

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ

ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳуқуқида

УДК 514.764.254

АХАДОВА КОМИЛА САИД ҚИЗИ

РИМАН СУБМЕРСИЯЛАРИ ГЕОМЕТРИЯСИ

5A130101 –Математика (йўналишлар бўйича)

Геометрия ва топология

Магистр

академик даражасини олиш учун ёзилган

диссертация

Илмий раҳбар:

ф.м.ф.д. проф. Нарманов А.Я.

М У Н Д А Р И Ж А

Кириш	3
1-боб. Кўпхилликларда силлиқ акслантиришлар	6
1.1- §. Евклид фазосида силлиқ акслантиришлар.	6
1.2- §. Кўпхилликларда силлиқ акслантиришлар.	12
2-боб. Қатламалар	25
2.1- §. Қатламалар: Таърифи. Мисоллар.	25
2.2- §. Субмерсия ёрдамида ҳосил қилинган қатламалар. Мисоллар . . .	27
3-боб. Қатламали кўпхилликларнинг изометрик акслантиришлари	
3.1- §. Риман кўпхилликларининг изометрик акслантиришлари	33
3.2- §. Қатламали риман кўпхилликларининг изометрик акслантиришлар группаси. Мисоллар.	41
Хулоса	48
Адабиётлар рўйхати.	49

КИРИШ

Диссертация мавзусининг асосланиши ва унинг долзарблиги.

Мамлакатимизда соғлом ва баркамол авлодни тарбиялаш, ёшларнинг ўз ижодий ва интеллектуал салоҳиятини рўёбга чиқариш, мамлакатимиз йигит – қизларини XXI аср талабларига тўлиқ жавоб берадиган ҳар томонлама ривожланган шахслар этиб вояга етказиш учун зарур шарт-шароитлар ва имкониятларни яратиш бўйича Кадрлар тайёрлаш миллий дастури, “Таълим тўғрисида”ги Қонунида белгиланган кенг кўламли аниқ йўналтирилган чора-тадбирларни амалга ошириш мақсадида ушбу диссертация мавзуси танланди.

Риман геометриясининг фундаментал тадқиқот объектларидан бири-риман кўпхиллиги учун изометрик акслантиришлар группасининг структурасини ўрганишдан иборатдир. Бу группа дастлаб евклид фазоси учун ўрганилди. Маълумки евклид фазоси учун изометрик акслантиришлар группаси ортогонал матрицалар группасига изоморфдир.

Қатлама структураси киритилган кўпхиллик қатламали кўпхиллик деб аталади ва ҳозирги замон геометриясининг асосий тадқиқот объектларидан бири ҳисобланади. Шунинг учун ҳам қатламали кўпхиллик изометрик акслантиришлар группасининг структура муҳим ва янги масалалардан биридир.

Қатламаларнинг энг асосий ва кўп ўрганилган турларидан бири-субмерсиялар ёрдамида аниқланувчи қатламалардир. Субмерсиялар ёрдамида аниқланувчи қатламлар геометриясини ўрганишга жуда кўплаб тадқиқотлар бағишланган. Жумладан О’Нейл Б. [9], Hermann R. [3], Рейнхарт Б. [24] ва бошқалар. Бундан ташқари А.Я.Нармановнинг [23], [25], [26] ишларида ҳам ўрганилган.

Тадқиқотда қўлланилган услубларнинг қисқача тавсифи;

Тадқиқот муаммоси қатламалар назарияси ва дифференциал геометрия методлари орқали ҳал этилади.

Тадқиқотнинг мақсади: Диссертацияда риман субмерсиялари ёрдамида аниқланувчи қатламалардир геометрияси ва унинг изометрик акслантиришлар группасининг структурасини ўрганиш кўзда тутилган.

Тадқиқот вазифалари:

- риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламаларни ўрганиш;
- қатламали кўпхилликлар изометрияларини ўрганиш.

Тадқиқот объекти: Ушбу магистрлик диссертацияси дифференциалланувчи акслантиришларнинг муҳим синфларидан бири риман субмерсияларини, улар ҳосил қилган қатламаларнинг изометриялари группасини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқот предмети: риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламалар изометриялари группаси.

Тадқиқотнинг илмий фарази:

Риман субмерсияларининг баъзи синфлари учун улар ҳосил қилган қатламаларнинг изометриялар группаси кўпхиллик изометриялари группасига қисм группа бўлади.

Ҳимояга олиб чиқиладиган асосий ҳолатлар:

- Кўриладиган масала етарли даражада ўрганилмаган ва қатламали кўпхилликлар изометриялари кўпхиллик учун ҳам изометрия бўлишининг зарурий ва етарли шартлари янги натижадир.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги:

- қатламали кўпхилликлар изометриялари кўпхиллик учун ҳам изометрия бўлишининг зарурий ва етарли шартлари янги натижа сифатида олинди.

Тадқиқотнинг илмий ва амалий аҳамияти:

Қатламали кўпхилликлар геометрияси ва топологияси мамлакатимизда геометрия ва топология фани соҳасида олиб бориладиган

фундаментал тадқиқотларга киради ва магистрлик диссертациясида олинган натижалар ушбу йўналишни ривожлантиришга хизмат қилади.

Натижаларнинг эълон қилинганлиги:

Тадқиқот ишида маълум синфга тегишли субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар учун изометриялар группаси тўлиқ классификация қилинган.

Тадқиқот ишининг асосий мазмуни ва натижалари битта илмий мақола ва республика миқёсидаги конференция тўпламидаги маъруза тезисида ўз ифодасини топган.

Диссертация таркибининг қисқача тавсифи:

Ушбу диссертация кириш, уч боб, олти параграф, умумий хулосалар ва адабиётлар рўйхатидан иборат.

1-бобда евклид фазосидаги ва кўпхилликлардаги силлиқ акслантиришлар, уларнинг дифференциали, ранги ҳақида маълумотлар ва мисоллар келтирилган.

2-бобда кўпхилликлардаги қатлама структураси, субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар ўрганилган.

3-бобда эса риман кўпхилликларининг изометриялари ва қатламали кўпхилликларнинг изометриялари группаси ўрганилган.

1-боб. Кўпхилликларда силлиқ акслантиришлар

1.1-§. Евклид фазосида силлиқ акслантиришлар

Қуйидаги акслантиришни қарайлик: $f: G \rightarrow R^m$, $G \subset R^n$ - очик тўплам. Бу акслантириш m та n ўзгарувчили функциялар берилишига тенг кучлидир:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

...

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Мисол 1.1.1. Қуйидаги $f: R^2 \rightarrow R^1$ акслантириш икки ўзгарувчили битта $f(x, y) = x + y$ функция билан берилган.

Мисол 1.1.2. Қуйидаги $f: R^1 \setminus \{0\} \rightarrow R^2$ акслантириш бир ўзгарувчили иккита функция билан берилган:

$$\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_2(x) = \sin \frac{1}{x}, \end{cases}$$

Мисол 1.1.3. Қуйидаги $f: R^3 \rightarrow R^3$ акслантириш уч ўзгарувчили учта функция билан берилган:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = xy, \\ f_2(x, y, z) = yz, \\ f_3(x, y, z) = xz \end{cases}$$

Мисол 1.1.4. Қуйидаги $f: R^3 \rightarrow R^1$ акслантириш уч ўзгарувчили битта функция билан берилган:

$$f(x, y, z) = xyz$$

Мисол 1.1.5. Қуйидаги $f: R^1 \rightarrow R^3$ акслантириш бир ўзгарувчили учта функция билан берилган:

$$\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_2(x) = x^2, \\ f_3(x) = x^3 \end{cases}$$

Таъриф 1.1.6. Берилган $f: G \rightarrow R^m$, $G \subset R^n$ акслантириш учун $f_1, f_2, \dots, f_m$ функциялар узлуксиз ва r тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса ($r \geq 1$), f акслантириш силлиқ акслантириш ёки C^r -акслантириш дейилади.

Қуйидаги матрица f акслантиришнинг Якоби матрицаси деб аталади:

$$I(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

Бизга $f: G \rightarrow R^m$, ($G \subset R^n$ - очик тўплам) акслантириш C^r -акслантириш берилган бўлсин. f акслантириш дифференциалининг x_0 нуқтадаги ранги деб (1.1.1) формула билан аниқланган Якоби матрицасининг шу нуқтадаги рангига айтилади ва $rank d_{x_0} f$ каби белигиланади.

Юқорида келтирилган мисолларнинг Якоби матрицаси ва рангини аниқлаймиз.

Мисол 1.1.7. Қуйидаги $f(x, y) = x + y$ формула ёрдамида берилган $f: R^2 \rightarrow R^1$ акслантиришнинг Якоби матрицаси $I(f) = (1 \ 1)$ бўлгани учун f акслантириш дифференциали df нинг ранги ҳамма нуқтада 1 га тенг.

Мисол 1.1.8. Қуйидаги $\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_2(x) = \sin \frac{1}{x} \end{cases}$ формулалар ёрдамида берилган

$f: R^1 \rightarrow R^2$ акслантиришнинг Якоби матрицасини ва $x_0 = 1$ нуктада рангини топайлик:

$$I(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } d_{x_0} f = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos 1 \end{pmatrix} = 1$$

Бу акслантириш дифференциалининг ранги ҳамма нуктада бирга тенг.

Мисол 1.1.9. Қуйидаги $\begin{cases} f_1(x, y, z) = xy, \\ f_2(x, y, z) = yz, \\ f_3(x, y, z) = xz \end{cases}$ формулалар ёрдамида

берилган $f: R^3 \rightarrow R^3$ акслантиришнинг Якоби матрицасини ва $x_0 = (x^0, y^0, z^0) = (0, 1, 1)$ нуктада рангини топайлик:

$$I(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } d_{x_0} f = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Мисол 1.1.10. Қуйидаги $f(x, y, z) = xyz$ формула ёрдамида берилган $f: R^3 \rightarrow R^1$ акслантиришнинг Якоби матрицасини ва $x_0 = (x^0, y^0, z^0) = (2, 0, 1)$ нуктада рангини топайлик:

$$I(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = (yz \quad xz \quad xy)$$

$$\text{rank } d_{x_0} f = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Мисол 1.1.11. Қуйидаги

$$\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_2(x) = x^2 \\ f_3(x) = x^3 \end{cases}$$

формулалар ёрдамида берилган $f: R^1 \setminus \{0\} \rightarrow R^3$ акслантиришнинг Якоби матричасини ва унинг $x_0 = 2$ нуқтада рангини топайлик:

$$I(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{rank } d_{x_0} f = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 1.$$

Матрица ранги унинг устун ва қаторлари сонидан катта бўла олмайди, шунинг учун акслантириш дифференциалининг ранги учун қуйидаги тенгсизлик ҳар доим ўринли бўлади: $\text{rank } d_{x_0} f \leq \min(n, m)$.

Таъриф 1.1.12. Берилган f акслантириш учун x_0 нуқтада $\text{rank } d_{x_0} f = \min(n, m)$ бўлса, x_0 нуқта регуляр нуқта, $\text{rank } d_{x_0} f < \min(n, m)$ бўлса, x_0 нуқта критик нуқта дейилади.

Юқорида келтирилган 1.1.7, 1.1.8, 1.1.11. мисоллардаги акслантиришларнинг барча нуқталари регуляр, яъни ранги ҳар бир нуқтада максимал.

1.1.9.-1.1.10.-мисолларда эса бу акслантиришлар критик нуқтага эга бўлиб, $x_0 = 0$ бўлганда ранги максимал эмас.

Очиқ $G, G' \subset R^n$ тўпламлар учун $\varphi: G \rightarrow G'$ - гомеоморфизм (φ га тесқари акслантириш φ^{-1} мавжуд бўлиб, φ ва φ^{-1} акслантиришлар

узлуксиз) бўлиб, φ ва φ^{-1} акслантиришлар силлик бўлса, φ диффеоморфизм дейилади. Ўлчами $(n+m)$ бўлган $R^{n+m} = R^n \times R^m$ фазо нуқталарини (x, y) кўринишида ифодаalayмиз, бунда $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in R^m$. Бизга $U \subset R^n, V \subset R^m$ - очик тўпламлар ва $(x_0, y_0) \in U \times V \subset R^{n+m}$ берилган бўлсин.

Теорема 1.1.13. (ошкормас функция ҳақида). Берилган $\varphi : U \times V \rightarrow R^m$ - $\varphi \in C^r$ -акслантириш $r \geq 1$ учун, $\varphi(x_0, y_0) = 0$ ва $\det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$

муносабатлар ўринли бўлса, x_0 нуқтанинг шундай $W(x_0) \subset U$ атрофи ва шундай ягона $g : W(x_0) \rightarrow V$ акслантириш мавжудки, $g(x_0) = y_0$ ва ихтиёрий $x \in W(x_0)$ учун $\varphi(x, g(x)) = 0$ тенглик ўринли бўлади.

Бу акслантириш учун $g \in C^r$ ва $\left(\frac{\partial g}{\partial x} = -B^{-1}A \right)$, бунда B, A матрицалар $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right)$ ва $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right)$ матрицалардан y аргументни $g(x)$ га алмаштиришдан ҳосил бўлади.

Мисол 1.1.14. Қуйидаги $\Phi(x, y) = \ln(x - y^2 + 2) = 0$ формула билан берилган ошкормас функцияни $\Phi(x_0, y_0) = 0$ ва $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 \neq 0$ бўладиган $(x_0, y_0) = (2; 2)$ нуқта атрофида x ўзгарувчи бўйича ягона кўринишда қуйидагича ечиш мумкин: $x = y^2 - 1$.

Теорема 1.1.15. (тескари акслантириш ҳақида). Бизга $U \subset R^n$ - очик тўпламда аниқланган $f : U \rightarrow R^m$ $C^r, r \geq 1$ -акслантириш берилган бўлиб, $x_0 \in U$ нуқта f акслантиришнинг регуляр нуқтаси бўлса, x_0 ва $f(x_0)$ нуқтанинг шундай $V(x_0)$ ва $W(f(x_0))$ атрофлари мавжудки, $f : V(x_0) \rightarrow W(f(x_0))$ гомеоморфизм ва $f^{-1} \in C^r$ бўлади.

Исбот. Қуйидаги $F(y, x) = y - f(x), (y \in R^n, x \in U)$ қоида билан берилувчи $F: R^n \times U \rightarrow R^n$ функцияни қарайлик. Берилган f функция учун $y_0 = f(x_0)$ бўлсин. $F \in C^r$ ва $F(x_0, y_0) = 0$. Шундай қилиб $\text{rank } d_{x_0} f = n$ бўлади, у ҳолда $\det \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$. Теорема 1.1.13. га кўра, y_0

нуқтанинг шундай $W(y_0) \subset R^n$ атрофи ва ягона $g: W(y_0) \rightarrow U$ акслантириш мавжудки, $g(y_0) = x_0$ ва ихтиёрий $y \in W(y_0)$ учун

$$F(y, g(y)) = y - f(g(y)) = 0 \quad (*)$$

Фараз қилайлик, $V(x_0) = g(W(y_0))$ бўлсин. Агар $V(x_0) = f^{-1}(W(y_0))$ бўлса, у ҳолда f узлуксизлигидан $V(x_0)$ очик бўлади. Худди шундай, $g: W(y_0) \rightarrow V(x_0)$ очик тўпламларни акслантириш ва (*) га кўра $g = f^{-1}$ га эга бўламиз. Теорема 1.1.15. га кўра $f^{-1} \in C^r$ бўлади.

Эгри чизиқли координаталар системаси. Евклид фазоси R^n да $(x_1, \dots, x_n)$ Декарт координаталар системаси киритилган бўлсин. $U, V \subset R^n$ - очик тўпламлар ва $f: U \rightarrow V$ - диффеоморфизм бўлсин.

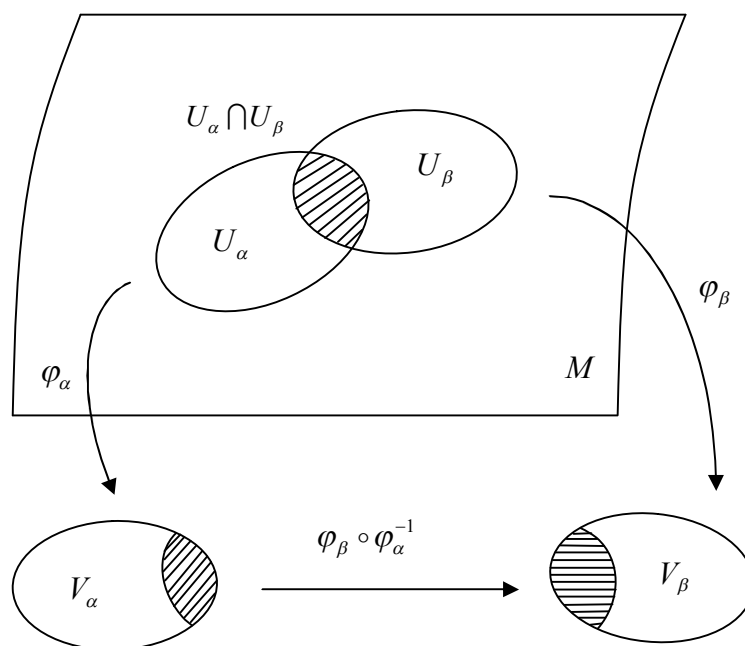
Таъриф 1.1.16. $f^{-1}(y) \in U$ нуқтанинг стандарт координаталари $y \in V$ нуқтанинг эгри чизиқли координаталари дейилади.

1.2-§. Кўпхилликларда силлиқ акслантиришлар

1.2.1. Силлиқ кўпхилликлар

M - n ўлчамли топологик кўпхиллик бўлсин. Топологик кўпхиллик таърифига кўра, ихтиёрий нукта $x \in M$ шундай $U \subset M$ атрофга эгаки, бу атроф R^n нинг бирор очик қисм тўпламига гомеоморфдир, яъни $\varphi: U \rightarrow G \subset R^n$ гомеоморфизм мавжуд. (U, φ) жуфтликни локал карта деб атаймиз. Агар $p \in U$ бўлса, $\varphi(p) \in R^n$ ва демак $\varphi(p) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. $p_1, p_2, \dots, p_n$ сонлар p нуктанинг (U, φ) локал картадаги координаталари дейилади. Табиийки, p нукта бошқа локал картага ҳам тегишли бўлиши мумкин.

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ локал карталардан иборат M нинг қопламаси бўлсин. Бундай оила M даги атлас дейилади. Агар $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ва (U_β, φ_β) атласга тегишли локал карталар бўлиб, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ бўлса, $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ акслантириш аниқланган ва гомеоморфизмдир. Агар $\psi_{\alpha\beta}$ акслантириш $C^r, r \geq 1$ акслантириш бўлса, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ва (U_β, φ_β) карталар ўзаро C^r - мослашган карталар деб аталади. Агар $p \in U_{\alpha\beta}$ бўлиб, $x_1, x_2, \dots, x_n$ ва $y_1, y_2, \dots, y_n$ лар p нуктанинг мос равишда $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ва (U_β, φ_β) карталардаги координаталари бўлса, бу карталарнинг ўзаро C^r - мослашганлиги $y_1, y_2, \dots, y_n$ ларнинг $x_1, x_2, \dots, x_n$ ларга нисбатан C^r - функциялар эканлигини таъминлайди (1-расм).



1-расм.

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ атласнинг ҳамма локал карталари ўзаро C^r - мослашган бўлса, у C^r - атлас дейилади. Табиийки, топологик кўпхилликда C^0 - атлас мавжуд. $r \geq 1$ учун C^r - атласни силлиқ атлас деб атаймиз.

Агар иккита атласларнинг локал карталаридан иборат атлас силлиқ атлас бўлса, уларни ўзаро силлиқ эквивалент атласлар деб атаймиз. Топологик кўпхилликда ўзаро эквивалент силлиқ атласлар йиғиндиси максимал силлиқ атласни ҳосил қилади. Бу атласни силлиқ ёки дифференциал структура деб атаймиз.

Таъриф 1.2.1. M топологик кўпхиллик унда аниқланган силлиқ структура билан биргаликда силлиқ кўпхиллик (C^r -кўпхиллик) деб аталади.

Топологик кўпхилликда берилган ихтиёрий C^r - атлас максимал C^r - атласни аниқлайди. Шунинг учун силлиқ структурани аниқлаш учун бирорта C^r -атласни кўрсатиш етарлидир.

Мисол 1.2.2. $M = R^1$ да битта локал картадан иборат атласни киритамиз: $\{(U, \varphi)\}$, $U = R^1$, φ - горизонтал асимптотага эга бўлмаган

монотон ўсувчи узлуксиз функция. $\varphi(x)=x$ ва $f(x)=\begin{cases} x, x < 0 \\ 2x, x \geq 0 \end{cases}$ бўлса,

$$\varphi \cdot f^{-1} = \begin{cases} x, x < 0 \\ \frac{x}{2}, x \geq 0 \end{cases} \text{ дифференциалланувчи эмас. Демак, } (U, \varphi) \text{ ва } (U, f)$$

атласлар R^1 да ҳар хил силлиқ структураларни аниқлайди.

Мисол 1.2.3. $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ сферада қуйидаги 6 та $z > 0, z < 0, x > 0, x < 0, y > 0, y < 0$ тенгсизликлар билан аниқланувчи ярим сфералардан иборат атласни қараймиз. Бу атласнинг C^∞ -структура эканини кўрсатамиз. Бунинг учун ихтиёрий иккита локал карталарнинг ўзаро C^∞ -мослашганлигини кўрсатамиз. Мисол учун $z > 0$ ва $x > 0$ ярим сфераларни қарайлик. Агар (x, y, z) нуқта биринчи картада (x_1, x_2) , иккинчи картада (y_1, y_2) координаталарга эга бўлса, $x_1 = x, x_2 = y, y_1 = y, y_2 = z$. Демак, сфера тенгламасидан фойдаланиб,

$$\begin{cases} y_1 = x_2, \\ y_2 = (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} x_1 = (1 - y_1^2 - y_2^2)^{\frac{1}{2}}, \\ x_2 = y_1 \end{cases}$$

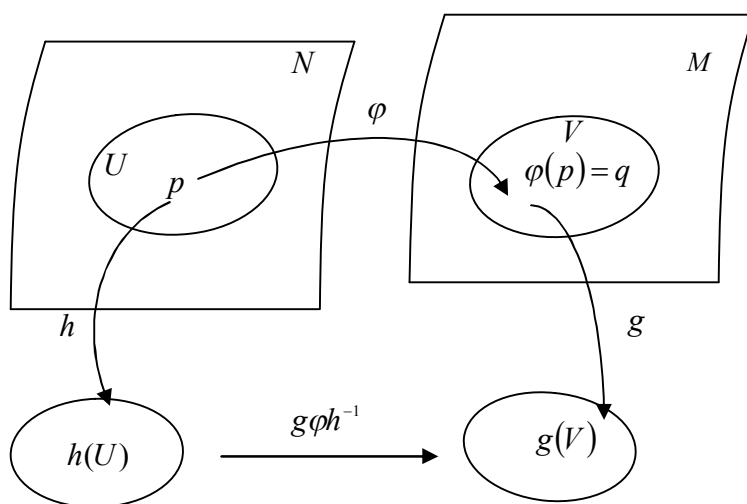
Боғланишларни ҳосил қиламиз. Бу функциялар ихтиёрий тартибдаги узлуксиз ҳосилаларга эга. Демак, $z > 0$ ва $x > 0$ локал карталар ўзаро C^∞ -мослашгандир. Худди шундай, ихтиёрий иккита локал карталарнинг C^∞ -мослашганлигини кўрсатиш мумкин. Демак, сфера C^∞ -кўпхилликдир.

Мисол 1.2.4. $M = R^n, \{(U, \varphi)\}, U = R^n$ ва $\varphi_0(x) = x$ бўлсин. Бу атлас R^n да каноник структура деб аталувчи C^∞ -структурани аниқлайди. Бу структура тузилишини ўрганамиз. Агар $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ локал карта каноник структурага тегишли карта бўлса, $\psi_{0\alpha} = \varphi_\alpha \varphi_0^{-1} = \varphi_\alpha, \psi_{\alpha 0} = \varphi_0 \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha^{-1}$

акслантиришлар C^∞ -синфга тегишли бўлиши керак. Демак, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ каноник структурага тегишли бўлиши учун гомеоморфизм φ_α ва унинг тескарис φ_α^{-1} C^∞ -акслантириш бўлиши зарурдир.

1.2.2. Силлик кўпхилликларни силлик акслантириш

Силлик k -ўлчамли N кўпхилликни силлик n -ўлчамли кўпхилликка узлуксиз акслантириш $\varphi: N \rightarrow M$ силлик дейилади, агар ихтиёрий $p \in N$ нуқтанинг атрофида N ва M даги бирор картада силлик функциялар билан берилса, яъни $g\varphi h^{-1}$ функция M да силлик функция бўлса (3-расм). Эслатиб ўтамиз, бунда N, M кўпхилликларнинг ўлчамлари k, n ихтиёрий бўлиши мумкин.



3-расм.

Таъриф 1.2.5. Икки силлик кўпхилликни ўзаро бир қийматли икки томонлама силлик акслантириш диффеоморфизм, бундай акслантириш ўрнатиш мумкин бўлган кўпхилликлар эса диффеоморф дейилади.

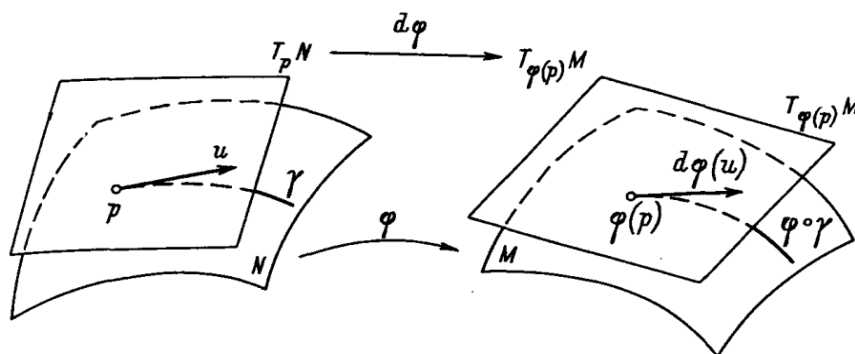
M да силлик йўл деб $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ силлик акслантиришга айтамыз.

Локал координаталарда йўл нуқталарининг ҳар бир $x^i \circ \gamma$ координатаси силлик функция бўлади. $\gamma(a)$ ва $\gamma(b)$ нуқталар йўлнинг боши ва охири дейилади.

Теорема 1.2.6. $\varphi: N \rightarrow M$ - силлиқ кўпхилликларни силлиқ акслантириш ва $\forall q \in M$ φ акслантиришнинг регуляр нуқтаси бўлсин. У ҳолда p нуқтанинг тўла прообраз $B = \varphi^{-1}(q)$ N да ўлчами $\dim B = \dim N - \dim M = k - n$ бўлган силлиқ қисм кўпхиллик бўлади.

Исбот. $B = \varphi^{-1}(q)$ қатламнинг кўпхиллик эканини исботлаш учун, ҳар бир $p \in B$ нуқтанинг атрофида ошқормас функция ҳақидаги теоремани қўллаш етарли. Натижада ҳар бир $p \in B$ нуқта R^{k-n} евклид фазосидаги соҳага гомеоморф $p \in U$ атрофга эга бўлади. U атрофда локал координаталар сифатида N кўпхилликнинг p нуқтаси атрофидаги $(x_1, \dots, x_n)$ локал координаталардан бирор $(n-m)$ тасини олиш мумкин. Агар бу координаталар $(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}})$ бўлса, у ҳолда қолган (x_j) локал координаталар $(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}})$ орқали силлиқ функциялар билан ифодаланади. Бундан $B = \varphi^{-1}(q)$ нинг силлиқ кўпхиллик эканлиги келиб чиқади. $(y_1, \dots, y_n)$ N кўпхилликнинг p нуқтаси атрофидаги бошқа координата системаси бўлсин. $(y_{j_1}, \dots, y_{j_{n-m}})$ система B да локал координаталар системасини ташкил этади. У ҳолда $y_{j_k} = y_{j_k}(x_1, \dots, x_n) = y_{j_k}(x_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}), \dots, x_n(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}))$ силлиқ функция бўлади. Теорема исботланди.

$\varphi: N \rightarrow M$ - силлиқ N кўпхилликни силлиқ M кўпхилликка силлиқ акслантириш бўлсин. N даги ҳар бир γ йўлга M да $\varphi \circ \gamma$ йўл мос келади.



4-расм.

M да бирор $\varphi(p)$ нукта атрофида берилган ҳар бир f функцияга, N да бирор p нукта атрофида берилган $f \circ \varphi$ функция мос келади.

Силлиқ φ акслантиришнинг p нуктадаги дифференциали $d_p\varphi$ деб $d_p\varphi: T_pN \rightarrow T_{\varphi(p)}M$ акслантиришга айтилади, у ҳар бир $u \in T_pN$ векторга $d_p\varphi(u) \in T_{\varphi(p)}M$ векторни мос қўйади, M да ихтиёрий f силлиқ функцияга қуйидаги қоида бўйича таъсир этади:

$$(d_p\varphi(u))f = u(f \circ \varphi). \quad (1.2.1)$$

Агар u вектор γ йўлининг $p = \gamma(t)$ нуктада тезлик вектори бўлса, у ҳолда $d_p\varphi(u)$ вектор $\varphi \circ \gamma$ йўлининг t да тезлик вектори бўлади (4-расм),

$$d_p\varphi(\gamma'(t)) = (\varphi \circ \gamma)'(t). \quad (1.2.2)$$

Юқоридаги формулалардан кўринадики, ихтиёрий $u, v \in T_pN$, $a \in R$ да

$$d\varphi(u + v) = d\varphi(u) + d\varphi(v), \quad d\varphi(au) = ad\varphi(u), \quad (1.2.3)$$

яъни $\varphi: N \rightarrow M$ силлиқ акслантиришнинг дифференциали $d_p\varphi$ чизиқли акслантириш ва шунинг учун, хусусий ҳолларда силлиқ акслантириш бўлади, $d_p\varphi: T_pN \rightarrow T_{\varphi(p)}M$ Табиий қоида бўйича аниқланган $d\varphi(p, u) = (\varphi(p), d_p\varphi(u))$ уринма қатламаларни акслантириш $d\varphi: TN \rightarrow TM$ ни қараймиз. Бу акслантириш умуман олганда чизиқли эмас, балки қатламдагина чизиқли бўлади.

1.2.3. Ботириш, жойлаштириш, субмерсия

Берилан φ силлиқ акслантириш учун ҳар бир $p \in N$ нуктадаги дифференциали $d_p\varphi$ чизиқли акслантиришнинг ядроси фақат нолдан иборат бўлса, яъни $d_p\varphi$ акслантириш дифференциали T_pN фазони $T_{\varphi(p)}M$ нинг қисм фазосига чизиқли изоморф акслантирса, у ҳолда φ

акслантириш N кўпхилликни M га (силлик) ботириш дейилади. Табиийки, бунда $k = \dim N \leq \dim M = n$ бўлиши зарур.

N кўпхилликда p нуқтани ўз ичига олувчи (V, g) картанинг локал координаталари $(x^1, \dots, x^k)$ ва M кўпхилликда $\varphi(p)$ нуқтани ўз ичига олувчи (U, h) картанинг $(y^1, \dots, y^n)$ локал координаталарида φ акслантириш силлиқ функциялар билан берилади:

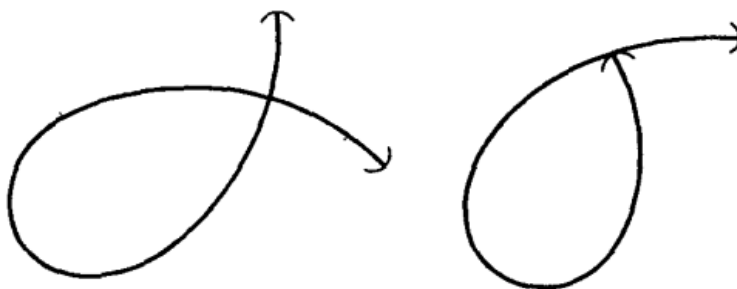
$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^k); \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2.4)$$

Берилган φ акслантириш ботириш бўлиши учун $k \leq n$ бўлиб, ҳар бир $p \in N$ нуқтада Якоби матрицаси $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, k}$ нинг ранги k га тенг бўлиши, яъни максимал бўлиши зарур ва етарлидир.

Якоби матрицасининг ранги локал координаталарни қандай танлашга боғлиқ эмас ва φ акслантиришнинг p нуқтадаги дифференциали $d\varphi$ нинг ранги дейилади.

Агар $\varphi : N \rightarrow M$ акслантиришда N ўзининг образига диффеоморф бўлса, у ҳолда φ акслантириш (силлиқ) жойлаштириш дейилади. Бу ботиришнинг хусусий ҳолидир.

Мисол 1.2.7.



5-расм.

5-расмдаги мисолда очиқ кесмани текисликка ботириш бўлади, лекин жойлаштириш бўлолмайди. Иккинчи мисолда акслантириш инъектив, лекин жойлаштириш бўлмайди.

Ихтиёрий ботириш локал жойлаштириш бўлади.

Берилган $\varphi: N^k \rightarrow M^n$ акслантиришда кўпхилликлар ўлчами учун $k > n$ тенгсизлик бажарилса ва Якоби матрицасининг ранги ҳар бир нуқтада максимал бўлса, яъни n га тенг бўлса, φ акслантириш субмерсия дейилади.

Мисол 1.2.8. Силлик $\pi: TM^{2n} \rightarrow M^n$ проекциялаш TM даги ҳар бир (p, u) (бунда $p \in M, u \in T_p M$) векторга унинг нуқтасини $\pi(p, u) = p$ мос қўяди. Бу акслантиришнинг ҳар бир нуқтада ранги максимал, яъни n га тенг бўлгани учун субмерсия бўлади.

Мисол 1.2.9. $\varphi: R^2 \rightarrow R^1$ акслантириш қуйидаги қоида бўйича аниқланади: $\varphi(x, y) = x$, унинг ранги 1 га тенг субмерсия бўлади.

1.2.4. Кўпхилликларда вектор майдонлар

Таъриф 1.2.10. $A \subset M$ қисм тўпламнинг ҳар бир $x \in A$ нуқтасига уринма фазодан бирор $X_x \in T_x M$ вектор мос қўйилса, A тўпламда X вектор майдон берилган дейилади.

X вектор майдонни $x \mapsto X_x$ акслантириш сифатида қараш учун барча X_x векторлар ётувчи ягона тўпламни кўрсатиш лозим, чунки турли нуқталарга турли уринма фазолардан векторлар мос қўйилади. Бундай тўплам уринма қатлама TM ҳисобланади. Шунинг учун вектор майдонни қуйидаги акслантириш каби аниқлаш қулайдир:

$$X: A \rightarrow TM, \text{ бунда } A \subset M$$

Бу акслантириш қуйидаги қўшимча хоссани қаноатлантиради: ихтиёрий $x \in A$ нуқта учун проекция $\pi(X_x) = x$, яъни $\pi \circ X = id_A$. Бундай акслантиришлар TM нинг кесимлари ҳам дейилади.

Тасдиқ 1.2.11. $A \subset M$ соҳада берилган X вектор майдон силлик дейилади, агар уч тенгкучли тасдиқлардан бири бажарилса:

а) $X: A \rightarrow TM$ акслантириш сифатида қаралаётган вектор майдон A силлик кўпхилликни TM силлик кўпхилликка силлик акслантирса;

б) M даги A соҳада берилан ихтиёрий силлиқ функция f учун $(Xf)(x) = X_x f$ тенглик билан аниқланувчи Xf функция силлиқ бўлса;

в) ҳар бир $x \in A$ нукта учун (U, h) карта топилсаки, унда X_x векторнинг координатлари X_x^i лар x нуктанинг $(x^1, \dots, x^n)$ координаталарига силлиқ боғлиқ бўлса.

Таъриф 1.2.12. $A \subset M$ тўпلامда аниқланган X вектор майдон силлиқ дейилади, агар камида битта $A \subset G \subset M$ очик тўпلامда аниқланган ва A тўпلامда X вектор майдон билан устма-уст тушадиган, яъни $Y|_A = X$ тенглик бажариладиган силлиқ Y вектор майдон мавжуд бўлса. Бундай Y майдон X вектор майдоннинг кенгайтмаси дейилади.

Битта $A \subset M$ тўпلامда берилган X, Y вектор майдонларни қуйидаги қоида бўйича қўшиш ва сонга кўпайтириш мумкин: $(aX + bY)_x = aX_x + bY_x$, бунда $a, b \in R$. Бу амалларга нисбатан A даги вектор майдонлар чизикли фазо ташкил этади. Бундан ташқари, $A \subset M$ даги вектор майдонларни функцияга қуйидагича кўпайтириш мумкин:

$$(fX)_x = f(x)X_x \quad (1.2.5)$$

M даги силлиқ вектор майдонлар чизикли фазосини (R устида) $\mathfrak{N}$ билан белгилаймиз.

Фараз қилайлик, $f: N^k \rightarrow M^n$ – субмерсия бўлсин. Ошқормас функция ҳақидаги теоремага кўра $f^{-1}(y), y \in f(N) \subset M$ тўла прообразлари $(k - n)$ -ўлчамли силлиқ қисм кўпхиллик бўлади. Бу қисм кўпхилликларнинг $T_x^V = \text{Ker } d_x f$ уринма фазоси $T_x N$ уринма фазонинг вертикал қисм фазоси дейилади.

Фараз қилайлик, N – риман кўпхиллиги бўлсин. У ҳолда ҳар бир $T_x N$ уринма фазода T_x^V вертикал қисм фазонинг T_x^H ортогонал тўлдирувчиси аниқланган. Аниқланган T_x^H қисм фазо горизонтал қисм фазо дейилади.

Худди шундай ҳар бир вектор майдон ёйилмаси қуйидаги кўринишда бўлади: $X = X^v + X^h$, бу ерда $X^v \in TF$, $X^h \in TH$. Агар $X^h = 0$ (мос равишда $X^v = 0$) бўлса, у ҳолда X майдон вертикал (мос равишда горизонтал) вектор майдон дейилади.

M кўпхилликнинг g риман метрикаси L_p қатламда $\tilde{g}$ риман метрикасини ҳосил қилади. Бу метрикаларга нисбатан каноник инъекция $i: L_p \rightarrow M$ изометрик ботириш бўлади. ∇ боғланиш L_p қатламда $\tilde{\nabla}$ боғланишни ҳосил қилади.

Худди шундай $f: M \rightarrow B$ субмерсия M кўпхилликда $k = n - m$ ўлчамли F қатлама ҳосил қилади, унинг қатламлари $L_p = f^{-1}(p)$, $p \in B$ ошкормас функция ҳақидаги теоремага кўра қисм кўпхиллик бўлади.

Фараз қилайлик, M, B кўпхилликлар риман кўпхиллиги бўлсин.

$T_q F$ қисм фазо $T_q M$ уринма фазонинг қисм фазоси $\text{Ker} df_q$ билан устма-уст тушади, бу ерда df_q - акслантиришнинг q нуқтадаги дифференциали.

Таъриф 1.2. Берилган $f: M \rightarrow B$ субмерсиянинг дифференциали df горизонтал векторлар узунлигини сақласа, у ҳолда субмерсия $f: M \rightarrow B$ риман субмерсияси дейилади. Албатта, бу таъриф қуйидаги тенгликларга тенг кучли: $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle u, v \rangle$ ёки $2\langle u, v \rangle = |u + v|^2 - |u|^2 - |v|^2$

Таъриф 1.2.13. Қуйидаги $R: V(M) \times V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$ чизикли акслантириш қуйидаги қоида бўйича аниқланса:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (1.2.6)$$

эгрилик тензори дейилади, бунда $X, Y, Z \in V(M)$ ва $[X, Y]$ — X ва Y майдонларнинг Ли қавси.

Таъриф 1.2.14. Қуйидаги $k(u, v) = \langle R(u, v)v, u \rangle$ қоида бўйича аниқланувчи функция $u, v \in T_p M$ векторлардан ҳосил қилинган $\sigma \subset T_p M$ текислик йўналишида риман эгрилиги дейилади.

О'Нейл формуласи:

Теорема 1.2.15. $f: N \rightarrow M$ риман субмерсияси бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $y \in M, x \in f^{-1}(y)$ нуқталар ва ихтиёрий $u, v \in T_y M$ векторлар учун риман эгрилиги учун қуйидаги тенглик бажарилади.

$$k(u, v) = k(\overline{u_x}, \overline{v_x}) + \frac{3}{4} \left| [\overline{X}, \overline{Y}]_x^v \right|^2 \quad (1.2.7)$$

бунда X, Y $y \in M$ нуқтада $X_y = u, Y_y = v$ қийматли M кўпхилликдаги ихтиёрий силлиқ вектор майдонлар $\overline{X}, \overline{Y}$ - эса бу майдонларнинг N кўпхилликдаги горизонтал кўтарилиши.

Мисол 1.2.16. Хопф акслантириши $f: S^3 \rightarrow S^2$,
 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2), 2 \operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2), |z_1|^2 - |z_2|^2)$ риман субмерсияси бўлишини кўрсатамиз, бунда $z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1x_3 + 2x_2x_4, 2x_2x_3 - 2x_1x_4, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

$V = \{-x_2, x_1, -x_4, x_3\}$ вертикал $H = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ва $X = \{0, x_4, x_1, 0\}$ горизонтал вектор майдонлар.

$$\langle H, X \rangle = x_2x_4 + x_1x_3$$

Акслантиришнинг Якоби матрицаси қуйидагича:

$$I(f) = \begin{pmatrix} 2x_3 & 2x_4 & 2x_1 & 2x_2 \\ -2x_4 & 2x_3 & 2x_2 & -2x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \end{pmatrix}$$

$$df(H) = I(f) \cdot H = \begin{pmatrix} 2x_3 & 2x_4 & 2x_1 & 2x_2 \\ -2x_4 & 2x_3 & 2x_2 & -2x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1x_3 + 4x_2x_4 \\ 4x_2x_3 - 4x_1x_4 \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 \end{pmatrix}$$

$$df(X) = I(f) \cdot X = \begin{pmatrix} 2x_3 & 2x_4 & 2x_1 & 2x_2 \\ -2x_4 & 2x_3 & 2x_2 & -2x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_4 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_4^2 - 2x_1^2 \\ 2x_3x_4 + 2x_1x_2 \\ 2x_2x_4 - 2x_1x_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle df(H), df(X) \rangle = 8(x_1x_3 + x_2x_4)(x_4^2 - x_1^2) + 8(x_2x_3 - x_1x_4)(x_3x_4 + x_1x_2) + 4(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)(x_2x_4 - x_1x_3) = 4(x_2x_4 + x_1x_3)$$

Агар метрикани $g_{ij} = \frac{1}{4}E$ кўринишда танласак, Хопф акслантириши

риман субмерсияси бўлади, бу ерда $E - 3 \times 3$ бирлик матрица.

2-боб. Қатламалар

§ 2.1. Регуляр қатламалар

$M - n$ - ўлчамли силлиқ кўпхиллик ва A ундаги максимал атлас бўлсин.

Таъриф 2.1.1. M кўпхилликнинг чизиқли боғланишли қисм тўпламларнинг $F = \{L_\alpha; \alpha \in B\}$ оиласи k -ўлчамли, $0 < k < n$, C^r - қатлама дейилади, агар у қуйидаги учта шартни қаноатлантирса:

1)
$$\bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha = M;$$

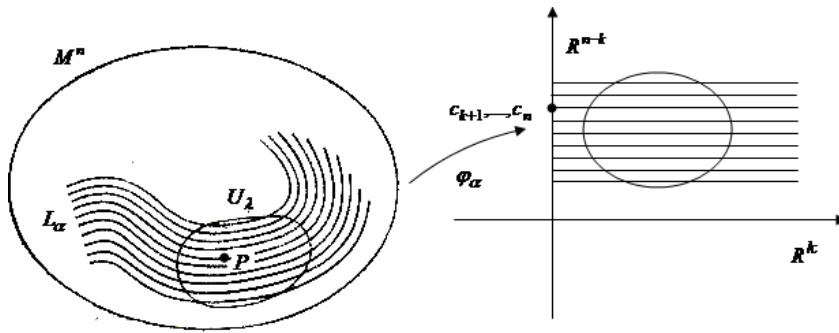
2) Ихтиёрий $\alpha, \beta \in B$ учун, агар $\alpha \neq \beta$ бўлса, у ҳолда $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$;

3) Ихтиёрий $p \in M$ учун $(U, \varphi) \in A, p \in U$ локал координатани танлаб олишимиз мумкин. Шундай экан, агар $U \cap L_\alpha \neq \emptyset, \forall \alpha \in B$ бўлса, у ҳолда $\varphi(U \cap L_\alpha)$ нинг чизиқли боғланишли тўплам компонентлари қуйидаги тенгламалар билан берилади:

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \varphi(U) : x_{k+1} = c_{k+1}, x_{k+2} = c_{k+2}, \dots, x_n = c_n\}$$

бу ерда $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ - чизиқли боғланишли компонентларнинг ўзгармаслари (9-расм).

Юқорида келтирилган таърифнинг 1-шартига кўра барча қатламлар йиғиндиси кўпхилликни қоплайди, 2-шартга кўра ҳар хил қатламлар ўзаро кесишмайди. 3-шарт эса қатламлар ўзини параллел текисликлар каби тутишини кўрсатади.



9-расм.

Таъриф 2.1.2. F бўлинишдаги ҳар бир чизикли боғланишли L_α қисм тўплам қатлам дейилади, $q = n - k$ қиймат эса F қатламнинг коўлчами дейилади.

$(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ атроф 3) шартни қаноатлантирса, унда у қатлама атрофлари дейилади.

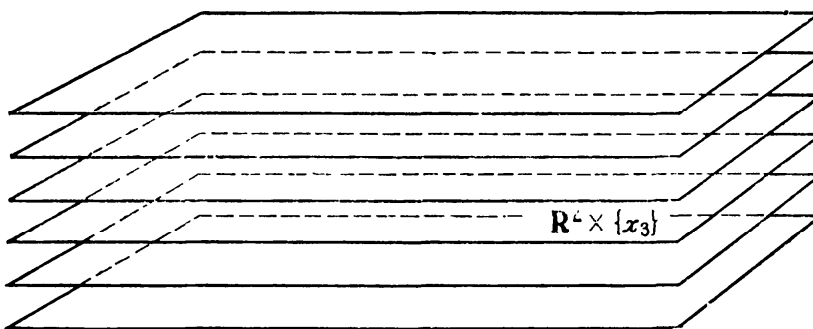
R^n - n - ўлчамли евклид фазоси, $0 \leq k \leq n$, $R^n = R^k \times R^{n-k}$ ва

$R^n = \bigcup_{(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \in R^{n-k}} R^k \times (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ бўлсин. Бошқача қилиб айтганда, R^n

фазони $R^k \times (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ компонент бирлашмаси кўринишида оламиз

ва у C^∞ -гомеоморфизмдир. $R^k \times (x_{k+1}, \dots, x_n)$ компонентда k -ўлчамли

қатлама дейилади. (10-расм, $n = 3, k = 2$ ҳолда)



10-расм.

Мисол Қуйидагича аниқланган $f: R^3 \rightarrow M^2$, $(x, y, z) \in R^3$, $(u, v) \in M^2$ акслантириш берилган бўлсин:

$$\begin{cases} u = x \cos(x^2 + y^2 - z) - y \sin(x^2 + y^2 - z) \\ v = x \sin(x^2 + y^2 - z) + y \cos(x^2 + y^2 - z) \end{cases}$$

Бу акслантиришнинг сатҳ тўплами ҳосил қилувчи қатламани қараймиз. f акслантиришнинг $f^{-1}(p), p \in M^2, p \neq \{0,0\}$ сатҳ чизиклари винт чизикларидан иборат, $p = \{0,0\}$ нуқтадаги сатҳ чизиғи эса бутун Oz ўқидан иборат. Улар ўзаро кесишмайди, йиғиндиси R^3 фазони қоплайди.

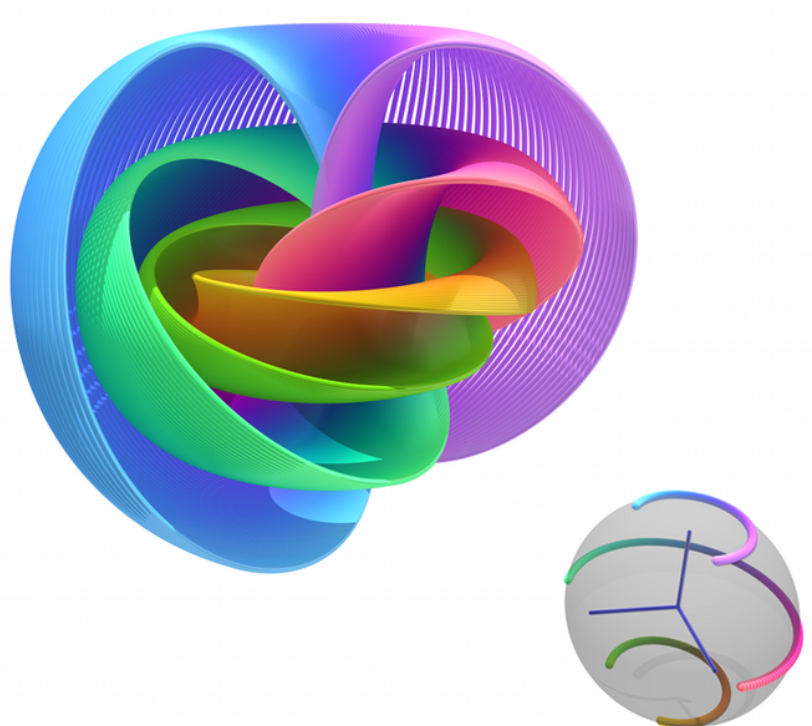
Мисол Юқорида келтирилган 1.2.16 мисолдаги Хопф акслантиришининг сатҳ сиртлари ҳосил қилган қатламани ўрганамиз. Маълумки $f: S^3 \rightarrow S^2$ акслантириш қуйидаги формула билан аниқланади:

$$f(z_1, z_2) = (2\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2), 2\operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2), |z_1|^2 - |z_2|^2) \quad , \quad \text{бунда} \quad (z_1, z_2) \in C^2,$$

$$z_1 = x_1 + ix_2, \quad z_2 = x_3 - ix_4,$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1x_3 + 2x_2x_4, 2x_2x_3 - 2x_1x_4, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)$$

Хопф акслантириши ёрдамида ҳосил қилинган қатлама Хопф қатламаси дейилади. Курилишидан маълумки, Хопф қатламасининг ҳар бир қатлами катта айланалардан иборат. Шунинг учун ҳар бир қатлам геодезик чизик бўлади.



2.2-§. Субмерсия ёрдамида аниқланган қатлама

Таъриф 2.2.1. Бизга ўлчамлари мос равишда n ва m бўлган M, N – C^r -кўпхиллик берилган бўлсин, бунда $n > m, r \geq 1$. $f: M \rightarrow N$ C^r -субмерсия ёрдамида ҳосил қилинган қатлама дейилади, агар шундай $(n-m)$ -ўлчамли F C^r -кўпхиллик ва N кўпхилликнинг шундай $\{U_\lambda; \lambda \in A\}$ очик қопламаси мавжудки, қуйидаги икки шарт бажарилса:

1) ихтиёрий $q \in N$ нукта учун M да $\pi^{-1}(q)$ қисм тўплам F кўпхилликка C^r -гомеоморф $(n-m)$ -ўлчамли қисм кўпхиллик бўлади.

2) ҳар бир U_λ тўплам учун

$$\psi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times F,$$

шундай $\psi_\lambda(\pi^{-1}(q)) = \{q\} \times F, q \in U_\lambda$ C^r -гомеоморфизм мавжуд бўлади.

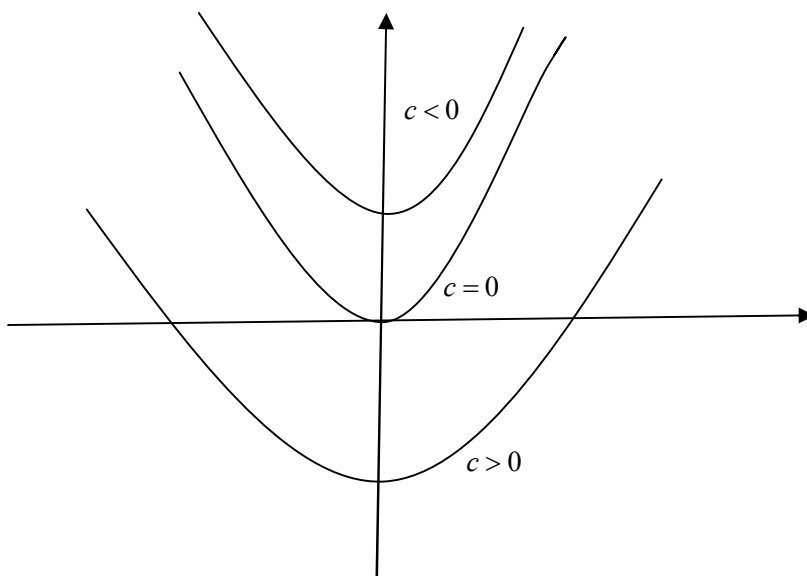
Шу M кўпхиллик субмерсия ёрдамида ҳосил қилинган қатламалар фазоси, N – база, F – стандарт қатлам, π акслантириш – проекция, $\{U_\lambda; \lambda \in A\}$ оила – C^r -субмерсия ёрдамида ҳосил қилинган қатламанинг координата системаси.

2) шарт локал тривиаллик шарти ҳисобланади. Агар N кўпхилликнинг $\{U_\lambda; \lambda \in A\}$ очик қопламаси битта элементдан ташкил топган бўлса, у ҳолда субмерсия ёрдамида ҳосил қилинган қатлама тривиал қатлама дейилади.

Тривиал қатламаларга бир нечта мисол келтирамиз:

Мисол 2.2.2. Бизга $M = N \times F$ ва $\pi(q, y) = q, (q \in N, y \in F)$ тенглик билан аниқланган $\pi: N \times F \rightarrow N$ проекция берилган бўлсин. $\pi: N \times F \rightarrow N$ C^r -субмерсия ёрдамида ҳосил қилинган қатлама бўлади. Бу ҳолда N кўпхилликнинг $\{U_\lambda; \lambda \in A\}$ очик қопламаси N нинг битта элементида иборат бўлади. Бундай C^r -субмерсия ёрдамида ҳосил қилинган қатлама – қатламалар кўпайтмаси дейилади.

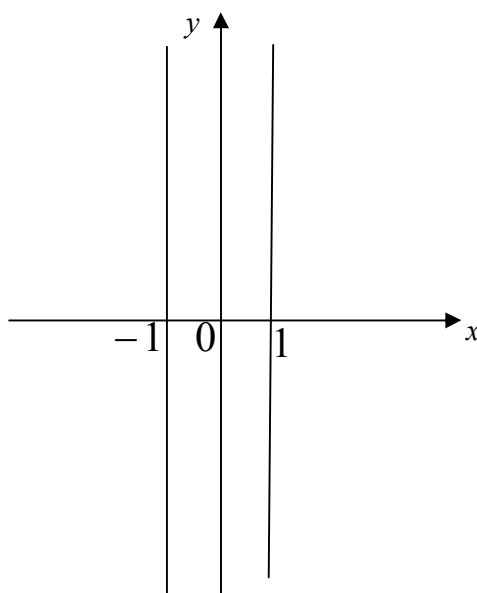
Мисол 2.2.3. Бизга $M = R^2$ x, y декарт координаталари билан берилган бўлсин. Қуйидаги $f: M \rightarrow R^1$ функцияни қараймиз, бунда $f(x, y) = x^2 - y$. Бу акслантиришнинг ранги ҳамма нуқтада бирга тенг. Ҳар бир $c \in R^1$ нуқта учун $f^{-1}(c)$ прообразлар функциянинг сатҳ чизиқлари $f(x, y) = c$ ёки $x^2 - y = c$ тенглама билан берилади. Барча сатҳ чизиқлари парабола бўлади ва шунинг учун улар тўғри чизикка гомеоморф бўлади, яъни стандарт қатлам тўғри чизик бўлади (11-расм).



11-расм.

Агар $M = R^2$ да янги ўзгарувчиларни қуйидагича киритсак, $u = x, v = x^2 - y$, у ҳолда улар $M = R^2$ да эгри чизикли координаталар бўлади. Бу мисолда $N = R^1$ кўпхилликнинг $\{U_\lambda; \lambda \in A\}$ очик қопламаси битта $\{U = R^1\}$ очик тўпладан иборат бўлади. Янги координаталарда $f: M \rightarrow R^1$ субмерсияни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин: $f(u, v) = v$.

Мисол 2.2.4. Берилган $\varphi: R^2 \rightarrow R^1$ акслантириш қуйидаги қоида бўйича аниқланади: $\varphi(x, y) = (x^2 - 1)e^y$. $\varphi^{-1}(0) = 0$ қатлам иккита компонентадан иборат бўлади (12-расм).



12-расм.

Мисол 2.2.5. Қуйида R^6 даги уч ўлчамли торнинг R^4 даги икки ўлчамли торга субмерсиясини қараймиз.

$R^6(x, y, u, v, w, \omega)$ да уч ўлчамли торнинг тенгламаларини $(x, y, u, v, w, \omega) \in R^6$ нуқталар учун қуйидагича аниқлаймиз:

$$T^3 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ u^2 + v^2 = 1 \\ w^2 + \omega^2 = 1 \end{cases}$$

$R^4(x', u', w', \omega')$ да икки ўлчамли тор T^2 нинг тенгламаларини эса қуйидагича аниқлаймиз:

$$T^2 = \left\{ (x', u', w', \omega' : x'^2 + w'^2 = 1, u'^2 + \omega'^2 = 1) \right\}$$

Берилган $f : T^3 \rightarrow T^2$ субмерсияни қуйидаги кўринишда аниқлаймиз:

$$f : \begin{pmatrix} x' = x \\ w' = y \\ \omega' = u \cos y - v \sin y \\ u' = u \sin y + v \cos y \end{pmatrix}$$

Бу акслантиришнинг Якоби матрицасини ҳисоблаймиз ва акслантириш дифференциалининг ранги максимал эканини кўрсатамиз:

$$I(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 - u \sin y - v \cos y & \cos y & -\sin y & 0 & 0 \\ 0 & u \cos y - v \sin y & \sin y & \cos y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг ранги тўртга тенг эканини текшириш мумкин, яъни

$$\text{rank } I(f) = 4$$

Уч ўлчамли тор T^3 ни урта айлананинг кўпайтмаси сифатида қарасак ва айланаларда φ, ψ, θ бурчак координаталарини киритсак, икки ўлчамли торни эса иккита айлананинг кўпайтмаси сифатида қарасак ва уларда φ', ψ' бурчак координаталарини қарасак, $f: T^3 \rightarrow T^2$ субмерсияни қуйидаги формулалар орқали бериш мумкин:

$$\varphi' = \varphi$$

$$\psi' = \frac{\pi}{2} - (\psi + \sin \varphi)$$

У ҳолда Якоби матрицаси қуйидаги кўринишни олади:

$$I(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\cos \varphi & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бу матрицанинг ранги иккига тенг эканини текшириш осон, яъни, ранги иккига тенг бўлган субмерсия уч ўлчамли торда қатлама беради.

3-боб. Қатламали кўпхилликларни изометрик акслантиришлар группаси

3.1-§ . Риман кўпхилликларининг изометрик акслантиришлари

3.1.1. Риман кўпхиллиги

Таъриф 3.1.1. Агар ҳар бир $T_x M$ уринма фазода $x \in M$ нуқтага силлиқ боғлиқ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаляр кўпайтма аниқланган бўлса, M силлиқ кўпхилликда риман структураси берилган дейилади, яъни, M даги ихтиёрий X, Y силлиқ вектор майдонлар учун $\langle X, Y \rangle$ ҳам M да силлиқ функция бўлади.

Таъриф 3.1.2. Боғланишли силлиқ M кўпхилликда риман структураси берилган бўлса, M риман кўпхиллиги дейилади.

(U, h) локал координаталарда M даги ихтиёрий $x \in h(U)$ нуқта учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\langle X, Y \rangle_x = \langle X^i \partial_i, Y^j \partial_j \rangle_x = X^i_x Y^j_x \langle \partial_i, \partial_j \rangle_x = g_{ij}(x) X^i_x Y^j_x,$$

бунда ∂_i — x нуқтанинг (U, h) координаталарининг базис $g_{ij}(x)$ билан эса $\langle \partial_i, \partial_j \rangle_x$ белгиланган. $g_{ij}(x)$ қиймат M риман кўпхиллигининг x нуқтасининг (U, h) координаталарининг “метрик тензори” коэффициентлари дейилади.

$\langle X, Y \rangle$ функция M да ихтиёрий X, Y силлиқ вектор майдонлар учун силлиқ бўлиши учун барча g_{ij} функциялар силлиқ бўлиши зарур ва етарлидир, бу $(x^1, \dots, x^n)$ локал координаталардаги $\bar{g}_{ij} = g_{ij} \circ h$ функция билан тенгкучлидир.

Таъриф 3.1.3. Икки M_1, M_2 риман кўпхилликлари изометрик дейилади, агар улар ўртасида ихтиёрий $x \in M_1$ нуқта ва ихтиёрий $u, v \in T_x M$ векторлар учун шундай диффеоморфизм $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ ўрнатиш мумкин бўлсин: $\langle u, v \rangle_{M_1} = \langle d\varphi(u), d\varphi(v) \rangle_{M_2}$ акслантиришнинг ўзи эса изометрия дейилади.

Агар φ — изометрия, (U, h) — M_1 даги карта, $(U, \varphi \circ h)$ — эса M_2 даги карта бўлса, у ҳолда $\bar{g}_{ij}$ функциянинг қийматлари $x^1, \dots, x^n$ локал координаталарда бир хил бўлади.

Мисол 3.1.4. Риман кўпхиллигига энг содда мисол нуқтавий евклид фазосидир.

Таъриф 3.1.5. $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ силлиқ акслантириш M да бўлакли-силлиқ йўл дейилади.

Ҳар бир $t \in [a, b]$ учун $\gamma'(t)$ тезлик вектори аниқланган. γ' вектор $|\gamma'| = \sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle}$ узунликка эга. γ йўл узунлиги қуйидагича аниқланади:

$$s(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt.$$

M — риман кўпхиллиги бўлсин. Таърифга кўра у боғланишли. Боғланишли силлиқ кўпхилликнинг ихтиёрий икки нуқтасини силлиқ йўл билан туташтириш мумкин. $p, q \in M$ нуқталар орасидаги масофа деб $\rho(p, q) = \inf s(\gamma)$ сонга айтилади, бунда p ва q ни туташтирувчи бўлакли-силлиқ γ йўлларнинг $\inf$ олинади.

Теорема 3.1.5. $\rho(p, q) = \inf s(\gamma)$ тенглик билан аниқланган ρ функция M да метрика бўлади, яъни

- 1) $\rho(p, q) > 0$,
- 2) $\rho(p, q) = \rho(q, p)$,
- 3) $\rho(p, l) + \rho(l, q) > \rho(p, q)$,
- 4) $\rho(p, p) = 0$,
- 5) агар $p \neq q$ бўлса, у ҳолда $\rho(p, q) > 0$ бўлади.

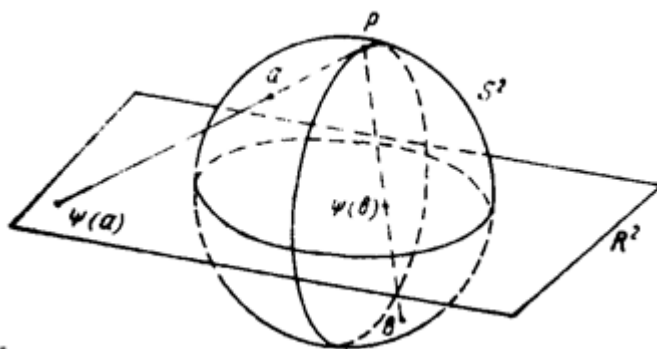
ρ функцияга риман метрикаси дейилади.

Мисол 3.1.6. Сферада текис метрика. $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — R^3 да бирлик сфера, $P = (0, 0, 1)$ — унинг шимолий кутби бўлсин. Стереографик

проекция деб номланувчи $\psi : S^2 \setminus \{P\} \rightarrow R^2$ акслантиришни курамиз. Бунинг учун дастлаб, R^2 текисликни $z=0$ экватор текислиги билан тенглаштирамиз. Сўнгра сферанинг кутбдан фаркли ҳар бир $a \in S^2$ нуктасига Pa тўғри чизиқнинг текислик билан кесишиш нуктаси $\psi(a)$ нуктани мос қўямиз. Таърифга кўра, агар $a = (x, y, z) \in S^2$ бўлса, у ҳолда $\psi(a) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right)$ бўлади. $z=1$ шимолий кутбнигина акслантира олмаймиз. Шунинг учун $\psi : S^2 \setminus \{P\} \rightarrow R^2$, $(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right)$ акслантириш $z=1$ текислик олиб ташланган R^3 фазони R^2 га силлиқ акслантиради. Ҳар бир $a \in S^2 \setminus \{P\}$ нукта учун $d\psi_a : T_a S^2 \rightarrow \vec{R}_{\psi(a)}^2$ дифференциал чизиқли изоморфизм бўлади. Бу чизиқли изоморфизм ёрдамида $\vec{R}_{\psi(a)}^2$ даги оддий скаляр кўпайтмани $T_a S^2$ фазога қуйидагича ўтказиш мумкин:

$$g_a(p, q) = d\psi_a(p) \cdot d\psi_a(q)$$

Қурилган риман метрикаси кутб нуктаси чиқариб ташланган сферанинг текис метрикаси дейилади. S^2 сфера эса риман кўпхиллигига айланади. (10-расм.)



10-расм.

3.1.2. Риман кўпхилликларининг изометриялари группаси

Таъриф 3.1.7. N риман кўпхиллигини M риман кўпхиллигига ботириш $\varphi: N \rightarrow M$ изометрия дейилади, агар φ ботириш индуцирлаган скаляр кўпайтма N даги билан устма-уст тушса, яъни ихтиёрий $x \in N$ нуқта ва $u, v \in T_x N$ учун $\langle d_x \varphi(u), d_x \varphi(v) \rangle_M = \langle u, v \rangle_N$ бажарилса.

Локал координаталарда метрик тензор қуйидаги кўринишга эга;

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

бу ерда $g_{ij} = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ – силлиқ функциялар ва матрица (g_{ij}) симметрик ва мусбат аниқланган. Юқоридаги ифодани қуйидаги

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда ds , ва $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$ нуқталар орасидаги масофа.

Бизга M^n риман кўпхиллиги g_{ij} метрика билан берилган бўлсин.

Таъриф 3.1.8. Берилган M^n риман кўпхиллигини ўзига акслантирувчи f диффеоморфизм, g_{ij} риман метрикасининг ҳаракати ёки изометрия дейилади, агар риман метрикаси ўзига аксланса, яъни

$$g_{kp}(y) = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^j(y)}{\partial y^p}$$

бўлса. Бу ерда $y^1, \dots, y^n$ ва $x^1, \dots, x^n$ лар мос равишда $y \in M^n$ ва $x \in M^n$ нуқталарнинг бирор атрофидаги локал координаталар системаси, $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ эса f акслантиришни ифодаловчи функциялардир, яъни, $x = f(y)$.

Баъзи ҳолларда изометриянинг координаталардаги ифодасидан бошқа инвариант таърифидан фойдаланиш қулайдир. Агар f диффеоморфизм берилган бўлса, биламизки df акслантириш дифференциали $T_y M^n$ уринма фазони $T_x M^n$ уринма фазога изоморф акслатиради. Ҳар бир $T_y M^n$ ва $T_x M^n$

уринма фазоларда риман метрикаси бўйича қурилган $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ ва $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ скаляр кўпайтмалар аниқланган. Масалан: $\langle a, b \rangle_y = g_{ij}(y) a^i b^j$, $a, b \in T_y M^n$.

Таъриф 3.1.9. Бизга M^n риман кўпхиллигини ўзига акслантирувчи f диффеоморфизм берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $a, b \in T_y M^n$ ва $x = f(y)$ учун, $\langle a, b \rangle_y = \langle df(a), df(b) \rangle_x$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда f диффеоморфизм изометрия дейилади.

Лемма 3.1.10. Изометриянинг координатлардаги ва инвариант таърифлари эквивалентдир.

Исбот. $a \in T_y M^n$ ва $(y^1, \dots, y^n)$ локал координаталарда $a = (a^1, \dots, a^n)$ бўлсин. Бундан $df(a) \in T_x M^n$ қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$(df(a))^i = \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} a^k,$$

демак, $df : T_y M^n \rightarrow T_x M^n$ Якоби матрицаси билан берилади. Бундан қуйидаги тенгликни ҳосил қилиш мумкин:

$$\langle df(a), df(b) \rangle_x = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^j(y)}{\partial y^p} a^k b^p = g_{kp} a^k b^p$$

Бу эса леммани исботлайди.

Лемма 3.1.11. M^n риман кўпхиллигининг барча изометриялари тўплами группа ташкил этади.

Исбот. Бу лемманинг исботини осонгина кўриб чиқишимиз мумкин. Мураккаб функциянинг ҳосиласи ва координаталарни ўзгартиришда g_{ij} нинг коэффициентларини алмаштириш қонунидан, иккита изометриянинг композицияси изометрия бўлиши келиб чиқади. f акслантиришнинг $I(f)$ Якоби матрицасига тескари матрица f^{-1} акслантиришнинг Якоби матрицаси эканлигидан f^{-1} акслантириш изометрия бўлади. Бирлик элемент сифатида эса айний акслантиришни олиш керак.

M^n риман кўпхиллигининг барча изометриялари группаси одатда $Iso(M^n)$ билан белгиланади.

Мисол 3.1.12. Бизга R^1 фазода $ds^2 = dx^2$ евклид метрикаси берилган бўлсин, бу ерда x – тўғри чизиқдаги координата. f акслантириш эса R^1 нинг ўзига диффеоморфизми бўлиб, ўсувчи (ёки камаювчи) $x = f(y)$ функция билан берилган бўлсин. Метрика сақлангани учун, $ds^2 = (f'_y)^2 dy^2 = dy^2$ бўлади, яъни, $(f'_y)^2 = 1$. Охирги тенгликдан $f(y) = y + a$ ёки $f(y) = -y + b$ бўлади, бу ерда a, b – ўзгармас сон.

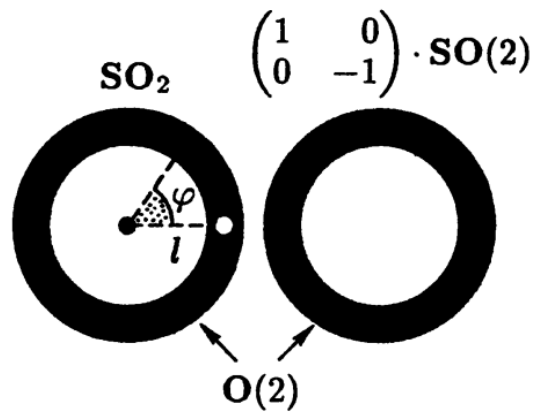
Мисол 3.1.13. Евклид текислигининг координата бошини сақловчи изометриялари группасини топайлик. Дастлаб, изометрияларни чизиқли алмаштиришлар орасидан излаймиз. Метриканинг инвариантлиги $dx^2 + dy^2$ шартини матрицали тенглама $E = AA^T$ кўринишида ёзиш мумкин, бу ерда $A: R^2 \rightarrow R^2$ чизиқли алмаштириш. Бу эса қуйидаги

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

матрицалардан иборат ортогонал матрицалар группаси $O(2)$ билан аниқланади ва хос буришни аниқлайди.

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

матрицалар эса хосмас буришни ифодалайди. Хос буришлар $O(2)$ группанинг $SO(2)$ каби белгиланувчи коммутатив қисм группасини ҳосил қилади. Хосмас буришлар қисм группа ташкил этмайди. $O(2)$ матрицалар группаси эканидан, у топологик фазо бўлади. Ҳар бир шундай матрица φ бурчакка буришни билдиради. Шундай қилиб, $O(2)$ ни ҳосил қилувчи матрицалар тўплами икки хил кўринишдаги айланага гомеоморф бўлади.



11-расм.

Натижада, $O(2)$ бир ўлчамли силлиқ ёпиқ боғланишсиз кўпхиллик бўлади. $O(2)$ группа $ds^2 = d\varphi^2$ метрикали айланадаги барча изометриялар группаси билан устма-уст тушади.

Мисол 3.1.14. Евклид текислиги изометриялари $y = Ax + b$ кўринишда ёзилади, бу ерда $A \in O(2)$, b вектор эса текисликда параллел кўчириш (ҳаракат)ни аниқлайди. Барча бундай алмаштиришлар евклид метрикасини сақлайди. Улар текисликдаги барча изометрияларни қамраб олади. Бу группани матрицалар группаси сифатида қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Натижада, R^2 даги изометриялар группаси $Iso(R^2)$ текисликда айланалар жуфтнинг тўғри кўпайтмасига гомеоморф бўлган топологик кўпхилликка айланади. Бу группа икки бўғланишли компонентдан иборат уч ўлчамли силлиқ, боғланишсиз ва компакт бўлмаган кўпхиллик бўлади.

Мисол 3.1.15. Қуйидаги R_1^2 псевдоевклид текислигини аниқловчи $ds^2 = -dx^2 + dy^2$ метрикани қарайлик. Унинг биринчи форма матрицаси ўзгармас ва қуйидагича бўлади:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Натижада, бу метрикани сақловчи барча чизикли бир жинсли алмаштиришлар $B = ABA^T$ тенгламани қаноатлантиради, бу ерда $A: R^2 \rightarrow R^2$ - чизикли алмаштириш. Уни қуйидаги кўринишда ёзсак,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$a_{11}^2 - a_{12}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} = a_{12}a_{22}, \quad a_{22}^2 - a_{21}^2 = 1.$$

Системани ечсак,

$$A = \begin{pmatrix} \pm ch\varphi & \pm sh\varphi \\ \pm sh\varphi & \pm ch\varphi \end{pmatrix}$$

га ёки

$$A = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

га эга бўламиз, бу ерда $\frac{a_{12}}{a_{11}} = \beta$, $\beta = th\varphi$. Бунда ишораларнинг қуйидаги

комбинациялари бўлиши мумкин:

$$\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \in G_1, \quad \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \in G_2, \quad \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \in G_3, \quad \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \in G_4.$$

Бу ерда барча бўлиши мумкин бўлган ҳолатлар келтирилган. Масалан, қуйидаги

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

комбинацияни қарасак, φ ни $-\varphi$ га алмаштирганда, комбинация G_1 га тегишлилиги келиб чиқади.

Эслатиб ўтамик, $sh(-\varphi) = -sh\varphi$ ва $ch(-\varphi) = ch\varphi$. Бундан $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$ ва $i \neq j$ да $G_i \cap G_j = \emptyset$ экани келиб чиқади.

Аниқланган G группа R_1^2 нинг бир жинсли изометриялари группаси эканлигидан ҳақиқий ва мавҳум радиусли $\{-x^2 + y^2 = 1\} \cup \{-x^2 + y^2 = -1\}$ псевдосфераларни ўзига ўтказди.

3.2-§. Қатламали кўпхилликларни изометрик акслантиришлар группаси. Мисоллар

M, N – n -ўлчамли силлиқ кўпхилликлар ва уларда k -ўлчамли F_1, F_2 қатламалар берилган бўлсин.

Таъриф 3.2.1. Агар бирор $\varphi: M \rightarrow N$ диффеоморфизм учун F_1 қатламанинг L_α қатламнинг образи $\varphi(L_\alpha) F_2$ қатламанинг қатлами бўлса, у ҳолда φ акслантириш $(M, F_1), (N, F_2)$ қатламали кўпхилликлар диффеоморфизми дейилади ва $\varphi: (M, F_1) \rightarrow (N, F_2)$ кўринишда ёзилади. Агар $M = N$ ва $F_1 = F_2$ бўлса, у ҳолда φ акслантириш F қатламани сақловчи диффеоморфизм дейилади.

Мисол 3.2.2. Қуйидаги $f: R^2 \setminus (0,0) \rightarrow R^1$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ субмерсияни қарайлик. Бу субмерсиянинг $f(x_1, x_2) = c$ сатх тўплamlари ҳосил қилувчи F қатламанинг қатламлари маркази координата бошида радиуси $\sqrt{c}$ бўлган концентрик айланалардан иборат. $\varphi: (x_1, x_2) \rightarrow (\lambda x_2, \lambda x_1)$ диффеоморфизм қатламани сақлайди, яъни $f(\varphi(x_1, x_2)) = (\lambda x_2)^2 + (\lambda x_1)^2 = \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2) = \lambda^2 c$.

M – n - ўлчамли, g риман метрикали силлиқ риман кўпхиллиги ва унда k ўлчамли F қатлама берилган бўлсин. $L(p)$ билан F қатламанинг p нуқта орқали ўтувчи қатламини, $F(p)$ билан p нуқтада $L(p)$ қатламнинг уринма фазосини, $H(p)$ билан эса $F(p)$ нинг $T_p M$ га ортогонал тўлдирувчисини белгилаймиз.

g риман метрикасини $F(p)$ даги қисми барча $p \in L_0$ нуқталар учун L_0 қатламда риман метрикасини аниқлайди. Худди шундай, F қатламанинг ҳар бир қатлами индуцирланган метрикага нисбатан риман кўпхиллиги бўлади.

Таъриф 3.2.3. $\varphi: (M, F) \rightarrow (M, F)$ диффеоморфизм (M, F) қатламали кўпхиллик изометрияси дейилади, агар φ акслантиришнинг F

катламанинг ҳар бир қатламидаги торайиши изометрик акслантириш бўлса, яъни ҳар бир L_α қатлам учун $\varphi: L_\alpha \rightarrow \varphi(L_\alpha)$ акслантириш $L_\alpha, \varphi(L_\alpha)$ кўпхилликлар орасида изометрия бўлса.

Мисол 3.2.4. $f: R^2 \setminus \{(0, x_2)\} \rightarrow R^1, f(x_1, x_2) = x_1$ функцияни қарайлик.

Бу функциянинг сатҳ чизиқлари $f(x_1, x_2) = c$ ҳосил қилувчи F қатламанинг қатламлари Oy ўқиға параллел тўғри чизиқлардан иборат. $\varphi: (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, \lambda x_2)$ диффеоморфизм қатламани сақлайди ва ҳар бир L_α қатлам учун $\varphi: L_\alpha \rightarrow \varphi(L_\alpha)$ акслантириш $L_\alpha, \varphi(L_\alpha)$ кўпхилликлар орасида изометрия бўлади, яъни $f(\varphi(x_1, x_2)) = x_1 = c$.

G орқали M риман кўпхиллигининг барча изометриялари группасини белгилаймиз. G_F орқали эса (M, F) қатламали кўпхилликнинг барча изометриялари группасини белгилаймиз. G ва G_F нинг кесишмаси $G \cap G_F$ бўш эмас ва акслантириш композициясига нисбатан группа ташкил этади.

$M = R^n$ ва F қатлама бирор силлиқ $f: R^n \rightarrow R$ функциянинг сатҳ сиртларидан ҳосил бўлганда G_F группани қараймиз. Фараз қилайлик, R^n да аниқланган $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция учун ҳар бир нуқтада $f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \dots + f_{x_n}^2 > 0$ ўринли бўлсин, яъни ҳар бир нуқтада f_{x_i} хусусий ҳосилаларнинг камида биттаси нолдан фарқли. У ҳолда ошкормас функция ҳақидаги теоремага кўра ҳар бир сатҳ тўплами $L_\alpha = \{x \in G: f(x) = \alpha\}$ ўлчами $n - 1$ бўлган силлиқ қисм кўпхиллик бўлади. f функциянинг L_α сатҳ сиртлари R^n да $n - 1$ ўлчамли қатлама ҳосил қилади.

Таъриф 3.2.5. M кўпхилликнинг ҳар бир геодезик чизиғи F қатламанинг бирор қатламиға ортогонал бўлиб, F қатламанинг барча нуқталарида ортогонал бўлса M кўпхилликдаги F қатлама риман (метрик) қатламаси дейилади.

Таъриф 3.2.6. $C^2(M, R^1)$ синфга тегишли $f: M \rightarrow R^1$ функция градиентининг узунлиги сатҳ сиртлари устида ўзгармас бўладиган, яъни $|\text{grad } f| = \text{const}$ бўладиган функция метрик функция дейилади.

Теорема 3.2.7. Қатлама ҳосил қилувчи $f: R^2 \rightarrow R^1$ функция метрик функция, яъни риман субмерсияси бўлмаса, G_F группа G группанинг қисм группаси бўлади.

Исбот. $\varphi: (R^2 F) \rightarrow (R^2 F)$ қатламали евклид текислигини изометрик акслантириш бўлсин, бунда F қатлама f функциянинг сатҳ чизиқларидан иборат.

Z орқали функциянинг бирлик градиент векторини белгилаймиз ва вертикал вектор майдонни $X = \left\{ -\frac{f_{x_2}}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}, \frac{f_{x_1}}{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2} \right\}$ деб олайлик. $\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ акслантиришнинг $p \in R^2$ нуктадаги Якоби матрицасини $B(p) = \{b_{ij}\}$ орқали белгилаймиз.

Текисликнинг $p_0 \in R^2$ нуктасида $X(p_0) = X_0$, $Z(p_0) = Z_0$ ортонормалланган базисни фиксирлаймиз. $B(p_0)X_0 = Y$ деб олайлик.

$\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ диффеоморфизм R^2 да ҳаракат эканини кўрсатамиз.

$p_0 \in R^2$, $\varphi(p_0) = q_0$ бўлсин. $\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ акслантириш $L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}$ чизиқлар орасида изометрия бўлади, бунда $f(p_0) = \alpha_1, f(q_0) = \alpha_2$.

Текисликда p_0 нуктани координата боши, X_0, Z_0 ортонормалланган векторларни базис сифатида танлаб, янги координаталар системаси киритамиз. Бу координата системасида X_0, Z_0 ни қуйидагича ёзиш мумкин: $X_0 = \{1, 0\}$, $Z_0 = \{0, 1\}$.

$A(p_0) = \{a_{ij}\}$ – матрица $\Phi_0: R^2 \rightarrow R^2$ ҳаракатнинг $p_0 \in R^2$ нуктадаги Якоби матрицаси бўлсин. Бу ҳаракат p_0 нуктани q_0 нуктага, X_0, Z_0

ортонормалланган базисни $Y, Z(q_0)$ ортонормалланган базисга ўтказди ва қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$A(p_0)X_0 = Y, \quad A(p_0)Z_0 = Z(q_0) \quad (3.2.1)$$

$\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ акслантириш уринма векторларни уринмаларга ўтказгани ва акслантиришнинг $\varphi: L_{\alpha_1} \rightarrow L_{\alpha_2}$ торайиши изометрия бўлишидан, $B(p_0)Z_0$ вектор $Z(q_0)$ векторга параллел бўлади, яъни, нолдан фарқли шундай $\lambda(p_0)$ сон мавжудки, $B(p_0)Z_0 = \lambda(p_0)Z(q_0)$ тенглик бажарилади. Худди шундай, қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$B(p_0)X_0 = Y, \quad B(p_0)Z_0 = \lambda(p_0)Z(q_0) \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) системани қуйидаги кўринишда ёзиб олсак:

$$B(p_0)X_0 = Y, \quad \frac{1}{\lambda(p_0)}B(p_0)Z_0 = Z(q_0) \quad (3.2.3)$$

(3.2.1) ва (3.2.3) ларни координаталарда ёзсак,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(p)d_1 & \lambda(p)d_2 \end{pmatrix}$$

Бундан $A(p_0)$ ва $B(p_0)$ матрицалар қуйидаги кўринишни олади:

$$A(p_0) = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B(p_0) = \begin{pmatrix} c_1 & \lambda(p_0)d_1 \\ c_2 & \lambda(p_0)d_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

Энди бошқа $p \in R^2$ нуқтани олайлик ва $q = \varphi(p)$ бўлсин. Бу нуқтада X_0, Z_0 базис билан бир хил ориентацияга эга ортонормалланган базисни $U, Z(p)$ деб олайлик. φ акслантиришнинг p нуқтадаги $B(p)$ Якоби матрицаси U векторни W векторга, $Z(p)$ градиент векторни $Z(q)$ градиент векторга параллел векторга акслантиради:

$$B(p)U = W, \quad B(p)Z(p) = \lambda(p)Z(q) \quad (3.2.6)$$

Маълумки, p нуктани q нуктага, $U, Z(p)$ ортонормалланган базисни $W, Z(q)$ ортонормалланган базисга ўтказувчи $\Phi: R^2 \rightarrow R^2$ текислик ҳаракати мавжуд. Бу ҳаракатнинг Якоби матричасини $A(p)$ билан белгиласак, қуйидаги тенгламалар системаларига эга бўламиз:

$$A(p)U = W, \quad A(p)Z(p) = Z(q) \quad (3.2.5)$$

Агар $U, Z(p)$ ни ўзининг базисида қарасак, $U = \{1, 0\}$ ва $Z(p) = \{0, 1\}$ координаталарга эга бўлади, Φ ҳаракатдаги образлари $W, Z(q)$ векторларнинг шу базисдаги координаталари $W = \{c_1, c_2\}$ ва $Z(q) = \{d_1, d_2\}$ га тенг бўлади. Бундан $A(p)$ ва $B(p)$ матрицалар (3.2.4) билан устма-уст тушади. Энди X_0, Z_0 базисдан $U, Z(p)$ базисга ўтиш матричаси C қуйидагича бўлсин: $C = \begin{pmatrix} u_1 & z_1 \\ u_2 & z_2 \end{pmatrix}$

У ҳолда $A(p)$ ва $B(p)$ матрицалар қуйидаги кўринишни олади:

$$A(p) = \begin{pmatrix} c_1 u_1 + d_1 u_2 & c_1 z_1 + d_1 z_2 \\ c_2 u_1 + d_2 u_2 & c_2 z_1 + d_2 z_2 \end{pmatrix},$$

$$B(p) = \begin{pmatrix} c_1 u_1 + \lambda(p) d_1 u_2 & c_1 z_1 + \lambda(p) d_1 z_2 \\ c_2 u_1 + \lambda(p) d_2 u_2 & c_2 z_1 + \lambda(p) d_2 z_2 \end{pmatrix}$$

$B(p)Z(p) = \lambda(p)A(p)Z(p)$ тенгликнинг чап ва ўнг томонларини алоҳида ҳисоблаб оламиз:

$$B(p)Z(p) = \begin{pmatrix} (c_1 u_1 + \lambda(p) d_1 u_2) z_1 + (c_1 z_1 + \lambda(p) d_1 z_2) z_2 \\ (c_2 u_1 + \lambda(p) d_2 u_2) z_1 + (c_2 z_1 + \lambda(p) d_2 z_2) z_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(p)A(p)Z(p) = \begin{pmatrix} \lambda(p)(c_1 u_1 + d_1 u_2) z_1 + \lambda(p)(c_1 z_1 + d_1 z_2) z_2 \\ \lambda(p)(c_2 u_1 + d_2 u_2) z_1 + \lambda(p)(c_2 z_1 + d_2 z_2) z_2 \end{pmatrix}$$

Бундан икки ҳолат бўлиши мумкинлиги келиб чиқади:

а) $Z(p)$ градиент вектор Z_0 векторга параллел бўлса, яъни компонентлари ажралувчан бўлса, $\lambda(p) \neq 1$.

б) $Z(p)$ градиент вектор Z_0 векторга параллел бўлмаса, $\lambda(p) = 1$.

C орқали $\{p \in R^2 : \lambda(p) \neq 1\}$ тўпламни белгилаймиз. $\lambda(p)$ узлуксизлигидан C тўплам очик бўлади.

Бошқа томондан $Z(p)$ градиент вектор Z_0 векторга параллеллигидан C тўплам ёпиқ бўлади. C тўплам ҳам очик, ҳам ёпиқ эканидан ёки бўш тўплам, ёки R^2 билан устма-уст тушади.

Фараз қилайлик, C тўплам R^2 билан устма-уст тушсин. У ҳолда $Z(p)$ градиент вектор Z_0 векторга ҳамма жойда параллел ва градиент чизиқлар параллел чизиқлар бўлади. Бу ҳолда f метрик функция бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун $W = \text{grad}f$ деб оламиз ва L_α сатҳ чизиғи устида $|W|$ ўзгармас эканини кўрсатамиз. $f \in C^2(R^2, R^1)$ эканидан аралаш ҳосилалар тенг, яъни $f_{x_1 x_2} = f_{x_2 x_1}$.

$$\frac{d}{dt} f_{x_i} = \sum_{j=1}^2 f_{x_i x_j} x'_j = \sum_{j=1}^2 f_{x_j x_i} x'_j \quad \text{ни} \quad \text{ҳисоблаймиз.} \quad W = \text{grad}f = gZ_0$$

тенгликдан $f_{x_i} = g a_i$, бу ерда $Z_0 = \{a_1, a_2\}$, g силлиқ функция $\text{grad}f$ нинг

узунлигига тенг. Шунинг учун $\frac{d}{dt} f_{x_i} = \sum_{j=1}^2 f_{x_i x_j} x'_j = \sum_{j=1}^2 a_j x'_j \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$. Бундан

$$\frac{d}{dt} \langle W, W \rangle = 2 \left\langle W, \frac{d}{dt} W \right\rangle = 0 \quad \text{бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун ҳар бир}$$

сатҳ чизиғи устида $W = \text{grad}f$ нинг узунлиги ўзгармас, яъни f метрик функция бўлади.

Бу зиддият кўрсатадики, C тўплам бўш ва барча $p \in R^2$ учун $\lambda(p) = 1$. Бу эса $\varphi : R^2 \rightarrow R^2$ акслантиришнинг ихтиёрий $p \in R^2$ нуқтадаги Якоби матрицаси $B(p) = \{b_{ij}\}$ ортогонал матрица билан устма-уст тушади. Демак, $\varphi : R^2 \rightarrow R^2$ акслантириш евклид текислиги R^2 нинг изометрияси бўлади.

Теорема исботланди.

Мисоллардан кўринадик, теорема метрик функциялар учун ўринли эмас. Бунда асосий сабаби шундаки, метрик функциянинг градиент чизиклари геодезик чизиклар бўлади. Градиент чизиклар ўзаро кесишмаслигидан бизнинг ҳолимизда улар параллел тўғри чизиклар бўлади.

Мисол 3.2.8. Текисликда берилган $f(x_1, x_2) = \exp(Ax_1 + Bx_2)$ метрик функцияни қарайлик. Эгри чизикли координаталар системасини қуйидагича киритамиз: $y_1 = \exp(Ax_1 + Bx_2)$, $y_2 = Ax_1 + Bx_2$. Бу функциянинг сатҳ чизиклари ҳосил қилувчи F қатлама параллел тўғри чизиклардан иборат. $\varphi(y_1, y_2) = (y_1, \lambda y_2)$ акслантириш, бунда $\lambda \neq 0$ - ўзгармас сон, F қатламанинг изометрик акслантириши бўлади, лекин у текислик изометрияси бўлмайди.

Мисол 3.2.9. Метрик бўлмаган қуйидаги $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ функцияни қарайлик, унинг $x_1^2 - x_2 = c$ сатҳ чизиклари текисликда параболалардан иборат F қатламани ҳосил қилади. Бу қатламанинг изометрияси $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + \lambda)$ кўринишдаги параллел кўчиришдан иборат. Бу изометрия текислик учун ҳам изометрия бўлади.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация субмерсиялар ҳосил қилувчи қатламали кўпхилликлар изометриялари группасини ўрганишга бағишланган. Магистрлик диссертацияси кириш, уч боб, олтита параграф, хулоса ва адабиётлар рўйхатидан иборат.

Биринчи боб кўпхилликларнинг силлиқ акслантиришларига бағишланган. Унда силлиқ кўпхиллик, регуляр нуқта, ботириш, жойлаштириш, субмерсия тушунчалари киритилган ва уларга оид мисоллар келтирилган. Бундан ташқари, Хопф акслантириши риман субмерсияси бўлиши ҳам кўрсатилган.

Иккинчи боб кўпхилликларда киритилган қатлама структурасига бағишланган. Унда қатлама ва қатламлар геометрияси ва топологияси ўрганилган. Қатламаларга мисоллар келтирилган.

Учинчи боб қатламали кўпхилликларнинг изометриялари группасини ўрганишга бағишланган. Бобнинг биринчи параграфида риман кўпхилликларининг изометриялари группаси ўрганилган.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида евклид текислигида сатҳ чизиқлари ҳосил қатламалар изометриялари группаси ўрганилган.

Таъриф 3.2.6. $C^2(M, R^1)$ синфга тегишли $f: M \rightarrow R^1$ функция градиентининг узунлиги сатҳ сиртлари устида ўзгармас бўладиган, яъни $|\text{grad } f| = \text{const}$ бўладиган функция метрик функция дейилади.

Теорема 3.2.7. Қатлама ҳосил қилувчи $f: R^2 \rightarrow R^1$ функция метрик функция, яъни риман субмерсияси бўлмаса, қатламали текисликнинг изометриялари группаси G_F текислик изометриялари группаси G га қисм группа бўлади.