

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI**

qo'lyozma huquqida

УДК 517.55

Pirmetov Sanjar Idrisovich

A-garmonik funksiyalar uchun o'rta qiymat haqidagi teorema

5A130101-Matematik analiz

Magistr

akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar

Dots. N.M.Jabborov

Toshkent-2014

Mundarija

Kirish	3
1. Asosiy tushuncha va ma'lumotlar	4
1.1. Nomalangan fazo.....	4
1.2. Kompleks Evklid fazolari.....	4
1.3. Chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi.....	6
1.4. Teskari operatorlar.....	13
1.5. Chiziqli operatorning spektri va rezolventasi.....	17
2. Golomorf funksiyaning xossalari	
2.1. Koshi teoremasi.....	21
2.2. Koshining integral formulasi.....	25
2.3. Dirixle masalasi.....	27
2.4. Garmonik funksiya uchun o'rta qiymat haqidagi teorema.....	31
3. A –garmonik funksiyalarni xossalari	
3.1. A- garmonik funksiyalar.....	34
3.2. A- garmonik funksiyalarga misollar.....	36
3.3. A- garmonik funksiyalar uchun Dirixle masalasi.....	38
3.4. A- garmonik funksiya uchun o'rta qiymat haqidagi teorema va unga teskari bo'lgan teorema.....	41
Xulosa	45
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati	47

Kirish

Ma'lumki, A -garmonik funksiyalarni Бухгейм А.Л, Арбузов Э.В tomonidan ko'plab xossalari shu jumladan Radon masalasini kompleks interpretatsiyasi, elleptik sistemalar uchun Koshi masalasi o'rganilgan bo'lsa, uning strukturaviy nazariyasi o'zbekistonlik olimlar tomonidan o'rganilgan.

Mazkur dissertatsiya A -garmonik funksiya uchun o'rta qiymat haqidagi teorema bag'ishlanadi.

Mazkur dissertatsiya uch bo'limdan iborat bo'lib, birinchi bo'limda asosiy tshuncha va ta'riflar keltirilgan. Ikkinchi bo'limda golomorf funksiyaning xossalari o'rganilgan. Uchinchi bo'limda A -garmonik funksiya uchun o'rta qiymat haqidagi teoremani teskarisi ham o'rinliligi ko'rilgan.

A -garmonik funksiyalar kompleks analizning masalalari uchun ahamiyatga ega bo'ishi bilan birgalikda, nazariy mexanikda, seysmik xisob usullarini bilishda, dinamika masalarlarida qo'llaniladi. Dissertatsiyada asosan kompleks analizdagi garmonik funksiya uchun o'rta qiymat haqidagi teoremani A -anologi ko'rilgan va natija sifatida teoremani A -anolgini teskarisi ham o'rinli ekanligi keltirilgan.

1-bob Asosiy tushuncha va ma'lumotlar

1.1 Normalangan fazo

K maydon ustida X chiziqli fazoning har bir elementiga nomanfiy $\|x\|$ haqiqiy soni mos qo'yilgan bo'lib, bu moslik quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in K, x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in X$

U holda X fazoni *normalangan fazo* deb ataymiz. $\|x\|$ soni x elementning *normasi* deb ataladi.

Agar $\rho(x, y)$ bilan $\|x - y\|$ sonini belgilasak, u holda $\rho(x, y)$ metrika bo'ladi. Demak ixtiyoriy normalangan fazo metrik fazo bo'ladi. Shuning uchun metrik fazolarda kiritilgan tushunchalarga normalangan fazoda ham ta'rif berishga bo'ladi.

Ta'rif 1.1.[4] Biror $x \in X$ va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ larda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in X$ elementga yaqinlashadi deyiladi.

Ta'rif 1.2.[4] Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ va $p \in N$ larda $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ - fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Ta'rif 1.3.[4] Agar X chiziqli normalangan fazodagi ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la normalangan fazo yoki Banax fazosi deyiladi.

1.2 Kompleks Evklid fazolari

Haqiqiy Evklid fazolari bilan bir qatorda kompleks Evklid fazolari ham qaraladi(ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan kompleks chiziqli fazo). Lekin haqiqiy Evklid fazolaridagi skalyar ko'paytmaning aksiomalarikompleks Evklid fazolari uchun bir vaqtda bajarilmaydi. Haqiqiy Evklid fazolarida skalyar ko'paytmaning aksiomolari quyidagicha edi:

- 1) $(x, x) \geq 0, \forall x \in E; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- 2) $(x, y) = (y, x), \forall x, y \in E$
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \forall \lambda \in R, \forall x, y \in E$
- 4) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \forall x_1, x_2, y \in E.$

Biz 2 va 3 dan quyidagiga ega bo'lamiz

$$(\lambda x, \lambda x) = \lambda(x, \lambda x) = \lambda(\lambda x, x) = \lambda^2(x, x).$$

Agar $\lambda \in C$ bo'lsa, u holda $\lambda = i$ bo'lganda, $(ix, ix) = -(x, x)$, ya'ni x va ix vektorlarning skalyar ko'paytmasi bir vaqtda musbat bo'la olmaydi, bu esa 1-shartga zid, ya'ni kompleks chiziqli fazolar holida 1,2 va 3-shartlar bir vaqtda bajarilishi mumkin emas. Demak, kompleks chiziqli fazolarda skalyar ko'paytmaning shartlarini biroz o'zgartirish kerak.

Kompleks chiziqli fazolarda skalyar ko'paytmaning shartlarini keltiramiz:

1. $(x, x) \geq 0, \forall x \in E; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}, \forall x, y \in E$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \forall \lambda \in C, \forall x, y \in E$
4. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \forall x_1, x_2, y \in E.$

2 va 3 dan $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$ kelib chiqadi. Haqiqatan ham

$$(x, \lambda y) = (\lambda y, x) = \overline{\lambda(y, x)} = \overline{\lambda} \overline{(y, x)} = \overline{\lambda} (x, y).$$

Kompleks Evklid fazolarida ham elementning normasi xuddi haqiqiy Evklid fazolari holidagidek

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \text{ yoki } \|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu fazoda ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi kiritilmaydi, lekin vektorlarning ortogonallik tushunchasi saqlanib qoladi. Ya'ni, agar $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda x va y vektorlar o'zaro ortogonal deyiladi.

Ta'rif 1.4.[4] Agar $(\phi_n, \phi_m) = \begin{cases} 1, \text{ agar } n = m \\ 0, \text{ agar } n \neq m. \end{cases}$ bo'lsa, nolmas $\{\phi_n\} \subset E$ sistema

ortogonal sistema deyiladi.

Xuddi haqiqiy Evklid fazolaridagi kabi, $c_n = (f, \phi_n), n \in N$ sonlar $f \in E$ vektorning $\{\phi_n\}$ orthogonal sistemadagi Fur'e koeffitsiyentlari deyiladi.

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$ qator f vektorning $\{\phi_n\}$ sistemadagi Fur'e qatori deyiladi. Bu yerda ham

Bessel tengsizligi o'rinli: $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2$.

Ta'rif 1.5.[4] Cheksiz o'lchamli to'la kompleks Evklid fazosi kompleks Hilbert fazosi deyiladi.

1.3 Chiziqli uzluksiz operatorlar

Agar X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.6.[4] X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi $Ax = y$ akslantirish operator deyiladi.

$D(A) = \{x \in X : Ax \text{ mavjud va } Ax \in Y\}$ ga A operatorning aniqlanish soxasi deyiladi.

Ta’rif 1.7.[4] Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ sonlar uchun $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ tenglik o’rinli bo’lsa, A operatorga chiziqli deyiladi.

Ta’rif 1.8.[4] Bizga $A: X \rightarrow Y$ operator va $x_0 \in D(A)$ nuqta berilgan bo’lsin. Agar $y_0 = Ax_0 \in Y$ ning ixtiyoriy V atrofi uchun, x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo’lib, ixtiyoriy $x \in U \cap D(A)$ lar uchun $Ax \in V$ bo’lsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta’rif 1.9.[4] Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo’lib, $\|x - x_0\| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(A)$ lar uchun $\|A(x) - A(x_0)\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta’rif 1.10.[4] Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $\|Ax_n - Ax_0\| \rightarrow 0$ bo’lsa, u holda A operator x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta’rif 1.11.[4] $Ax = \theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ lar to’plami A operatorning yadrosi deyiladi va u $Ker A$ deb belgilanadi.

Ta’rif 1.12.[4] Biror $x \in D(A)$ uchun $y = Ax$ bajariladigan $y \in Y$ lar to’plami A operatorning qiymatlar sohasi yoki tasviri deyiladi va $Im A$ yoki $R(A)$ bilan belgilanadi.

$$Ker A = \{x \in D(A) : Ax = \theta\},$$

$$R(A) = Im A = \{y \in Y : \text{biror } x \in D(A) \text{ uchun } y = Ax\}.$$

Ta’rif 1.13.[4] X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo’lsin. Agar A ning aniqlanish sohasi $D(A) = X$ bo’lib, har qanday chegaralangan to’plamni yana chegaralangan to’plamga akslantirsa, A ga chegaralangan operator deyiladi.

Ta’rif 1.14.[4] $A: X \rightarrow Y$ chiziqli operator bo’lsin. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo’lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$ tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi.

Ta’rif 1.15.[4] $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to’plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi va u $\|A\|$ bilan belgilanadi, ya’ni $\|A\| = \inf C$.

Bu ta’rifdan ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ tengsizlik o’rinli ekanligini kelib chiqadi.

Misollar.

1. $C[-1,1]$ fazoda x ga ko’paytirish operatorini, ya’ni

$$B: C[-1,1] \rightarrow C[-1,1], \quad (Bf)(x) = xf(x) \quad (1)$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanini ko’rsatib, normasini toping.

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriliadi. Uzluksiz funksiyalarning ko’paytmasi uzluksiz ekanligidan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B) = C[-1,1]$ ekanligi kelib chiqadi. Endi B operatorni chegaralangan ekanligini ko’rsatamiz.

$$\|Bf\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |xf(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |x| \cdot \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = 1 \cdot \|f\|.$$

Bundan B operatorning chegaralanganligi va $\|B\| \leq 1$ kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, agar $f_0(x) = 1$ desak u holda

$$(Bf_0)(x) = x, \quad \|Bf_0\| = 1, \quad \|B\| \geq \frac{\|Bf_0\|}{\|f_0\|} = 1$$

ni olamiz. Yuqoridagilardan $\|B\| = 1$ keli chiqadi.

2. Endi ℓ_2 fazoda ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$A: \ell_2 \rightarrow \ell_2, \quad (Ax)_n = a_n x_n, \quad \sup_{n \geq 1} |a_n| = a < \infty \quad (2)$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini toping.

Yechish. Ixtiyoriy $x \in \ell_2$ uchun $Ax \in \ell_2$ ekanligini ko'rsatamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Ax)_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^2 \leq \sup_{n \geq 1} |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = a^2 \|x\|^2. \quad (3)$$

Bu munosabatlardan $D(A) = \ell_2$ ekanini olamiz. Endi uni chiziqli ekanligini ko'rsatamiz. Aoperatorni aniqlanishiga ko'ra

$$(A(\alpha x + \beta y))_n = a_n (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a_n x_n + \beta a_n y_n = \alpha (Ax)_n + \beta (Ay)_n.$$

Demak, A chiziqli operator ekan. Uning chegaralangan ekanligi (3) tengsizlikdan kelib chiqadi. Bundan tashqari (3) tengsizlikdan $\|A\| \leq a$ ekanligi ham kelib chiqadi. Aoperatorning normasi $\|A\| = a$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun ℓ_2 fazoda $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemani olamiz. Aoperatorning aniqlanishiga ko'ra, $\forall n \in N$ uchun $Ae_n = a_n e_n$ tenglik o'rinli. $\|A\| \geq \|Ae_n\| = \|a_n e_n\| = |a_n| \cdot \|e_n\| = |a_n|$ munosabaydan kelib chiqadi. Bu tengsizlik $\forall n \in N$ da o'rinli bo'lgani uchun $\|A\| \geq \sup_{n \geq 1} |a_n| = a$ ni olamiz. Demak, $\|A\| = a$ tenglik isbotlandi.

Ta'rif 1.16.[4] Agar $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ operatorlar ketma-ketligi uchun shunday $A \in L(X, Y)$ operator mavjud bo'lib, $\|A_n - A\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ bo'lsa, $\{A_n\}$

operatorlar ketma-ketligi A operatorga norma bo'yicha yoki tekis yaqinlashadi deyiladi va $A_n \xrightarrow{u} A$ shaklda belgilanadi.

Ta'rif 1.17.[4] Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli yoki nuqtali yaqinlashadi deyiladi va $A_n \xrightarrow{s} A$ shaklda belgilanadi.

Ta'rif 1.18.[4] Agar ixtiyoriy $f \in Y^*$ va ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(A_n x) \rightarrow f(Ax)$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchsiz yoki kuchsiz ma'noda yaqinlashadi deyiladi.

Ta'rif 1.19.[4] Agar ixtiyoriy $x, y \in H$ uchun $(A_n x, y) \rightarrow (Ax, y)$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchsiz yaqinlashuvchi deyiladi.

Misollar.

$$1. A_n : l_2 \rightarrow l_2, \quad A_n x = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, x_1, x_2, x_3, \dots \right) \text{ operatorlar ketma-ketligining}$$

kuchli va kuchsiz ma'noda nol operatorga yaqinlashishini tekshiring.

Yechimi. l_2 Hilbert fazosi bo'lganligi uchun $A_n : l_2 \rightarrow l_2$ operatorlar ketma-ketligining kuchsiz ma'noda nol operatorga yaqinlashishini 4-ta'rifdan foydalanib tekshiramiz. Ixtiyoriy $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_2$ uchun

$$\left| (A_n x, y) - (0x, y) \right|^2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{n+k} \right|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2 \quad (1)$$

Munosabat o'rinli. $y \in l_2$ bo'lganligi uchun $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty$. Shunday ekan

yaqinlashuvchi qatorning qoldig'i $\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2 \rightarrow 0$ da nolga intiladi. Demak,

$\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operator Θ ga kuchsiz ma'noda yaqinlashmaydi, chunki $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x - \Theta x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x\| = \|x\| \neq 0$.

2. Quyida berilgan $P_n, Q_n \in L(l_2)$ operatorlar ketma-ketligining kuchli va tekis ma'noda birlik va nol operatorlarga yaqinlashishini tekshiring.

$$\begin{aligned} P_n : l_2 &\rightarrow l_2, & P_n x &= (x_1, x_2, x_n, 0, \dots, 0, \dots) \\ Q_n &= I - P_n, & Q_n x &= (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots) \end{aligned}$$

Yechish. Ixtiyoriy $x \in l_2$ uchun $\|Q_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n+k}|^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Chunki $x \in l_2$, ya'ni

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty. \text{ Shunday ekan, oxirgi qatorning qoldig'i } \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n+k}|^2 \rightarrow 0 \text{ } n \rightarrow \infty$$

da nolga intiladi. Demak $\{Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchli ma'noda yaqinlashar ekan. Bundan $\{P_n = I - Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligining birlik operator I ga kuchli ma'noda yaqinlashishi kelib chiqadi. Endi $\{Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis ma'noda yaqinlashadimi yoki

$$\text{yo'qmi, shuni tekshiramiz. } \|Q_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n+k}|^2 \leq \|x\|^2. \text{ Bundan } \|Q\| \leq 1 \quad (2)$$

ekanligini olamiz. Ikkinchi tomondan, $Q_n e_{n+1} = e_{n+1}$. Bundan $\|Q_n\| \geq \|Q_n e_{n+1}\| = 1$. (3) (2) va (3) dan ixtiyoriy $n \in N$ uchun $\|Q\| = 1$ ga kelamiz. Demak, Q_n operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis (norma bo'yicha) yaqinlashmaydi. Bu yerdan $\{P_n\}$ operatorlar ketma-ketligi birlik operator I ga tekis yaqinlashmasligi kelib chiqadi.

3. $L_2[-1/2, 1/2]$ Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$(A_n f) = x^n f(x)$ formula bilan aniqlanuvchi A_n operatorlar ketma-ketligining nol operatorga tekis yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Ixtiyoriy $f \in L_2[-1/2, 1/2]$ uchun

$$\|A_n f\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |x^n f(x)|^2 dt \leq \max_{-1/2 \leq x \leq 1/2} |x^{2n}| \int_{-1/2}^{1/2} |f(x)|^2 dt \leq \frac{1}{2^{2n}} \cdot \|f\|^2 \quad (4)$$

Bundan $\|A_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ tengsizlikni olamiz. Agar $0 \leq \|A_n\|$ ekanligini hisobga olib, $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - \Theta\| = 0$. Shunday ekan, A_n operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis yaqinlashadi.

Yuqorida kuchsiz yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligi kuchli ma'noda yaqinlashmasligiga (1-misol) va kuchli ma'noda yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligi norma bo'yicha yaqinlashmasligiga (2-misol) misol keltirildi.

Lemma 1.1.[4] Agar $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ operatorlar ketma-ketligi biror $A \in L(X, Y)$ operatorga tekis yaqinlashsa, u holda $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga ham kuchli ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Lemma shartiga ko'ra $\|A_n - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \cdot \|x\|$. sonli tengsizlikga ega bo'lamiz. $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x - Ax\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| \cdot \|x\| = 0$. Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli ma'noda ham yaqinlashar ekan.

Teorema 1.1.[4] Agar Y fazo to'la bo'lsa, u holda $L(X, Y)$ fazo ham to'la, ya'ni Banax fazosi bo'ladi.

Isbot. $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo'lsin, ya'ni $n, m \rightarrow \infty$ da $\|A_n - A_m\| \rightarrow 0$. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Shuning uchun $\forall x \in X$ da $\{A_n x\} \subset Y$ ketma-ketlik fundamentaldir. Y to'la fazo bo'lgani uchun $\{A_n x\}$ ketma-ketlik biror $y \in Y$ elementga yaqinlashadi. Demak, har bir $x \in X$ ga $\{A_n x\}$ ketma-ketlikni limiti bo'lgan yagona $y \in Y$ element mos qo'yilyapti. Bu moslikni $A: X \rightarrow Y$ orqali belgilaymiz: $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = y$. Endi $A \in L(X, Y)$ ekanligini ko'rsatamiz. Chiziqliligi:

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2) = \\ &= \alpha_1 \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_1 + \alpha_2 \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2. \end{aligned}$$

Endi A ning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Shartga ko'ra, $\|A_n - A_m\| \rightarrow 0$, $n, m \rightarrow \infty$. Demak, $\|A_n\| - \|A_m\| \leq \|A_n - A_m\| \rightarrow 0$, $n, m \rightarrow \infty$. Bundan $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlikning fundamentalligi kelib chiqadi. Haqiqiy sonlar fazosi R to'la bo'lgani uchun, $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir, yaqinlashuvchi ketma-ketlik esa chegaralangan bo'ladi. Ya'ni shunday $K > 0$ son mavjudki, $\forall n \in N$ uchun $\|A_n\| \leq K$ tengsizlik bajariladi. Norma ta'rifidan $\|A_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \|x\| \leq K \cdot \|x\|$. Bundan esa $\|Ax\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq K \cdot \|x\|$. Endi $\{A_n\}$ ketma-ketlikni chiziqli operatorlar fazosi $L(X, Y)$ da A ga yaqinlashishini ko'rsatamiz. $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists n_0$ son mavjudki, barcha $n > n_0, p \in N$ va $\|x\| \leq 1$ lar uchun $\|A_{n+p} x - A_n x\| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Agar so'nggi tengsizliklardan $p \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak va normaning uzluksizligidan foydalansak, ixtiyoriy $n > n_0$ va $\|x\| \leq 1$ lar uchun $\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Shuning uchun $\forall n > n_0$ da $\|A - A_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$. Demak, $L(X, Y)$ fazodagi norma ma'nosida $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Shunday qilib, $L(X, Y)$ fazo to'la fazo ekan.

1.4 Teskari operatorlar

Bizga $A: X \rightarrow Y$ operator berilgan bo'lsin. $D(A)$ –uning aniqlanish sohasi, $\text{Im } A$ esa uning qiymatlar sohasi bo'lsin.

Ta'rif 1.20.[4] Agar ixtiyoriy $y \in \text{Im } A$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'lsa, u holda A teskarilανuvchan operator deyiladi.

$A: Y \rightarrow X$, $D(A^{-1}) = \text{Im } A$, $\text{Im } A^{-1} = D(A)$. Bundan tashqari teskari operatorning aniqlanishidan

$A^{-1}Ax = x$, $x \in D(A)$, $AA^{-1}y = y$, $y \in D(A^{-1})$ (1) tengliklar kelib chiqadi.

Teorema 1.2.[4] Achizikli operatorga teskari bo'lgan A^{-1} operator ham chiziqlidir.

Isbot. $\text{Im } A = D(A^{-1})$ bo'lgani uchun ixtiyoriy α_1, α_2 sonlar va ixtiyoriy $y_1, y_2 \in \text{Im } A$ elementlar uchun

$$A^{-1}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2 \quad (2)$$

tenglikning to'g'ri ekanligini ko'rsatish yetarli. $Ax_1 = y_1$ va $Ax_2 = y_2$ deymiz. A chizikli bo'lgani uchun $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ (3). Teskari operator ta'rifiga ko'ra, $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$. Bu tengliklarni mos ravishda α_1 va α_2 sonlarga ko'paytirib qo'shsak, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2$. Ikkinchi tomondan, (3) danva teskari operatorning ta'rifidan $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$ bo'ladi.

Teorema 1.3.[4] $A: X \rightarrow Y$ chizikli operator teskarilανuvchan bo'lishi uchun $Ax = \theta$ tenglama faqat $x = \theta$ yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema 1.4.[4] X chizikli normalangan fazoni Y chizikli normalangan fazoga akslantiruvchi chizikli A operator berilgan bo'lsin. $\text{Im } A$ da chegaralangan A^{-1} operator mavjud bo'lishi uchun, shunday $m > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ lar uchun

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \quad (4)$$

tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot.Zaruriyligi. A^{-1} operator mavjud va chegaralangan bo'lsin, ya'ni

$$\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|, \quad \forall y \in D(A^{-1}).$$

U holda $\|Ax\| = \|y\| \geq m\|A^{-1}y\| = m\|x\|$.

Yetarliligi. (4) shartdan A operatorning o'zaro bir qiymatli ekanligi kelib chiqadi.

Teskarisini faraz qilaylik, (4) shart bajarilsinu A o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lmasin. U holda shunday $x_1, x_2 \in D(A)$, $x_1 \neq x_2$ elementlar mavjudki,

$Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$. Bundan $A(x_1 - x_2) = \theta$ ekanligi kelib chiqadi. (4) tengsizlikka

ko'ra $\|x\| \leq \frac{1}{m}\|Ax\|$, ixtiyoriy $y = Ax \in \text{Im } A$ uchun $\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$. Bu yerdan A^{-1}

operatorning chegaralangan ekanligi hamda $\|A\| \leq \frac{1}{m}$ tengsizlik kelib chiqadi.

Misol 1. $C[0,1]$ fazoda x ga ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$B: C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad (Bf)(x) = xf(x)$$

operatorni qaraymiz. Bu operator teskarilanuvchan operator bo'ladimi?

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Endi $Bf = 0$ tenglamani, ya'ni $xf(x) = 0$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglama $C[0,1]$ da faqat $f(x) \equiv 0$ yechimga ega. B operator 2-teoremani shartlarini qanoatlantiradi. Demak, B teskarilanuvchan operator, ya'ni B ga teskari operator mavjud.

Teorema 1.5. [4] X – Banax fazosi va $A \in L(X)$. Agar $\|A\| \leq q < 1$ bo'lsa, u holda $I - A$ operator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.

Isbot. $L(X)$ fazoda quyidagi formal qatorni qaraymiz:

$$I + A + A^2 + \dots A^n + \dots \quad (5)$$

Ma'lumki, $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Xuddi shuningdek, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. U holda (5) qatorning

$S_n = I + \sum_{k=1}^n A^k$ qisman yig'indilari ketma-ketligi Koshi shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|A^{n+1} + A^{n+2} + \dots + A^{n+p}\| \leq q^{n+1} + q^{n+2} + \dots + q^{n+p} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(5) qatorning qisman yig'indilari ketma-ketligi S_n - fundamental ekan, $L(X) := L(X, X)$ to'la bo'lgani uchun $S_n \rightarrow S \in L(X)$. Shunday qilib,

$$I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k = S.$$

Bundan tashqari

$$\begin{aligned} S(I - A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I + A + A^2 + \dots + A^n - A - A^2 - \dots - A^{n+1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I. \end{aligned}$$

Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, $(I - A)S = I$. Demak, S operator $I - A$ operator uchun teskari operator ekan. S operatorning normasi

$$\|S\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Demak, $S = (I - A)^{-1}$ operator chegaralangan.

Misol 2. Parameter λ ning $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$ qiymatlarida

$$(I - \lambda A) f(x) = f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y f(y) dy, \quad f \in L_2[-\pi, \pi]$$

operatorga 4-teoremani qo'llab, unga teskari operatorni toping.

Yechish. 4-teoremani qo'llashimiz uchun A operatorning darajalarini hisoblashimiz kerak. Dastlab A operatorni kvadratini hisoblaymiz:

$$(A^2 f)(x) = A \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y f(y) dy \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin t \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin y f(y) dy \right) dt. \quad (6)$$

(6) tenglikni t bo'yicha integralini hisoblash mumkin. Agar biz $\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t dt = 0$

tenglikni hisobga olsak, $A^2 = 0$ ga ega bo'lamiz. Bu tenglikdan barcha $n \geq 2$ larda $A^n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada biz, $S = I + \lambda A = (I - \lambda A)^{-1}$ ga ega bo'lamiz. Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} (I - \lambda A)(I + \lambda A) &= I + \lambda A - \lambda A - \lambda^2 A^2 = I \\ (I + \lambda A)(I - \lambda A) &= I - \lambda A + \lambda A - \lambda^2 A^2 = I \end{aligned}$$

tenglik o'rinli. Demak, barcha $\lambda \in \mathbb{R}$ larda $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan bo'ladi.

1.5 Chiziqli operatorning spektri va rezolventasi

Faraz qilaylik $A: C^n \rightarrow C^n$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar biror λ son uchun $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas $x \in C^n$ yechimga ega bo'lsa, u holda λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos keluvchi nolmas x yechim esa vektor deyiladi. Chekli o'lchamli fazolarda chiziqli operatorning xos qiymatlari to'plami uning spektri deb ataladi. Agar $\lambda \in \mathbb{C}$ son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa, u operatorning regulyar nuqtasi deyiladi. Umuman olganda chekli o'lchamli fazolarda spektr tushunchasi kam ishlatiladi.

Agar A operator cheksiz o'lchamli X fazoda berilgan bo'lsa, u holda 3 ta holat bo'ladi, ya'ni:

- 1) λ son uchun $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas yechimga ega, ya'ni λ son A operator uchun xos qiymat, bu holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas;
- 2) λ son uchun C^n fazoning hamma yerida aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud va demak, chegaralangan;
- 3) $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud, ya'ni $Ax = \lambda x$ tenglama nol yechimga ega, $(A - \lambda I)^{-1}$ operator X fazoning hamma yerida aniqlanmagan yoki $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq X$.

Ta'rif 1.21.[4] Agar $\lambda \in C$ son uchun $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud bo'lib, u X ning hamma yerida aniqlangan bo'lsa, λ son A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi, $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operator esa A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to'plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

Ta'rif 1.22.[4] A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalari to'plami A operatorning spektri deyiladi va u $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.

Ta'rif 1.23.[4] Agar biror $\lambda \in C$ son uchun $(A - \lambda I)x = 0$ tenglama nolmas ($x \neq 0$) yechimga ega bo'lsa, λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, nolmas yechim x esa xos vektor deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, barcha xos qiymatlar to'plami spektrda yotadi, chunki λ xos qiymat bo'lsa, $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud emas.

Spektr quyidagi qismlarga ajratiladi.

Ta'rif 1.24.[4] a) Barcha xos qiymatlar to'plami A operatorning nuqtali spektri deyiladi va $\sigma_{pp}(A)$ bilan belgilanadi.

b) Agar λ xos qiymat bo'lmasa va $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq X$, ya'ni $A - \lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi X ning hamma yerida zich emas. Bunday λ lar to'plami A operatorning qoldiq spektri deyiladi va $\sigma_{qol}(A)$ bilan belgilanadi.

Masalalar.

1. X Banax fazosi va $A \in L(X)$ bo'lsin. Agar $\|A\| < 1$ bo'lsa, u holda

$$(I - A)^{-1} \in L(X) \text{ va } (I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \text{ ekanligini ko'rsating.}$$

2. X Banax fazosi va $A: X \rightarrow X$ chegaralangan chiziqli operator bo'lsa, u holda

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq \|A\|\} \text{ ekanligini ko'rsating.}$$

Yechish. Aytaylik, $|\lambda| > \|A\|$ bo'lsin. $\lambda I - A = \lambda \left(I - \frac{A}{\lambda} \right)$, $\left\| \frac{A}{\lambda} \right\| < 1$ tengsizliklardan

va 1-misoldan $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X)$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan $\lambda \in \rho(A)$.

Demak, $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq \|A\|\}$.

3. X Banax fazosi va $A: X \rightarrow X$ chegaralangan chiziqli operator bo'lsa, u holda

$\sigma(A)$ yopiq to'plam ekanligini isbotlang.

Yechish. $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ to'plamni ochiq to'plam ekanligini isbotlash yetarli.

Aytaylik,

$$\lambda \in \rho(A) \text{ va } |\xi - \lambda| < \|(\lambda I - A)^{-1}\|$$

bo'lsin. $\|(\xi - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}\| = |\xi - \lambda| \|(\lambda I - A)^{-1}\| < 1$ va

$\xi I - A = (\lambda I - A) \left[I + (\xi - \lambda)(\lambda I - A)^{-1} \right]$ munosabatdan $\xi \in \rho(A)$ kelib chiqadi.

Demak, $\rho(A)$ to'plamning har bir nuqtasi o'zining $\|(\lambda I - A)^{-1}\|$ atrofi bilan birga $\rho(A)$ to'plamga tegishli bo'ladi. Bundan $\rho(A)$ ochiq to'plamdir.

4. $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ chiziqli operatori $(Ax)(t) = \int_0^1 x(s) ds, \quad x \in C[0,1]$

formula

bilan aniqlanadi. Uning spektrini toping.

Yechish. A^n operatorni darajasini bo'laklab integrallash orqali topamiz:

$$(A^n x)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} x(s) ds.$$

Bundan $\|A^n\| \leq \frac{1}{(n-1)!}$. Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} \right)^{\frac{1}{n}} = 0$ bo'lganligidan, A operator

spektral radiusi $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$. Demak, $\sigma(A) = \{0\}$.

5. $C[0,1]$ fazoda erkli o'zgaruvchiga ko'paytirish operatori berilgan:

$Ax(t) = tx(t), \quad x \in C[0,1]$. A operatorning spektrini toping.

Yechish. $(\lambda I - A)x(t) = (\lambda - t)x(t)$ bo'lganligidan, $|\lambda| > 1$ uchun

$(\lambda I - A)^{-1} x(t) = \frac{1}{\lambda - t} x(t)$, ya'ni $(\lambda I - A)^{-1}$ operator chegaralangan operator

bo'ladi. $|\lambda| \leq 1$ da $(\lambda I - A)^{-1}$ operator chegaralanmagan operator. Bundan $\sigma(A) = [0,1]$.

6. A chegaralangan chiziqli operator. $\alpha, \beta \in \rho(A)$ uchun

$R_\alpha - R_\beta = (\alpha - \beta)R_\beta R_\alpha$ tengligini isbotlang.

Yechish. $A - \alpha I = A - \beta I + (\beta - \alpha)I$ tengligidan $R_\alpha^{-1} = R_\beta^{-1} + (\beta - \alpha)I$. Bu tenglikni chapdan R_β ga ko'paytirsak, u holda $R_\beta R_\alpha^{-1} = I + (\beta - \alpha)R_\beta$. Oxirgi tenglikni o'ngdan R_α ga ko'paytirsak, u holda $R_\beta = R_\alpha + (\beta - \alpha)R_\beta R_\alpha$.

2-bob. Golomorf funksiyalarning xossalari

2.1 Koshi teoremasi

Kompleks tekislikda biror to'g'irlanuvchi γ egri chiziqni $z_0, z_1, \dots, z_n$ nuqtalar yordamida n ta $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ yoylarga ajratamiz. γ_k – yoylarning uzunliklari l_k larning eng kattasi λ bilan belgilaymiz. $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} l_k$. Aytaylik γ egri chiziqda $f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. Yuqoridagi har bir γ_k yoydan ixtiyoriy ξ_k nuqta olib, so'ng berilgan funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $f(\xi_k)$ qiymatini $z_k - z_{k-1}$ ga ko'paytirib, ushbu $G = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$ yig'indini tuzamiz. Odatda bu yig'indi $f(z)$ funksiyaning integral yig'indisi deyiladi.

Ta'rif 2.1.[5] Agar $\lambda \rightarrow 0$ da $f(z)$ funksiyaning integral yig'indisi γ egri chiziqning bo'linish usuliga hamda γ_k da ξ_k nuqtaning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmagan holda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit $f(z)$ funksiyaning γ egri chiziq bo'yicha integrali deb ataladi va $\int_{\gamma} f(z) dz$ (1) kabi belgilanadi.

Agar $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv$ deyilsa, (1) integral 2-tur egri chizikli integrallar bilan bilan quyidagicha bog'langan

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy \quad (2)$$

Integralning xossalari.

1. Agar $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar $\gamma \subset \square$ egri chiziqda berilgan va uzluksiz

bo'lsa, u holda $\int_{\gamma} [af(z) + bg(z)] dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz$ (3) bo'ladi,

bunda $a, b \in \square$.

2. Agar $f(z)$ funksiya γ egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo'lib $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$,

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset \text{ bo'lsa, } \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (4) \text{ bo'ladi.}$$

3. Agar $f(z)$ funksiya γ egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo'lsa

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^-} f(z) dz \quad (5) \text{ bo'ladi. Bu yerda } \gamma^- - \text{ berilgan orientatsiyaga}$$

teskari orientatsiya olingan chiziq.

4. Agar $f(z)$ funksiya γ egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo'lsa

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz| \quad (6) \text{ bo'adi, bunda } |dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (z = x + iy).$$

Jumladan $M = \max_{\gamma} |f(z)|$, $l(\gamma) - \gamma$ egri chiziqning uzunligi bo'lsa,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\gamma) \text{ bo'ladi.}$$

5. Agar $f(z)$ funksiya γ egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo'lsa, γ egri

chiziq ushbu $z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$ tenglama bilan berilgan bo'lib, $z'(t) \neq 0$

bo'lsa, u holda $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) dt \quad (7) \text{ bo'ladi.}$

Teorema 2.1.[5] Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiyasi kompleks tekislik C dagi dir bog'lamli D sohada golomorf bo'lsin. U holda D ga tegishli bo'lgan ixtiyoriy to'g'irlanuvchi yopiq egri chiziq γ bo'yicha olingan integral nolga teng bo'ladi:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Teorema 2.2.[5] Faraz qilaylik, $D \subset C$ bir bog'lamli, chegarasi yopiq to'g'ri chiziqdan tashkil topgan soha bo'lsin. Agar $f(z)$ funksiyasi D sohaning yopig'i $\overline{D}$ ning biror atrofida golomorf bo'lsa, u holda $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ bo'ladi.

Bu teoremani $f(z)$ funksiyani faqat D da golomorf bo'lgan hol uchun ham isbotlash mumkin.

Teorema 2.3.[5] $D \subset C$ bir bog'lamli, chegarasi to'g'irlanuvchi soha bo'lib, $f(z)$ funksiyasi D da golomorf, $\overline{D}$ da uzluksiz bo'lsin. U holda $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$.

Natija 2.1.[5] Faraz qilaylik, $D (D \subset C)$ bir bog'lamli soha bo'lib, γ_1, γ_2 chiziqlarning har biri ($\gamma_1 \subset D, \gamma_2 \subset D$) boshi z_0 va oxiri z nuqtada bo'lgan chiziqlar bo'lsin. Agar $f(z) \in o(D)$ bo'lsa, u holda $\int_{\gamma_1} f(z) = \int_{\gamma_2} f(z)$ (8) bo'ladi.

(8) tenglik, qaralayotgan integralning z_0 va z nuqtalarigagina bog'liq bo'lib, integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligini bildiradi. Shuni e'tiborga olib, (8)

integralni $\int_{z_0}^z f(z) dz$ (9) kabi ham yozish mumkin. Agar (9) integralda z_0

nuqtani tayinlab, z ni esa o'zgaruvchi sifatida qaralsa, (9) integral z

o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi: $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$.

Teorema 2.4.[5] Agar $f(z)$ bir bog'lamli $D \subset C$ sohada golomorf bo'lsa, u holda $F(z)$ funksiya ham D sohada golomorf bo'lib, $F'(z) = f(z)$ ($z \in D$) bo'ladi.

Bu teoremadan ko'rinadiki, bir bog'lamli sohada golomorf funksiya $f(z)$ ning boshlang'ich funksiyasi mavjuddir.

Teorema 2.5.[5] Agar $\Phi(z)$ funksiya D ($D \subset C$) sohada $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $\int_{z_0}^z f(z) dz = \Phi(z) - \Phi(z_0) = \Phi(z) \Big|_{z_0}^z$ formula (Nyuton-Leybnis formulasi) orinli bo'ladi, bunda z_0 va z nuqtalar D sohaga tegishli ixtiyoriy nuqtalar.

Misollar

1. Ushbu $\oint_{\gamma} \frac{z^2}{z-2i} dz$ integralni hisoblang, bunda $\gamma = \{z \in C: |z|=1\}$.

Yechish. Agar D ($D \subset C$) soha deb quyidagi $D = \left\{z \in C: |z| < \frac{3}{2}\right\}$ soha olinsa

birinchidan $f(z) = \frac{z^2}{z-2i}$ funksiya golomorf bo'ladi, ikkinchidan qaralayotgan yopiq chiziq γ shu sohaga tegishli bo'ladi: $\gamma \subset D$, $2i \notin D$.

Unda 2-teoremaga ko'ra $\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{z^2}{z-2i} dz = 0$ bo'ladi.

2. Agar $f(z)$ funksiya ushbu $D = \{z \in C: r < |z-a| < R\}$ sohada golomorf bo'lsa, u holda $\oint_{|z-a|=\rho} f(z) dz$ ($r < \rho < R$) integralni qiymati ρ ga bog'liq emasligini ko'rsating.

Yechish. Ixtiyoriy ρ_1, ρ_2 sonlarni ($r < \rho_1 < R$, $r < \rho_2 < R$) olaylik. Ular uchun $\rho_1 < \rho_2$ bo'lsin deb, ushbu

$$\gamma_1 = \{z \notin C: |z-a| = \rho_1\}, \quad \gamma_2 = \{z \notin C: |z-a| = \rho_2\}$$

yopiq chiziqlarni qaraylik. Ravshanki $G = \{z \in C: \rho_1 < |z-a| < \rho_2\}$ soha uchun $\overline{G} \subset \subset \{z \in C: r < |z-a| < R\}$ bo'ladi. Unda 4-teoremadan $\oint_{\gamma_2} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\oint_{|z-a|=\rho_1} f(z) dz = \oint_{|z-a|=\rho_2} f(z) dz$.

2.2 Koshining integral formulasi

Teorema 2.6.[5] $f \in H(D)$ va $G \subset D$ da yotadigan va chekli sondagi egri (uzluksiz) chiziqlar bilan chegaralangan soha bo'lsin. U holda $\forall z \in G$ nuqtada f funksiya quyidagicha beriladi:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1)$$

Bu yerda ∂G — G ning orientirlangan chegarasi. Tenglikdagi o'ng tarafdagi ifoda Koshi integrali deyiladi.

Isbot. $\rho > 0$ shunday tanlaymizki $U_\rho = \{z': |z' - z| < \rho\} \subset \subset G$ bo'lsin va

$G_\rho = G \setminus \overline{U}_\rho$ deylik. $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ funksiya $\overline{G}_\rho$ da uzluksiz.

Bundan oldingi punktdagi teorema.1 ga ko'ra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_\rho} g d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

bu yerda $\partial U_\rho = \{\zeta: |\zeta - z| = \rho\}$ — aylana soat strelkasiga qarshi orientirlangan.

Shunday qilib,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2)$$

bunda $\rho > 0$ sonni yetarlicha kichik hisoblash mumkin. f funksiya z nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \rho < \delta$ bo'lganda

$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall \zeta \in \partial U_\rho$ bo'ladi. Shuning uchun quyidagi ayirmaning

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (3)$$

absolyut qiymati $\frac{1}{2\pi} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi = \varepsilon$ dan oshmaydi va demak, $\rho \rightarrow 0$ da 0 ga intiladi.

Lekin (2) dan ko'rinadiki (3)ning chap tomoni ρ ga bog'liq emas, demak, u ixtiyoriy yetarlicha kichik ρ lar uchun nolga teng, ya'ni

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Bu va (2) dan (1) formula kelib chiqadi.

Izoh 2.1.[5] Agar teorema.1 shartlarida z nuqta $\bar{G}$ dan tashqarida yotsa, u holda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (4).$$

Bu tasdiq Koshi teoremasidan bevosita kelib chiqadi, chunki $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$

funksiya $\bar{G}$ da golomorf.

Izoh 2.2.[5] Agar bundan oldingi paragrafdagi teorema.1 ning o'rniga teorema.2 ni olsak, quyidagi teorema hosil bo'ladi.

Teorema 2.7.[5] Agar f funksiya chekli sondagi to'g'irlanuvchi egri chiziqlar bilan chegaralangan kompakt D sohada golomorf va $\bar{D}$ uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & z \in D \text{ uchun} \\ 0 & z \in C \setminus \bar{D} \text{ uchun} \end{cases} \quad (5)$$

bu yerda, $\partial D - D$ ning orientirlangan chegarasi.

2.3 Dirixle masalasi

Ta'rif 2.2.[2] $g(x, \xi, D)$ funsiya x uchun Grin funksiyasi deyiladi, chegaralangan $D \subset \mathbb{R}^m$ soha va $\xi \in D$ uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa

- I. g funsiya D sohada x bo'yicha ($x \neq \xi$) garmonik funsiya
- II. g funsiya $\bar{D}$ da uzluksiz $x = \xi$ nuqtadan tashqari va D ni chegarasida $g = 0$.
- III. $m = 2$ da $x = \xi$ nuqtada $g + \log|x - \xi|$ funsiya garmonik yoki $m > 2$ da $x = \xi$ nuqtada $g + |x - \xi|^{2-m}$ garmonik funsiya

teorema 2.12 da $g(x, \xi, D)$ funsiya mavjud va yagonaligini ko'rsatamiz. Hozircha Grin funksiyasi I va III bandlarini qanoatlantiruvchi oddiy funsiya sifatida qaraymiz.

Teorema 2.8.[2] $D = D(0, R)$ va D sohada ξ nuqta olingan bo'lsin agar $m = 2$ da $\xi' = \xi R^2 |\xi|^{-2}$ bo'lsa u holda

$$g(x, \xi, D) = \log \frac{|x - \xi'| |\xi|}{|x - \xi| R}, \quad \xi \neq 0$$

$$g(x, 0, D) = \log \frac{R}{|x|}$$

$m > 2$ da

$$g(x, \xi, D) = |x - \xi|^{2-m} - \{|\xi| |x - \xi'| / R\}^{2-m}, \quad \xi \neq 0$$

$$g(x, 0, D) = |x|^{2-m} - R^{2-m} \text{ o'rinli.}$$

u holda $g(x, \xi, D)$ funsiya D sohada Grin funsiya bo'ladi.

Teorema 2.9.[2] (Puasson integrali) Agar u funsiya $D(x_0, R)$ da garmonik va $C(x_0, R)$ da uzluksiz bo'lsa, u holda $\xi \in D(x_0, R)$ uchun o'rinli bo'ldi.

bu yerda $d\sigma_x - S(x_0, R)$ sferani sirt yuzini belgilaymiz va $c_m = 2\pi^{m/2} / \Gamma(m/2)$.

Teorema 2.10.[2] (Maksimum prinsipi). Agar u funsiya chegaralangan $D \subset \mathbb{R}^m$ sohada garmonik va $\bar{D}$ da uzluksiz va agar $u \leq M$ bo'lsa D sohani chegarasida, u holda yoki $u < M$ bo'ladi D da yoki $u \equiv M$ bo'ladi D da.

Teorema 2.11.[2] Agar Dirixle masalasini yechimi mavjud bo'lsa u holda u yagona .

Xaqiqatdan ham , agar $u_1, u_2 - D$ sohadagi Dirixle masalasi yechimlari bo'lsa , berilgan chegaraviy qiymatlarda u holda $u = u_1 - u_2$ D da garmonik , $\bar{D}$ da uzliksiz va D ni chegarasida 0 ga yaqinlashadi .

Shu sababli teorema 2.10 ga ko'ra D da $u \leq 0$ va xuddi shuningdek $-u \leq 0$ bundan kelib chiqadiki $u \equiv 0$ D da.

Teorema 2.12.[2] Klassik Grin funksiya $g(x, \xi, D)$ (agar u mavjud bo'lsa) I, III shartlar orqali bir qiymatli aniqlanadi.

bundan tashqari D da $g(x, \xi, D) > 0$ bo'ladi.

Teorema 2.13.[2] Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $S(x_0, R)$ da uzliksiz va $\xi \in D(x_0, R)$ da

$$u(\xi) = \frac{1}{c_m} \int_{S(x_0, R)} f(x) \frac{R^2 - |\xi - x_0|^2}{R|\xi - x|^m} d\sigma_x$$

tenglikni bajarsin.

bu yerda $d\sigma_x - S(x_0, R)$ ni sirt yuzasi .

U holda $u(\xi)$ funksiya $D(x_0, R)$ soha va $f(x)$ ning chegaraviy qiymati uchun Dirixle masalani yechimi bo'ladi.

2.4 Garmonik funksiyalar uchun o'rta qiymat haqidagi teorema

Ta'rif 2.1.[3] $u \in C^2$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada garmonik deyiladi, agar D da quyidagi Laplas tengligi o'rinli bo'lsa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

yuqoridagi differensial operatorning chap tomoni Laplas operatori va uni Δ orqali belgilaymiz,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Teorema 2.14.[2] Agar u funksiya $D(x_0, R)$ da garmonik va $C(x_0, R)$ da uzliksiz bo'lsa, u holda $\xi \in D(x_0, R)$ uchun o'rinli bo'ldi.

bu yerda $d\sigma_x - S(x_0, R)$ sferani sirt yuzini belgilaymiz va $c_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$.

bu tearemadan kelib chiqadiki agar $u(x)$ funksiyamiz qandaydir $C(x_0, R)$ atrofida garmonik funksiya bo'lsa u holda

$$u(x_0) = \frac{1}{c_m R^{m-1}} \int_{S(x_0, R)} u(x) d\sigma_x$$

o'rinli bo'ldi.

bu yerda $d\sigma_x - S(x_0, R)$ sferaning sirt yuzasi.

Agar $u(x)$ funksiya $C(x_0, \rho)$ da garmonik bo'lsa, u holda 0 dan ρ gacha R bo'yicha o'ng tomonni integrallash mumkin va

$$u(x_0) = \frac{1}{d_m \rho^m} \int_{C(x_0, \rho)} u(x) dx$$

kelib chiqadi.

bu yerda $dx - m$ o'lchovli hajm elementi,

$d_m \rho^m = \int_{C(0, \rho)} dx = \frac{c_m \rho^m}{m} = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} \rho^m$ - m o'lchovli radiusi ρ bo'lgan shar hajmi.

$$u(x_0) = \frac{1}{c_m R^{m-1}} \int_{S(x_0, R)} u(x) d\sigma_x$$

va

$$u(x_0) = \frac{1}{d_m \rho^m} \int_{C(x_0, \rho)} u(x) dx$$

ning xossalariida ixtiyoriy garmonik funksiyalarni tanlab olish mumkin.

Teorema 2.15.[2] Agar $u(z)$ funksiya radiusi r markazi z nuqtada bo'lgan yopiq doirada uzluksiz va doirani ichida garmonik bo'lsa, u holda

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi$$

tenglik o'rinli.

Teorema 2.16.[2] Agar $u(x)$ funksiya $D \subset \mathbb{R}^m$ soxada uzliksiz va ixtiyoriy $x_0 \in D$ nuqta uchun qandaydir yetarlicha kichik ρ larda

$$u(x_0) = \frac{1}{d_m \rho^m} \int_{C(x_0, \rho)} u(x) dx$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $u(x)$ funksiya D da garmonik.

Faraz qilaylik $C(x_0, r)$ gipershar D da va $v(x)$ $C(x_0, r)$ chegarasidagi qiymati $u(x)$ bo'lgan $S(x_0, r)$ dagi Dirixle masala yechimi bo'ladi. Teorema 2.13 ga ko'ra mavjud yagona va Puasson integrali bilan belgilaymiz .

$h(x) = v(x) - u(x)$ funksiya olamiz $x \in D(x_0, r)$, teorema 2.13 ga ko'ra $v(x)$ funksiya $D(x_0, r)$ da garmonik u holda $D(x_0, r)$ da $h(x) \equiv 0$ ni ko'rsatish yetarli. $h(x)$ funksiya $C = C(x_0, r)$ sharning yopig'ida uzliksiz va uning chegarsi $S = S(x_0, r)$ da nolga aylanadi . Shuning uchun agar $h(x)$ funksiya aynan 0 ga aylanmasa u $C(x_0, r)$ da musbat maksimum yoki manfiy minimumga erishadi shu bilan birga $D = D(x_0, r)$ da ham .

Masalan $m = \sup h(x) > 0$

$E \subset D$, $E - h(\xi) = m$ qiladigan nuqtalar to'plami. E kompakt va bo'sh emas , chunki $h(x)$ uzliksiz shuning uchun shunday $\xi_0 \in E$ topiladiki $|\xi_0 - x_0|$ maksimal bo'ladi .

$u(x)$ funksiya biror kichik ρ uchun

$$u(x_0) = \frac{1}{d_m \rho^m} \int_{C(x_0, \rho)} u(x) dx$$

ni qanoatlantiradi va $v(x)$ funksiya garmonik bo'lgani uchun $h(x)$ shu ρ qiymat uchun

$$u(x_0) = \frac{1}{d_m \rho^m} \int_{C(x_0, \rho)} u(x) dx$$

ni qanoatlantiradi , shu sababli ρ ni yetarlicha kichik tanlashimiz mumkinki

$$\int_{C(\xi_0, \rho)} [h(x) - h(\xi_0)] dx = 0$$

bo'ladi.

Integral ostidagi ifoda bu yerda uzliksiz va $C(\xi_0, \rho)$ da nomusbat, demak aynan nolga teng. Xususan $h(\xi_1) = m$ bunda $\xi_1 = \xi_0 + \frac{\rho}{2}(\xi_0 - x_0)$. Lekin $|\xi_1 - x_0| = \left| \left(1 + \frac{\rho}{2}\right)(\xi_0 - x_0) \right|$, bu esa $|\xi_0 - x_0|$ ni maksimal deb olishimizga zid. Shunday qilib, $h(x)$ funksiya aynan no'l bo'lishi kerak. $u(x) = v(x)$ dan $u(x)$ ham garmonikligi kelib chiqadi.

3-bob. A -garmonik funksiyalarni xossalari

3.1 A -garmonik funksiyalar

X – haqiqiy Gilbert fazosi X' ning kompleksifikatsiyasi bo'lsin va shu bilan birga kompleks banax fazosi ham bo'lsin:

$X = X' \oplus iX'$ ($u \in X$ uchun $u = v + i\omega$ bo'ladi, $v, \omega \in X'$). $L(X)$ – X dagi chiziqli chegaralangan operatorlar algebrasi va $A \in L(X)$ operatorning spektral radiusi $\rho(A) \leq 1$. U holda operatorning rezolventasi $R(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > 1$ uchun aniqlangan va $L(X)$ da yotadi shu bilan birga analitik operator funksiyasi bo'ladi.

$\forall m \geq 0$ butun son uchun shunday X da joylashgan zanjir bor deb hisoblaymizki unda Banax fazolari X^m zich bo'ladi:

$$X^{m+1} \subseteq X^m \subseteq X, X^0 = X$$

$$\|u\|_{X^m} = \|u\|_{m+1}, \forall u \in X^{m+1} \quad \|u\|_0 = \|u\|,$$

bu shunday zanjirni $A \in L(X^m)$ va $\rho(A) = 1$, $R(\lambda) \in L(X^m)$, $|\lambda| > 1$ va $|\lambda| = 1$ aylanada X^m dagi kuchli uzluksizlik bo'yicha $L(X^{m+1}, X^m)$ dan olingan operator sifatida davom etadi.

Gilbertning $R(\lambda_1) - R(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)R(\lambda_1)R(\lambda_2)$ ayniyatidan kelib chiqadiki $R(\lambda_1)$ va $R(\lambda_2)$ operatorlar $|\lambda_j| > 1$, $j = \overline{1, 2}$ bo'lganda kommutirlanadi, demakki uzluksizlikka ko'ra ular $|\lambda_j| = 1$ da ham kommutirlanadi, $R(\lambda_1)R(\lambda_2)u = R(\lambda_2)R(\lambda_1)u$, $\forall u \in X^{m+2}$.

Bundan tashqari $u \in X^{m+2}$ uchun $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = \lambda$ da kuchli limit mavjud:

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \left[(R(\lambda_1) - R(\lambda_2)) / (\lambda_1 - \lambda_2) \right] u = \frac{dR}{d\lambda} u = R^2(\lambda) u$$

va demak, $R(\lambda)$ kuchli uzluksiz hosilaga ega $R'(\lambda) \in L(X^{m+2}, X^m)$ bunda $R'(\lambda) = R^2(\lambda)$, $|\lambda| \geq 1$. Induksiya orqali hosil qilamizki operator

$$R^{(n)}(\lambda) = n! R^{n+1}(\lambda) \in L(X^{m+2}, X^m)$$

ga teng va $|\lambda| > 1$ da kuchli uzluksiz.

$\Omega - \mathbb{C}$ kompleks tekislikdagi ochiq to'plam bo'lsin. Agar $x, y \rightarrow z = x + iy$ nuqtaning haqiqiy koordinatalari bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} \partial u &= \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \bar{\partial} u &= \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \partial_A &= \partial - A\bar{\partial}, \quad \bar{\partial}_A = \bar{\partial} - A\partial \end{aligned}$$

Bu yerda $u: \Omega \rightarrow X$ funksiya $C^1(\Omega, X)$ sinfga tegishli, umumiy holda $C^k(\Omega, X)$ to'plamda k -marta kuchli uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosi.

Ta'rif 3.1.[1] Agar barcha $z \in \Omega$ nuqtalar uchun $\bar{\partial}_A u = 0$ bo'lsa, $u \in C^1(\Omega, X)$ funksiya Ω da A -analitik deyiladi.

Barcha $u: \Omega \rightarrow X^m$ A -analitik funksiyalar to'plamini $A(\Omega, X^m)$ deb belgilaymiz.

Ta'rif 3.2.[1] $u \in C^2(\Omega, X)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ funksiya Ω da A garmonik deyiladi, agar ixtiyoriy $(x, y) \in \Omega$ uchun

$$\Delta_A u(x, y) = (E - A)^2 u_{xx}(x, y) + (E + A)^2 u_{yy}(x, y) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

Ω dagi barcha A – garmonik funksiyalar to'plamini $h_A(\Omega, X)$ deb belgilaymiz.

Lemma 3.1.[1] Agar $u(z) = v(z) + iw(z)$ va Ω soha bir bog'lamli bo'lsa, u holda $u(z)$ funksiya Ω da A – analitik bo'ladi faqat va faqat shundaki $v(z)$, $w(z)$ funksiyalar Ω da A –garmonik funksiya bo'lsa.

Bu holda Koshi-Riman shartlarining A –analogi bajariladi:

$$(E - A)v_x = (E + A)w_y$$

$$(E + A)v_y = -(E - A)w_x$$

3.2 A – analitik funksiyalarga misollar

1. $u(z) = (z + \bar{z}A)^n e \in A(\Omega, X)$, bu yerda $e \in X^m$ dan olingan biror

fikserlanganvektor, $m = 0, 1, \dots$. $A(\Omega, X^m)$ –chiziqli fazo bo'lgani uchun u holda

$$u(z) = \sum_{k=0}^n (z + \bar{z}A)^k e_k, \quad e_k \in X^m, \quad k = \overline{0, n} \quad \text{funksiya ham } A(\square, X^m) \text{ ga tegishli}$$

ham bo'ladi.

2. $z \neq 0$ uchun operatorni quyidagicha aniqlaymiz.

$$B(z) = (z + \bar{z}A)^{-1} = \bar{z}^{-1} R(-z/\bar{z}) \quad (*)$$

funksiyaning qaraymiz. $(*)$ tenglikni hisobga olgan holda

$$\partial B = -B^2, \quad \bar{\partial} B = -AB^2 \text{ va } \Rightarrow u \in A(\square \setminus \{0\}; X^m).$$

Xuddi shunday, $e_k \in X^{m+k+1} (k = \overline{1, n})$, $e_0 \in X^m$ bo'lganda quyidagi

$$u(z) = \sum_{k=0}^n B^k(z) e_k = \sum_{k=0}^n (z + \bar{z}A)^k e_k \text{ funksiya ham } A(\square \setminus \{0\}; X^m) \text{ ga tegishli}$$

bo'ladi. Haqiqatdan ham, $\partial B^k = -kB^{k+1}$, $\bar{\partial} B^k = -kAB^{k+1}$

va bundan $B^k e_k \in A(\square \setminus \{0\}; X^m)$.

3. A operator sifatida $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $z \in \square$ uchun operatorni quyidagicha

aniqlaymiz.

$$B(z) = (zI + \bar{z}A)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & 1/2\bar{z} \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} z + \bar{z} & 0 \\ 0 & z + \frac{1}{2}\bar{z} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z + \bar{z}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z + \frac{1}{2}\bar{z}} \end{pmatrix}$$

$u(z) = B(z)e$, $e = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \in \square^2$ biror fikserlangan vektor bo'lsin. U holda

$$u(z) = B(z)e = \begin{pmatrix} \frac{1}{z + \bar{z}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z + \frac{1}{2}\bar{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z + \bar{z}} i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(z + \bar{z})^2} i, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(z + \bar{z})^2} i, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\partial}_A u = \bar{\partial} u - A \partial u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(z + \bar{z})^2} i \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{(z + \bar{z})^2} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(z + \bar{z})^2} i \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} -\frac{1}{(z + \bar{z})^2} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \theta \in \square^2, \quad u: \square \rightarrow \square^2.$$

3.3 A –garmonik funksiyalar uchun Dirixle masalasi

Dirixle masalasi.

Bizda $X = X^0$ ga zich joylashtirilgan va ixtiyoriy m uchun X^m da $A \in L(X^m)$, $\|A\| < 1$ bo'ladigan X^m , $m \geq 0$ -gilbert fazolar shkalasi berilgan bo'sin deylik. (keyinchalik ma'lum bo'ladiki faqat X va $X' \subset X$ lardan foydalanishimiz yetarli). Biz ixtiyoriy $v \in X^{m+1}$ uchun kuchli limit bor deb faraz qilamiz

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (E \pm rA)^{-1} v = (E \pm A)^{-1} v$$

bu limitni $(E \pm rA)^{-1} \in L(X^{m+1}, X^m)$ operatorlar orqali aniqlaymiz.

$$\Lambda_1 = (E - A)(E + A)^{-1}, \quad \Lambda_2 = (E + A)(E - A)^{-1}$$

bo'lsin.

Ularni aniqlanish sohasi $D(\Lambda_j) = X^1$ bo'lgan X dagi chegaralanmagan operatorlar deb qarab, Λ_1^* , Λ_2^* operatorlarni hisoblaymiz.

$D(\Lambda_j) \supseteq X^1$ deb hisoblab

quyidagi opertorni

$$Re \Lambda_j = \frac{\Lambda_j + \Lambda_j^*}{2} \in L(X^1, X) \quad \text{va qism fazoni}$$

$L_j = Ker Re \Lambda_j = \{u \in X_1 : Re \Lambda_j u = 0\}$ aniqlaymiz.

Teorema 3.1.[1] $C^2(\Omega; X) \cap C^1(\bar{\Omega}; X^1)$ sinfdan olingan u funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.43)$$

$$\Delta_A u = 0, \quad x \in \Omega \quad (4.42)$$

U holda $Re \Lambda_j$, $j = 1, 2$, operatorlar X da aniqlanish sohasi X^1 bo'lgan operatorlardek o'zoro qo'shma bo'lsalar va bundan tashqari

$$L_1 \cap L_2 = \{0\} \quad (4.44)$$

bo'lsa, u holda Ω da $u \equiv 0$.

Isbot: (4.20) [1] ayniyatga $v = Bu$ ni qo'yamiz,

$$\text{bunda } B = ((E - r^2 A^2)^{-1})^*, \quad r < 1$$

(4.42) va (4.43) shartlarga ko'ra

$$\int_{\Omega} \langle \nabla B u, \nabla_A u \rangle dx = 0.$$

B operatorni 2-qo'shiluvchiga tashlab va $r \rightarrow 1$ da

$$\int_{\Omega} (\langle u_x, \Lambda_1 u_{x_1} \rangle + \langle u_x, \Lambda_2 u_{x_2} \rangle) \quad (4.45)$$

ni hosil qilamiz.

Ma'lum teoremaga ko'ra ([6]ga qarang) Λ_j operatorlar akkretiv, ya'ni

$$\operatorname{Re} \langle \Lambda_j v, v \rangle \geq 0 \quad v \in X^1 \quad (4.46)$$

va demak, (4.46)ni hisobga olgan holda (4.45)ni haqiqiy qismini hisoblab

$$\langle \operatorname{Re} \Lambda_j u_{x_j}, u_{x_j} \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \text{ ni topamiz.}$$

$\operatorname{Re} \Lambda_j$ -operatorlar o'z-o'ziga qo'shma bo'lgani uchun $u_{x_j} \in L_j$.

$x - \Omega$ sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

U orqali koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz,

$(a(x_2), x_2) (x_1, b(x_1))$ deb bu to'g'ri chiziqlarning $\partial\Omega$ chegara bilan kesishganda hosil bo'lgan qandaydir x ga yaqin nuqtalarni belgilaymiz.

(4.43)-chegaraviy shart va L_j ning chiziqli qism fazo ekanligidan

$$u(x) = \int_{a(x_2)}^{x_1} u_{x_1}(s, x_2) ds \in L_1,$$

$$u(x) = \int_{a(x_1)}^{x_2} u_{x_2}(x_1, s) ds \in L_2,$$

va bundan kelib chiqadiki $u \in L_1 \cap L_2$. Bundan (4.44) shartga ko'ra ixtiyoriy $x \in \Omega$ uchun $u = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Keying misol (4.44) shartlarni o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

Misol. $X^1 = X = C^2$, $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$

$$\text{va } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}.$$

$$u_1 = u_2 = \cos 2(x_1 + x_2) - \cos 2(x_1 - x_2).$$

bo'lsin.

U holda

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\Delta_A = \begin{pmatrix} \blacksquare & u_2 \\ -\blacksquare & u_1 \end{pmatrix} = 0, \quad \blacksquare = \partial_1^2 - \partial_2^2, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Endi, Direxle masalasini yechimini A -garmonik funksiyalar uchun oshkor holdagi formulasini olish usullarini ko'rsatamiz.

$$\Delta_A u = 0, \quad x \in \Omega \quad u|_{\partial\Omega} = f \quad (4.47)$$

Shu maqsadda, avvalo $= \lambda E$, bunda $\lambda \in (-1, 1)$ deylik.

U holda R^2 dagi nuqtarni (x, y) deb belgilab

$$\Delta_A u = (1 - \lambda)^2 u_{xx} + (1 + \lambda)^2 u_{yy} = 0.$$

$$\zeta = (1 - \lambda)^{-1} x, \quad \eta = (1 + \lambda)^{-1} y \quad (4.48)$$

$$u(x, y) = u_\lambda(\xi, \eta), \quad (4.49)$$

deb kiritsak,

$$\Delta u_\lambda = 0, \quad (\xi, \eta) \in \Omega_\lambda \quad (4.50)$$

$$u|_{\partial\Omega_A} = f_\lambda \quad (4.51)$$

ni hosil qilamiz, bunda Ω_A – (4.48) akslantirishdagi Ω ning aksi, f_λ esa f bilan (4.49) formulaga ko'ra bog'langan.

Ma'lumki (4.50), (4.51) –Dirixle masalasi yechimi z, ζ – kompleks o'zgaruvchilar terminida quyidagi fo'rmla bilan berilardi

$$u_\lambda(z) = \int_{\partial\Omega_\lambda} u_\lambda(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{v}} G(z, \zeta) |d\zeta|, \quad z \in \Omega_\lambda \quad (4.52)$$

bu yerda

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln |w_\zeta(z)|,$$

$$w_\zeta(z) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w(\zeta)} w(z)},$$

$w(z)$ funksiya Ω_A sohani $|w| < 1$ krugga konform akslantiradi.

Endi (4.48) fo'rmulada eski o'zgaruvchilarga qaytib va Rissa-Danfordning funksional hisob "yopig'i" dan foydalanib (4.47) masala yechimi uchun formulani olamiz.

Masalan. $\Omega - z \geq 0$ yarim tekislik bo'lsa, u holda

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x - t)f(t)dt \equiv P_y * f \quad ,$$

$$P_y = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + t^2} (E - A)^2 (\xi - A)^{-1} (\bar{\xi} - A)^{-1} \quad ,$$

$$\xi = \frac{y - it}{y + it} \quad .$$

Agar $\Omega - |z| < 1$ krug (doira) bo'lsa, u holda $\partial\Omega_A$ – ellips bo'ladi.

Bu holatda ma'luki, Ω_A sohani $|w| < 1$ krugga konform akslantiradigan $w = w(z)$ funksiya quyidagi funksiya bilan beriladi.

$$w(z) = k^{\frac{1}{2}} sn \left(\frac{K}{\pi} \sin^{-1} z \right).$$

bu yerda sn – Yakobining elliptik funksiyasi,

$$k = [\theta_2(0, q)/\theta_1(0, q)]^2 \quad ,$$

θ_1, θ_2 –teta funksiya va

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi \quad .$$

$$q = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \quad ,$$

bunda $a(\lambda), b(\lambda)$ lar

$$\partial\Omega_\lambda: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{Ellipsning yarim o'qlari.}$$

Bu funksiyaning (4,52) formulaga qo'yib, boshlang'ich o'zgaruvchilarga qaytib va A operatoridagi λ sonni o'zgartirib Puassonning doira uchun formulasiga kelamiz .

3.4 A –garmonik funksiya uchun o'rta qiymat haqidagi teorema va unga teskari bo'lgan teorema.

Garmonik funksiya uchun o'rta qiymat haqidagi teoremani A – analogini quyidagicha qaraganmiz:

Teorema 3.2.[1] Aytaylik, $u \in C^2(\Omega; X^{m+2})$ va Ω da A – garmonik funksiya bo'lsa, u holda har qanday $B_r(y) = \{x: |x - y| < r\}$, $B_r \subset \Omega$ shar uchun quyidagi tenglik

$$u(y) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r} \{[E - 2r^{-2}q(x-y)A(E + A^2)^{-1}]\}u(x)ds$$

$$- \frac{2}{\pi} A(E + A^2)^{-1} \int_{B_r} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} u(x)dx$$

$$u(y) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} \left\{ E - 2r^2 A(E - A^2)^{-1} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} \right\} u(x)dx ,$$

$$q(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^2} , \quad x = (x_1, x_2)$$

o'rinli bo'ladi.

Bu teoremadan uning tekarişi ham o'rinliligini quyidagicha qaraymiz:

Teorema 3.3. Aytaylik, $u \in C^2(\Omega; X^{m+2})$ va $B_r(y) = \{x: |x - y| < r\}$, $B_r \subset \Omega$ shar, agar shunday r_0 mavjud bo'lib, $r < r_0$ uchun y nuqtada quyidagi tenglik o'rinli bo'lsa

$$u(y) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r} \{[E - 2r^{-2}q(x-y)A(E + A^2)^{-1}]\}u(x)ds$$

$$- \frac{2}{\pi} A(E + A^2)^{-1} \int_{B_r} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} u(x)dx$$

$$u(y) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} \left\{ E - 2r^2 A(E - A^2)^{-1} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} \right\} u(x)dx$$

$$q(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^2}, \quad x = (x_1, x_2)$$

u holda u funksiya y nuqtada A – garmonik funksiya bo'ladi.

$B_r \subset \Omega$ bo'lsin, $v(x)$ esa $S(x_0, r)$ (B_r ning chegarasi) da berilgan chegaraviy qiymati $u(x)$ bo'lgan Dirixle masala yechimi bo'lsin. Teorema 3.1. ([1] ga qaralsin) ga ko'ra $v(x)$ funksiya mavjud, yagona va Puasson integrali bilan beriladi. $x \in \Omega$ uchun $h(x) = v(x) - u(x)$ funksiya olaylik. Teorema 3.1. ([1] ga qaralsin) ga ko'ra $v(x)$ funksiya Ω da garmonik, demak $h(x) \equiv 0$ ni ko'rsatish yetarli. $h(x)$ funksiya B_r sharning yopig'ida uzliksiz va uning chegarsi $S(x_0, r)$ da nolga aylanadi. Shuning uchun agar $h(x)$ funksiya aynan 0 ga aylanmasa, u holda u B_r ning yopig'ida va shu bilan birga Ω da ham musbat maksimum va manfiy minimumga ega bo'lishi shart.

Masalan, $m = \sup h(x) > 0$ bo'lsin. $h(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun $h(\xi) = m$ shartni qanoatlantiruvchi Ω dagi nuqtalar to'plami E kompakt va bo'sh emas. Shuning uchun shunday $\xi_0 \in E$ nuqta topiladiki $|\xi_0 - x_0|$ maksimal bo'ladi.

$u(x)$ funksiya biror kichik r uchun

$$u(y) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r} \{[E - 2r^{-2}q(x-y)A(E + A^2)^{-1}]\}u(x)ds$$

$$- \frac{2}{\pi} A(E + A^2)^{-1} \int_{B_r} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} u(x)dx$$

$$u(y) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} \left\{ E - 2r^2 A(E - A^2)^{-1} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} \right\} u(x)dx$$

$$q(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^2}, \quad x = (x_1, x_2)$$

ni qanoatlantiradi va $v(x)$ funksiya garmonik bo'lganidan, $h(x)$ ham shu r qiymat uchun

$$u(y) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r} \{[E - 2r^{-2}q(x-y)A(E + A^2)^{-1}]\}u(x)ds$$

$$- \frac{2}{\pi} A(E + A^2)^{-1} \int_{B_r} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} u(x)dx$$

$$u(y) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} \left\{ E - 2r^2 A(E - A^2)^{-1} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} \right\} u(x) dx$$

$$q(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^2}, \quad x = (x_1, x_2)$$

ni qanoatlantiradi , shu sababli r ni yetarlicha kichik tanlashimiz mumkinki

$$\int_{B_r} [h(x) - h(\xi_0)] dx = 0$$

o'rinli bo'ladi.

Integral ostidagi ifoda bu yerda uzliksiz va B_r da nomusbat , demak aynan nolga teng . Xususan $h(\xi_1) = m$ bunda $\xi_1 = \xi_0 + \frac{\rho}{2}(\xi_0 - x_0)$. Lekin $|\xi_1 - x_0| = \left| (1 + \frac{\rho}{2})(\xi_0 - x_0) \right|$, bu esa $|\xi_0 - x_0|$ ni maksimal deb olishimizga zid . Shunday qilib , $h(x)$ funksiya aynan no'l bo'lishi kerak . $u(x) = v(x)$ tenglikdan $u(x)$ ham garmonikligi kelib chiqadi .

Xulosa

A – garmonik funksiyalar kompleks analizning masalalari uchun ahamiyatga ega bo'lishi bilan birgalikda, nazariy mexanikda, seysmik xisob usullarini bilishda, dinamika masalarlarida qo'llaniladi.

Dissertatsiyada asosiy qismi uchinchi bo'limda bo'lib, unda quyidagi natijalar olingan:

Teorema 3.2.[1] Aytaylik, $u \in C^2(\Omega; X^{m+2})$ va Ω da A – garmonik funksiya bo'lsa, u holda har qanday $B_r(y) = \{x: |x - y| < r\}$, $B_r \subset \Omega$ shar uchun quyidagi tenglik

$$u(y) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r} \{[E - 2r^{-2}q(x-y)A(E + A^2)^{-1}]\}u(x)ds$$

$$- \frac{2}{\pi} A(E + A^2)^{-1} \int_{B_r} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} u(x)dx$$

$$u(y) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} \left\{ E - 2r^2 A(E - A^2)^{-1} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} \right\} u(x)dx ,$$

$$q(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^2} , \quad x = (x_1, x_2)$$

o'rinli bo'ladi. Ushbu teoremani teskarisi ham o'rinli ekani ko'rildi, u quyidagicha:

Teorema 3.3. Aytaylik, $u \in C^2(\Omega; X^{m+2})$ va $B_r(y) = \{x: |x - y| < r\}$, $B_r \subset \Omega$ shar, agar shunday r_0 mavjud bo'lib, $r < r_0$ uchun y nuqtada quyidagi tenglik o'rinli bo'lsa

$$u(y) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r} \{[E - 2r^{-2}q(x-y)A(E + A^2)^{-1}]\}u(x)ds$$

$$- \frac{2}{\pi} A(E + A^2)^{-1} \int_{B_r} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} u(x)dx$$

$$u(y) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} \left\{ E - 2r^2 A(E - A^2)^{-1} \frac{q(x-y)}{|x-y|^2} \right\} u(x)dx$$

$$q(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^2}, \quad x = (x_1, x_2)$$

u holda u funksiya y nuqtada A – garmonik funksiya bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Жабборов.Н.М, Имомназаров.Х.Х «некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред» Ташкент. «Университет».2012.
2. У. Хейман, П. Кеннеди. Субгармонические функции. “ Мир”. М. 1980.
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1,2. Москва,Наука
4. J.I.Abdullayev, R.N.G'anixo'jayev “Funksional analiz” Toshkent-Samarqand. 2009.
5. Секефальви-Надь Б, Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
6. Лаврентьев М.М, Савельев Л.Я. «Линейные операторы и некорректные задачи»-М.Наука,1992г.
7. Arbuzov E.V, Bukhgeim A.L. ‘Carleman’s formulas for A-analytic functions in a half-plane’// J.Inv.III-Posed Problems, 1997, v. 5, N.6, pp.491-505.
8. Садуллаев А.С.*Кўп аргументли голоморф функциялар. Ургенч – 2004*
9. Люстерник Л.А, Соболев.В.И “Элементы функцианльного анализа”Москва 1965.
- 10.Криллов А.А Гвишиани.А.Д “Теремы и задачи функцианльного анализа” Москва 1988.
- 11.Треногин Соболев.В.И “ Задачи и упражнения по функцианльному анализу” Москва 1973.
- 12.Колмогоров А. М., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., Наука, 1976.
- 13.Ш.А.Аюпов, М.М.Ибрагимов “Функционал анализдан мисол ва масалалар”Nukus<<Bilim>> 2009.