дроби. ДАН. 2006, т. 410. И 1 , с. 12-16
- [15] Брюно А.Д., Парусников В.И. Двустороннее обобщение ценной дроби. ДАН.

- [16] Брюно А.Д. Чебыщевский сборник. 2006 Т. 7. И 3. С. 4-71.
- [17] Брюно А.Д., Парусников В.И. Сравнение разных обобщений ценных дробей. Матем.. заметки. 1997. Т. 61:3. С. 339-348.
- [18] R. Gutting. Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus. I J.Reine Angew. Math., 278/279 (1975). 165-173.
- [19] Сушкевич А.К. Теория чисел. 2-е издание. Изд. Харьковского унив-та, 1956.
- [20] Хассе Г. Лекции по теории чисел. Перевод с немецкого Демьянова, под ред. И.Р. Шафаревича. ИИЛ, 1953.
- [21] Эдварс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. Перевод с английского Калинина В.Л. и Скопина А.И., под редакцией Скубенко Б.Ф. – М.:Мир, 1980.
- [22] Хинчин А.Я. Элементы теории чисел. Энциклопедия элементарной математики. Том 1. Гостехиздат, 1951
- [23]Исраилов М.И. Асимптотические разложения для числа решений диофантовой системы Гильберта - Камке с растущим числом слагаемых. Труды ЛОМИ. Исслед. По теории чисел, том 8, 1983, с.62-82
- [24] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. – М.:Наука, 1983.
- [25] Касселс Дж. Введение в теорию диофантовых приближений. Перевод с английского Полосуева А.М., под редакцией и дополнением Гельфонда А.О.– М.:ИЛ, 1961.
- [26] Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. Перевод с английского Андрианова А.Н. и Богаченко И.В., под редакцией Малышева А.В. – М.: Мир, 1982.
- [27] Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ: - М.: «Мир», Т.1, 1976; т.2 1977, т.3 1978.
- [28] Коробов Н.М. Теоритико-числовые методы в приближенном анализе. – М.:Наука, 1963.
- [29] Коробов Н.М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения. - М.: Наука, 1984.

- [30] Кубилюс И.П. Вероятностные методы в теории чисел. 2-е допол. издание Вильнюс, 1962.
- [31] Линник Ю.В. Избранные труды. Отв.ред.акад. Прохоров Ю.В., - Л.: «Наука», Т.1 1979; т.2 1980.
- [32] Монтгомери Х. Мультипликативная теория чисел. Перевод с английского А.Ф.Лаврика – М.: Мир, 1974.
- [33] Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. -М.: Наука, 1971.
- [34] Каримов И.А. Обеспечить поступательное и устойчивое развитие страны – важнейшая задача. Ташкент, март 2009.
- [35] Iskandarova Nigina. Evklid algoritmining matritsaviy ifodasi. Magistrantlarning XIV ilmiy konferensiyasi materiallari (Tabiiy fanlar) Samarqand: SamDU nashri, 2014y. – 23 bet.
- [36] Iskandarova Nigina. Umumiy kvadrat irratsionalliklarni uzluksiz kasrlar orqali tasvirlash. Ziyokor 2014 yil, 7-son 53 bet.