ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

Вассиев Элёр Нарбаевич

ПАРАМЕТРИК МОДЕЛЛАРДА НОАНИҚЛИК ШАРТИДА СТАТИСТИК БАҲОЛАРНИНГ ЭФФЕКТИВЛИГИ ҲАҚИДА

5А 130102 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

Магистр

Академик даражасини олиш учун ёзилган

ДИССЕРТАЦИЯ

Илмий раҳбар:
физика-математика фанлари доктори,
профессор А.А.Абдушукуров

Тошкент-2014

МУНДАРИЖА

Кириш.. 3

1-Боб. Статистикада ноаниқлик ва информация. 5

1.1-§. Математик статистикада Байесга оид ёндашув. 5

1.2-§. Шеннон, Кульбак-Лейблер ва Фишер информациялари.............. 10

2-Боб. Параметрларни баҳолашда стандарт Байес усули. 21

2.1-§. Байесга оид ёндашувнинг таркибий қисмлари................................ 21

2.2-§. Кўрсаткичли тақсимот параметрини тўлиқ бўлмаган танланма бўйича баҳолаш. 27

3-Боб. Параметрик статистик моделларда ноаниқлик шартида баҳолар эффективлигини аниқловчи қуйи чегаралар синфи. 35

3.1-§. Параметрларни баҳолашдаги хатоликлар моментлари учун умумлашган Байес қуйи чегаралари синфи. 35

3.2-§. Кўп ўлчовлик параметрлар бўлган ҳол учун қуйи чегаралар синфи. 43

ХУЛОСА.. 48

АДАБИЁТЛАР... 49

Кириш

Статистик баҳолаш назариясидан маълумки, модел номаълум параметр орқали берилган бўлиб, бу параметрнинг ўзи ноаниқлик шартларида берилган бўлса, у ҳолда уни баҳолаш учун Байес усули қўлланилади. Бу усул ўзи моҳият жиҳатидан энг кичик хатоликка эга бўлган баҳони, яъни маълум маънода оптимал баҳони аниқлайди. Аммо амалиётда бу усул билан баҳолашда бир қатор ўзига хос қийинчиликларга дуч келишимиз мумкин. Булардан бири номаълум параметрни тасодифий миқдор сифатида талқин қилиб унинг априор, яъни тажрибадан олдинги тақсимотини танлаш масаласидир. Одатда бундай тақсимот тажриба ўтказувчи-статистикнинг билими ва малакалари асосида аниқланиб, сўнг Байес формуласи асосида унинг апостериор, яъни тажрибадан сўнгги тақсимоти аниқланади. Байес баҳоси эса махсус танланган хатолик функциясининг апостериор математик кутилмасининг энг кичик қийматини таъминловчи статистика сифатида аниқланади. Демак, бу усул ўзи оптимал баҳони аниқлар экан. Аммо баъзи бир хусусий ҳолларни ҳисобга олмаганда, одатдаги Байес баҳоларини ҳисоблаш ва демак уларни амалиётда қўллаш қийин масала бўлиб қолади. Кўп ҳолларда квадратик хатолик функцияси қўлланилади. Байес баҳоси квадратик хатолик бўйича ҳисобланаётган ҳолда у апостериор ўрта қиймат бўлганлиги сабабли, унинг квадратик хатолик ўртачаси минимал бўлади. Айнан мана шу хатолик учун қуйи чегара қандай бўлиши долзарб масалалардан биридир. Ушбу диссертацияда айнан мана шундай масалалар тадқиқ этилгандир.

Магистрлик диссертацияси 6 та параграфга ажратилган уч бобдан иборатдир. Диссертациянинг 1-боби ёрдамчи бўлиб, унинг биринчи параграфида статистикада ноаниқлик шароитида Байесга оид баҳолаш моҳияти ва номаълум параметр ҳақидаги статистик танланмада ва етарли статистикада Шеннон, Кульбак-Лейблер ва Фишер информация функциялари ва уларнинг баъзи муҳим хоссалари келтирилган.

Диссертация асосий натижалари 2-ва 3-бобларда келтирилган бўлиб, 2-бобнинг 2.1-§ ида Байесга оид ёндашувнинг таркибий қисмлари мисоллар билан асослаб келтирилган. 2.2-§ да кўрсаткичли тақсимотнинг номаълум параметри функцияси танланма ўнг томондан махсус цензурланаётганда Байес баҳоси ҳисобланиб, унинг асослилиги исботланди (2.2.1 ва 2.2.2-теоремалар).

Магистрлик диссертациясининг учинчи бобида асосан Байес баҳоси хатоликлари учун қуйи чегаралари синфлари келтирилган. Унда асосан бир ўлчовлик (3.1-§) ва кўп ўлчовлик (3.2-§) параметрларни баҳоларидаги хатоликлар моментлари учун Вайнштейн-Вайсларнинг умумлашган Байес қуйи чегаралари синфлари ўринли эканлиги ҳақидаги теорема исботи билан келтирилган бўлиб, ундан хусусий ҳоллар сифатида Крамер-Рао, Баттачария, Бобровский-Закаи ва Вайнштейн-Вайс қуйи чегаралари келиб чиқиши кўрсатилган. Бундай қуйи чегаралар ҳисобланиши қийин бўлган Байес баҳолари хатоликларининг ўрта қийматларининг асимптотик ифодаларини қуйидан баҳолаш имкониятини беради.

Магистрлик иши натижалари Ўзбекистон Миллий Университети “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” кафедрасидаги проф. А.А.Абдушукуров раҳбарлигидаги илмий семинарда, Наманган Давлат Университетида ўтказилган “Новые теоремы молодых математиков-2013”, ҳамда ЎзМУ да ўтказилган “СТАТИСТИКА и её применения” (2013) конференцияларида маъруза қилинган ва улар бўйича [14,15] мақолалар нашр қилинган.

1-БОБ. СТАТИСТИКАДА НОАНИҚЛИК ВА ИНФОРМАЦИЯ

1.1-§. Математик статистикада Байесга оид ёндашув

Тажриба натижаларини $\left(\mathscr{X},\mathscr{B},\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}\right)$ параметрик статистик модел орқали ифодалашда ноаниқлик икки ҳил маънода бўлиши мумкин:
- Эҳтимолий характердаги ноаниқлик, яъни кузатилаётган X тасодифий миқдорнинг P_θ тақсимотга асосан амалга ошишини таъминловчи тасодифий механизм;
- θ номаълум параметрнинг X нинг амалдаги қийматини, таъминловчи асл қиймати θ_0 ни билмаслик билан боғлиқ ноаниқлик;

Мисол тариқасида ишлаб чиқаришдаги танланма назорат усулини кўриб ўтамиз. Бунда θ параметр махсулотлар партиясининг бирор хоссасини, яъни партиядан партияга ўзгариб турувчи тасодифий миқдорни англатади. Олдинги тажрибаларда эришилган малакалар θ нинг тақсимотини Q сифатида танлаш имкониятини беради. Унга мос тасодифий миқдорни ζ орқали белгилаймиз. Натижада биз (X,ζ) тасодифий элементга эга бўламиз. P_θ ва Q тақсимотларга мос келган зичлик функцияларини мос равишда $f_\theta(x)$ ва $q_\zeta(\theta)$ лар орқали белгилаймиз.

У ҳолда (X,ζ) тасодифий жуфтликнинг биргаликдаги зичлик функцияси $f_\theta(x)q_\zeta(\theta)$ дан иборат бўлади. Демак, дастлаб ζ тасодифий миқдор қиймати $q_\zeta(\theta)$ зичлик функцияси билан қабул қилинади, сўнг эса X нинг ζ га боғлиқлигини ифодаловчи

$$f_{X/\zeta}(x/\theta)=f_\theta(x) \tag{1.1.1}$$

шартлик зичлик функциясига асосан X бўйича танланма кузатилади. $\zeta=\theta$ қиймат аслида номаълумдир. X ни кузатиш натижасида олинадиган $X^{(n)}=\left(X_1,...,X_n\right)$ танланма кузатилади ва демак уни маълум деб ҳисоблаймиз.

Асосий масала кузатилган $X^{(n)}$ танланма бўйича θ ҳақида хулосалар қилиш зарурдир.

Байесча статистик модел сифатида $\left(\mathscr{X},\mathscr{B},\left\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\right\}\right)$ статистик модел $\left(\Theta,\mathscr{D}\right)$ ўлчовли фазо ва унда берилган Q эҳтимоллик ўлчовидан иборат структурани тушунамиз.

Байес усулида априор тақсимот Q ни танлаш энг муҳим масала ҳисобланади. Байесча баҳолашда бу масалани ҳал қилишнинг турли усуллари ишлаб чиқилган. Масаланинг моҳияти шундан иборатки, қандай усуллар билан мавжуд априор маълумотлар ёки ноформал бўлган тасаввурларга асосланган ҳолда $\left(\Theta,\mathscr{D}\right)$ ўлчовлик фазода аниқланган Q - эҳтимоллик ўлчовини танлаш мумкин. Агар Q априор тақсимот қандайдир усуллар билан танланган бўлса, у ҳолда θ ни баҳолаш масаласини соф математик статистика масаласи сифатида қараш мумкин. ζ тасодифий миқдор $\left(\Theta,\mathscr{D}\right)$ да ўзининг Q тақсимоти билан тўлиқ аниқлангандир.

$X^{(n)}$ танланмадаги ζ тасодифий миқдор ҳақида маълумот қуйидаги шартли зичлик функциясидадир:

$$q_{\zeta/X^{(n)}}\left(\theta/x^{(n)}\right)=\frac{f_{X^{(n)}/\zeta}\left(x^{(n)};\theta\right)}{f_{X^{(n)}}\left(x^{(n)}\right)}=\frac{f_\theta\left(x^{(n)}\right)q_\zeta\left(\theta\right)}{f_{X^{(n)}}\left(x^{(n)}\right)}=$$

$$=\frac{q_{X^{(n)}/\zeta}\left(x^{(n)}/\theta\right)q_\zeta\left(\theta\right)}{f_{X^{(n)}}\left(x^{(n)}\right)},\qquad x^{(n)}\in\mathscr{X}\ \mathrm{I}\ \left\{x^{(n)}:f_{X^{(n)}}\left(x^{(n)}\right)>0\right\}\qquad(1.1.2)$$

бу ерда P_θ ва Q ўлчовлар зичлик функциялари билан берилади ва

$$f_{X^{(n)}}\left(x^{(n)}\right)=\int \cdots \int_{\Theta} f_\theta\left(x^{(n)}\right)q_\zeta\left(\theta\right)d\theta_1 ... d\theta_s. \quad (1.1.3)$$

(1.1.2) формула Байес формуласининг зичлик функциялар орқали ифодаси. Агар X ёки ζ тасодифий миқдорлар ҳеч бўлмаганда биттаси дискрет бўлса, у ҳолда мос зичликлар эҳтимолликларга алмаштирилади ва интеграллар йиғиндиларга алмашади. (1.1.2) зичлик функцияси апостериор зичлик функцияси деб аталади. Одатда θ параметрнинг $\theta_i,\ i=1,...,s$ компонентасининг Байес баҳоси сифатида (1.1.2) апостериор зичлик функциясининг ўрта қиймати

$$\hat{\theta}_i=\int \theta_i q_{\zeta/X^{(n)}}\left(\theta_i / x^{(n)}\right)d\theta_i, \quad i=1,...,s, \quad (1.1.4)$$

олинади. Бу ифодада

$$f_{\zeta/X^{(n)}}\left(\theta_i / x^{(n)}\right)=\int \cdots \int q_{\zeta/X^{(n)}}\left(\theta / x^{(n)}\right)d\theta_1,...,d\theta_{i-1}d\theta_{i+1}...d\theta_s$$

орқали $\zeta=\left(\zeta_1,...,\zeta_s\right)$ тасодифий векторнинг ζ_i компонентаси зичлик функциясини белгиладик. Энди Байес моделига мисол кўрамиз.

Мисол. $X^{(n)}=\left(X_1,...,X_n\right)$ танланма номаълум параметри $\theta\in\Theta=\left(0,1\right)$ бўлган биномиал тақсимотдан олинган бўлиб, θ нинг априор тақсимоти $\left(B\left(a,b\right)\right)^{-1}\cdot\theta^{a-1}\left(1-\theta\right)^{b-1}, \quad 0<\theta<1$, бета тақсимотдан иборат бўлсин. У ҳолда, (1.1.2) апостериор зичлик функция қуйидаги ифодага пропорционал бўлади:

$$\theta^{s_n}\left(1-\theta\right)^{n-s_n}\theta^{a-1}\left(1-\theta\right)^{b-1}$$

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad X_i = 0 \text{ ёки } 1. \qquad (1.1.5)$$

(1.1.5) ифода параметрлари $a+s_n$ ва $b+n-s_n$ бўлган бета тақсимот зичлигидир. Демак, априор тақсимот параметрлари (a,b) тажрибадан сўнг апостериор тақсимот параметрлари $(a+s_n,\ b+n-s_n)$ ларга ўзгармоқдалар. У ҳолда априор ўрта қиймат ифодаси

$$\theta_0 = \int_0^1 \theta \cdot \left(B\left(a,b\right)\right)^{-1} \theta^{a-1} \left(1-\theta\right)^{b-1} d\theta = \frac{B\left(a+1,\, b\right)}{B\left(a,b\right)} = \frac{a}{a+b},$$

бўлиб, апостериор ўрта қиймат эса

$$\hat{\theta} = \int_0^1 \theta \left(B\left(a;b\right)\right)^{-1} \theta^{a-1} \left(1-\theta\right)^{b-1} \theta^{s_n} \cdot \left(1-\theta\right)^{n-s_n} \cdot d\theta = \frac{a+s_n}{a+b+n}$$

га тенгдир.

Математик статистиканинг умумий курсидан маълумки, агар $\left(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\}\right)$ статистик модел учун тривиал бўлмаган $T = T\left(X^{(n)}\right)$ етарли статистика мавжуд бўлса, у ҳолда $X^{(n)}$ танланма ўрнига ўлчови $X^{(n)}$ никидан (яъни n дан) кичик бўлган ҳажмга эга бўлган $T\left(X^{(n)}\right)$ статистикани қўллаш мақсадга мувофиқдир. Қуйидаги теорема Байесча баҳолашда ҳам етарли статистикадан фойдаланиш мумкинлигини кўрсатади.

1.1.1-Теорема [3,4]. Агар $T\left(X^{(n)}\right)$ статистика $\left(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\}\right)$ статистик модел учун етарли бўлса, у ҳолда $(\Theta, \mathscr{D})$ ўлчовли фазода аниқланган ихтиёрий априор Q тақсимот учун P_θ ўлчовга нисбатан деярли муқаррар равишда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$q_{\zeta/X^{(n)}}\left(\theta/x^{(n)}\right)=q_{\zeta/T\left(X^{(n)}\right)}(\theta/t),\quad t=T\left(X^{(n)}\right). \tag{1.1.6}$$

Исботи. $T\left(X^{(n)}\right)$ етарли статистика бўлгани учун $f_\theta\left(x^{(n)}\right)$ учун Нейман-Фишернинг факторлаштириш критерийси ўринлидир:

$$f_\theta\left(x^{(n)}\right)=\Psi_n\left(T\left(x^{(n)}\right);\theta\right)h_n\left(x^{(n)}\right). \tag{1.1.7}$$

У ҳолда апостериор зичлик

$$\Psi_n\left(T\left(x^{(n)}\right)f_\theta\left(x^{(n)}\right)\right) \tag{1.1.8}$$

га пропорционалдир. Аммо $q_{\zeta/T\left(X^{(n)}\right)}(\theta/t),\quad t=T\left(X^{(n)}\right)$, зичлик ҳам (1.1.8) га пропорционалдир:

$$q_{\zeta/T\left(X^{(n)}\right)}(\theta/t)=\Psi_n(t;\theta)q_\zeta(\theta)$$

бу ифода (1.1.6) ни англатади.

Демак, бу даъводан келиб чиқадики, етарли статистика тушунчаси Байесга оид ёндашувда ҳам худди классик математик статистикадагидек роль ўйнар экан. (1.1.6) га асосан етарли статистика асосида танланма орқали θ нинг апостериор тақсимотини танлаш мумкин экан.

1.2-§. Шеннон, Кульбак-Лейблер ва Фишер информациялари

I. Шеннон информацияси. Олдинги 1.1-§ дан биламизки, етарли статистика $T\left(X^{(n)}\right)$ номаълум θ параметр ҳақидаги зарур информацияни классик математик статистикадаги каби Байесча ёндашишда ҳам ўзида мужассам қилар экан. Аммо биз ҳозирга қадар информация, яъни ахборот тушунчасига қатъий таъриф бермадик. Байесча ёндашувда кузатилаётган $X^{(n)}$ танланма билан бирга номаълум параметр θ ҳам тасодифий бўлганлиги сабабли, Шеннон томонидан киритилган информация (ёки энтропия) тушунчаси ўта фойдалидир.

Қулайлик учун дастлаб X ва ζ лар дискрет тасодифий миқдорлар деб қараймиз:

$$X = X_{(\omega)} : (\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}) \to \left(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\}\right),$$
$$\zeta = \zeta(\omega) : (\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}) \to (\Theta, \mathscr{D}, Q).$$

Демак, $P_\theta(x) = \mathscr{P}\left(\omega : X(\omega) = x / \zeta = \theta\right)$ ва $Q(\theta) = \mathscr{P}\left(\omega : \zeta(\omega) = \theta\right)$ бўлиб, Q эса θ нинг **априор** тақсимоти деб аталади. Агар $X^{(n)} = x^{(n)}$ - танланма қиймати бўлса, у ҳолда θ ҳақидаги тўлиқ маълумот қуйидаги **апостериор** тақсимотда бўлади:

$$\mathscr{P}\left(\omega : \zeta = \theta / X^{(n)} = x^{(n)}\right) = \mathscr{P}\left(\omega : \zeta = \theta,\ X^{(n)} = x^{(n)}\right) / \mathscr{P}\left(X^{(n)} = x^{(n)}\right).$$

Демак, θ ҳақидаги маълумот тажрибага қадар априор, тажрибадан сўнг эса апостериор тақсимот орқали ифодаланар экан. У ҳолда бу икки тақсимот орасидаги фарқни бирор ўлчов билан аниқлаш зарурияти туғилади ва ўлчов орқали тажриба натижасида олинадиган информацияни ҳисоблаш мумкин бўлади.

Дастлаб, қуйидаги фарқни ҳисоблаш ғояси пайдо бўлади:

$$\mathscr{P}(\zeta=\theta)-\mathscr{P}\left(\zeta=\theta / X^{(n)}=x^{(n)}\right).$$

Бу фарқни айнан изланаётган ўлчов сифатида олиш мумкин. Аммо унинг ўрнига логарифмлар фарқи билан ишлаш янада ҳам қулайликларга олиб келади:

$$I_{\theta, x^{(n)}}\left(\theta; x^{(n)}\right)=\ln\left[\mathscr{P}\left(\zeta=\theta / X^{(n)}=x^{(n)}\right) / \mathscr{P}(\zeta=\theta)\right]. \tag{1.2.1}$$

(1.2.1) ифода $A=\left\{X^{(n)}=x^{(n)}\right\}$ ҳодисадаги $B=\{\zeta=\theta\}$ ҳодисага нисбатан **информация** деб аталади. Аммо

$$\frac{\mathscr{P}(B / A)}{\mathscr{P}(B)}=\frac{\mathscr{P}(AB)}{\mathscr{P}(A)\mathscr{P}(B)}=\frac{\mathscr{P}(A / B)}{\mathscr{P}(A)}$$

бўлганлиги учун B даги A га нисбатан информация A даги B га нисбатан информацияга тенг бўлади ва (1.2.1) ни A ва B лар орасидаги ўзаъро **информация** деб қаралади. Албатта, бу ифодаларда $\mathscr{P}(A)$, $\mathscr{P}(B)>0$ деб ҳисобланади. (1.2.1) ни симметрик равишда

$$I_{\zeta, X^{(n)}}\left(\theta; x^{(n)}\right)=\ln\frac{\mathscr{P}\left(\zeta=\theta,\, X^{(n)}=x^{(n)}\right)}{\mathscr{P}(\zeta=\theta)\cdot\mathscr{P}\left(X^{(n)}=x^{(n)}\right)}. \tag{1.2.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар $A\subseteq B$ бўлса, у ҳолда $\mathscr{P}(B / A)=1$ бўлади ва A даги B ҳақидаги информация B ни тўлиқ аниқлайди:

$$\ln\left[\frac{\mathscr{P}(B/A)}{\mathscr{P}(B)}\right]=\ln\left(\frac{1}{\mathscr{P}(B)}\right)=\ln\left[\frac{1}{\mathscr{P}(\zeta=\theta)}\right]=I_{\zeta}(\theta). \qquad (1.2.3)$$

Аммо, (1.2.3) га асосан (агар $A=B$ бўлмаса) A ни B орқали аниқлаб бўлмайди. Гап шундаки A ва B ҳодисаларнинг ўзига хос ноаниқликлари турличадир. (1.2.3) ни B нинг ўзи ҳақидаги хос информацияси дейиш мумкин. У ҳолда

$$\ln\left[\frac{1}{\mathscr{P}\left(\zeta=\theta/X^{(n)}=x^{(n)}\right)}\right]=I_{\zeta/X^{(n)}}\left(\theta/x^{(n)}\right) \qquad (1.2.4)$$

ифодани $\{\zeta=\theta\}$ ҳодисанинг ўзи ҳақидаги хос информациясини танланма олинганидан сўнг $\left\{X^{(n)}=x^{(n)}\right\}$ ҳодиса шартида ҳисобланган информация деб қараш мумкин. Демак,

$$I_{\zeta}(\theta)-I_{\zeta/X^{(n)}}\left(\theta/x^{(n)}\right)=I_{\zeta/X^{(n)}}\left(\theta,x^{(n)}\right). \qquad (1.2.5)$$

ифодани $\left\{X^{(n)}=x^{(n)}\right\}$ ҳодисага $\{\zeta=\theta\}$ ҳодисага нисбатан мавжуд информация сифатида қабул қилиб, уни ўзаъро информация (1.2.1) билан тенглигини кўришимиз мумкин. Келтирилган (1.2.1)-(1.2.5) формулалар $\{\zeta=\theta\}$ ва $\left\{X^{(n)}=x^{(n)}\right\}$ ҳодисалар учун информация тушунчасини аниқлар экан.

ζ нинг **энтропияси** хос информациянинг ўрта қиймати сифатида аниқланади:

$$H(\zeta)=\sum_{\theta\in\Theta}\mathscr{P}(\zeta=\theta)I_{\xi}(\theta)=-\sum_{\theta\in\Theta}\mathscr{P}(\zeta=\theta)\ln\mathscr{P}(\zeta=\theta). \qquad (1.2.6)$$

Шу каби, θ нинг $X^{(n)}=x^{(n)}$ шартидаги **ўртача шартли энтропияси** қуйидагича аниқланади:

$$H\left(\zeta / X^{(n)}\right)=\sum_{\substack{\theta\in\Theta \\ X^{(n)}=x^{(n)}}} \mathscr{P}\left(\zeta=\theta,\ X^{(n)}=x^{(n)}\right) I_{\zeta / X^{(n)}}\left(\theta / x^{(n)}\right)=$$

$$=-\sum \mathscr{P}\left(\zeta=\theta,\ X^{(n)}=x^{(n)}\right) \ln \mathscr{P}\left(\zeta=\theta / X^{(n)}=x^{(n)}\right). \qquad (1.2.7)$$

Ўртача ўзаъро энтропия (ζ ва $X^{(n)}$ орасида) (1.2.5) ни ўртачасини ҳисоблашдан иборат:

$$I\left(\zeta ; X^{(n)}\right)=H(\zeta)-H\left(\zeta / X^{(n)}\right). \qquad (1.2.8)$$

(1.2.8) формула **Шеннон информациясини** аниқлайди. У қуйидаги хоссаларга эга:

1) Информация доимо манфий эмас;

$$I\left(\zeta ; X^{(n)}\right) \geq 0;$$

яъни $H(\zeta) \geq H\left(\zeta / X^{(n)}\right)$;

2) Агар $T\left(X^{(n)}\right)$ бирор статистика бўлса, у ҳолда

$$I\left(\zeta ; T\left(X^{(n)}\right)\right) \leq I\left(\zeta ; X^{(n)}\right),$$

яъни $T\left(X^{(n)}\right)$ даги информация $X^{(n)}$ дагидан кўп эмас;

3) Агар $T\left(X^{(n)}\right)$ етарли статистика бўлса, у ҳолда

$$I\left(\zeta;T\left(X^{(n)}\right)\right)=I\left(\zeta;X^{(n)}\right).$$

Юқоридаги 1) ва 2) хоссалар исботи осондир. Биз 3) ни исботлаймиз. $T\left(X^{(n)}\right)$ статистика етарли бўлсин. Қуйидагини қараймиз

$$I\left(\zeta;X^{(n)}\right)=\sum_{\zeta,x^{(n)}}\mathcal{P}\left(\zeta=\theta,\ \ X^{(n)}=x^{(n)}\right)\ln\left[\frac{\mathcal{P}\left(X^{(n)}=x^{(n)}/\zeta=\theta\right)}{\mathcal{P}\left(X^{(n)}=x^{(n)}\right)}\right]. \quad (1.2.9)$$

Тўла эҳтимоллик формуласига асосан

$$\mathcal{P}\left(X^{(n)}=x^{(n)}\right)=\sum_{\tau}\mathcal{P}\left(X^{(n)}=x^{(n)}/\zeta=\tau\right)\mathcal{P}\left(\zeta=\tau\right). \quad (1.2.10)$$

T нинг етарлилигини ҳисобга олиб, факторлаштириш ифодасини ёзамиз

$$\mathcal{P}\left(X^{(n)}=x^{(n)}/\zeta=\theta\right)=\Psi_n\left(T\left(X^{(n)}\right);\theta\right)h_n\left(x^{(n)}\right). \quad (1.2.11)$$

(1.2.9) даги логарифлик кўпайтма (1.2.10) ва (1.2.11) ларни қўйгандан сўнг

$$\ln\left[\frac{\Psi_n\left(t;\theta\right)}{\sum_{\tau}\Psi_n\left(t;\tau\right)\mathcal{P}\left(\zeta=\tau\right)}\right], \quad t=T\left(x^{(n)}\right), \quad (1.2.12)$$

кўринишда бўлади. Аммо

$$\mathcal{P}\left(T\left(X^{(n)}\right)=t/\zeta=\theta\right)=\Psi_n\left(t;\theta\right)\sum_{\left\{x^{(n)}:T\left(X^{(n)}\right)=t\right\}}h_n\left(x^{(n)}\right) \quad (1.2.13)$$

(1.2.12) даги касрнинг сурат ва махражини (1.2.13) даги кўпайтувчига кўпайтирсак, (1.2.12) учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\ln\left[\frac{\mathscr{P}\left(T\left(X^{(n)}\right)=t/\zeta=\theta\right)}{\sum_{\tau}\mathscr{P}\left(T\left(X^{(n)}\right)=t/\zeta=\theta\right)\mathscr{P}(\zeta=\tau)}\right]=$$

$$=\ln\left[\frac{\mathscr{P}\left(T\left(X^{(n)}\right)=t/\zeta=\theta\right)}{\mathscr{P}\left(T\left(X^{(n)}\right)=t\right)}\right]=I_{\zeta,T\left(X^{(n)}\right)}(\theta;t), \qquad (1.2.14)$$

бу ерда $t=T\left(X^{(n)}\right)$. Энди (1.2.14) ни (1.2.9) даги логарифлик кўпайтмага қўйиб ва сўнг яна тўла эҳтимоллик формуласини қўлласак, у ҳолда

$$I\left(\zeta;X^{(n)}\right)=\sum_{\theta\in\Theta}\mathscr{P}(\zeta=\theta)\sum_{x^{(n)}}\mathscr{P}\left(X^{(n)}=x^{(n)}/\zeta=\theta\right)I_{\zeta,T\left(X^{(n)}\right)}\left(\theta;T\left(X^{(n)}\right)\right)=$$

$$=\sum_{\theta}\mathscr{P}(\zeta=\theta)\sum_{t}I_{\zeta,T\left(X^{(n)}\right)}(\theta;t)\sum_{\left\{x^{(n)}:T\left(x^{(n)}\right)=t\right\}}\mathscr{P}\left(X^{(n)}=x^{(n)}/\zeta=\theta\right)=$$

$$\sum_{\theta,t}\mathscr{P}(\zeta=\theta)\mathscr{P}\left(T\left(X^{(n)}\right)=t/\zeta=\theta\right)I_{\zeta,T\left(X^{(n)}\right)}(\theta;t)=I\left(\zeta;T\left(X^{(n)}\right)\right).$$

Бу эса 3) хоссани исботлайди.

Узлуксиз ҳол учун ҳам юқоридаги хоссалар ўринлидир.

II. Кульбак-Лейблер информацияси. Эслатиб ўтамизки, Шеннон информацияси априор ва апостериор тақсимотларнинг фарқини ўлчашга асосланган эди. Классик математик статистикада $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ тақсимотлар оиласи элементлари орасидаги фарқ ўлчови ҳам ҳисобланади. Агар $\theta_1\neq\theta_2$

лар учун $P_{\theta_1} = P_{\theta_2}$ бўлса, у ҳолда танланма ёрдамида θ_1 ва θ_2 ларни фарқлаб бўлмайди. Агар P_{θ_1} ва P_{θ_2} тақсимотлар бардорлари (носители) кесишмаса, у ҳолда θ_1 ва θ_2 ларни фарқлаш осондир. Аммо бу ҳол амалиёт нуқтаи назаридан қизиқарли эмасдир.

Фараз қилайлик, статистик модел узлуксиз бўлиб P_θ зичлик функцияси $f_\theta(x)$ бўлсин. x нуқтада θ_1 фойдасига ва θ_2 га қарши **Кульбак-Лейблер информацияси** қуйидагича аниқланади:

$$I(\theta_1, \theta_2; x) = \ln\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right). \qquad (1.2.15)$$

X ва θ_i лар орасидаги ўзаъро Шеннон информацияси

$$I_{\zeta,X}(\theta_i; x) = \ln\left(\frac{f_{\theta_i}(x)}{f_X(x)}\right), \quad i = 1,2, \qquad (1.2.16)$$

эди. У ҳолда (1.2.16) дан

$$I_{\zeta,X}(\theta_1; x) - I_{\zeta,X}(\theta_2; x) = \ln\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) = I(\theta_1 : \theta_2; x). \qquad (1.2.17)$$

Демак, Кульбак-Лейблер информацияси Шеннон информациялари фарқидан иборат экан. Бу ифода априор тақсимотга боғлиқ эмас. Энди

$$\{x : f_{\theta_1}(x) > 0\} \subseteq \{x : f_{\theta_2}(x) > 0\}$$

деб ҳисоблаб, ўртача информацияни танланма бўйича ҳисоблаймиз:

$$I_{X^{(n)}}(\theta_1:\theta_2)=\int\cdots\int_{\mathfrak{X}} I(\theta_1:\theta_2;x)\,f_{\theta_1}\left(x^{(n)}\right)dx^{(n)}=$$

$$=\int\cdots\int_{\mathfrak{X}} f_{\theta_1}\left(x^{(n)}\right)\ln\left(\frac{f_{\theta_1}\left(x^{(n)}\right)}{f_{\theta_2}\left(x^{(n)}\right)}\right)dx^{(n)}.$$

$I_{X^{(n)}}(\theta_1:\theta_2)$ Кульбак-Лейблер информацияси хоссалари:

1) $I_{X^{(n)}}(\theta_1:\theta_2)\geq 0$; Фақат $P_{\theta_i}\left(x^{(n)}:f_{\theta_1}\left(x^{(n)}\right)\neq f_{\theta_2}\left(x^{(n)}\right)\right)=0$; $i=1,2,$ бўлганидагина $I_{X^{(n)}}(\theta_1:\theta_2)=0$ бўлади;

2) $T\left(X^{(n)}\right)$ - бирор статистика бўлса, у ҳолда

$$I_{T\left(X^{(n)}\right)}(\theta_1:\theta_2)\leq I_{X^{(n)}}(\theta_1:\theta_2)$$

бўлиб, бу ерда тенглик фақат $T\left(X^{(n)}\right)$ етарли статистика бўлгандагина ўринли бўлади.

3) Агар $X^{(1)}$ ва $X^{(2)}$ лар ҳар бир P_{θ_i}, $i=1,2$ тақсимотларда боғлиқсиз бўлса, у ҳолда

$$I_{X^{(1)},X^{(2)}}(\theta_1:\theta_2)=I_{X^{(1)}}(\theta_1:\theta_2)+I_{X^{(2)}}(\theta_1:\theta_2),$$

яъни информация аддитивдир.

III. Фишер информацияси. Бу информация функцияси статистик баҳолаш назариясида кенг қўлланиладиган бўлиб, у Кульбак-Лейблер информацияси билан ҳам боғлангандир.

Дастлаб θ скаляр параметр деб, Кульбак-Лейблер информациясини қараймиз:

$$I_{X^{(n)}}\left(\theta;\theta+\Delta\theta\right)=\int\limits_{\mathscr{X}} f_n\left(x^{(n)},\theta\right)\ln\left(\frac{f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{f_n\left(x^{(n)};\theta+\Delta\theta\right)}\right)dx^{(n)} \qquad (1.2.18)$$

Биз $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ тақсимотлар бардорлари умумий деб ҳисоблаймиз ва $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)$ зичлик функцияси учун қуйидаги Рао-Крамер регулярлик шартларини қаноатлантиради деб фараз қиламиз:

(C1) $N_{f_n}=\left\{x^{(n)}\in\mathscr{X}: f_n\left(x^{(n)};\theta\right)>0\right\}$ тўплам θ га боғлиқ эмас;

(C2) $\dfrac{\partial f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta}$ ва $\dfrac{\partial^2 f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta^2}$ ҳосилалар мавжуд бўлиб, барча $\theta\in\Theta$ лар учун

$$\int\limits_{\mathscr{X}}\left|\frac{\partial f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta^i}\right|dx^{(n)}<\infty,\quad i=1,2;$$

(C3) Барча $\theta\in\Theta$ лар учун **Фишер информацияси**

$$0<I_{X^{(n)}}\left(\theta\right)=M_\theta\left[\frac{\partial\ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta}\right]^2<\infty.$$

Юқоридаги (C1) ва (C2) шартларни эътиборга олган ҳолда (1.2.18) даги логарифмик ҳадни қуйидаги Тейлор қаторига ёйамиз:

$$\ln f_n\left(x^{(n)};\theta\right)-\ln f\left(x^{(n)};\theta+\Delta\theta\right)=-\frac{\partial\ln f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta}\Delta\theta-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \ln f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta^2}\left(\Delta\theta\right)^2+0\left(\left(\Delta\theta\right)^2\right). \qquad (1.2.19)$$

Аммо

$$M_\theta\left[\frac{\partial \ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta}\right]=\int\limits_{\mathcal{X}}\frac{\partial f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta}dx^{(n)}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\mathcal{X}} f_n\left(x^{(n)};\theta\right)dx^{(n)}=\frac{\partial}{\partial\theta}(1)=0\,. \qquad (1.2.20)$$

У ҳолда (1.2.18) – (1.2.20) ларга асосан, $\Delta\theta\to 0$ да

$$I_{X^{(n)}}\left(\theta;\theta+\Delta\theta\right)\approx\frac{1}{2}M_\theta\left[\frac{\partial^2 \ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta^2}\right]\cdot\left(\Delta\theta\right)^2. \qquad (1.2.21)$$

Бошқа томондан, [3] даги 4.1.2.-Леммага асосан (C1)-(C3) регулярлик шартларида $X^{(n)}$ танланманинг Фишер информацияси $I_{X^{(n)}}\left(\theta\right)$ учун қуйидаги ифода ҳам ўринлидир:

$$I_{X^{(n)}}\left(\theta\right)=-M_\theta\left[\frac{\partial^2 \ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta^2}\right]. \qquad (1.2.22)$$

Энди (1.2.21) ва (1.2.22) лардан $\Delta\theta\to 0$ да қуйидаги тақрибий тенгликка эга бўламиз:

$$I_{X^{(n)}}\left(\theta;\theta+\Delta\theta\right)\approx\frac{\left(\Delta\theta\right)^2}{2}I_{X^{(n)}}\left(\theta\right). \qquad (1.2.23)$$

Бу (1.2.23) тенглик Кульбак-Лейблернинг $I_{X^{(n)}}\left(\theta,\theta+\Delta\theta\right)$ ва Фишернинг $I_{X^{(n)}}\left(\theta\right)$ информация функциялари орасидаги боғлиқликни ифодалар экан. Аммо шуни таъкидлаб ўтиш лозимки, математик статистиканинг баҳолаш назариясида Фишер информациясининг роли беқиёсдир. У учун ҳам юқорида кўриб ўтилган информация функциялари каби қуйидаги тенгсизлик $\forall\theta\in\Theta$ ва бирор статистика $T\left(X^{(n)}\right)$ учун ўринлидир ([3] даги 4.1.4-лемма):

$$I_{T\left(X^{(n)}\right)}\left(\theta\right)\leq I_{X^{(n)}}\left(\theta\right). \qquad (1.2.24)$$

(1.2.24) да тенглик ўринли бўлиши учун $T\left(X^{(n)}\right)$ нинг етарли статистика бўлиши зарур ва етарлидир. Фишер информацияси ҳам аддитивлик хоссасига эга:

$$I_{X^{(n)}}\left(\theta\right)=I_{X_1}\left(\theta\right)+\ldots+I_{X^{(n)}}\left(\theta\right)=nI_X\left(\theta\right).$$

([3] даги 4.1.3-леммага қаранг).

2-БОБ. ПАРАМЕТРЛАРНИ БАҲОЛАШДА СТАНДАРТ БАЙЕС УСУЛЛАРИ

2.1-§. Байесга оид ёндашувнинг таркибий қисмлари

Байесга оид статистик баҳолаш схемасини шартли равишда қуйидаги тўрт таркибий қисмларга ажратиш мумкин.

Фараз қилайлик, X тасодифий миқдорни кузатиш натижасида боғлиқ бўлмаган ва бир-хил тақсимотга эга бўлган X_i тасодифий миқдорлардан иборат бўлган $X^{(n)}=\left(X_1,...,X_n\right)$ танланма кузатилаётган бўлсин. Таркибий қисмлар қуйидагилардан иборат:

1) $\left(\mathscr{X},\mathscr{B},\left\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\right\}\right)$ **- параметрик статистик модел** $X^{(n)}$ танланмага мос келади. Бу ерда $\mathscr{X}$ тўплам $X^{(n)}$ тасодифий векторнинг барча мумкин бўлган қийматлари тўплами, $\mathscr{B}$ эса $\mathscr{X}$ нинг қисм тўпламларидан тузилган Борел σ-алгебраси ва $\left\{P_\theta,\theta\in\Theta\right\}$ эса $\left(\mathscr{X},\mathscr{B}\right)$ ўлчовли фазода аниқланган ва θ - номаълум **тасодифий** параметр аниқлигида берилган эҳтимоллик тақсимотлари оиласидир.

2) θ **параметр учун эҳтимоллик фазоси** $\left(\Theta,\mathscr{D},Q\right)$**.** Бу ерда Θ тўплам θ нинг барча мумкин бўлган қийматлари тўплами, $\mathscr{D}$ тўплам Θ нинг тўплам остилари σ - алгебраси ва Q эса $\left(\Theta,\mathscr{D}\right)$ ўлчовлик фазода аниқланган эҳтимоллик ўлчовидир. Q ўлчов **априор,** яъни тажрибагача бўлган тақсимот деб аталади. Одатда априор тақсимотни кузатилаётган объект ҳақидаги малака ва билимларга асосланган ҳолда амалий нуқтаи назардан танланади.

3) Мумкин бўлган ечимлар тўплами П. П нинг ихтиёрий элементи $\mathscr{X}$ даги $\mathscr{B}$ ўлчовли функция, яъни статистикадир. $\forall d\in\Pi$:

$$d=d\left(X^{(n)}\right):\left(\mathscr{X},\mathscr{B}\right)\rightarrow\left(\Theta,\mathscr{D}\right).$$

4) $\Theta\times\mathfrak{D}$ **да аниқланган йўқотув (ҳатолик) лар функцияси** $L(\theta;d)$**.** Масалан, $L(\theta;d)$ сифатида қуйидагиларни қаноатлантирувчи функцияларни олиш мумкин:

а) $L(\theta;d)=w(\theta-d)$;

б) $w(\theta)$ функция R^s да аниқланган ва манфий эмас, бу ерда s-номаълум параметр θ ўлчови, $w(0)=0$;

в) Функция w симметрик: $w(-u)=w(u)$;

Бундай $w(u)$ ларга мисол тарзида, $w(u)=|u|$, $w(u)=u^2$ ва ҳ.к. ларни олиш мумкин.

Агар $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ ва Q тақсимотлар μ ва ν/σ-чекли ўлчовларга нисбатан доминирланган бўлиб, $f_\theta(x)=f(x/\theta)$ ва $q(t)$ зичлик функциялари

$$f(x/\theta)=\frac{P_\theta(dx)}{\mu(dx)},\quad q(t)=\frac{Q(dt)}{\nu(dt)}$$

мавжуд бўлса, у ҳолда (X,θ) жуфтликнинг биргаликдаги зичлик функцияси

$$f(x;\theta)=f(x/\theta)q(\theta)$$

дан иборат бўлади. У ҳолда $\left(X^{(n)},\theta\right)$ жуфтликнинг биргаликдаги зичлик функцияси

$$f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=f_n\left(x^{(n)}/\theta\right)q(\theta)$$

дан иборат бўлиб, бу ерда $f_n\left(x^{(n)}/\theta\right)=\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i/\theta\right)$ танланма $X^{(n)}$ нинг биргаликдаги зичлик функциясидир. Энди Байес формуласига асосан θ тасодифий параметрнинг $X^{(n)}$ танланмага нисбатан шартли зичлик функцияси, яъни **апостериор** (тажриба ўтказилганидан кейинги) зичлик функциясини ёза оламиз:

$$q_n\left(t/x^{(n)}\right)=\frac{f_n\left(x^{(n)},t\right)}{\int\limits_{\Theta} f_n\left(x^{(n)};t\right)\nu\left(d\,t\right)}=\frac{f_n\left(x^{(n)}/t\right)q\left(t\right)}{\int\limits_{\Theta} f_n\left(x^{(n)}/u\right)q\left(u\right)\nu\left(du\right)}. \qquad (2.1.1)$$

θ нинг Байес баҳосини $L\left(\theta;d\right)$ ни $d\in\Pi$ бўйича ўрта қийматини минималлаштириш масаласининг ечими сифатида танлаймиз:

$$\theta_n = Arg\ \min_{\theta\in\Theta}\mathscr{M}_\theta L\left(\theta,d\right)=\int\limits_{\Theta} L\left(t;d\right)q_n\left(t/x^{(n)}\right)\nu\left(dt\right). \qquad (2.1.2)$$

Биз ушбу магистрлик диссертациясида ν - чизиқли Лебег ўлчови: $\nu\left(dt\right)=dt,\ L$ эса квадратик функция деб фараз қиламиз: $L\left(t;d\right)=\left(t-d\right)^2$. У ҳолда текшириб кўриш мумкинки, (2.1.2) даги минимум **апостериор ўрта қийматда** эришилади:

$$\theta_n=\int\limits_{\Theta} tq\left(t/x^{(n)}\right)dt=\frac{\int\limits_{\Theta} t\, f_n\left(x^{(n)}/t\right)q\left(t\right)dt}{\int\limits_{\Theta} f_n\left(x^{(n)}/t\right)q\left(t\right)dt}. \qquad (2.1.3)$$

(2.1.3) баҳо квадратик хатолик функцияга асосан Байес баҳоси деб аталади. Демак, Байес баҳоларининг энг асосий хоссаси уларнинг квадратик хатоликка минимал қийматни берувчи оптималлаш экан.

Мисоллар. 1) $P_\theta = N(\theta,1)$-нормал тақсимотнинг номаълум θ ўрта қийматининг априор тақсимоти $N(\theta,1)=Q$ стандарт нормал бўлганида Байес баҳосини ҳисоблаймиз. Демак, $q(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, $|t|<\infty$, $f_n\left(x^{(n)}/\theta\right)=$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right\}.$$

У ҳолда (2.1.3) формулага асосан θ нинг Байес баҳоси

$$\theta_n=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-t)^2-\frac{t^2}{2}\right\}dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-t)^2-\frac{t^2}{2}\right\}dt}=$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\overline{X}nt-\frac{t^2n}{2}-\frac{t^2}{2}\right\}dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\overline{X}nt-\frac{t^2n}{2}-\frac{t^2}{2}\right\}dt}=$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\exp\left\{-(n+1)\frac{t^2}{2}+n\overline{x}t\right\}dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-(n+1)\frac{t^2}{2}+n\overline{x}t\right\}dt}=\frac{n}{n+1}\overline{x},$$

бу ерда $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ - ўрта арифметик қиймат.

Маълумки, $\overline{x}$ статистика моментлар ва ҳақиқатга максимал ўхшашлик усуллари баҳоси бўлиб, у θ учун асосли, силжимаган ва эффектив баҳодир. У ҳолда $\frac{n}{n+1}\to 1,\ \ n\to\infty$, бўлгани учун Байес баҳоси $\theta_n=\frac{n}{n+1}\overline{x}$ ҳам θ учун асосли, асимптотик эффектив баҳо бўлади.

2) $X^{(n)}$ танланма $P_\theta = N\left(\theta_1, \theta_2^2\right)$ нормал тақсимотдан олинган бўлиб, номаълум параметр икки ўлчовлидир: $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta = \{(\theta_1, \theta_2) : -\infty < \theta_1 < \infty,$ $\theta_2 > 0\}$. Демак, $X^{(n)}$ нинг зичлик функцияси

$$f\left(x^{(n)} / \theta\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\theta_2^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \bar{x}\right)^2 - \frac{n}{2\theta_2^2}\left(\bar{x} - \theta_1\right)^2\right\},$$

бўлиб, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Агар $q(\theta_1, \theta_2)$ орқали $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ нинг априор тақсимотини белгиласак, у ҳолда бу параметрнинг апостериор тақсимоти (2.1.1) формулага асосан

$$q_n\left(\theta / x^{(n)}\right) = \frac{\theta_2^{-n} q(\theta_1, \theta_2) \exp\left\{-\frac{n}{2\theta_2^2}\left(\bar{x} - \theta_1\right)^2 - \frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \bar{x}\right)^2\right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 \int_0^{\infty} \theta_2^{-n} q(\theta_1, \theta_2) \exp\left\{-\frac{n}{2\theta_2^2}\left(\bar{x} - \theta_1\right)^2 - \frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \bar{x}\right)^2\right\} d\theta_2}.$$

Бу формуладан кўринадики, апостериор тақсимот $q_n\left(\theta / x^{(n)}\right)$ зичлиги $X^{(n)}$ танланмага $\left(\bar{x}, \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{x}\right)^2\right)$ минимал етарли статистика орқали боғлиқ экан. Аммо, маълумки, [3], $\bar{x}$ ва $d = \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{x}\right)^2$ статистикалар ўзаро боғлиқ эмасдир. Уларнинг зичлик функциялари мос равишда

$$P_{\bar{x}}(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{n}{2\theta_2^2}(x - \theta_1)^2\right\}, \quad |x| < \infty,$$

ва

$$P_d\left(x;\theta_2\right)=\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(2\theta_2^2\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}x^{\frac{(n-3)}{2}}\exp\left(-\frac{x}{2\theta_2^2}\right),\ \ 0\le x\le\infty\,.$$

У ҳолда $\left(\bar{x},d\right)$ статистика берилганида апостериор зичлик функция кўриниши

$$q_n\left(\theta\,/\,X^{(n)}\right)=q_n\left(\theta\,/\,\bar{x},d\right)\text{ экан.}$$

Бу мисол статистик танланма ўрнида етарли статистикалардан ҳам фойдаланиш мумкинлигини кўрсатади.

2.2-§. Кўрсаткичли тақсимот параметрини тўлиқ бўлмаган танланма бўйича баҳолаш

Ушбу параграфда биз тўлиқ бўлмаган танланмаларнинг бир модели-ўнг томондан тасодифий цензурланиш моделини кўриб ўтамиз. Бу моделга асосан бизни қизиқтирувчи узлуксиз X тасодифий миқдор ўрнига унга боғлиқ бўлмаган бошқа узлуксиз Y тасодифий миқдор билан тузилган $Z=\min\{X,Y\}$ тасодифий миқдор кузатилади. Агар $X\le Y$, яъни $Z=X$ бўлса, у ҳолда кузатиладиган миқдор X, акс ҳолда, $X>Y$, яъни $Z=Y$ бўлса, у ҳолда кузатиладиган миқдор Y бўлади. Агар $A=\{X\le Y\}$ ҳодиса ва унинг индикатори $\delta=I(A)$ ларни киритсак, у ҳолда аслида кузатиладиган тасодифий миқдор икки ўлчовли (Z,δ) жуфтликдан иборатдир. $F(x;\theta)=P_\theta(X<x)$ ва $G(x;\theta)=P_\theta(Y<x)$ лар мос равишда X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот функциялари бўлсин. У ҳолда Z нинг тақсимот функцияси $H(x;\theta)=P_\theta(Z<x)=1-P_\theta(Z\ge x)=\ 1-P_\theta(X\ge x,$ $Y\ge x)=1-P_\theta(X\ge x)P_\theta(Y\ge x)=1-(1-F(x;\theta))(1-G(x;\theta))$. Бу ерда G ҳам θ га боғлиқ бўлганлиги учун ушбу модел информатив цензурланиш модели деб аталади. Агар $X_1,...,X_n$ ва $Y_1,...,Y_n$ лар орқали X ва Y тасодифий миқдорларнинг n та боғлиқ бўлмаган тажрибалардаги амалий қийматларини белгиласак, у ҳолда кузатилаётган танланма $C^{(n)}=\{(Z_i,\delta_i),\ 1\le i\le n\}$ жуфтликлардан ташкил топган бўлиб, бу ерда $Z_i=\min\{X_i,Y_i\},\delta_i=I(X_i\le Y_i)$. Демак, $C^{(n)}$ танланмада X_i лар фақат $\delta_i=1$ бўлган ҳолдагина кузатилар экан. Кузатиладиган X_i ларнинг ўртача сони $p_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i$ бўлиб, у $p=P_\theta(X_i\le Y_i)=M_\theta\delta_i$ эҳтимоллик учун катта сонлар қонунига асосан силжимаган ва асосли баҳодир:

$$M_\theta p_n = p, \quad p_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} p.$$

Биз инфоматив моделнинг қуйидаги хусусий ҳоли пропорционал интенсивликлар моделини (ПИМ) кўриб ўтамиз. Унга асосан (X,Y) (ёки (F,G)) жуфтлик қуйидаги ифодаланишни қаноатлантиради:

$$1-G(x;\theta)=\left(1-F(x;\theta)\right)^{\beta}, \quad x\in R, \tag{2.2.1}$$

бу ерда ўзгармас сон $\beta>0$ номаълум θ га боғлиқ эмас. Фараз қилайлик, F ва G тақсимот функцияларнинг зичлик функциялари $f(x;\theta)$ ва $g(x;\theta)$ лар бўлган, у ҳолда $C^{(n)}$ танланмага мос келган биргаликдаги зичлик функцияси

$$L_n(\theta)=\prod_{i=1}^{n} h(Z_i,\ \delta_i,\theta),$$

бўлиб, бу ерда $h(u,v;\theta)=\left[f(u;\theta)\left(1-G(u;\theta)\right)\right]^{v}\cdot\left[g(u;\theta)\left(1-F(u;\theta)\right)\right]^{1-v}$, $(u,v)\in R^{(1)}\times\{0,1\}$. (2.2.1) га асосан,

$$g(x;\theta)=\beta\left(1-F(x;\theta)\right)^{\beta-1}\cdot f(x;\theta)$$

бўлганлиги сабабли,

$$L_n(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\beta^{1-\delta_i} f(Z_i;\theta)\left(1-F(Z_i;\theta)\right)^{\beta}=$$

$$=k_n(\beta)\prod_{i=1}^{n} f(Z_i;\theta)\left(1-F(Z_i;\theta)\right)^{\beta}. \tag{2.2.2}$$

Энди биз $F(x;\theta)=1-e^{-x/\theta}$, $x\geq 0$, $\theta>0$, кўрсаткичли тақсимот деб фараз қиламиз. У ҳолда (2.2.2) га асосан,

$$L_n(\theta)=k_n(\beta)\cdot\left(\frac{1}{\theta}\right)^n\cdot\exp\left\{-\frac{(1+\beta)}{\theta}\sum_{i=1}^{n}Z_i\right\}. \tag{2.2.3}$$

Энди p ни ҳисоблаймиз:

$$p=P_\theta(\delta_i=1)=P_\theta(X_i\leq Y_i)=\int_0^\infty(1-G(u;\theta))dF(u;\theta)=$$

$$=\int_0^\infty(1-F(u;\theta))^\beta\cdot dF(u;\theta)=\frac{(-1)}{1+\beta}\int_0^\infty d(1-F(u;\theta))^{1+\beta}=$$

$$=-\frac{1}{1+\beta}(1-F(u;\theta))^{1+\beta}\Big|_0^\infty=\frac{1}{1+\beta}.$$

Аммо умуман олганда β ҳам номаълум бўлганлиги учун, $p=\dfrac{1}{1+\beta}$ ни p_n орқали баҳолаймиз. У ҳолда (2.2.3) ҳақиқатга ўхшашлик функциясини қуйидаги эмпирик аналогига алмаштирамиз:

$$L_n^*(\theta)=k_n^*\left(\frac{1}{\theta}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{p_n\theta}\sum_{i=1}^{n}Z_i\right\}. \tag{2.2.4}$$

Энди (2.2.4) дан ҳақиқатга ўхшашлик баҳосини қуйидаги тенгламадан топамиз:

$$\frac{\partial \ln L_n^*(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2 p_n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

Баҳо $\hat{\theta}_n = \dfrac{\overline{Z}_n}{p_n}$ га тенг экан. Аммо ПИМ нинг энг муҳим хоссаларидан бири (2.2.1) нинг ўринли эканлиги $C^{(n)}$ танланмада $(Z_1,...,Z_n)$ ва $(\delta_1,...,\delta_n)$ қисм кузатилмаларнинг боғлиқсизлигига эквивалентдир ([1] га қаранг). Осонгина ҳисоблаб кўриш мумкинки,

$$p = M_{\theta}\delta_i = \frac{1}{\theta} M_{\theta} Z_i ,$$

демак, $\theta = M_{\theta} Z_i \cdot \left(M_{\theta}\delta_i\right)^{-1}$, яъни $\hat{\theta}_n = \dfrac{Z_n}{p_n}$ баҳо моментлар усули баҳоси ҳам бўлар экан. Бу эса $\hat{\theta}_n$ баҳонинг θ учун асосли баҳо, яъни

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \theta$$

экан. Унинг асимптотик нормаллиги [1,2] мақолаларда кўрсатилган. Уларга асосан,

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, \sigma^2(\theta)\right),$$

бўлиб, бу ерда

$$\sigma^2(\theta) = \mathcal{D}_{\theta}\left(Z - \theta\delta\right)\left[M_{\theta}\delta\right]^{-2} = \frac{\theta^2}{P_{\theta}\left(X \le y\right)} = (1+\beta)\theta^2 .$$

Тушунарлики, $\sigma^2(\theta)$ нинг табиий баҳоси

$$\sigma_n^2 = \frac{\hat{\theta}_n^2}{p_n} = \frac{\hat{\theta}_n^3}{\overline{\overline{Z}}_n}.$$

Биз энди энг асосий масала, яъни қаралаётган моделда кўрсаткичли тақсимот параметри θ ни тасодифий миқдор деб ҳисоблаб, уни Байес усулида баҳолаш масаласини кўриб ўтамиз. θ нинг априор тақсимоти зичлиги $q(\theta)$ бўлсин, $\theta \in \Theta = (0,\infty)$. Биз аслида θ ни эмас балки унинг функцияси $r = P_\theta(X \geq t_0) = e^{-t_0/\theta}$ эҳтимолликни баҳолаш масаласини қараймиз, $t_0 > 0$. Демак, $0 < r < 1$ ва $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta(r)} = -\frac{\ln r}{t_0}$. Энди r нинг априор тақсимоти зичлиги $\{q(r),\ \ 0 < r < 1\}$ бўлсин.

У ҳолда (2.2.4) га асосан

$$L_n^*(\theta) = L_n^*(r) = k_n^* \left(\frac{1}{t_0}\right)^n (-\ln r)^n \exp\left\{\frac{\ln r}{p_n t_0} \cdot \sum_{i=1}^n Z_i\right\} =$$

$$= \tilde{k}_n (-\ln r)^n - r^{\frac{n\overline{Z}_n}{t_0 p_n}} = \tilde{k}_n (-\ln r)^n r^{\alpha_n},$$

бу ерда $\alpha_n = \frac{n\overline{Z}_n}{t_0 p_n} = \frac{n}{t_0} \cdot \hat{\theta}_n$.

У ҳолда r параметрнинг апостериор тақсимоти

$$\varphi_n\left(r / C^{(n)}\right) = \frac{L_n^*(r) q(r)}{\int_0^1 L_n^*(r) q(r) dr} = \frac{r^{\alpha_n} (-\ln r)^n q(r)}{\int_0^1 r^{\alpha_n} (-\ln r)^n q(r) dr}.$$

бўлиб, унга мос келган Байес баҳоси эса

$$r_n = \frac{\int_0^1 r^{\alpha_n+1}\left(-\ln r\right)^n q\left(r\right)dr}{\int_0^1 r^{\alpha_n}\left(-\ln r\right)^n q\left(r\right)dr}. \qquad (2.2.5)$$

Агар $\left\{q\left(r\right)=1,\ 0<r<1\right\}$, яъни априор тақсимот текис тақсимот бўлса, у ҳолда (2.2.5) га асосан

$$r_n = \frac{\int_0^1 r^{\alpha_n+1}\left(-\ln r\right)^n dr}{\int_0^1 r^{\alpha_n}\left(-\ln r\right)^n dr}. \qquad (2.2.6)$$

Интеграллар жадвалидан маълумки,

$$\int_0^1 r^{\gamma}\left(-\ln r\right)^r dr = r^{\gamma+1}\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k \cdot \frac{n!}{\left(n-k\right)!}\cdot\frac{\left(\ln r\right)^{n-k}}{\left(\gamma+1\right)^{k+1}}\Big|_0^1 = \frac{\left(-1\right)^n n!}{\left(\gamma+1\right)^{n+1}}. \qquad (2.2.7)$$

Энди (2.2.7) ни (2.2.6) сурати ва махражига $\gamma=\alpha_n+1$ ва $\gamma=\alpha_n$ бўлганида қўлласак, у ҳолда

$$r_n = \left(\frac{\alpha_n+1}{\alpha_n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n\hat{\theta}_n+t_0}{n\hat{\theta}_n+2t_0}\right)^{n+1} \qquad (2.2.8)$$

(2.2.8) баҳонинг асослилигини исботлаймиз.

2.2.1-Теорема. $n\to\infty$ да $r_n \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}} r = e^{-t_0/\theta}$.

Исботи. (2.2.8) баҳони

$$r_n = \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha_n + 2} \right)^{\alpha_n + 2} \right]^{\frac{n+1}{\alpha_n + 2}} =$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha_n + 2} \right)^{\alpha_n + 2} \right]^{\frac{(n+1)t_0}{n\hat{\theta}_n + 2t_0}} . \qquad (2.2.9)$$

Энди θ_n нинг θ учун асослилиги ва

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha_n + 2} \right)^{\alpha_n + 2} \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}} e^{-1} \qquad (2.2.10)$$

эканлигидан (2.2.9) га асосан $r_n \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}} e^{-t_0/\theta} = r.$

Теорема исботланди.

(2.2.8) Байес баҳосининг апостериор дисперсиясини (2.2.7) га асосан қуйидагича ёзамиз:

$$\sigma_n^2(r) = \frac{\int_0^1 r^{\alpha_n + 2} (-\ln r)^n \, dr}{\int_0^1 r^{\alpha_n} (-\ln r)^n \, dr} - r_n^2 = \left(\frac{\alpha_n + 1}{\alpha_n + 3} \right)^{n+1} - r_n^2 . \qquad (2.2.11)$$

Бу ерда

$$\left(\frac{\alpha_n+1}{\alpha_n+3}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{\frac{\alpha_n+3}{2}}\right)^{(n+1)}=\left[\left(1-\frac{1}{\frac{\alpha_n+3}{2}}\right)^{\frac{\alpha_n+3}{2}}\right]^{\frac{(n+1)2}{\alpha_n+3}}=$$

$$=\left[\left(1-\frac{1}{\frac{\alpha_n+3}{2}}\right)^{\frac{\alpha_n+3}{2}}\right]^{\frac{(n+1)2t_0}{n\hat{\theta}_n+2t_0}}\xrightarrow{p} e^{-t_0/\theta}=r. \qquad (2.2.12)$$

У ҳолда (2.2.11), (2.2.12) ва 2.1.1-теоремага асосан $n\to\infty$ да $\sigma_n^2(r)\xrightarrow{p} r-r^2=r(1-r)$. Демак, қуйидаги даъво ўринли экан.

2.2.2-Теорема. $n\to\infty$, $\sigma^2(r)\xrightarrow{p} r(1-r)$.

Изоҳ. Маълумки, агар $F_n^{э}(t_0)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I(X_i<t)$ тўлиқ танланма бўйича тузилган эмпирик тақсимот бўлса, у ҳолда $\sqrt{n}F_n^{э}(t_0)$ нинг дисперсияси ҳам $r(1-r)$ га тенг бўлиб, $\sup\limits_{0<r<1}\left[r(1-r)\right]=1/4$.

$F_n^{э}$ статистика F учун силжимаган, асосли ва асимптотик эффектив баҳодир. $\sigma_n^2(r)$ нинг ҳам $n\to\infty$ да асимптотик хоссалари $\sqrt{n}F_n^{э}(t_0)$ дагидек экан.

Бундан ташқари, r_n баҳо $p_n=0$ да ҳам аниқлангандир.

3-БОБ. ПАРАМЕТРИК СТАТИСТИК МОДЕЛЛАРДА НОАНИҚЛИК ШАРТИДА БАҲОЛАР ЭФФЕКТИВЛИГИНИ АНИҚЛОВЧИ ҚУЙИ ЧЕГАРАЛАР СИНФИ

3.1-§. Параметрларни баҳолашдаги хатоликлар моментлари учун умумлашган Байес қуйи чегаралари синфи

Ушбу параграфда биз Е.Вайнштейн ва А.Вайслар томонидан параметрларни баҳоси хатоликлари моменти учун [13] да келтирилган умумлашган Байес қуйи чегаралари синфини келтирамиз. Бу қуйи чегаралар Крамер-Рао, Баттачария, Бобровский-Закаи ва Вайс-Вайнштейнларнинг қуйи чегараларини ўз ичига олади. ([5-12] ларга қаранг).

Олдинги параграфлардан маълумки, номаълум параметрларни Байес усулида қурилган баҳоси квадратик риск функциясига нисбатан оптимал баҳо ҳисобланади. Аммо, бир неча махсус ҳоллардан ташқари умумий ҳолда бундай баҳоларни ҳисоблаш ўта мураккаб масаладир. Шу сабабли, баҳоларнинг ўртача квадратик четланиши учун аниқ қуйи чегарани кўрсатиб, уларни шу чегарага нисбатан солиштириш муҳим масалалардан бири ҳисобланади.

Фараз қиламиз, $\left(\mathscr{X},\mathscr{B},\left\{P_\theta,\theta\in\Theta\right\}\right)$ статистик моделда $\left\{P_\theta,\theta\in\Theta\right\}$ тақсимотлар оиласи σ-чекли μ ўлчовга нисбатан абсолют узлуксиз бўлиб, $f\left(x;\theta\right)$ унга мос зичлик функцияси бўлсин. $\mathscr{X}\times\Theta$ да аниқланган бирор $\Psi\left(x;\theta\right)$ функция учун $\mathscr{X}$ нинг деярли барча нуқталарида қуйидаги тенглик ўринли бўлсин:

$$\int\limits_{\Theta}\Psi\left(x^{(n)};\theta\right)f_n\left(x^{(n)};\theta\right)d\theta=0, \tag{3.1.1}$$

бу ерда $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=f\left(x_1;\theta\right)...f\left(x_n;\theta\right)$.

3.1.1-Теорема [13]. (3.1.1) тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий статистика $T\left(x^{(n)}\right)$ ва функция $g(\theta)$ учун ҳар бир бутун $k>1$ ларда

$$M\left[\left|T\left(X^{(n)}\right)\Psi\left(X^{(n)};\theta\right)\right|\right],\ M\left[g(\theta)\Psi\left(X^{(n)};\theta\right)\right] \text{ ва } \mathrm{M}\left[\left|\Psi\left(X^{(n)};\theta\right)\right|^{\frac{k}{k-1}}\right]$$

- математик кутилмаларнинг мавжудлиги шартида қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$M\left[\left|T\left(X^{(n)}\right)-g(\theta)\right|^{k}\right] \geq \frac{\left|M\left[g(\theta)\Psi\left(X^{(n)};\theta\right)\right]\right|^{k}}{\left\{M\left[\left|\Psi\left(X^{(n)};\theta\right)\right|^{\frac{k}{k-1}}\right]\right\}^{k-1}}. \qquad (3.1.2)$$

Исботи. (3.1.1) нинг ҳар икки томонини $T\left(x^{(n)}\right)$ га кўпайтириб, сўнг $x^{(n)} \in \mathcal{X}$ бўйича интегралласак, у ҳолда қуйидаги умумлашган математик кутилмага эга бўламиз:

$$M\left[T\left(X^{(n)}\right)\Psi\left(X^{(n)};\theta\right)\right] = \int_{\mathcal{X}} T\left(x^{(n)}\right)d\mu\left(x^{(n)}\right)\int_{\Theta}\Psi\left(x^{(n)};\theta\right)f_n\left(x^{(n)};\theta\right)d\theta = 0 \quad (3.1.3)$$

(3.1.3) нинг ҳар икки томонидан $M\left[g(\theta)\Psi\left(X^{(n)};\theta\right)\right]$ ни айириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$M\left\{\left[T\left(X^{(n)}\right)-g(\theta)\right]\Psi\left(X^{(n)};\theta\right)\right\} = -M\left[g(\theta)\Psi\left(X^{(n)};\theta\right)\right]. \quad (3.1.4)$$

Бу ердан

$$\left| M\left[g(\theta)\Psi\left(X^{(n)};\theta \right) \right] \right| \le \left\{ M\left| T\left(X^{(n)} \right) - g(\theta) \right| \cdot \left| \Psi\left(X^{(n)};\theta \right) \right| \right\}. \qquad (3.1.5)$$

Энди (3.1.5) нинг чап томонига Гёлдер тенгсизлигини қўллаймиз:

$$\left| M\left[g(\theta)\Psi\left(X^{(n)};\theta \right) \right] \right| \le$$

$$\le \left\{ M\left[\left| T\left(X^{(n)} \right) - g(\theta) \right|^{k} \right] \right\}^{\frac{1}{k}} \left\{ \left[M\left| X^{(n)};\theta \right|^{\frac{k}{k-1}} \right]^{\frac{k-1}{k}} \right\} \qquad (3.1.6)$$

Бу тенгсизликнинг ҳар икки томонини k-даражага ошириб, сўнг $\left\{ M\left[\left| \Psi\left(X^{(n)};\theta \right) \right|^{\frac{k}{k-1}} \right] \right\}^{k-1}$ га бўлиб юборсак, (3.1.2) тенгсизлик келиб чиқади. Исбот тугади.

Кўриш қийин эмаски, (3.1.2) тенгсизлик ихтиёрий $T\left(X^{(n)} \right)$ статистиканинг берилган $g(\theta)$ функциядан абсолют оғишининг k-моменти учун қуйи чегарани аниқлаймиз. Бу тенгсизликда, агар $k = 2,\ \ g(\theta) = \theta$ десак, у ҳолда унинг кўриниши

$$M\left[T\left(X^{(n)} \right) - \theta \right]^{2} \ge \frac{M^{2}\left[\theta\Psi\left(X^{(n)};\theta \right) \right]}{M\left[\Psi^{2}\left(X^{(n)};\theta \right) \right]}. \qquad (3.1.7)$$

Энди баъзи машҳур қуйи чегараларни хусусий ҳол сифатида келтириб чиқарамиз.

I. Крамер-Рао қуйи чегараси учун

$$\Psi\left(x^{(n)};\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{\partial \ln f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta}, & \theta\in\Theta^*,\\ 0, & \theta\notin\Theta^*,\end{cases}$$

деб танлаймиз. Бу ерда $\Theta^*=\left\{\theta\in\Theta: f\left(x;\theta\right)>0,\ \forall x\in\mathscr{X}\right\}\subseteq\Theta$. Қулайлик учун $\Theta^*=\Theta=\left(-\infty,\infty\right)$ деб оламиз. Қуйидаги қўшимча регулярлик шартларини киритамиз:

(У1) Деярли барча $x^{(n)}\in\mathscr{X}$ лар учун $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)$ функция θ бўйича абсолют узлуксиз;

(У2) Деярли барча $x^{(n)}\in\mathscr{X}$ лар учун $\lim\limits_{\theta\to\pm\infty}\theta f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=0$;

(У3) $0<I_n=M\left\{\left[\dfrac{\partial \ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta}\right]^2\right\}<\infty$;

Бу шартлар ўринли бўлганида (3.1.7) га асосан

$$M\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^2\geq I_n^{-1}. \tag{3.1.8}$$

(3.1.8) тенгсизлик Крамер-Рао тенгсизлигининг Байесга оид вариантидир.

II. Баттачария тенгсизлигини олиш учун

$$\Psi\left(x^{(n)};\theta\right)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\dfrac{1}{f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}\cdot\dfrac{\partial^i f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta^i}, & \theta\in\Theta^*,\\ 0, & \theta\notin\Theta^*,\end{cases}$$

деб танлаймиз. Бу ерда a_i лар ихтиёрий сонлар ва $\Theta^*=\left(-\infty,\infty\right)$. У ҳолда (3.1.7) га асосан

$$M\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^2 \geq \frac{a_1^2}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j \Lambda_{ij}} = \frac{\left(\vec{a}^T\vec{e}_1\right)^2}{\vec{a}^T \Lambda \vec{a}}, \qquad (3.1.9)$$

бу ерда $\vec{e}_1=(1,0...0)^T$, $\vec{a}=(a_1,...,a_N)^T$ ва $\Lambda=\left(\Lambda_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,k}}$ - матрица элементлари

$$\Lambda_{ij}=M\left\{\frac{1}{f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}\cdot\frac{\partial^i f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta^i}\cdot\frac{\partial^j f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta^j}\right\}.$$

(3.1.9) тенгсизлик ўринли бўлиши учун қўшимча қуйидаги шартлар талаб қилинади:

(У4) $\dfrac{\partial^i f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta^i}$, $i=\overline{1,N-1}$, ҳосилалар деярли барча $x^{(n)}\in\mathscr{X}$ лар учун θ бўйича абсолют узлуксиз бўлсин;

(У5) Деярли барча $x^{(n)}\in\mathscr{X}$ лар учун

$$\lim_{\theta\to\pm\infty}\theta\frac{\partial^i f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta^i}=0,\quad i=1,...,N-1;$$

(У6) Матрица Λ мусбат аниқланган;

(3.1.9) тенгсизлик Баттачария тенгсизлигининг Байесга оид вариантидир. Ундан $N=1$ бўлганида (3.1.8) тенгсизлик келиб чиқади.

III. Бобровский-Закаи тенгсизлигини олиш учун

$$\Psi\left(x^{(n)};\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{f_n\left(x^{(n)};\theta+h\right)-f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{h\, f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}, & \theta\in\Theta^*,\\ 0, & \theta\notin\Theta^*,\end{cases}$$

деб танлаймиз. У ҳолда (3.1.7) га асосан

$$M\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^2 \geq \left\{M\left[\Psi\left(X^{(n)};\theta\right)\right]^2\right\}^{-1} \qquad (3.1.10)$$

тенгсизликка эга бўламиз. (3.1.10) тенгсизлик ўринли бўлиши учун қуйидаги регулярлик шартлари талаб қилинади:

(У7) $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=0$ эканидан деярли барча $\theta\in\Theta^*$ лар учун $f_n\left(x^{(n)};\theta+h\right)=0$ экани келиб чиқсин;

(У8) $0<M\left\{\Psi^2\left(X^{(n)};\theta\right)\right\}<\infty$;

(У9) $M\,\theta^2<\infty$.

(3.1.10) дан $h\to 0$ да лимитга ўтсак, (3.1.8) га эга бўламиз.

IV. Вайс-Вайнштейн тенгсизлигини олиш учун

$$\Psi\left(x^{(n)};\theta\right)=\begin{cases} L_n^s\left(x^{(n)};\theta+h,\theta\right)-L_n^{1-s}\left(x^{(n)};\theta-h,\theta\right), & \theta\in\Theta^*, \\ 0, & \theta\notin\Theta^*, \end{cases}$$

бу ерда $0<s<1$ ва $L_n\left(x^{(n)};\theta+h,\theta\right)=\dfrac{f_n\left(x^{(n)};\theta+h\right)}{f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}$. Текшириб кўриш осонки, бундай танланган Ψ функция (3.1.1) тенгликни қанноатлантиради. У ҳолда (3.1.7) га асосан

$$M\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^2 \geq \frac{h^2 M^2\left[L^s\left(X^{(n)};\theta+h,\theta\right)\right]}{M\left\{\left[L^s\left(X^{(n)};\theta+h,\theta\right)-L^{1-s}\left(X^{(n)};\theta-h,\theta\right)\right]^2\right\}}. \qquad (3.1.11)$$

(3.1.11) тенгсизлик ўринли бўлиши учун қуйидаги шартлар зарурдир:

$$0 < M\left[\Psi^2\left(X^{(n)};\theta\right)\right] < \infty,$$

$$M\left[\theta^2\right] < \infty.$$

(3.1.11) тенгсизликдан (3.1.8) ни $h \to 0$ да ва (3.1.10) ни эса $s \to 1-0$ лимитлар сифатида олиш мумкин. (3.1.11) тенгсизликни қуйидаги кўринишда ҳам ифодалаш мумкин:

$$M\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^2 \geq \frac{h^2 \cdot e^{2\mu(s,h)}}{e^{\mu(2s,h)} + e^{\mu(2-2s,-h)} - 2e^{\mu(s,2h)}}, \tag{3.1.12}$$

бу ерда

$$\mu(s,h) = \ln\left[M\left\{L^s\left(X^{(n)};\theta+h,\theta\right)\right\}\right] =$$

$$= \ln\left[\int_{\mathcal{X}} d\mu\left(x^{(n)}\right)\int_{\Theta} f_n^s\left(x^{(n)};\theta+h\right) f_n^{1-s}\left(x^{(n)};\theta\right)d\theta\right]. \tag{3.1.13}$$

Демак, (3.1.12) тенгсизликни ҳисоблаш учун $\mu(x;h)$ ни ҳисоблаш етарли экан. Агар $s=\frac{1}{2}$ деб танлаб, $\mu(0,h)=0$ ва $\mu(1,h)\leq 0$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда (3.1.12) га асосан

$$M\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^2 \geq \frac{h^2 e^{2\mu\left(\frac{1}{2},\, h\right)}}{2\left(1-e^{\mu\left(\frac{1}{2},\, 2h\right)}\right)}. \tag{3.1.14}$$

3.2-§. Кўп ўлчовлик параметр бўлган ҳол учун қуйи чегаралар синфи

Ушбу параграфда $\left(\mathscr{X},\mathscr{B},\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}\right)$ параметрик статистик моделни аниқловчи номаълум параметр $\theta=\left(\theta_1,...,\theta_s\right)\in\Theta\subseteq R^s$ кўп ўлчовлик ва $\mathscr{X}\times\Theta$ ўлчовлик $\left\{\Psi_i\left(x^{(n)};\theta\right),\ i=1,...,s\right\}$ функцияларга деярли барча $x^{(n)}\in\mathscr{X}$ лар учун қуйидаги интеграллар мавжуд ва мос тенгликларни қаноатлантирсин:

$$\int_\Theta \Psi_i\left(x^{(n)};\theta\right) f_n\left(x^{(n)};\theta\right)d\theta=0,\quad i=1,...,s. \tag{3.2.1}$$

Фараз қилайлик, a_i ва b_i лар ихтиёрий сонлар бўлсин. У ҳолда (3.1.2) тенгсизликка $k=2$ бўлган ҳолда қуйидаги

$$\Psi\left(x^{(n)};\theta\right)=\sum_{i=1}^{s}a_i\Psi_i\left(x^{(n)};\theta\right),$$

$$g\left(\theta\right)=\sum_{i=1}^{s}b_i\cdot\theta_i\,,$$

ва

$$T\left(x^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{s}b_i\cdot T_i\left(x^{(n)}\right)$$

- функцияларни қўйамиз. Натижада қуйидаги тенгсизликка эга бўламиз:

$$\vec{b}^{\,T} M\left\{\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^T\right\}\vec{b}\geq\frac{\left(\vec{b}^{\,T}V\,\vec{a}\right)^2}{\vec{a}^{\,T}\cdot\Pi\cdot\vec{a}}, \tag{3.2.2}$$

бу ерда $\vec{a}=\left(a_1,...,a_s\right)^T$, $\vec{b}=\left(b_1,...,b_s\right)^T$, $\theta=\left(\theta_1,...,\theta_s\right)^T$, $T\left(X^{(n)}\right)=$ $\left(T_1\left(X^{(n)}\right),...,T_s\left(X^{(n)}\right)\right)^T$, ҳамда $V=\left(V_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,s}}$ ва $\Pi=\left(\Pi_{ij}\right)$ матрицалар элементлари мос равишда

$$V_{ij}=M\left[\theta_i\Psi_i\left(X^{(n)};\theta\right)\right],\quad i,j=1,...,s \tag{3.2.3}$$

ва

$$\Pi_{ij}=M\left[\Psi_i\left(X^{(n)};\theta\right)\Psi_j\left(X^{(n)};\theta\right)\right],\ i,j=1,...,s\,. \tag{3.2.4}$$

Фараз қиламиз, матрица Π мусбат аниқланган бўлиб, Π^{-1} унга тескари матрица бўлсин. (3.2.2) даги $\bar{a}$ вектор ихтиёрий бўлганлиги учун, уни $\vec{a}=\Pi^{-1}\cdot V^T\cdot\vec{b}$ деб танласак, у ҳолда Коши – Шварц тенгсизлигига асосан

$$\vec{b}^T M\left\{\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^T\right\}\vec{b}\ge\vec{b}^T V\,\Pi^{-1}V^T\vec{b}. \tag{3.2.5}$$

(3.2.5) тенгсизлик ихтиёрий $\vec{b}$ вектори учун бажарилгани сабабли, уни қуйидагидек ҳам ёза оламиз:

$$M\left\{\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^T\right\}\ge V\,\Pi^{-1}V^T\,. \tag{3.2.6}$$

(3.2.6) даги матрицалар ўртасидаги тенгсизликни чап томондаги матрицадан ўнг томондагисини айирмасидан тузилган матрица номанфий аниқланган матрицадан иборат деб тушунилади.

(3.1.9) тенгсизлик билан берилган Крамер-Рао тенгсизлигининг Байес вариантининг кўп ўлчовлик параметр учун аналогини ёзиш учун (3.2.6) да

$$\Psi_i\left(x^{(n)};\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{\partial \ln f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta_i},\ \theta\in\Theta^*,\\ \qquad\qquad 0,\ \theta\notin\Theta^*,\end{cases} \tag{3.2.7}$$

деб танлаймиз. Бу ерда 3.2-§ дагидек,

$$\Theta^*=\left\{\theta\in\Theta:\ f_n\left(x^{(n)};\theta\right)>0,\quad \forall x^{(n)}\in\mathscr{X}\right\}.$$

Қулайлик учун, $\Theta^*=\Theta=R^s$ ва барча $\theta\in R^s$ лар учун $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)>0$ деймиз. Қуйидаги $I_n=\left(I_{ij}^{(n)}\right)_{i,j=\overline{1.s}}$ матрица элементлари

$$I_{ij}^{(n)}=M\left[\frac{\partial \ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial \ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta_j}\right]$$

бўлиб, қуйидаги кўшимча регулярлик шартларини бажарилишини талаб этамиз:

(У1) $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)$ функция $\theta_i,\ i=\overline{1,s}$ ларга нисбатан деярли барча $x^{(n)}\in\mathscr{X}$ лар учун абсолют узлуксиз бўлсин;

(У2) Деярли барча $x^{(n)}\in\mathscr{X}$ лар учун

$$\lim_{\theta_i\to\pm\infty}\theta_i f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=0,\quad i=1,\ldots,s;$$

(У3) I_n матрица сингуляр бўлмасин;

Энди (3.2.7) ни (3.2.6) га қўйсак

$$M\left\{\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^{T}\right\}\geq I_n^{-1}, \tag{3.2.8}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Мана шу каби Баттачария, Бобровский – Закаи тенгсизликларининг ҳам кўп ўлчовлик параметр учун аналогларини ёзишимиз мумкин.

Биз уларнинг ҳам умумлашмаси бўлган (3.1.11) Вайс-Вайнштейн тенгсизлигининг кўп ўлчовлик аналогини ёзамиз. Бунинг учун (3.2.6) да

$$\Psi_i\left(x^{(n)};\theta\right)=L^{s_i}\left(x^{(n)};\theta+h_i,\theta\right)-L^{1-s_i}\left(x^{(n)};\theta-h_i,\theta\right),\ i=1,...,s,$$

деб танлаймиз. Бу ерда

$$L\left(x^{(n)};\theta+h,\theta\right)=\frac{f_n\left(x^{(n)};\theta+h\right)}{f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}.$$

Натижада қуйидаги тенгсизликка эга бўламиз:

$$M\left\{\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]\left[T\left(X^{(n)}\right)-\theta\right]^{T}\right\}\geq HG^{-1}H^{T}. \tag{3.2.9}$$

бу ерда матрицалар

$$H=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} & \dots & h_{s1}\\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{s2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ h_{1s} & h_{2s} & \dots & h_{ss}\end{pmatrix}=\left[h_1,h_2,...,h_s\right],$$

ва $G=\left(G_{ij}\right)_{i,j=\overline{1.s}}$ нинг элементлари

$$G_{ij}=\frac{M\ \left\{\left[L^{s_i}\left(x^{(n)};\theta+h_i,\theta\right)-L^{1-s_i}\left(x^{(n)};\theta-h_i,\theta\right)\right]\cdot\right.}{\left\{L^{s_i}\left(x^{(n)};\theta+h_i,\theta\right)\right\}\cdot}$$

$$\frac{\cdot\left[L^{s_j}\left(x^{(n)};\theta+h_j,\theta\right)-L^{1-s_j}\left(x^{(n)};\theta-h_j,\theta\right)\right]}{\cdot M\ \left\{L^{s_j}\left(x^{(n)};\theta+h_j,\theta\right)\right\}}.$$

(3.2.8) тенгсизлик h_i ва $0<s_i<1$ ларнинг ихтиёрий комбинациялари учун бажарилганлиги учун G матрицанинг тескариси мавжуддир. Агар (3.2.9) тенгсизликда $H=h\cdot\neg$ деб танласак, бу ерда $\neg$ – бирлик матрица, у ҳолда $h\to 0$ да (3.2.9) дан (3.2.8) келиб чиқади.

ХУЛОСА

Мазкур магистрлик диссертацияси параметрик статистик моделлардаги номаълум параметрларни тўлиқ ва цензурланган танланмалар бўйича баҳолаш масалаларига бағишлангандир. Унда статистик баҳоларнинг моделларда ноаниқлик шартларида оптимал баҳолаш масалалари кўриб ўтилгандир. Бунда ноаниқлик шартларида асосан Байес типидаги баҳолаш масалалари таркибий қисмлари, ҳамда баҳолар эффективлигини аниқловчи қуйи чегаралар синфлари кўриб ўтилгандир. Диссертацияда математик статистикада Байесга оид ёндашув моҳияти ҳамда унда номаълум параметр ҳақидаги Шеннон, Кульбак-Лейблер ва Фишер информация функциялари, уларнинг хоссалари келтирилгандир. Дисертациянинг асосий натижалари унинг 2-ва 3-бобларида келтирилгандир.

2-бобдаги асосий натижалардан бири кўрсаткичли тақсимот номаълум параметрини ўнг томондан тасодифий цензурланиш моделида Байес баҳоси қурилиб, унинг асимптотик хоссалари ўрганилди (2.2.1-ва 2.2.2-теоремалар). Диссертациянинг 3-бобида параметрик статистик моделларда ноаниқлик шартларида баҳолар эффективлигини аниқлаш учун Крамер-Рао, Баттачария, Бобровский-Закаи ва Вайс-Вайнштейн қуйи чегараларининг Байесга оид умумлашган вариантлари келтирилган.

Ушбу магистрлик диссертациясидан дарс бериш жараёнида ҳам қўлланма сифатида фойдаланиш мумкин.

АДАБИЁТЛАР

1. **Абдушукуров А.А.** Статистика неполных наблюдений: асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей.-Ташкент: Университет. 2009. -269 с.
2. **Абдушукуров А.А., Ким Л.В.** Нижние границы Крамера-Рао и Баттачария при случайном цензурировании наблюдений. // Сб. “Вероятностные распределения и математическая статистика”-Ташкент: ФАН, 1986, с.20-40.
3. **Закс Ш.**Теория статистических выводов.-Москва: Мир. 1975.-776 с.
4. **Козлов М.В., Прохоров А.В.** Введение в математическую статистику.-Москва: МГУ. 1987.-263 с.
5. **Bhattachariya A.** On the analoques of the amount of information and their use in statistical estimation.// Sankhya: Indian J.Statist. 1946. v.8. pt.1. p. 1-32.
6. **Bobrosky B., Zakai M.** A lower bound on the estimation of error for certain diffusion processes. // IEEE Trans. Inform. Theory. 1976. Vol. IT-22, N.1. p. 45-52.
7. **Prakasa Rao B.L.S.** On the Cramer-Rao type integral inequalities. // Calcutta Statist. Assoc. Bull. 1996. v.40. p. 183-205.
8. **Prakasa Rao B.L.S.** Cramer-Rao type integral inequalities for functions of multidimensional parameter. // Sankhya. 1992. Ser.A. v. 54. p. 53-73.
9. **Prakasa Rao B.L.S.** Remarks on Cramer-Rao type integral inequalities for randomly censored data. // In: Analysis of Censored Data. IMS Lecture. Notes-Monograph Series. 1995. v. 13.p. 163-175.
10. **Targhetta M.I**. On the attaintment of a lower bound for the Bayes risk in estimating a parametric function. // Statistics. 1988. v. 19., N.2. p. 233-239.
11. **Weinstein E., Weiss A.J.** Lower bounds on the mean square estimation error. // Procc. IEEE. 1985. Vol. 73., N. 9. p. 1433-1434.

12. **Weiss A.J., Weinstein E.** A lower bound on the mean square estimation error in random parameter estimation. // IEEE Trans. Inform. Theory. 1985. Vol. IT-31, N. 5. p. 680-682.
13. **Weinstein E., Weiss A.J.** A general class of lower bound in parameter estimation. // IEEE Trans. Inform. Theory. 1988. Vol. 34, N.2. p. 338-342.]
14. **Вассиев Э.** Эмпирическое байесовское оценивание параметра показательного распределения по неполным данным. // Материалы республкианской научно-практической конференции. “СТАТИСТИКА и её применения”. Ташкент. Университет. 2013. С. 68.
15.