

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ
УНИВЕРСИТЕТИ**

Қўлёзма ҳуқуқида

УДК 517.95

ХАИТБОЕВ ҒАЙРАТ СОБИРБОЕВИЧ

**КАРРАЛИ ФУРЬЕ ҚАТОРИ УЧУН ТИХООНОВНИНГ
РЕГУЛЯРЛАШТИРИШ УСУЛИ ҲАҚИДА**

Мутахассислик: 5A130103 – “Математик физика”

Магистр

академик даражасини олиш учун ёзилган

Диссертация

Илмий

раҳбар: ф.м.ф.д. Қосимов Ш.Ғ.

Тошкент – 2014 й.

М У Н Д А Р И Ж А

КИРИШ	3
I БОБ. КОРРЕКТ ВА НОКОРРЕКТ ҚЎЙИЛГАН МАСАЛАЛАР	14
1.1. §. Математик физика масалаларининг коррект қўйилиши	14
1.2. §. А.Н. Тихоновнинг регуляризация методи	18
II БОБ. ТАҚРИБИЙ БЕРИЛГАН ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТЛАРИ БЎЙИЧА БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ ҚИЙМАТИНИ ҲИСОБЛАШ	24
2.1. §. Ортогонал система бўйича бир каррали Фурье қатори	24
2.2. §. Бир каррали тригонометрик Фурье қатори қисмий йиғиндиси учун формула	27
2.3. §. Бир каррали тригонометрик Фурье қаторининг нуқтада яқин- лашиши	30
2.4. §. Бир каррали тригонометрик Фурье қаторини ҳадма-ҳад диффе- ренциаллаш ва интеграллаш	43
2.5. §. Бир каррали тригонометрик Фурье қаторининг текис яқинлашиши	47
2.6. §. Тақрибий берилган Фурье коэффицентлари бўйича бир ўзгарув- чили функция қийматини ҳисоблаш ҳақидаги А.Н. Тихонов теоремаси .	51
III БОБ. КАРРАЛИ ФУРЬЕ ҚАТОРИ УЧУН ТИХООНОВНИНГ РЕГУЛЯРЛАШТИРИШ УСУЛИ	61
3.1. §. Каррали тригонометрик Фурье қатори тушунчаси. Фурье қаторининг тўғри бурчакли ва сферик қисмий йиғиндиси	61
3.2. §. Тақрибий берилган Фурье коэффицентлари бўйича функция қийматини ҳисоблаш ҳақидаги А.Н. Тихонов теоремасининг кўп ўлчамли аналоглари	74
ХУЛОСА	84
Фойдаланилган адабиётлар рўйхати	85

Кириш

Диссертация мавзусининг долзарблиги:

Фан ва техникада кўпгина мараккаб объектларнинг f ташқи кучлар таъсиридаги Lf реакцияларини ўрганиш билан боғлиқ масалаларга дуч келинади. Кўпинча бу реакцияларни f ташқи кучлар таъсирига чизиқли боғлиқ деб ҳисобланади. Санокли сондаги содда $f_n, n \in N$ таъсирларнинг объектдаги реакциялари маълум деб олайлик. Агар f мураккаб таъсирнинг содда таъсирлар орқали чизиқли комбинациясини тасвирлаш мумкин бўлса, у ҳолда системанинг реакциясини содда таъсирлар реакцияларининг чизиқли комбинацияси шаклида тасвирлаш мумкин бўлади. Берилган функцияни чекли ва чексиз маълум содда функцияларнинг чизиқли комбинацияси шаклида тасвирлаш масаласи пайдо бўлади. Масалан, тебраниш назариясида $A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k)$, бунда ω_k – маълум частоталар кетма-кетлиги бўлиб, шу содда гармоник тебранишлар йиғиндиси шаклида тасвирлашга тўғри келади.

Маълумки, математик физиканинг масалалари реал физик жараёнларнинг математик моделини ифода этади ва шунинг учун унинг қўйилиши қуйидаги табиий талабларни қаноатлантириши зарурдир:

а) Ечим қандайдир M_1 функциялар синфида мавжуд бўлиши зарурдир.

в) Ечим қандайдир M_2 функциялар синфида ягона бўлиши зарурдир.

с) Ечим масалада берилганларга (бошланғич ва чегаравий берилганлар, озод ҳад, тенглама коэффицентлари ва бошқалар.) узлуксиз боғлиқ бўлиши зарурдир. Масаланинг $\tilde{u}$ берилганларига u ечимнинг узлуксиз боғлиқлиги қуйидагича:

Масаланинг $\tilde{u}_k, k = 1, 2, \dots$ берилганлари кетма-кетлиги қандайдир маънода $\tilde{u}$ га яқинлашсин ва $u_k, k = 1, 2, \dots, u$ мос равишда масаланинг ечимлари бўлсин: у ҳолда танлаб олинган яқинлашиш маъносида

$u_k \rightarrow u, k \rightarrow \infty$ бўлиши зарурдир. Масалан, масала $Lu = f$ тенгламага келтирилган бўлсин, бунда L — чизиқли оператор бўлиб, M ни N га ўтказсин, бу ерда M ва N нормаллашган чизиқли фазолардир. Бу ҳолда, N ни M га ўтказувчи L^{-1} оператор мавжуд ва чегараланган бўлса, у ҳолда u ечимнинг f озод ҳаддан узлуксиз боғлиқлиги таъминланган бўлади. Ечимнинг узлуксиз боғлиқлик талаби шу билан асосланадики, физик берилганлар биламизки, экспериментдан тақрибий аниқланади, ва шунинг учун танланган математик модел миқёсида масала ечими ўлчов хатолигига муҳим боғлиқ бўлмаслигига ишонч ҳосил қилиш зарур бўлади.

Саналган талабларни қаноатлантирувчи масала (Адамар бўйича) коррект қўйилган, $M_1 \cap M_2$ функциялар синфи эса, корректлик синфи дейилади.

а)–с) шартлардан ҳеч бўлмаганда битта шартни қаноатлантирмайдиган масала нокоррект қўйилган дейилади. Нокоррект қўйилган масалага кўпгина математик физиканинг тескари масалаларида дуч келинади: тўғри масаланинг ечими ҳақидаги айрим информациялар бўйича шу масалани аниқловчи айрим номаълум физик миқдорларни (манба, чегаравий шарт, тенглама коэффицентлари ва бошқаларни.) аниқлашдир.

Нокоррект қўйилган масалага бошқача ёндошиш А.Н. Тихонов томонидан илгари сурилган.

Коррект қўйилган ва нокоррект қўйилган масала фарқланади. Математик физиканинг коррект қўйилган масаласи тушунчаси ҳар хил типдаги (эллиптик учун, масалан, Дирихле масаласи ва унга ўхшашлар, гиперболик учун Коши масаласи) дифференциал тенгламалар учун қайси тип чегаравий шартлар анча табиий эканлигини аниқлашга қизиқиш туфайли Ж. Адамар томонидан киритилгандир.

$Lu = f$ тенглама ва $Bu = \psi$ қўшимча шарт берилган бўлсин.

Сонли масаланинг ҳар қандай ечими асосан берилган “олдиндан берилганлар” $(f, \psi) = \mathfrak{Z} \in F, u = R(\mathfrak{Z})$ бўйича “ечим” u ни топишдан иборатдир.

U ва F метрик фазонинг элементларини уларнинг элементлари орасидаги масофа $\rho_U(u_1, u_2), \rho_F(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2); u_1, u_2 \in U; \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2 \in F$ билан аниқланадиган деб ҳисоблаймиз. Метрика асосан масаланинг қўйилиши билан аниқланади.

Ҳар бир $\mathfrak{Z} \in F$ элемент учун U фазодан олинган ягона $u = R(\mathfrak{Z})$ “ечим” тушунчаси аниқланган бўлсин.

Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун $\delta(\varepsilon) > 0$ сонни топиш мумкин бўлсаки, бунда $\rho_F(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) < \delta(\varepsilon)$ тенгсизликдан $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$ эканлиги келиб чиқса, бунда $u_1 = R(\mathfrak{Z}_1), u_2 = R(\mathfrak{Z}_2); \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2 \in F; u_1, u_2 \in U$; бўлса, у ҳолда U фазодан олинган $u = R(\mathfrak{Z})$ ечимни аниқлаш масаласи $\mathfrak{Z} \in F$ олдиндан берилган бўйича (U, F) фазоларда турғун дейилади.

Агар қуйидаги талаблар (шартлар):

- 1) Ҳар қандай $\mathfrak{Z} \in F$ учун U фазодан олинган u ечим мавжуд;
- 2) ечим бир қийматли аниқланади;
- 3) Масала (U, F) фазоларда турғун бўлса, у ҳолда U фазодан олинган u ечимни аниқлаш масаласи F фазодан олинган $\mathfrak{Z}$ “олдиндан берилганлар” бўйича (U, F) метрик фазолар жуфтида коррект қўйилган дейилади.

Саналган талабларни қаноатлантирмайдиган масала нокоррект қўйилган дейилади.

Шуни таъкидлаш керакки, нокоррект қўйилган масалани аниқлаш (U, F) метрик фазолар жуфтига таллуқли бўлиб, бошқа метрикада шу масаланинг ўзи коррект қўйилган бўлиши ҳам мумкин.

Ж. Адамар, А.Н. Тихонов, С.К. Годунов, В.Я. Арсенин, В.К. Иванов, М.М. Лавентьев Р. Латтес, Ж.Л. Лионс, С.И. Кабанихин ва бошқа олимлар нокоррект масалаларнинг ечилиш усуллари билан шуғулланишган.

Айтайлик, $f(x)$ функция ўзининг

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

тригонометрик Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ сегментда текис яқинлашиш шартларини қаноатлантирсин. Бундан ташқари, бу бир ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффицентларининг a_k ва b_k аниқ қийматлари ўрнига шу Фурье коэффицентларининг $\tilde{a}_k$ ва $\tilde{b}_k$ тақрибий қийматларигина маълум бўлсин. Айнан шу ҳол кўпгина амалий масалаларда учрайди.

Тригонометрик Фурье коэффицентларининг тақрибий қийматларининг берилиш хатосини $l_2(Z)$ фазо нормаси маъносида кичик деб оламиз. Бу эса,

$$\frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \tilde{a}_k)^2 + (b_k - \tilde{b}_k)^2 \leq \delta^2, \quad (2)$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигини билдиради, бу ерда δ – етарлича кичик мусбат сон бўлиб, уни Фурье коэффицентлари берилишининг *четланиши* деб атаймиз.

Табиий равишда, муҳим тадбиққа эга бўлган қуйидаги масала пайдо бўлади: бир ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффицентларининг a_k ва b_k аниқ қийматлари ўрнига шу Фурье коэффицентларининг $\tilde{a}_k$ ва $\tilde{b}_k$ тақрибий қийматлари бўйича берилган x

нуқтада $f(x)$ функцияни $\delta \rightarrow 0$ да, нолга интилувчи $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ хато билан тиклаш талаб этилади.

Фурье коэффициентлари тақрибий қийматлари билан берилганда бевосита, тўғридан-тўғри

$$\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx) \quad (3)$$

тригонометрик Фурье қаторини жамлаш йўли билан берилганда x нуқтада $f(x)$ функцияни ҳеч қандай аниқлик даражасида тиклашга эришиб бўлмаслигини кўрсатамиз.

Ихтиёрий кичик $\delta > 0$ четланишни оламиз ва $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$ бўлсин.

Айтайлик, бу бир ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффициентларининг берилишида қуйидагича аниқ кўринишдаги четланишга эга бўлсин:

$$k = 1, 2, \dots \quad \text{учун} \quad a_0 - \tilde{a}_0 = 0, \quad a_k - \tilde{a}_k = b_k - \tilde{b}_k = \frac{\delta}{kC\sqrt{2}}.$$

Бундай тригонометрик Фурье коэффициентларининг аниқ четланишида, кўриниб турибдики, (2) муносабат аниқ тенглик белгиси билан ўринли бўлади. (1) аниқ Фурье қаторини Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (3) қатор билан алмаштирганда биз

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \tilde{a}_k) \cos kx + (b_k - \tilde{b}_k) \sin kx$$

қатор йиғиндисига тенг бўлган хатоликка эга бўлдамиз.

$x = 0$ нуқтада бу хатолик четланиш $\delta > 0$ қанча кичик бўлмасин, барибир

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \tilde{a}_k) = \frac{\delta}{C\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

бўлади.

Шундай қилиб, (1) аниқ тригонометрик Фурье қатори $f(x)$ функцияга қанча тез яқинлашувчи бўлмасин, Фурье коэффициентлари тақрибий

берилган (3) қатор билан алмаштирганда биз (2) муносабат билан берилган хатолик четланиши $\delta > 0$ қанча кичик бўлмасин, барибир тригонометрик Фурье қаторини тўғридан-тўғри жамлаш $f(x)$ функцияни Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (3) қатор ёрдамида $[-\pi, \pi]$ сегментдаги нуқтада ҳеч қандай аниқлик даражасида тиклаб бўлмайди.

Биз $\{a_k, b_k\}$ ва $\{\tilde{a}_k, \tilde{b}_k\}$ Фурье коэффициентларига мос, (2) муносабат маъносида берилган характерловчи хатолик четланиши $\delta > 0$ қанча кичик бўлмасин, барибир бу иккита берилганларга мос тригонометрик Фурье коэффициентли (1) ва (3) қаторларини тўғридан-тўғри жамлашда йиғинди бир-биридан жуда кучли фарқ қилиши мумкин экан.

Бундай турдаги масалалар, яъни берилганларнинг жуда кичик четланишида (бу ерда берилганлар Фурье коэффициентлари тўпламидан иборат) уларга мос ечимларнинг (биз қараётган ҳолда ечим деб тригонометрик Фурье қаторининг тўғри йиғиндисини тушунамиз) исталганча катта фарқ қилишлиги математикада кўп учрайдиган ва тадбиқларга эга бўлган нокоррект қўйилган масала деб аталувчи масала тушунчасига олиб келади.

Бошқача сўз билан айтганда, биз қараётган тригонометрик Фурье қаторининг тўғри йиғиндисини топиш масаласи нокоррект қўйилган масала бўлади.

Математик физиканинг коррект ва нокоррект қўйилган масалалари ниҳоятда кенг қўламли бўлиб, улар турли физик, механик, техник, биологик ва бошқа жараёнларни ўрганиш билан узвий боғлиқдир. Диссертацияда ўрганилган мавзу долзарб масалалардан бири бўлиб, унда кўп ўзгарувчили функция Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларида каррали тригонометрик Фурье қаторини жамлаш ҳақидаги масалани ва бу масала учун регуляриштириш методи ишлаб чиқиш масалаларини ўрганишга бағишланган.

Юқорида келтирилган фикрлар диссертация мавзусининг долзарблигидан далолат беради.

Мавзунинг ўрганилганлик даражаси:

Нокоррект қўйилган масалаларнинг кенг синфларини ечишнинг умумий методлари академик А.Н. Тихонов томонидан ишлаб чиқилган ва регуляриштириш методлари деб номланади.

Бу ерда биз тригонометрик Фурье қаторининг йиғиндиси ҳақидаги масалага регуляриштириш методини қўллашга тўхталамиз.

Такрибий Фурье коэффициентлари билан берилган тригонометрик Фурье қаторининг йиғиндиси ҳақидаги масалага регуляриштириш методини қўллаш алгоритми $f(x)$ функциянинг такрибий қиймати сифатида (3) қаторнинг йиғиндисини эмас, балки

$$\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx) \cdot \frac{1}{1+k^2\alpha}, \quad (4)$$

қаторнинг йиғиндисини қарашдан иборат бўлиб, бунда (3) қаторнинг k – ҳадини «регуляриштирувчи» $\frac{1}{1+k^2\alpha}$ кўпайтувчига кўпайтиришдан ҳосил қилинган. Бу ерда α параметр ҳам (2) муносабатдаги Фурье коэффициентларининг δ четланиши каби бир хил тартибдаги кичик миқдордан иборат.

Келтирилган алгоритмни асословчи А.Н. Тихонов теоремаси ўринлидир:

А.Н. Тихонов теоремаси. $f(x)$ функция $L_2[-\pi, \pi]$ синфга тегишли ва $[-\pi, \pi]$ сегментдаги берилган x нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда ҳар бир $\delta > 0$ ва δ билан бир хил тартибли кичик миқдор бўлган $\alpha > 0$ учун (2) муносабатни қаноатлантирувчи $\tilde{a}_k$ ва $\tilde{b}_k$ коэффициентли (4) қатор йиғиндиси $f(x)$ функция билан $\delta \rightarrow 0$ да, нолга интилувчи $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ хато билан устма-уст тушади.

А.Н. Тихонов томонидан таклиф этилган регуляриштириш методи табиий илмий аҳамиятга эга.

Айтайлик, қандайдир асбоблар ёрдамида биз ўзимизни қизиқтираётган физик жараённинг частотавий характеристикаларини ўлчайлик. Асбобларнинг мукамал эмаслиги учун биз физик жараённинг частотавий характеристикаларини қандайдир хато билан ўлчаймиз.

Табиий равишда муаммо келиб чиқади: Бизни қизиқтирувчи физик жараён ҳақида етарлича аниқ тасаввурга эга бўлиш мумкинми, ёки бу тасаввурга биз ўлчаш натижаларни математик методлар ёрдамида қайта ишлаб ривожлантириш йўли билан эришамизми, бунда ўрганилаётган физик жараённинг частотавий характеристикаларнинг ўлчашлар аниқлиги ҳақида максимал ахборатга эга бўлишимиз керак бўлади.

Регулярлаштириш методи ўлчаш натижаларни математик методлар ёрдамида қайта ишлаб ривожлантириш йўли билан эришиш мумкинлигини кўрсатади, бунда ўрганилаётган физик жараён ҳақида унинг частотавий характеристикаларнинг(яъни Фурье коэффициентларининг) ўлчашлар аниқлиги ҳақидаги хатоларни билиш керак бўлади.

Магистрлик диссертациясида кўп ўзгарувчили функция Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларида каррали тригонометрик Фурье қаторини жамлаш ҳақидаги масалани ва бу масала учун регулярлаштириш методини ишлаб чиқиш муаммолари тадқиқ этилади.

Мазкур диссертацияда кўп ўзгарувчили функция Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларида каррали тригонометрик Фурье қаторини жамлаш ҳақидаги масалани ечиш ва бу масала учун регулярлаштириш методини аниқлашга оид янги натижалар олиниши кўзда тутилган.

Шуни алоҳида таъкидлаш керакки, кейинги йилларда ўрганилаётган тадқиқотларнинг асосий қисми нокоррект қўйилган масалаларни ўрганишга бағишланган.

Ушбу магистрлик диссертациясининг мавзуси Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети математик физика кафедрасида олиб борилаётган илмий-тадқиқот ишлари мавзуларига мос келади.

Диссертация иши кўп ўзгарувчи функция Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларида каррали тригонометрик Фурье қаторини жамлаш ҳақидаги масалани ва бу масала учун регуляриштириш методини ишлаб чиқиш масалаларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг мақсади:

Кўп ўзгарувчи функция Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларида каррали тригонометрик Фурье қаторини жамлаш ҳақидаги масалани ва бу масала учун регуляриштириш методини ишлаб чиқиш масалаларининг корректлигини ўрганишдан иборат.

Тадқиқот вазифалари:

Асосий вазифалар қуйидагилардан иборат.

1. Каррали тригонометрик Фурье қатори учун Тихоновнинг регуляриштириш усулининг аналогини яратиш. Бунда аввалом бор, каррали тригонометрик Фурье қатори тушунчаси, Фурье қаторининг тўғри бурчакли ва сферик қисмий йиғиндиларини ўрганиш, ҳамда тўғри бурчакли ва сферик қисмий йиғиндилар бўйича текис ва абсолют яқинлашиш ҳақидаги теореманинг янгича исботи келтиришдан иборат;

2. Тақрибий берилган Фурье коэффициентлари бўйича кўп ўзгарувчи функция қийматини ҳисоблаш ҳақидаги А.Н. Тихонов теоремасининг кўп ўлчамли аналогини яратиш. Бунга кўра, кўп ўзгарувчи функция Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларида шу функцияни берилган нуқтада кичик хато билан тиклаш масаласини ҳал этишдан иборат.

Тадқиқот объекти ва предмети:

Ушбу магистрлик диссертацияси кўп ўзгарувчи функция Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларида шу функцияни берилган нуқтада кичик хато билан тиклаш масаласини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотда қўлланилган услубларнинг қисқача тавсифи:

Диссертацияда кўп ўзгарувчили функцияни каррали Фурье қаторига ёйиш методи ва бошқа методлардан кенг фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг илмий жиҳатдан янгилик даражаси:

Диссертацияда келтирилган илмий натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат:

- Каррали тригонометрик Фурье қатори учун Тихоновнинг регуляриштириш усулининг аналоги яратиш. Бунда аввалом бор, каррали тригонометрик Фурье қатори тушунчаси, Фурье қаторининг тўғри бурчакли ва сферик қисмий йиғиндиларини ўрганиш, ҳамда тўғри бурчакли ва сферик қисмий йиғиндилар бўйича текис ва абсолют яқинлашиш ҳақидаги теореманинг янгича исботи келтиришдан иборат;
- Такрибий берилган Фурье коэффициентлари бўйича кўп ўзгарувчили функция қийматини ҳисоблаш ҳақидаги А.Н. Тихонов теоремасини умумлаштирувчи теоремани исботлашдан ва бунга кўра, кўп ўзгарувчили функция Фурье коэффициентларининг такрибий қийматларида шу функцияни берилган нуктада кичик хато билан тиклаш масаласини ҳал этишдан иборат.

Тадқиқотнинг илмий ва амалий аҳамияти ва тадбиқи:

Кейинги йилларда математик физика фани соҳасида олиб борилаётган фундаментал тадқиқотларнинг асосий йўналишларидан бири “Эллиптик дифференциал операторларнинг спектрал назарияси” бўлиб мазкур магистрлик диссертацияси муҳим илмий ва амалий аҳамиятга эга эканлигини билдиради.

Ҳимояга олиб чиқиляётган асосий ҳолатлар:

Магистрлик диссертациясида олинган асосий натижалар кафедра семинарларида ва республика миқёсида ўтказилган конференцияларда маъруза қилинган.

Иш тузилиши ва таркиби:

Мазкур магистрлик диссертацияси кириш, 3 та боб, 10 та параграфдан ҳамда хулоса ва адабиётлар рўйхатидан иборат.

Бажарилган ишнинг асосий натижалари:

Тадқиқот ишининг асосий мазмуни ва натижалари 2013 йил Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университетининг 95 йиллигига бағишланган Математика, Механика ва Информатика фанларининг ривожига истеъдодли ёшларнинг ўрни илмий-амалий семинари тезислари тўпламида (102-103 бетлар), 2013 йил 21-23 ноябрь кунлари Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университетида “Дифференциал тенгламаларнинг замонавий муаммолари ва уларнинг тадбиқлари” мавзусида бўлган республика миқёсидаги конференция тўпламида (245-бет) ва Ўзбекистон Математика Журналида (2014 й. №1. 119-125 бетлар) ўз ифодасини топган.

Хулоса ва таклифларнинг қисқача умумлаштирилган ифодаси:

Диссертацияда тақдим этилган ечим ва методлар ёрдамида физик жараёнларнинг математик моделини тузишда ҳосил бўладиган масалаларнинг корректлигини ва ечимининг бир қийматли ифодасини ўрганиш мумкин. Диссертацияда олинган натижалардан дифференциал операторларнинг спектрал назарияси, интеграл тенгламалар ва псевдодифференциал операторлар, гармоник анализ ва тақсимотлар назарияси каби махсус курсларда фойдаланиш мумкин. Шунини таъкидлаш мумкинки, коррект ва нокоррект қўйилган масалаларни ўрганиш ва янги натижалар ҳосил қилиш мумкин. Шунинг учун бу соҳада янги тақиқотлар олиб бориш мақсадга мувофиқдир.

I БОБ. КОРРЕКТ ВА НОКОРРЕКТ ҚЎЙИЛГАН МАСАЛАЛАР

1.1-§. МАТЕМАТИК ФИЗИКА МАСАЛАЛАРИНИНГ КОРРЕКТ ҚЎЙИЛИШИ

Маълумки, математик физиканинг масалалари реал физик жараёнларнинг математик моделини ифода этади ва шунинг учун унинг қўйилиши қуйидаги табиий талабларни қаноатлантириши зарурдир:

а) Ечим қандайдир M_1 функциялар синфида мавжуд бўлиши зарурдир.

в) Ечим қандайдир M_2 функциялар синфида ягона бўлиши зарурдир.

с) Ечим масалада берилганларга (бошланғич ва чегаравий берилганлар, озод ҳад, тенглама коэффицентлари ва бошқалар.) узлуксиз боғлиқ бўлиши зарурдир. Масаланинг $\tilde{u}$ берилганларига u ечимнинг узлуксиз боғлиқлиги қуйидагича:

Масаланинг $\tilde{u}_k$, $k = 1, 2, \dots$ берилганлари кетма-кетлиги қандайдир маънода $\tilde{u}$ га яқинлашсин ва u_k , $k = 1, 2, \dots, u$ мос равишда масаланинг ечимлари бўлсин: у ҳолда танлаб олинган яқинлашиш маъносида $u_k \rightarrow u$, $k \rightarrow \infty$ бўлиши зарурдир. Масалан, масала $Lu = f$ тенгламага келтирилган бўлсин, бунда L — чизиқли оператор бўлиб, M ни N га ўтказсин, бу ерда M ва N нормаллашган чизиқли фазолардир. Бу ҳолда, N ни M га ўтказувчи L^{-1} оператор мавжуд ва чегараланган бўлса, у ҳолда u ечимнинг f озод ҳаддан узлуксиз боғлиқлиги таъминланган бўлади. Ечимнинг узлуксиз боғлиқлик талаби шу билан асосланадики, физик берилганлар биламизки, экспериментдан тақрибий аниқланади, ва шунинг учун танланган математик модел миқёсида масала ечими ўлчов хатолигига муҳим боғлиқ бўлмаслигига ишонч ҳосил қилиш зарур бўлади.

Саналган талабларни қаноатлантирувчи масала (Адамар бўйича) коррект қўйилган, $M_1 \cap M_2$ функциялар синфи эса, корректлик синфи дейилади.

а)–с) шартлардан ҳеч бўлмаганда битта шартни қаноатлантирмайдиган масала нокоррект қўйилган дейилади. Нокоррект қўйилган масалага кўпгина математик физиканинг тескари масалаларида дуч келинади: тўғри масаланинг ечими ҳақидаги айрим информациялар бўйича шу масалани аниқловчи айрим номаълум физик миқдорларни (манба, чегаравий шарт, тенглама коэффицентлари ва бошқаларни.) аниқлашдир.

Нокоррект қўйилган масалага бошқача ёндошиш А.Н. Тихонов томонидан илгари сурилган.

Коррект қўйилган ва нокоррект қўйилган масала фарқланади. Математик физиканинг коррект қўйилган масаласи тушунчаси ҳар хил типдаги (эллиптик учун, масалан, Дирихле масаласи ва унга ўхшашлар, гиперболик учун Коши масаласи) дифференциал тенгламалар учун қайси тип чегаравий шартлар анча табиий эканлигини аниқлашга қизиқиш туфайли Ж. Адамар томонидан киритилгандир.

$Lu = f$ тенглама ва $Bu = \psi$ қўшимча шарт берилган бўлсин.

Сонли масаланинг ҳар қандай ечими асосан берилган “олдиндан берилганлар” $(f, \psi) = \mathfrak{Z} \in F, u = R(\mathfrak{Z})$ бўйича “ечим” u ни топишдан иборатдир.

U ва F метрик фазонинг элементларини уларнинг элементлари орасидаги масофа $\rho_U(u_1, u_2), \rho_F(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2); u_1, u_2 \in U; \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2 \in F$ билан аниқланадиган деб ҳисоблаймиз. Метрика асосан масаланинг қўйилиши билан аниқланади.

Ҳар бир $\mathfrak{Z} \in F$ элемент учун U фазодан олинган ягона $u = R(\mathfrak{Z})$ “ечим” тушунчаси аниқланган бўлсин.

Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун $\delta(\varepsilon) > 0$ сонни топиш мумкин бўлсаки, бунда $\rho_F(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2) < \delta(\varepsilon)$ тенгсизликдан $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$ эканлиги келиб чиқса, бунда $u_1 = R(\mathfrak{I}_1)$, $u_2 = R(\mathfrak{I}_2)$; $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 \in F$; $u_1, u_2 \in U$; бўлса, у ҳолда U фазодан олинган $u = R(\mathfrak{I})$ ечимни аниқлаш масаласи $\mathfrak{I} \in F$ олдиндан берилган бўйича (U, F) фазоларда турғун дейилади.

Агар қуйидаги талаблар (шартлар):

- 1) Ҳар қандай $\mathfrak{I} \in F$ учун U фазодан олинган u ечим мавжуд;
- 2) ечим бир қийматли аниқланади;
- 3) Масала (U, F) фазоларда турғун бўлса, у ҳолда U фазодан олинган u ечимни аниқлаш масаласи F фазодан олинган $\mathfrak{I}$ “олдиндан берилганлар” бўйича (U, F) метрик фазолар жуфтида коррект қўйилган дейилади.

Саналган талабларни қаноатлантирмайдиган масала нокоррект қўйилган дейилади.

Шуни таъкидлаш керакки, нокоррект қўйилган масалани аниқлаш (U, F) метрик фазолар жуфтига таллуқли бўлиб, бошқа метрикада шу масаланинг ўзи коррект қўйилган бўлиши ҳам мумкин.

Адамар мисоли. Коши-Ковалевская теоремаси унинг умумий характерда бўлишлигига қарамасдан, дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласининг коррект қўйилганлиги ҳақидаги масалани тўлиқ ечмайди. Ҳақиқатдан, ҳам бу теорема ечимнинг мавжуд ва ягоналигини фақатгина етарлича кичик атрофдагина таъминлайди, ёки кичик жойда деб гапирилади. Кўпинча бу фактларни (кичик бўлмаган жойда) соҳада, ёки бутунлай ўрнатиш талаб этилади. Бундан, ташқари берилган бошланғичлар ва тенгламанинг озод ҳади асосан аналитик бўлмаган функциялардан иборатдир. Сўнги шарт, яъни ечимнинг берилган бошланғичлардан узлуксиз

боғлиқлиги умуман бўлмаслиги мумкин. Бу эса, биринчи бўлиб Адамар томонидан қурилган мисолда кўринади.

Икки ўлчамли ҳолда, Лаплас тенгламаси учун Коши масаласини қараймиз. Бу масала $\Delta u(x, y) = 0$ тенгламанинг берилган бошланғичлар бўйича ечимини топишдан, яъни

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad \text{бунда } f(x) \text{ ва } \varphi(x)$$

олдиндан берилган функциялар бўлганда ечимни топишдан иборатдир.

Агар $f_1(x) \equiv 0, \varphi_1(x) = \frac{1}{a} \sin ax$ деб олсак, у ҳолда Коши масаласининг ечими $u_1(x, y) = \frac{1}{a^2} \sin ax \cdot \operatorname{sh} ay, a > 0$ функциядан иборатдир.

Агар $f_2(x) = \varphi_2(x) \equiv 0$ деб олсак, у ҳолда шу Коши масаласининг ечими $u_2(x, y) \equiv 0$ функциядан иборатдир.

Агар олдиндан берилган бошланғичлар четланиши ва ечим C метрикада баҳоланса, у ҳолда

$$\rho_C(f_1, f_2) = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0,$$

$$\rho_C(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{a}$$

бўлади. Охирги миқдор a нинг етарлича катта қийматида исталганча кичик миқдор бўлади. Бироқ ечимнинг четланиши

$$\begin{aligned} \rho_C(u_1, u_2) &= \sup_x |u_1(x, y) - u_2(x, y)| = \\ &= \sup_x \left| \frac{1}{a^2} \sin ax \cdot \operatorname{sh} ay \right| = \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ay \end{aligned}$$

шаклида бўлиб, ҳар қандай тайинланган $y > 0$ учун a соннинг етарлича катта қийматида исталганча катта бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, бу масала турғунлик хоссасига эга эмас ва шунга кўра, нокоррект қўйилган бўлади.

1.2-§. А.Н. ТИХОНОВНИНГ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МЕТОДИ

Кўпгина $Aq = f$ кўринишдаги нокоррект масалаларда мумкин бўлган ечимлар синфи $M \subset Q$ компакт бўлмайди, f – берилганларни ўлчаш хатолигида ечим мавжудлигининг $A(M)$ синфидан ташқарига чиқиш мумкин. Бундай масалаларнинг тақрибий ечимини куриш учун А.Н. Тихонов таклиф этган регуляриштириш методидан фойдаланиш мумкин.

Аввал $Aq = f$ масала учун регуляриштириш алгоритмининг умумий таърифини келтирамиз. Айтайлик, A – чизиқли чегараланган оператор бўлиб, тескариланувчи бўлсин. A оператор ва f ўнг қисми ўрнига уларнинг A_h ва f_δ тақрибий қийматлари маълум бўлиб (Q ва F – нормаллашган фазолар),

$$\|A - A_h\| \leq h, \quad \|f - f_\delta\| \leq \delta$$

тенгсизликларни қаноатлантирсин.

$\bar{A}$ – орқали A операторларнинг мумкин бўлган кўзғалишлари тўпламини белгилаймиз.

Таъриф 1.2.1. Агар барча $f \in R(A) = A(Q)$ учун $\delta \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ да

$$\sup_{\substack{\|f - f_\delta\| \leq \delta, \|A - A_h\| \leq h, \\ f_\delta \in F, A_h \in \bar{A}}} \|R_{\delta h}(f_\delta, A_h) - A^{-1}f\| \rightarrow 0$$

бўлса, у ҳолда $Aq = f$ масала учун $R_{\delta h} : f \times \bar{A} \rightarrow Q$ акслантиришлар оиласи *регуляриштириш алгоритми* дейилади. $\{R_{\delta h}(f_\delta, A_h)\}$ тўпلام $\delta \in (0, \delta_0], h \in (0, h_0]$ бўлганда $Aq = f$ масала тақрибий ечимларининг *регуляриштирилган оиласи* дейилади.

Агар $Aq = f$ тенгламанинг ечими q_T ҳақида априор ахборотлар маълум бўлса, масалан, $q_T \in M \subset Q$ шарт ўринли бўлса, у ҳолда таърифда $A^{-1}f$ тўпламни $A^{-1}f \cap M$ тўплам билан алмаштириш етарлидир. Кўпгина ҳолларда A оператор аниқ берилган ҳисобланади.

Энди $A:Q \rightarrow F$ оператор Q ва F – метрик фазолар, q_T – эса, қандайдир $f \in F$ учун $Aq = f$ нокоррект масаланинг аниқ ечими бўлсин.

Таъриф 1.2.2 (регуляризирувчи оила). Агар

1) ихтиёрий $\alpha > 0$ учун $R_\alpha : F \rightarrow Q$ оператор узлуксиз;

2) ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун $\alpha_* > 0$ топилиб, барча $\alpha \in (0, \alpha_*)$ учун $\rho_Q(R_\alpha f, q_T) < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли, яъни бошқача сўз билан айтганда

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} R_\alpha f = q_T \quad (1.2.1)$$

бўлса, у ҳолда $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ операторлар оиласига $Aq = f$ масала учун *регуляризирувчи* дейилади.

Агар $Aq = f$ тенгламанинг ўнг томони тақрибий берилган ва бу берилганнинг δ четланиши $\rho_F(f_\delta, f) \leq \delta$ маълум бўлса, у ҳолда $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ регуляризирувчи операторлар оиласи нафақат $q_{\alpha\delta} = R_\alpha f_\delta$ тақрибий ечимни куриш, балки $q_{\alpha\delta} = R_\alpha f_\delta$ тақрибий ечимнинг q_T аниқ ечимдан четлашишни баҳолаш имконини беради. Ҳақиқатдан ҳам, учбурчак тенгсизлигига кўра,

$$\rho_Q(q_{\alpha\delta}, q_T) \leq \rho_Q(q_{\alpha\delta}, R_\alpha f) + \rho_Q(R_\alpha f, q_T) \quad (1.2.2)$$

тенгсизликка эга бўламиз. (1.2.2) тенгсизликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчи $\alpha \rightarrow +0$ да нолга интилади. Масаланинг нокоррект эканлигидан $\alpha \rightarrow +0$, $\delta \rightarrow +0$ да биринчи қўшилувчини баҳолаш масаласи муаммо бўлиб, ҳар бир конкрет ҳолда бу масаланинг махсуслигини ҳисобга олиб, ҳамда аниқ ечим ҳақидаги априор ёки апостериор ахборотларни ҳисобга олиб ечилади.

Мисол сифатида, Q, F – банах фазолари, $A: Q \rightarrow F$ чизиқли тўла узлуксиз оператор, R_α – эса, барча $\alpha > 0$ учун чизиқли оператор бўлсин. Айтайлик, $f \in F$ учун ягона q_T ечим мавжуд ва f ўрнига унинг

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta \quad (1.2.3)$$

шартни қаноатлантирувчи тақрибий $f_\delta \in F$ қиймати берилган бўлсин. Аниқ q_T ечим ва регуляриштирилган $q_{\alpha\delta} = R_\alpha f_\delta$ тақрибий ечимларнинг айирмасининг нормасини баҳолаймиз:

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\| \leq \|q_T - R_\alpha f\| + \|R_\alpha f - R_\alpha f_\delta\|. \quad (1.2.4)$$

$\|q_T - R_\alpha f\| = \gamma(q_T, \alpha)$ деб белгилаймиз. У ҳолда регуляриштирувчи оиланинг (1.2.1) хоссага кўра, (1.2.4) муносабатнинг ўнг томонидаги биринчи кўшилувчи $\alpha \rightarrow +0$ да нолга интилади, яъни $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \gamma(q_T, \alpha) = 0$ бўлади.

R_α операторнинг чизиқлилигидан ва (1.2.3) шартдан

$$\|R_\alpha f - R_\alpha f_\delta\| \leq \|R_\alpha\| \delta$$

тенгсизлик келиб чиқади. $A: Q \rightarrow F$ операторнинг нормаси, бунда Q ва F – банах фазолари бўлганда

$$\|A\| = \sup_{\substack{q \in Q \\ q \neq 0}} \frac{\|Aq\|}{\|q\|}$$

формула бўйича аниқланади. Масала нокоррект бўлгани учун $\|R_\alpha\|$ текис чегараланган бўлмайди, акс ҳолда $\lim_{\alpha \rightarrow +0} R_\alpha = A^{-1}$ ва $Aq = f$ масала классик маънода коррект қўйилган бўлади. Бироқ, агар α ва δ бир-бирига боғлиқ ҳолда нолга интилса, у ҳолда

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\| \leq \gamma(q_T, \alpha) + \|R_\alpha\| \delta. \quad (1.2.5)$$

тенгсизликнинг ўнг томони нолга интилади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\omega(q_T, \delta) = \inf_{\alpha > 0} \{ \gamma(q_T, \alpha) + \|R_\alpha\| \delta \} \quad \text{деб белгилаймиз ва} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(q_T, \delta) = 0$$

эканлигини кўрсатамиз.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон бўлсин. $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \gamma(q_T, \alpha) = 0$ бўлгани учун шундай бир

$\alpha_0(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, барча $\alpha \in (0, \alpha_0(\varepsilon))$ учун $\gamma(q_T, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик

ўринли бўлади. $\mu_0(\varepsilon) = \inf_{\alpha \in (0, \alpha_0(\varepsilon))} \|R_\alpha\|$ деб белгилаймиз ва $\delta_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\mu_0(\varepsilon)}$

деб оламиз. У ҳолда барча $\delta \in (0, \delta_0(\varepsilon))$ учун

$$\inf_{\alpha > 0} \{\|R_\alpha\| \delta\} \leq \delta \inf_{\alpha \in (0, \alpha_0(\varepsilon))} \{\|R_\alpha\|\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай бир $\alpha_0(\varepsilon) > 0$ ва $\delta_0(\varepsilon) > 0$ сонлар топилиб, барча $\alpha \in (0, \alpha_0(\varepsilon))$ ва $\delta \in (0, \delta_0(\varepsilon))$ учун

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\| \leq \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Конкрент A оператор ва $\{R_\alpha\}_{\alpha > 0}$ операторлар оиласи учун α регуляризирувчи параметр ва берилганларнинг δ четланиш сатҳи орасидаги боғлиқликни ошкор кўринишдаги ҳосил қиламиз.

Кўпроқ таниш бўлган усуллардан бири

$$M(q, f_\delta, \alpha) = \|Aq - f_\delta\|^2 + \alpha \Omega(q - q^0)$$

А.Н. Тихонов функционалини минимизация қилишдан иборат бўлган регуляризирувчи оилани куришдир. Бу ерда q^0 – асосий ечим; α – регуляризирувчи параметр; Ω – стабиллаштирувчи функционал бўлиб, асосан норма шаклида (ёки ярим норма шаклида) танланади, масалан $\Omega(q) = \|q\|^2$. Ω – стабилизатор берилганларнинг боғлиқ равишда $\alpha(\delta) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ да тақрибий ечимнинг аниқ ечимга интилишининг яқинлашиш типини аниқлашда аниқ ечимнинг силлиқлик даражаси ҳақидаги (ёки ечимнинг структураси ҳақидаги) априор ахборотларни ҳисобга олади. Масалан, биринчи турдаги интеграл тенгламани сонли усуллар ёрдамида

ечишда ечим мавжуд, ягона ва етарлича силлиқ бўлади. Бунда Тихонов методи $\Omega(q) = \|q\|_{W_2^1}^2$ ҳолда эффективдир.

$$M(q, f, \alpha) = \|Aq - f\|^2 + \alpha \|q\|^2, \quad \alpha > 0 \quad (1.2.6)$$

содда мисолни қарайлик. Бу ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир:

Теорема 1.2.1. Q ва F – гильберт фазолари, A – чизиқли тўла узлуксиз оператор бўлсин. У ҳолда ҳар бир $f \in F$ ва $\alpha > 0$ учун $M(q, f, \alpha)$ функционал ўзининг аниқ қуйи чегарасига ягона q_α элементда эришади.

Бир оз умумийроқ бўлган $A_h q = f_\delta$ ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир:

Теорема 1.2.2. Айтайлик, A_h оператор ва тенгламанинг f_δ ўнг қисми

$$\|A_h - A\| \leq h, \quad \|f - f_\delta\| \leq \delta \quad (1.2.7)$$

аппроксимация шартларини қаноатлантирсин, бунда $h \in (0, h_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$ бўлсин. Бундан ташқари, A ва A_h чизиқли чегараланган операторлар бўлиб, Q фазодан F фазога таъсир қилади, бу ерда Q ва F – гильберт фазоларидир. q_H^0 – элемент q^0 элементга нисбатан $Aq = f$ масаланинг нормал ечими, яъни $Aq = f$ масаланинг барча Q_f ечимлари тўпламида $\|q - q^0\|$ функционалга минимум берувчи элемент бўлсин. У ҳолда ҳар бир $\alpha > 0$, $q^0 \in Q$, $h \in (0, h_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$ учун

$$\min \left\{ \|A_h q - f_\delta\|^2 + \alpha \|q - q^0\|^2, \quad q \in Q \right\} \quad (1.2.8)$$

масаланинг $q_{h\delta}^\alpha$ ягона ечими мавжуд ва агар α регуляризирувчи параметр

$$(\Delta = \sqrt{h^2 + \delta^2}) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \alpha(\Delta) = 0, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(h + \delta)^2}{\alpha(\Delta)} = 0$$

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \|q_{h\delta}^\alpha - q^0\| = 0$$

бўлади.

II БОБ. ТАҚРИБИЙ БЕРИЛГАН ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТЛАРИ БЎЙИЧА БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ ҚИЙМАТИНИ ҲИСОБЛАШ

2.1-§. ОРТОГОНАЛ СИСТЕМА БЎЙИЧА БИР КАРРАЛИ ФУРЬЕ ҚАТОРИ

$[a, b]$ ораликда $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ функциялар системаси берилган бўлиб, ихтиёрий $n, m \in N, n \neq m$ учун $\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0$ бўлса, у ҳолда берилган система $[a, b]$ ораликда ортогонал система деб айтилади. Бундан ташқари $\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1, n \in N$ учун ўринли бўлса, у ҳолда $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси $[a, b]$ ораликда ортонормал функциялар системаси дейилади. Масалан, $\frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{e}, \sin \frac{\pi x}{e}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{e}, \sin \frac{n\pi x}{e}, \dots$ тригонометрик система $[-l, l]$ ораликда ортогонал система бўлади.

$\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{e}} \cos \frac{\pi x}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}} \sin \frac{\pi x}{e}, \dots, \frac{1}{\sqrt{e}} \cos \frac{n\pi x}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}} \sin \frac{n\pi x}{e}, \dots$ тригонометрик система эса $[-l, l]$ ораликда ортонормал система бўлади.

$[a, b]$ ораликда узлуксиз $f(x)$ функция ва $\{\varphi_k(x)\}$ ортогонал система берилган бўлиб, ҳар бир $\varphi_k(x)$ функция узлуксиз ва айнан ноль бўлмаган функция бўлсин. Агар шундай бир $\{a_k\}$ сонлар кетма-кетлиги топилиб, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ функционал қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $f(x)$ функцияга тенг бўлса, яъни $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), x \in [a, b]$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда $\{\varphi_k(x)\}$ ортогонал функциялар системаси бўйича ёйилган дейилади.

1–Лемма. Агар $[a, b]$ ораликда $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), x \in [a, b]$ функционал қатор текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор коэффициентлари учун

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}, \quad n \in N$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлган $\varphi_n(x)$ функция шу ораликда Вейерштрасс теоремасига кўра чегаралаган ҳамдир. Агар текис яқинлашувчи қаторни чегараланган функцияга кўпайтирсак ҳам, текис яқинлашувчи қаторни ҳосил қиламиз. Шунинг учун берилган қаторни $\varphi_n(x)$ функцияга кўпайтириб

$$f(x) \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \varphi_n(x), \quad n \in N$$

қаралаётган $[a, b]$ ораликда текис яқинлашувчи қаторни ҳосил қиламиз. Бу қаторни ҳадма ҳад интеграллаб,

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx = a_n \int_a^b \varphi_n^2(x) dx$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Лемма исбот бўлди. Коэффициентлари бундай тенглик билан аниқланадиган қаторга Фурье қатори дейилади. $[-l, l]$ ораликда $f(x)$ функцияни тригонометрик система бўйича Фурье қаторига ёйсақ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

бунда a_k ва b_k Фурье коэффициентлар қуйидагича аниқланади:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in N$$

Хусусан, $l = \pi$ бўлган ҳолда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in N.$$

2-Лемма. (Риман леммасы). Агар (a, b) чекли ёки чексиз интервалда $f(x)$ функция абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \omega x dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \omega x dx = 0$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Аввал чекли $[a, b]$ оралиқда Риман маъносида $f(x)$ функция интегралланувчи бўлсин. Интегралланувчи бўлишлик шартига кўра, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сони учун шундай бир $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилиб, бўлинишлар майдалиги $l < \delta$ бўлган $T = \{x_i\}_0^n$ бўлиниш учун Дарбунинг юқори ва қуйи йиғиндилар айирмаси $S_T - s_T < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади, яъни $S_T - s_T = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$, бунда $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$. У ҳолда ҳар бир $i = \overline{1, n}$ ва $x \in [x_{i-1}, x_i]$ учун $0 \leq f(x) - m_i \leq M_i - m_i$ ва

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin \omega x dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin \omega x dx \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - m_i) \sin \omega x dx + \sum_{i=1}^n m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \omega x dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - m_i| \cdot |\sin \omega x| dx + \sum_{i=1}^n \frac{|m_i|}{|\omega|} |\cos \omega x_i - \cos \omega x_{i-1}| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i + \frac{2}{|\omega|} \sum_{i=1}^n |m_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{c_0}{|\omega|}, \end{aligned}$$

бунда $c_0 = 2n \cdot \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Ҳар бир тайинланган n учун $\omega_0 > 0$ сон топилиб $|\omega| > \omega_0$ учун

$\frac{c_0}{\omega} < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Шундай қилиб $|\omega| > \omega_0$ учун

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \omega x dx \right| < \varepsilon, \text{ яъни } \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \omega x dx = 0 \text{ бўлади.}$$

Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалда абсолют интегралланувчи бўлиб, b нукта ягона махсус нукта бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\exists b' < b$ мавжуд бўлиб, $[a, b']$ ораликда $f(x)$ функция Риман маъносида интегралланувчи ва $\int_{b'}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Шунинг учун $|\omega| > \omega_0$ учун

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \omega x dx \right| = \left| \int_a^{b'} f(x) \sin \omega x dx + \int_{b'}^b f(x) \sin \omega x dx \right| \leq \\ \leq \left| \int_a^{b'} f(x) \sin \omega x dx \right| + \int_{b'}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Демак, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \omega x dx = 0$. Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \omega x dx = 0 \text{ бўлади.}$$

Натижа. Агар $f(x)$ функция $[-l, l]$ ораликда абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда тригонометрик системанинг Фурье коэффициентлари a_n ва b_n нолга интилади.

2.2-§. БИР КАРРАЛИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЬЕ ҚАТОРИ ҚИСМИЙ ЙИҒИНДИСИ УЧУН ФОРМУЛА

$[-l, l]$ ораликда абсолют интегралланувчи $2l$ – даврли функциянинг тригонометрик Фурье қатори

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

учун қисмий йиғиндилар кетма–кетлигини тузамиз, яъни

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Бу $S_n(x)$ функция чексиз дифференциалланувчи ва $2l$ – даврлидир. $u \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ учун

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

айният ўринлидир. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\begin{aligned} 2D_n(u) \sin \frac{u}{2} &= \sin \frac{u}{2} + 2 \cos u \cdot \sin \frac{u}{2} + \dots + 2 \cos nu \sin \frac{u}{2} = \\ &= \sin \frac{u}{2} + \sin \frac{3u}{2} - \sin \frac{u}{2} + \dots + \sin(n + \frac{1}{2})u - \sin(n - \frac{1}{2})u = \sin(n + \frac{1}{2})u. \end{aligned}$$

Демак, $D_n(u) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}$ ҳосил бўлади. $D_n(u)$ функцияга Дирихле ядроси

деб айтилади.

3–Лемма. Дирихле ядроси чексиз дифференциалланувчи 2π – даврли жуфт функциядир, бундан ташқари $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 1$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $D_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu$ функция жуфт, 2π – даврли ва чексиз дифференциалланувчи эканлиги бевосита келиб чиқади. Бундан ташқари,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu] du = \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos ku du = 1 \end{aligned}$$

бўлади. Тригонометрик Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси учун Дирихле формуласини келтириб чиқарамиз.

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left[\cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} + \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt \right] = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi t}{l} + \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi t}{l} \right] dt = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{l} (x - t) \right] dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cdot D_n \left(\frac{\pi}{l} (t-x) \right) dt = \frac{1}{l} \int_{-l+x}^{l+x} f(x-u) \cdot D_n \left(\frac{\pi}{l} u \right) du$$

Интеграл остидаги функция $2l$ – даврли функция бўлгани учун

$$\int_{a-l}^{a+l} f(t) dt = \int_{-l}^l f(t) dt \quad \text{тенгликдан фойдаланиб,}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x-u) \cdot D_n \left(\frac{\pi}{l} u \right) du$$

тенгликка эга бўламиз. Бу формулага Дирихле формуласи деб айтилади. Уни куйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_0^l [f(x+u) + f(x-u)] \cdot D_n \left(\frac{\pi}{l} u \right) du$$

Бу Дирихле формуласи $l = \pi$ бўлган ҳолда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \cdot D_n(u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \cdot D_n(u) du$$

шаклида ёзилади.

2.3-§. БИР КАРРАЛИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЬЕ ҚАТОРИНИНГ НУҚТАДА ЯҚИНЛАШИШИ

Фурье қаторининг x_0 нуктада яқинлашишини текшириш Дирихле формуласи орқали аниқланган $S_n(x_0)$ қисмий йиғиндилар кетма-кетлигининг яқинлашишини текширишга олиб келинади. Қулайлик учун $l = \pi$ деб оламиз. Умуман, 2π – даврли ҳолдан $2l$ – даврли ҳолга энг содда ўзгарувчини алмаштириш йўли билан ўтиш мумкин.

1–теорема. (Локализация принципи). $f(x)$ функция 2π – даврли ва $[-\pi, \pi]$ ораликда абсолют интегралланувчи бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функциясининг Фурье қатори $x_0 \in \mathbb{R}$ нуктада ва $f(x)$ функциянинг Фурье қаторининг йиғиндиси x_0 нуктада, агар бу қатор яқинлашувчи бўлса, $f(x)$

функциянинг фақат ихтиёрий кичик $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ интервалдаги ҳолатигагина боғлиқ бўлади.

Исбот. Дирихле формуласидан фойдаламиз.

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + u) + f(x_0 - u)] \cdot D_n(u) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \cdot \sin(n + \frac{1}{2})u du \end{aligned}$$

$[-\pi, \pi]$ ораликда $f(x_0 + u) + f(x_0 - u)$ функция абсолют интегралланувчи ва ихтиёрий $\delta > 0$, $u \in [\delta, \pi]$ учун

$$\left| \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \right| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}} |f(x_0 + u) + f(x_0 - u)|$$

тенгсизликдан таққослаш аломатига кўра,

$$\Phi(u) = \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

функциянинг $[\delta, \pi]$ ораликда абсолют интегралланувчи эканлиги келиб чиқади, Риман леммасига кўра,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})u du = 0$$

ҳосил бўлади. У ҳолда Дирихле формуласига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[S_n(x_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})u du \right] = 0$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенгликдан $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0)$ лимитнинг мавжудлиги фақат

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})u du$$

лимитнинг мавжудлигига боғлиқ эканлиги келиб чиқади, яъни функциянинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалдаги қийматларига боғлиқ экан. Агар $f(x) \equiv \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда $S_n(x_0) \equiv \frac{1}{2}$ бўлади. Шунинг учун, $\delta > 0$ учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{2}$$

тенглик ўринли.

Агар $f(x_0 \pm 0)$ чекли бир томонли лимитлар ва $\delta > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $C_0 > 0$ сонлари мавжуд бўлиб, ихтиёрий $u \in (0, \delta)$ учун

$$|f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)| \leq C_0 \cdot u^\alpha, \quad |f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)| \leq C_0 \cdot u^\alpha$$

тенгсизликлари ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуктада Гёльдер шартини қаноатлантиради деб айтилади. α сон Гёльдер кўрсаткичи деб айтилади. Агар $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$ бўлиб, $f(x)$ функция x_0 нуктада Гёльдер шартини қаноатлантирса, бу функция шу x_0 нуктада биринчи турдаги узилишга эга бўлади.

Бир томонли ҳосила тушунчасини ҳам қуйидагича киритиш мумкин.

$$f'_+(x_0) = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{-u}.$$

1- Лемма. Агар x_0 нуктада $f(x)$ функция $f'_+(x_0)$ ва $f'_-(x_0)$ чекли бир томонли ҳосилаларига эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуктада $\alpha = 1$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантиради.

Исбот.

$$\varphi(u) = \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u}$$

ва

$$\psi(u) = \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u}$$

функциялар $u \rightarrow +0$ да чекли лимитларга эга ва шунинг учун қандайдир $(0, \delta)$ интервалда чегараланган, яъни шундай бир $C_0 > 0$ сон мавжуд бўлиб,

$$\left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u} \right| \leq C_0, \quad \left| \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u} \right| \leq C_0$$

тенгсизликлари ўринли бўлади. Шунга кўра, $f(x)$ функция x_0 нуктада $\alpha = 1$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантиради.

Натижа. Агар $f(x)$ функция x_0 нуктада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу нуктада $\alpha = 1$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантиради.

Тескари хулоса умуман олганда ўринли эмас, масалан $|x|^\alpha$ функция $0 < \alpha < 1$ учун $x = 0$ нуктада Гёльдер шартини қаноатлантиради, лекин $x = 0$ нуктада дифференциалланувчи эмас.

2–Теорема. (Фурье қаторининг нуктада яқинлашиши ҳақида). $f(x)$ функция 2π – даврли бўлиб, $[-\pi, \pi]$ оралиқда абсолют интегралланувчи ва x_0 нуктада Гёльдер шартини қаноатлантирсин. У ҳолда $f(x)$ функция Фурье катори x_0 нуктада $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ сонга яқинлашади.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуктада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу нуктада Фурье катори йиғиндиси $f(x_0)$ сонга тенг бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция x_0 нуктада Гёльдер шартини қаноатлантиргани учун $0 < u < \delta$ ва $\alpha > 0$ учун

$$|f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)| \leq C_0 \cdot u^\alpha \quad \text{ва} \quad |f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)| \leq C_0 \cdot u^\alpha$$

тенгсизликлари ўринли бўлади. Шу $\delta > 0$ сон учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[S_n(x_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})u du \right] = 0$$

ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{2}$$

тенгликларни ёзамиз. Иккинчи тенгликни $f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)$ сонга кўпайтириб, биринчисидан айириш натижасида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[S_n(x_0) - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})u du \right] = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Гёльдер шартига кўра,

$$\Phi(u) = \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

функция $[0, \delta]$ ораликда абсолют интегралланувчи бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, Гёльдер тенгсизлигини қўллаб,

$$|\Phi(u)| \leq \frac{2C_0 u^\alpha}{2 \sin \frac{u}{2}} = \pi C_0 u^{\alpha-1}, \quad \alpha \in (0, 1]$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Хосмас интеграллар учун таққослаш аломатини қўллаб, $\Phi(u)$ функциянинг $[0, \delta]$ ораликда абсолют интегралланувчи эканлигини ҳосил қиламиз.

Риман леммасига кўра,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \Phi(u) \sin(n + \frac{1}{2})u du = 0$$

ҳосил бўлади. Шунинг учун, юқоридаги ҳосил қилинган тенгликдан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

тенглик келиб чиқади.

1-Натижа. Агар 2π – даврли ва $[-\pi; \pi]$ ораликда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функция x_0 нуктада ҳар иккала бир томонли ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда Фурье қатори x_0 нуктада $\frac{1}{2} f(x_0 + 0) + \frac{1}{2} f(x_0 - 0)$ сонга яқинлашади.

2-Натижа. Агар 2π – даврли ва $[-\pi; \pi]$ ораликда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функция x_0 нуктада ҳосилга эга бўлса, у ҳолда Фурье қатори шу нуктада $f(x_0)$ сонга яқинлашувчи бўлади.

3-Натижа. Агар 2π – даврли ва $[-\pi; \pi]$ ораликда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функция $\pm\pi$ нукталарда Гёльдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда даврийликка кўра Фурье қатори йиғиндиси $\pm\pi$ нукталарда $\frac{f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2}$ сонга тенг бўлади.

Агар $[a, b]$ ораликни $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ бўлган x_i нукталар билан ораликларга бўлиши мумкин бўлиб, ҳар бир (x_{i-1}, x_i) интервалда $f(x)$ функция узлуксиз ва $f(a + 0)$, $f(b - 0)$, $f(x_i \pm 0)$, $i = \overline{1, n-1}$ чекли лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда бўлакли–узлуксиз дейилади.

Агар $[a, b]$ ораликда шундай бир бўлиниш топилиб, ҳар бир (x_{i-1}, x_i) , $i = \overline{1, n}$ бўлиниш интервалида $f(x)$ функция $f'(x)$ узлуксиз ҳосилга эга ва бир томонли $f'(a + 0)$, $f'(b - 0)$, $f'(x_i \pm 0)$, $i = \overline{1, n-1}$ чекли лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда бўлакли–силлик

дейлади. Бўлакли–силлиқ функциянинг Фурье қатори шу функциянинг узлуксизлик нуқталарида функциянинг шу нуқтадаги қийматига, узилиш нуқталарида эса, шу узулиш нуқталари лимитлик қийматлари йиғиндисининг ярмига тенг бўлади. Бўлакли–силлиқ функциянинг ҳосиласи чекли нуқталардан ташқари барча нуқталарда аниқланган ва бўлакли–узлуксиз функция бўлади.

$L^c(a,b)$ орқали (a,b) интервални қандайдир бўлиш ёрдамида ҳар бир (x_{i-1}, x_i) интервалда $f(x)$ функция узлуксиз ва $\int_a^b |f(x)|dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлган функциялар тўпламини белгилаймиз.

$\tilde{L}^C[a,b]$ орқали эса $[a,b]$ ораликда узлуксиз, (a,b) интервалнинг чекли нуқталаридан ташқари, барча нуқталарида дифференциалланувчи ва $f'(x) \in L^c(a,b)$ бўлган функциялар тўпламини белгилаймиз.

$\tilde{L}^C[a,b]$ функциялар синфи қуйидаги хоссаларга эга.

$$1. \text{ Ихтиёрий } x \in [a,b] \text{ учун } \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

Ньютон–Лейбниц формуласи ўринлидир.

Исбот. $f'(x) \in L^c(a,b)$ эканлигидан $[a,b]$ ораликни шундай бўлиш мумкинки, бу бўлинишнинг ҳар бир $(x_{i-1}, x_i), i = \overline{1, n}$ интервалида $f'(x)$ функция узлуксиз бўлади. Хосмас интеграллар учун Ньютон–Лейбниц формуласидан фойдаланиб ва $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ ораликда узлуксиз эканлигидан

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)dt = f(x_i - 0) - f(x_{i-1} + 0) = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)dt &= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)dt + \int_{x_{k-1}}^x f'(t)dt = \\ &= f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x) - f(x_{k-1}) = f(x) - f(a)\end{aligned}$$

тенглик ҳосил бўлади.

2. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $\tilde{L}^C[a, b]$ синфга қарашли бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x) \in \tilde{L}^C[a, b]$ ва

$$\int_a^x f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(x)g'(x)dx, \quad x \in [a, b]$$

бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли бўлади.

Исбот. $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ ораликда $\varphi(x)$ функция узлуксиз бўлади. $f \in \tilde{L}^C[a, b]$ эканлигидан $[a, b]$ ораликда шундай бир T_1 бўлиниш мавжудки, бу бўлинишнинг ҳар бир интервалида $f'(x)$ функция узлуксиз бўлади. Худди шунга ўхшаш $[a, b]$ ораликда шундай бир T_2 бўлиниш мавжудлиги T_2 бўлинишнинг ҳар бир интервалида $g'(x)$ функция узлуксиз бўлади. T_1 ва T_2 бўлинишларни бирлаштириб, $[a, b]$ ораликда шундай бир T бўлиниш ҳосил қиламизки, T бўлинишнинг ҳар бир (x_{i-1}, x_i) интервалида $f'(x)$ ва $g'(x)$ функциялар узлуксиз ва $\varphi' = (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ тенглик бажаради. (a, b) интервалда f' ва g' функциялар абсолют интервалланувчи, f ва g функциялар узлуксиз ва шунга кўра, $[a, b]$ ораликда чегараланган эканлигидан, ҳамда юқоридаги тенгликдан φ' функциянинг $[a, b]$ ораликда абсолют интегралланувчи эканлигини келиб чиқади. Шунга кўра, $\varphi \in \tilde{L}^C[a, b]$ бўлади.

$[a, x]$ оралик бўйича юқоридаги тенгликни интеграллаб ва Ньютон – Лейбниц формулани қўллаб

$$\int_a^x f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(x)g'(x)dx$$

бўлаклаб интеграллаш формуласини ҳосил қиламиз.

Энди иккита ёрдамчи леммаларни киритамиз.

2– Лемма. $g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ функция $\square = (-\infty, +\infty)$ сон ўқида

чегараланган бўлади.

Исбот. $g(x)$ функция тоқ функция бўлгани учун унинг $x \geq 0$ учун чегараланган эканлигини текшириш етарлидир. Дирихле аломатига кўра

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ интеграл яқинлашувчи бўлгани учун $g(x)$ функция $x \rightarrow +\infty$ да

чекли лимитга эга бўлади. $g(x)$ функция $[0, +\infty)$ да узлуксиз ҳамдир.

Шунга кўра, $[0, +\infty)$ ораликда $g(x)$ функция чегараланган бўлади.

3–Лемма. Агар $f \in \tilde{L}^c[0, b]$ ва $f(0) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^b f(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt = 0$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. 2–леммага кўра, $g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ функция қандайдир C_0 ўзгармас

сон билан модули бўйича чегараланган бўлади. $f \in \tilde{L}^c[0, b]$ эканлигидан

$\int_0^b |f'(t)| dt$ хосмас интеграл яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Шунинг

учун, ихтитёрий $\varepsilon > 0$ учун $\delta > 0$ топилиб, $\int_0^\delta |f'(t)| dt < \frac{\varepsilon}{4C_0}$ тенгсизлик

ўринли бўлади. $[a, b]$ ораликда

$$G(x, \omega) = \int_x^\delta \frac{\sin \omega t}{t} dt = \int_{\omega x}^{\omega \delta} \frac{\sin u}{u} du = g(\omega \delta) - g(\omega x)$$

функцияни қараймиз. Бу формулага кўра, $G(\delta, \omega) = 0$, $|G(x, \omega)| \leq 2C_0$ келиб

чиқади. $\frac{f(t)}{t}$ функция $[\delta, b]$ ораликда узлуксиз бўлиб, Риман леммаси

натижасига кўра, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\delta}^b \frac{f(t)}{t} \sin \omega t dt = 0$ тенглик бажарилиши керак бўлади.

Шунинг учун ω_0 сон топилиб, барча $\omega > \omega_0$ учун

$$\left| \int_{\delta}^b f(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлиги ўринли. f ва G функциялар $\tilde{L}^c[0, b]$ синфга қарашли бўлгани учун интеграллаш формуласини қўллаб,

$$\int_0^{\delta} f(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt = -fG \Big|_0^{\delta} + \int_0^{\delta} f'(t) G(t, \omega) dt = \int_0^{\delta} f'(t) G(t, \omega) dt$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан фойдаланиб,

$$\left| \int_0^{\delta} f(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt \right| \leq \left| \int_0^{\delta} f'(t) dt \right| |G(t, \omega)| dt \leq 2C_0 \left| \int_0^{\delta} f'(t) dt \right| < 2C_0 \frac{\varepsilon}{4C_0} = \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Юқоридаги формулалардан фойдаланиб, ихтиёрий $\omega > \omega_0$ учун

$$\left| \int_0^b f(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt \right| \leq \left| \int_0^{\delta} f(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt \right| + \left| \int_{\delta}^b f(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади, яъни

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^b f(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt = 0$$

экан.

3–Теорема. $f(x)$ функция узлуксиз ва 2π –даврли бўлиб, $\tilde{L}^c[-\pi; \pi]$ синфга қарашли бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функциянинг Фурье қатори ҳар бир $x \in R$ нуқтада $f(x)$ функциянинг шу нуқтадаги қийматига яқинлашади.

Исбот. Фурье қатори қисмий йиғиндиси учун ўринли бўлган

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

формула ва Дирихле ядросининг хоссасидан фойдаланиб, $S_n(x) - f(x)$ айирмани

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(x, u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

шаклида ёзамиз, бунда $\Phi(x, u) = f(x + u) + f(x - u) - 2f(x)$.

Маълумки, $u \rightarrow 0$ да

$$a(u) = \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} - \frac{1}{u} = \frac{u - 2 \sin \frac{u}{2}}{2u \sin \frac{u}{2}} \approx \frac{1}{24} u$$

бўлиб, $a(u)$ функцияни $[0, \pi]$ оралиқгача $u = 0$ нуқтада $a(0) = 0$ тенглик билан аниқлаб, давом эттирамиз. Натижада $[0, \pi]$ оралиқда узлуксиз $a(u)$ функцияга эга бўламиз ва шунинг учун Риман леммасига кўра,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \Phi(x, u) a(u) \sin(n + \frac{1}{2})u du = 0$$

тенглик келиб чиқади. $n \rightarrow \infty$ да $S_n(x) \rightarrow f(x)$ бўлишлиги учун

$$\int_0^\pi \Phi(x, u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \text{ интеграл нолга интилиши керак. Бу интеграл нолга}$$

интилиши учун эса,

$$\int_0^\pi \Phi(x, u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du$$

интеграл нолга интилиши керак бўлади. Охирги интегралнинг нолга интилиши $\Phi(x, u)$ функция ҳар бир $x \in R$ учун u аргумент функцияси сифатида 3-лемма шартларини қаноатлантиргани учун келиб чиқади. Шунинг учун $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$, яъни $f(x)$ функция Фурье қатори ихтиёрий $x \in R$ нуқтада функциянинг шу нуқтадаги қийматига яқинлашади. Кўрсатиш мумкинки,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^4 \frac{x}{2}}{\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|}, & x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ 0, & x = k\pi \end{cases}$$

функция 3–теореманинг барча шартларини қаноатлантиради, лекин $x=0$ нуқтада Гёльдер шартини қаноатлантирмайди, чунки ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|^\varepsilon} = \infty$$

тенглик бажарилади.

1–мисол. $[-\pi; \pi]$ оралиқда

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

функциянинг тригонометрик Фурье қаторини топамиз. $f(x)$ функцияни бутун сон ўқиға даврий давом эттирамиз. $f(x)$ функция тоқ бўлгани учун

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \\ &= -\frac{2}{\pi k} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k} (1 - \cos k\pi) = \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k), \\ b_{2n} &= 0, \quad b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)} \end{aligned}$$

Шунга кўра,

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ учун $f'(x)$ мавжуд эканлигидан

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ҳосил бўлади. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ нукталарда $f(x)$ функция аниқланмаган бўлиб,

Фурье қаторининг йиғиндиси нолга тенгдир. $x = \frac{\pi}{2}$ деб олсак,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

2–Мисол. $[-\pi, \pi]$ ораликда $f(x) = \cos ax$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $a \neq n$, $n \in \mathbb{Z}$, функциянинг тригонометрик Фурье қаторини топамиз. $f(x)$ функцияни бутун сон ўқиға давом эттириб, узлуксиз ва 2π –даврли, ҳар бир нуктада бир томонли ҳосилага эга функцияни ҳосил қиламиз. Фурье коэффицентларини аниқлаймиз. $f(x)$ функция жуфт бўлгани учун, барча $b_n = 0$ ва a_n коэффицентлар қуйидагича ҳисобланади

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(a-n)x + \cos(a+n)x] dx = \\ &= \frac{\sin a\pi}{\pi} \cdot (-1)^n \cdot \left[\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right] \end{aligned}$$

Бундан, $-\pi \leq x \leq \pi$ учун

$$\frac{\pi \cos ax}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n} \right) \cos nx$$

келиб чиқади. $x = \pi$ ва $a \cdot \pi = z$ деб олсак, $\operatorname{ctg} z$ функциянинг элементар касрларга ёйилмасини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right),$$

Бунда $\pm n\pi$ нукталар $\sin z$ функциянинг нолларидан иборат.

Агар $x = 0$ ва $z = \pi a$ деб олсак, $\operatorname{cosec} z$ функциясининг элементлар касрларга ёйилмасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right).$$

2.4-§. БИР КАРРАЛИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЬЕ ҚАТОРИНИ ХАДМА–ХАД ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ ВА ИНТЕГРАЛЛАШ

1–Теорема. Агар $f(x)$ функция узлуксиз ва 2π –даврли бўлиб, $\tilde{L}^c[-\pi; \pi]$ синфдан бўлса, у ҳолда $f'(x)$ ҳосиланинг Фурье қатори $f(x)$ функция Фурье қаторини формал равишда ҳадма–ҳад дифференциаллаш билан ҳосил қилинади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг Фурье коэффицентлари a_n ва b_n бўлиб, $f'(x)$ ҳосиласининг Фурье коэффицентлари a'_n ва b'_n бўлсин. $\tilde{L}^c[-\pi; \pi]$ синфидаги функция учун бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли бўлгани учун, ҳамда $f(x)$ функция узлуксиз ва даврий эканлигидан

$$\begin{aligned} a'_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0 \\ \pi a'_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} n f(x) \sin nx dx = (-1)^n [f(\pi) - f(-\pi)] + \\ &+ n \pi b_n = n \pi b_n, \quad a'_n = n b_n, \\ \pi b'_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \\ &- \int_{-\pi}^{\pi} n f(x) \cos nx dx = -n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ &= -\pi n a_n, \quad b'_n = -n a_n. \end{aligned}$$

Шунинг учун

$$\begin{aligned} f'(x) &\square \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nx - n a_n \sin nx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nx - n a_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned}$$

яъни $f'(x)$ функция Фурье қатори $f(x)$ функция Фурье қаторини формал равишда ҳадма–ҳад дифференциаллаш билан ҳосил қилинади.

1–Натижа. Агар $f(x)$ узлуксиз 2π –даврли ва бўлакли–силлик функция бўлса, у ҳолда $f'(x)$ ҳосиланинг Фурье қатори $f(x)$ функция Фурье қаторини формал равишда ҳадма–ҳад дифференциаллаш билан ҳосил қилинади.

2–Натижа. Агар $f(x)$ функция 2π –даврли ва $k-1$ марта узлуксиз дифференциалланувчи, $f^{(k-1)} \in \tilde{L}^c[-\pi; \pi]$ бўлса, у ҳолда $f^{(k)}(x)$ функция Фурье қатори $f(x)$ функция Фурье қаторини k марта ҳадма–ҳад дифференциаллаш билан ҳосил қилинади.

3–Натижа. Агар 2–натижа шартлари бажарилса, у ҳолда Фурье коэффицентлари учун қуйидаги асимптотик тенглик ўринли:

$$n \rightarrow \infty \text{ да } a_n = o(n^{-k}), \quad b_n = o(n^{-k}).$$

Исбот. 2–натижага кўра, $f^{(k)}(x)$ функция Фурье қатори $f(x)$ функция Фурье қаторини k –марта ҳадма–ҳад дифференциаллаш ёрдамида ҳосил қилинади, яъни

$$f^{(k)}(x) \square \sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n \cos(nx + \frac{k\pi}{2}) + n^k b_n \sin \cdot (nx + \frac{k\pi}{2}) .$$

Ишора аниқлигида $n^k a_n$ ва $n^k b_n$ коэффицентлар $[-\pi, \pi]$ ораликда абсолют интегралланувчи $f^{(k)}(x)$ функциянинг Фурье коэффицентларидир. Риман леммасининг натижасига кўра, абсолют интегралланувчи функция Фурье коэффиценти $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади. Шунинг учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k b_n = 0, \quad \text{яъни } a_n = o(n^{-k}), \quad b_n = o(n^{-k}), \quad n \rightarrow \infty \quad \text{да}$$

ўринли бўлади.

2–Теорема. $f(x)$ функция 2π –даврли бўлиб, $L^c(-\pi, \pi)$ синфга карашли бўлсин. У ҳолда $\forall x \in R$ учун

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin kx}{k} + b_k \frac{1 - \cos kx}{k}$$

тенглик ўринли бўлади, бунда ўнг томондаги қатор формал равишда ҳадмаҳад $f(x)$ функция Фурье қаторини интеграллаш билан ҳосил қилинган.

Исбот. $\hat{O}(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2}$ функцияни қараймиз. Бу функция

узлуксиздир, чунки юқори чегараси ўзгарувчи яқинлашувчи ҳосмас интеграл узлуксиздир. Ихтиёрий $x \in R$ учун

$$\hat{O}(x + 2\pi) - \hat{O}(x) = \int_x^{2\pi+x} f(t)dt - a_0\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - a_0\pi = a_0\pi - a_0\pi = 0$$

тенглик ўринли эканлигидан $\hat{O}(x)$ функциянинг 2π –даврли эканлиги келиб чиқади.

$f \in L^c(-\pi, \pi)$ бўлгани учун $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқнинг чекли сондаги нукталардан ташқари барча нукталарида узлуксиздир. Шунинг учун, $\hat{O}(x)$ функция $f(x)$ функция узлуксиз бўлган барча нукталарда ҳосилага эга ва бу нукталарда $\hat{O}'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$.

Шунинг учун $\hat{O}(x)$ функция $\tilde{L}^c[-\pi; \pi]$ синфга қарашли бўлиб, олдинги мавзудаги 3–теореманинг барча шартларини қаноатлантиради ва $\hat{O}(x)$ функция Фурье қатори ихтиёрий $x \in R$ нуктада яқинлашади.

$\hat{O}(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$ бўлсин. $\tilde{L}^c[-\pi; \pi]$ синфдаги функциялар

учун бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли бўлгани учун $n \geq 1$ учун

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{O}(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \hat{O}(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \hat{O}'(x) \frac{\sin nx}{n} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \sin nxdx = -\frac{b_n}{n}, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{O}(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \hat{O}(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \hat{O}'(x) \frac{\cos nx}{n} dx \right] = \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \cos nxdx = \frac{a_n}{n} \end{aligned}$$

бўлади.

A_0 коэффициентни аниқлаш учун $\hat{O}(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$ тенглик

ихтиёрий $x \in R$ учун ўринли эканлигидан ва бу тенгликда $x = 0$ деб олсак,

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

ҳосил бўлади. Коэффициентларнинг бу ифодаларини

$$\hat{O}(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

тенгликка олиб бориб, қўйсак,

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nx}{n} + b_n \frac{1 - \cos nx}{n}$$

формула ҳосил бўлади.

Натижа. 2π – даврли бўлакчи–узлуксиз $f(x)$ функция учун

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nx}{n} + b_n \frac{1 - \cos nx}{n}$$

формула ўринлидир.

2.5-§. БИР КАРРАЛИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЬЕ ҚАТОРИНИНГ ТЕКИС ЯҚИНЛАШИШИ

$L^c(a, b)$ ва $\tilde{L}^c[a, b]$ функциялар синфи сингари $L_2^c(a, b)$ ва $\tilde{L}_2^c[a, b]$ функциялар синфини киритамиз. Агар $[a, b]$ ораликни $x_i, i = \overline{0, n}$ нуқталар билан бўлиш мумкин бўлиб, ҳар бир (x_{i-1}, x_i) интервалда $f(x)$ функция узлуксиз ва $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \in L_2^c(a, b)$ дейилади.

Агар $[a, b]$ ораликда $x_i, i = \overline{0, n}$ нуқталар билан бўлиш мумкин бўлиб, ҳар бир (x_{i-1}, x_i) интервалда $f(x)$ функция узлуксиз ҳосилага эга, $[a, b]$

ораликда узлуксиз ва $\int_a^b |f'(x)|^2 dx < \infty$ яқинлашувчи бўлган $f(x)$ функция

$\tilde{L}_2^c[a, b]$ синфга тегишли дейилади.

Шундай қилиб, $f(x) \in \tilde{L}_2^c[a, b]$ эканлигидан $f'(x) \in L_2^c(a, b)$ келиб чиқади.

1–Лемма. $[a, b]$ ихтиёрий оралик бўлиб, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $L_2^c(a, b)$ синфга қарашли бўлсин. У ҳолда $f(x)\varphi(x)$ кўпайтма $L^c(a, b)$ синфга қарашли бўлади.

Исбот. $f(x) \in L_2^c(a, b)$ эканлигидан $[a, b]$ ораликда шундай бир T_1 бўлиниш топиладики, бу бўлинишнинг ҳар бир интервалида $f(x)$ функция узлуксиз ва $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ яқинлашувчи бўлади. Худди шунга ўхшаш T_2 бўлиниш топиладики, T_2 бўлинишнинг ҳар бир интервалида $\varphi(x)$ функция

узлуксиз ва $\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx < \infty$ хосмас интервал яқинлашувчи бўлади. T_1 ва T_2

бўлиниш нуқталарини бирлаштириб, T бўлиниш ҳосил қиламизки, бу бўлинишнинг ҳар бир (x_{i-1}, x_i) интервалида $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар узлуксиз бўлгани учун $f(x)\varphi(x)$ функция узлуксиз бўлади.

$$|f(x)\varphi(x)| \leq \frac{1}{2} f^2(x) + \frac{1}{2} \varphi^2(x)$$

тенгсизликдан фойдаланиб, таққослаш аломатига кўра,

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2} f^2(x) + \frac{1}{2} \varphi^2(x) \right] dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи эканлигидан $\int_a^b |f(x)\varphi(x)| dx$ хосмас

интегралнинг яқинлашувчанлигини ҳосил қиламиз, яъни $f(x)\varphi(x) \in L^c(a, b)$ бўлади.

$[a, b]$ ораликда $\{\varphi_n(x)\}$, $n \in N$ узлуксиз ортогонал система бўлсин, ҳамда $[a, b]$ да $\varphi_n(x) \neq 0$ бўлсин.

Агар $f(x) \in L_2^c(a, b)$ функция бўлса, у ҳолда 1–леммага кўра, Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad \text{бунда} \quad \|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}$$

тенглик билан ҳисоблаш мумкин бўлади.

1–Теорема. $f \in L_2^c(a, b)$ бўлиб, $\{\varphi_n(x)\}$, $n \in N$ ортогонал система $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция Фурье коэффициентлари учун $\{\varphi_n(x)\}$, $n \in N$ ортогонал система бўйича

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx$$

Бессель тенгсизлиги ўринли бўлади.

Исбот. $[a, b]$ ораликда $\{\varphi_k(x)\}$ функциялар системаси ортогонал эканлигидан фойдаланиб, ихтиёрий $n \in N$ учун

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x) dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \end{aligned}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Шундай қилиб,

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx = \|f\|^2$$

бўлади. $n \rightarrow \infty$ да тенгсизликда лимитга ўтиб,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2$$

Бессель тенгсизлигини ҳосил қиламиз.

Натижа. $[-\pi, \pi]$ ораликда тригонометрик система учун ва ихтиёрий $f \in L_2^c(-\pi, \pi)$ функция учун Бессель тенгсизлиги қуйидаги шаклга эга:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Ҳақиқатдан ҳам $\left\| \frac{1}{2} \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} dx = \frac{\pi}{2}$, $\|\cos nx\|^2 = \|\sin nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$

тенгликларни қўйиб, Бессель тенгсизлигидан ҳосил қиламиз.

2–Теорема. $f(x)$ функция 2π –даврли ва $\tilde{L}_2^c[-\pi, \pi]$ синфга қарашли узлуксиз функция бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье катори текис яқинлашади.

Исбот. $f \in \tilde{L}_2^c[-\pi, \pi]$ эканлигидан $f' \in L_2^c(-\pi, \pi)$ келиб чиқади. Агар $f(x)$ функция учун a_n ва b_n Фурье коэффицентлари, a'_n ва b'_n – эса ҳосила функциясининг Фурье коэффицентлари бўлса, у ҳолда бўлаклар интеграллаш ёрдамида

$$a'_0 = 0, \quad b'_n = \frac{a'_n}{n}, \quad a_n = -\frac{b'_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. $f'(x)$ функция учун Бессель тенгсизлигини ёзамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a'_n)^2 + (b'_n)^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx.$$

У ҳолда

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| = \frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} |a'_n|^2 + \frac{1}{2} |b'_n|^2 + \frac{1}{n^2}$$

бўлиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} |a'_n|^2 + \frac{1}{2} |b'_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

сонли қатор яқинлашувчи эканлигидан Вейерштрасс аломатига кўра,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

функционал қаторнинг R да текис яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

Натижа. 2π -даврли узлуксиз ва $[-\pi, \pi]$ ораликда бўлакли–силлиқ функциянинг Фурье қатори R сон ўқида текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. $f'(x)$ бўлакли–узлуксиз функция бўлгани учун $f'(x) \in L_2^c(-\pi, \pi)$ ва $f(x) \in \tilde{L}_2^c[-\pi, \pi]$ бўлади. Шунинг учун 2-теоремага кўра, $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори R сон ўқида текис яқинлашувчи бўлади.

2.6-§. ТАҚРИБИЙ БЕРИЛГАН ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТЛАРИ БЎЙИЧА БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ ҚИЙМАТИНИ ҲИСОБЛАШ ҲАҚИДАГИ А.Н. ТИХОНОВ ТЕОРЕМАСИ

Бу параграфда бир ўзгарувчили функция Фурье коэффицентларининг тақрибий қийматларида тригонометрик Фурье қаторини жамлаш ҳақидаги масалани ва бу масала учун регуляриштириш методи қараб чиқилади.

Айтайлик, $f(x)$ функция ўзининг

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.6.1)$$

тригонометрик Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ сегментда текис яқинлашиш шартларини қаноатлантирсин. Бундан ташқари, бу бир ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффицентларининг a_k ва b_k аниқ қийматлари ўрнига шу Фурье коэффицентларининг $\tilde{a}_k$ ва $\tilde{b}_k$ тақрибий қийматларигина маълум бўлсин. Айнан шу ҳол кўпгина амалий масалаларда учрайди.

Тригонометрик Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларининг берилиш хатосини $l_2(Z)$ фазо нормаси маъносида кичик деб оламиз. Бу эса,

$$\frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \tilde{a}_k)^2 + (b_k - \tilde{b}_k)^2 \leq \delta^2, \quad (2.6.2)$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигини билдиради, бу ерда δ – етарлича кичик мусбат сон бўлиб, уни Фурье коэффициентлари берилишининг *четланиши* деб атаймиз.

Табиий равишда, муҳим тадбиққа эга бўлган қуйидаги масала пайдо бўлади: бир ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффициентларининг a_k ва b_k аниқ қийматлари ўрнига шу Фурье коэффициентларининг $\tilde{a}_k$ ва $\tilde{b}_k$ тақрибий қийматлари бўйича берилган x нуқтада $f(x)$ функцияни $\delta \rightarrow 0$ да, нолга интилувчи $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ хато билан тиклаш талаб этилади.

Фурье коэффициентлари тақрибий қийматлари билан берилганда бевосита, тўғридан-тўғри

$$\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx) \quad (2.6.3)$$

тригонометрик Фурье қаторини жамлаш йўли билан берилганда x нуқтада $f(x)$ функцияни ҳеч қандай аниқлик даражасида тиклашга эришиб бўлмаслигини кўрсатамиз.

Ихтиёрий кичик $\delta > 0$ четланишни оламиз ва $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$ бўлсин.

Айтайлик, бу бир ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффициентларининг берилишида қуйидагича аниқ кўринишдаги четланишга эга бўлсин:

$$k = 1, 2, \dots \quad \text{учун} \quad a_0 - \tilde{a}_0 = 0, \quad a_k - \tilde{a}_k = b_k - \tilde{b}_k = \frac{\delta}{kC\sqrt{2}}.$$

Бундай тригонометрик Фурье коэффициентларининг аниқ четланишида, кўриниб турибдики, (2.6.2) муносабат аниқ тенглик белгиси билан ўринли бўлади. (2.6.1) аниқ Фурье қаторини Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (2.6.3) қатор билан алмаштирганда биз

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \tilde{a}_k) \cos kx + (b_k - \tilde{b}_k) \sin kx$$

қатор йиғиндисига тенг бўлган хатоликка эга бўлдамиз.

$x = 0$ нуқтада бу хатолик четланиш $\delta > 0$ қанча кичик бўлмасин, барибир

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \tilde{a}_k) = \frac{\delta}{C\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

бўлади.

Шундай қилиб, (2.6.1) аниқ тригонометрик Фурье қатори $f(x)$ функцияга қанча тез яқинлашувчи бўлмасин, Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (2.6.3) қатор билан алмаштирганда биз (2.6.2) муносабат билан берилган хатолик четланиши $\delta > 0$ қанча кичик бўлмасин, барибир тригонометрик Фурье қаторини тўғридан-тўғри жамлаш $f(x)$ функцияни Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (2.6.3) қатор ёрдамида $[-\pi, \pi]$ сегментдаги нуқтада ҳеч қандай аниқлик даражасида тиклаб бўлмайди.

Биз $\{a_k, b_k\}$ ва $\{\tilde{a}_k, \tilde{b}_k\}$ Фурье коэффициентларига мос, (2.6.2) муносабат маъносида берилган характерловчи хатолик четланиши $\delta > 0$ қанча кичик бўлмасин, барибир бу иккита берилганларга мос тригонометрик Фурье коэффициентли (2.6.1) ва (2.6.3) қаторларини тўғридан-тўғри жамлашда йиғинди бир-биридан жуда кучли фарқ қилиши мумкин экан.

Бундай турдаги масалалар, яъни берилганларнинг жуда кичик четланишида (бу ерда берилганлар Фурье коэффициентлари тўпламидан иборат) уларга мос ечимларнинг (биз қараётган ҳолда ечим деб тригонометрик Фурье қаторининг тўғри йиғиндисини тушунамиз) исталганча катта фарқ қилишлиги математикада кўп учрайдиган ва тадбиқларга эга

бўлган нокоррект қўйилган масала деб аталувчи масала тушунчасига олиб келади.

Бошқача сўз билан айтганда, биз қараётган тригонометрик Фурье қаторининг тўғри йиғиндисини топиш масаласи нокоррект қўйилган масала бўлади.

Нокоррект қўйилган масалаларнинг кенг синфларини ечишнинг умумий методлари академик А.Н. Тихонов томонидан ишлаб чиқилган ва регуляриштириш методлари деб номланади.

Бу ерда биз тригонометрик Фурье қаторининг йиғиндисини ҳақидаги масалага регуляриштириш методини қўллашга тўхталамиз.

Такрибий Фурье коэффициентлари билан берилган тригонометрик Фурье қаторининг йиғиндисини ҳақидаги масалага регуляриштириш методини қўллаш алгоритми $f(x)$ функциянинг такрибий қиймати сифатида (2.6.3) қаторнинг йиғиндисини эмас, балки

$$\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx) \cdot \frac{1}{1+k^2\alpha}, \quad (2.6.4)$$

қаторнинг йиғиндисини қарашдан иборат бўлиб, бунда (2.6.3) қаторнинг

k – ҳадини «регуляриштирувчи» $\frac{1}{1+k^2\alpha}$ кўпайтувчига кўпайтиришдан

ҳосил қилинган. Бу ерда α параметр ҳам (2.6.2) муносабатдаги Фурье коэффициентларининг δ четланиши каби бир хил тартибдаги кичик миқдордан иборат.

Келтирилган алгоритмни асословчи А.Н. Тихонов теоремасини исбот қиламиз.

А.Н. Тихонов теоремаси. $f(x)$ функция $L_2[-\pi, \pi]$ синфга тегишли ва $[-\pi, \pi]$ сегментдаги берилган x нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда ҳар бир $\delta > 0$ ва δ билан бир хил тартибли кичик миқдор бўлган $\alpha > 0$ учун (2.6.2) муносабатни қаноатлантирувчи $\tilde{a}_k$ ва $\tilde{b}_k$ коэффициентли (2.6.4) қатор

йиғиндиси $f(x)$ функция билан $\delta \rightarrow 0$ да, нолга интилувчи $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ хато билан устма-уст тушади.

Исбот. Умумийликка хилоф қилмаган ҳолда, $\alpha = \delta$ деб ҳисоблаймиз (бошқача $\alpha = C(\delta) \cdot \delta$, бунда $0 < C_1 \leq C(\delta) \leq C_2$ бўлган ҳолда ҳам худди шунга ўхшаш қаралади). Ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун $\delta_0(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, берилган x нуқта учун $\delta \leq \delta_0(\varepsilon)$ шартни қаноатлантирувчи барча мусбат δ сонлар учун

$$\left| \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx] \cdot \frac{1}{1+k^2\delta} - f(x) \right| \leq \varepsilon \quad (2.6.5)$$

тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилиш етарлидир.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин. Аввал, шу берилган ε сон учун $\delta_1(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $\delta \leq \delta_1(\varepsilon)$ шартни қаноатлантирувчи, барча мусбат δ сонлар учун

$$\left| \frac{\tilde{a}_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(\tilde{a}_k - a_k) \cos kx + (\tilde{b}_k - b_k) \sin kx] \cdot \frac{1}{1+k^2\delta} \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2.6.6)$$

тенгсизлик ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

(2.6.6) муносабатни ўрнатиш учун $\delta \rightarrow 0+0$ да (2.6.6) тенгсизликнинг чап томонидаги ифоданинг нолга интилишини кўрсатиш етарлидир.

(2.6.6) тенгсизликнинг чап томонидаги ифодани иккита йиғиндига ажратамиз, бунда биринчи йиғиндига $k < \frac{1}{\delta}$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи k номерли қўшилувчиларни, иккинчи йиғиндига эса, барча қолган қўшилувчиларни киритамиз ва ҳар иккала қўшилувчига Коши–Буняковский тенгсизлигини қўллаб,

$$\left| \frac{\tilde{a}_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(\tilde{a}_k - a_k) \cos kx + (\tilde{b}_k - b_k) \sin kx] \cdot \frac{1}{1+k^2\delta} \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\left\{ \frac{(\tilde{a}_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k < \frac{1}{\delta}} [(\tilde{a}_k - a_k)^2 + (\tilde{b}_k - b_k)^2] \right\}} O\left(\frac{1}{\delta}\right) +$$

$$+ \sqrt{\sum_{k \geq \frac{1}{\delta}} [(\tilde{a}_k - a_k)^2 + (\tilde{b}_k - b_k)^2] \sum_{k \geq \frac{1}{\delta}} \frac{1}{k^4 \delta^2}} \quad (2.6.7)$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Коши–Маклорен интеграл аломатига кўра, $\sum_{k \geq \frac{1}{\delta}} \frac{1}{k^4} = O(\delta^3)$

муносабатга эга бўламиз ва буни ҳисобга олсак, биз (2.6.7) тенгсизликнинг ўнг томонида $O(\sqrt{\delta}) + O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right)$ миқдорни ҳосил қиламиз.

Шунга кўра, (2.6.6) тенгсизлик исбот қилинган деб ҳисоблаш мумкин ва (2.6.5) тенгсизликни ўрнатиш учун биз ҳар бир танланган $\varepsilon > 0$ сони учун $\delta_2(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $\delta \leq \delta_2(\varepsilon)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча мусбат δ сонлар учун

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \cdot \frac{1}{1 + k^2 \delta} - f(x) \right| < \frac{3}{4} \varepsilon \quad (2.6.8)$$

тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилиш етарлидир.

Шартга кўра, $f(x)$ функция берилган x нуқтада узлуксиз бўлгани учун ҳар бир танланган $\varepsilon > 0$ сони учун $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $|y - x| < \eta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча y сонлар учун

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2.6.9)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди $\nu = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ деб олиб, берилган x нуқта учун ва танланган $\eta > 0$ сони учун $\nu_x(y)$ функцияни $x - \eta < y \leq x - \eta + 2\pi$ ярим сегментда

$$v_x(y) = \begin{cases} \frac{\nu\pi}{2} e^{-\nu|x-y|}, & x-\eta < y < x+\eta \\ 0, & x+\eta \leq y < x-\eta+2\pi \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ó÷óí} \\ \text{ó÷óí} \end{matrix} \quad (2.6.10)$$

тенглик билан аниқлаймиз ва 2π давр билан $-\infty < y < +\infty$ бутун сон ўқиға даврий давом эттирамиз.

$v_x(y)$ функциянинг A_k ва B_k тригонометрик Фурье коэффициентларини ҳисоблаймиз.

(2.6.10) тенгликдан ва $v_x(y)$ функциянинг 2π давр билан даврий функция бўлишлик шартидан ва $y = t + x$ алмаштириш қўллаб, ҳамда

$$\int_{-\eta}^{\eta} e^{-\nu|t|} \cos ktdt = 2 \int_0^{\eta} e^{-\nu|t|} \cos ktdt, \quad \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\nu|t|} \sin ktdt = 0 \quad \text{тенгликларни} \quad \text{ҳисобга}$$

олиб, биз қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{x-\eta}^{x+\eta} v_x(y) \cos ky dy = \frac{\nu}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\nu|x-y|} \cos ky dy = \\ &= \frac{\nu}{2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\nu|t|} \cos k(t+x) dt = \\ &= \frac{\nu}{2} \cos kx \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\nu|t|} \cos ktdt - \frac{\nu}{2} \sin kx \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\nu|t|} \sin ktdt = \\ &= \nu \cos kx \int_0^{\eta} e^{-\nu t} \cos ktdt. \end{aligned}$$

Бундан ташқари,

$$\int_0^{\eta} e^{-\nu t} \cos ktdt = \left[\frac{e^{-\nu t} (-\nu \cos kt + k \sin kt)}{k^2 + \nu^2} \right]_{t=0}^{t=\eta} = \frac{\nu}{k^2 + \nu^2} + e^{-\nu\eta} \cdot \sigma_k,$$

бунда

$$\sigma_k = \frac{-\nu \cos k\eta + k \sin k\eta}{k^2 + \nu^2} \quad (2.6.11)$$

бўлиб, $\delta = \frac{1}{\nu^2}$ эканлигини ҳисобга олсак, биз A_k Фурье коэффициенти учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$A_k = \frac{\cos kx}{1+k^2\delta} + e^{-\nu\eta} \cos kx \cdot \nu \cdot \sigma_k . \quad (2.6.12)$$

Худди шунга ўхшаш

$$B_k = \frac{\sin kx}{1+k^2\delta} + e^{-\nu\eta} \sin kx \cdot \nu \cdot \sigma_k \quad (2.6.13)$$

тенгликка эга бўламиз.

Шартга кўра, $f(x)$ функция $L_2[-\pi, \pi]$ синфга тегишли ва ҳар бир $\delta = \frac{1}{\sqrt{\nu}} > 0$ учун $\nu_x(y)$ функция ҳам шу синфга тегишли бўлиб,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu_x(y) f(y) dy = \frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k a_k + B_k b_k) \quad (2.6.14)$$

умумлашган Парсеваль айнияти ўринли бўлади.

(2.2.8) тенгсизликни исбот қилиш учун барча етарлича кичик δ мусбат сонлар учун

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu_x(y) f(y) dy - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} , \quad (2.6.15)$$

$$\left| \frac{a_0}{2} e^{-\nu\eta} \nu \sigma_0 + e^{-\nu\eta} \nu \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2.6.16)$$

тенгсизликларнинг ўринли эканлигини исбот қилиш етарли эканлиги (2.6.12), (2.6.13) ва (2.6.14) муносабатлардан келиб чиқади.

(2.6.15) тенгсизликни исбот қилиш учун $\nu_x(y)$ ва $f(x)$ функцияларнинг 2π даврли эканлигидан ва (2.6.10) тенгликдан

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu_x(y) f(y) dy &= \frac{1}{\pi} \int_{x-\eta}^{x-\eta+2\pi} \nu_x(y) f(y) dy = \frac{\nu}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\nu|x-y|} f(y) dy = \\ &= f(x) \frac{\nu}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\nu|x-y|} dy + \frac{\nu}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} [f(y) - f(x)] e^{-\nu|x-y|} dy \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

тенгликни ёзамиз. Бундан ташқари,

$$\frac{\nu}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\nu|x-y|} dy = \frac{\nu}{2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\nu|t|} dt = \nu \int_0^{\eta} e^{-\nu t} dt = 1 - e^{-\nu\eta}$$

тенгликни ҳисобга олиб ва $[x-\eta, x+\eta]$ сегментдан олинган ҳар бир y учун (2.6.9) тенгсизлик ўринли бўлиб, (2.6.17) муносабат ёрдамида

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu_x(y) f(y) dy - f(x) \right| \leq e^{-\nu\eta} |f(x)| + \frac{\varepsilon}{4} (1 - e^{-\nu\eta}) \leq e^{-\nu\eta} |f(x)| + \frac{\varepsilon}{4}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Ҳар бир тайинланган x нуқта ва тайинланган $\varepsilon > 0$ ва $\eta > 0$ сонлар учун барча етарлича кичик $\delta = \frac{1}{\nu^2}$ сонлар учун $e^{-\nu\eta} |f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$

тенгсизлигидан (2.6.15) муносабат исбот бўлади.

Энди (2.6.16) муносабатни исботлаш керак бўлади. (2.6.11) муносабатдан барча $k = 1, 2, \dots$ учун σ_k миқдор учун

$$|\sigma_k| \leq \frac{2}{k} \quad (2.6.18)$$

баҳолаш ўринли бўлади. σ_0 миқдор учун эса, барча етарлича кичик $\delta = \frac{1}{\nu^2}$

сонлар учун

$$|\sigma_0| \leq \frac{1}{\nu} \leq 1 \quad (2.6.19)$$

баҳолашни ҳосил қиламиз. (2.6.16) муносабатнинг чап томонидаги йиғиндига Коши-Буняковский тенгсизлигини қўллаб, ҳамда (2.6.18) ва (2.6.19) баҳолашлардан фойдаланиб,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0}{2} e^{-\nu\eta} \nu \sigma_0 + e^{-\nu\eta} \nu \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leq \\ & \leq 2e^{-\nu\eta} \nu \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. (2.6.20) муносабатнинг ўнг томонидаги квадрат кавслар ичидаги йиғиндиларнинг ҳар бири δ дан боғлиқ бўлмаган ўзгармас билан чегараланган бўлади. Биринчи қўшилувчи Бессель тенгсизлигига кўра чегараланган. Иккинчи қўшилувчи эса, яқинлашувчи сон қатор бўлиб чекли сондир.

Маълумки, ҳар қандай тайинланган $\eta > 0$ учун $\lim_{\delta \rightarrow 0} e^{-\nu\eta} \cdot \nu =$
 $= \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{-\frac{\eta}{\delta^2}} \frac{1}{\delta^2} = 0$ бўлгани учун (2.6.20) муносабатнинг ўнг томонидаги ифода ҳар бир фиксирланган $\varepsilon > 0$ сони барча етарлича кичик δ мусбат сонлари учун $\frac{\varepsilon}{4}$ дан кичик бўлади. Теорема исбот бўлди.

А.Н. Тихонов томонидан таклиф этилган регуляриштириш методи табиий илмий аҳамиятга эга.

Айтайлик, қандайдир асбоблар ёрдамида биз ўзимизни қизиқтираётган физик жараённинг частотавий характеристикаларини ўлчайлик. Асбобларнинг мукамал эмаслиги учун биз физик жараённинг частотавий характеристикаларини қандайдир хато билан ўлчаймиз.

Табиий равишда муаммо келиб чиқади: Бизни қизиқтирувчи физик жараён ҳақида етарлича аниқ тасаввурга эга бўлиш мумкинми, ёки бу тасаввурга биз ўлчаш натижаларни математик методлар ёрдамида қайта ишлаб ривожлантириш йўли билан эришамизми, бунда ўрганилаётган физик жараённинг частотавий характеристикаларнинг ўлчашлар аниқлиги ҳақида максимал ахборатга эга бўлишимиз керак бўлади.

Регуляриштириш методи ўлчаш натижаларни математик методлар ёрдамида қайта ишлаб ривожлантириш йўли билан эришиш мумкинлигини кўрсатади, бунда ўрганилаётган физик жараён ҳақида унинг частотавий характеристикаларнинг (яъни Фурье коэффициентларининг) ўлчашлар аниқлиги ҳақидаги хатоларни билиш керак бўлади.

III БОБ. КАРРАЛИ ФУРЬЕ ҚАТОРИ УЧУН ТИХООНОВНИНГ РЕГУЛЯРЛАШТИРИШ УСУЛИ

3.1-§. КАРРАЛИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЬЕ ҚАТОРИ ТУШУНЧАСИ. ФУРЬЕ ҚАТОРИНИНГ ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ ВА СФЕРИК ҚИСМИЙ ЙИҒИНДИЛАР

N -ўлчамли $-\pi \leq x_k \leq \pi$ ($k = 1, 2, \dots, N$) кубда аниқланган ва интегралланувчи N ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функция берилган бўлсин. Бу кубни Π симболи орқали белгилаймиз. Бундай функцияларнинг каррали тригонометрик қаторини бирданига комплекс шаклда ёзиш қулайдир.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ – орқали координаталари $x_1, x_2, \dots, x_N$ – ҳақиқий сонлар бўлган векторни, $n = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ – орқали эса, координаталари $n_1, n_2, \dots, n_N$ – бутун сонлар бўлган векторни белгилаймиз.

$f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функциянинг каррали тригонометрик Фурье қатори деб

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \cdot e^{-inx} \quad (3.3.1)$$

шаклидаги қаторга айтилади, бунда Фурье коэффицентлари деб аталувчи

$\hat{f}_n$ коэффицентлар

$$\hat{f}_n = \hat{f}_{n_1 n_2 \dots n_N} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\Pi} \int f(y_1, \dots, y_N) \cdot e^{-i(n_1 y_1 + \dots + n_N y_N)} dy_1 \dots dy_N \quad (3.3.2)$$

тенглик орқали аниқланади. nx символ n ва x векторнинг скаляр кўпайтмаси бўлиб $n_1 x_1 + \dots + n_N x_N$ йиғиндига кўра тенг.

Маълумки, (3.3.1) – каррали тригонометрик Фурье қаторини мос равишда $x_1, x_2, \dots, x_N$ ўзгарувчилар бўйича олинган бир ўлчовли тригонометрик системалар элементларининг мумкин бўлган барча

кўпайтмалари ёрдамида ҳосил қилинган ортонормал система бўйича олинган Фурье қатори деб қараш мумкин. Бу ортонормал системани каррали тригонометрик система деб аташ қабул қилинган.

Ҳар қандай ортонормал система сингари, каррали тригонометрик системалар учун ҳам, Бессель тенгсизлиги ўринли бўлиб, бу тенгсизлик

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\bar{I}} \int f^2(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \quad (3.3.3)$$

кўринишда бўлади, бунда $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функция N -ўлчовли Π кубда узлуксиз бўлган ихтиёрий функциядир.

Каррали тригонометрик Фурье қаторининг яқинлашиши ҳақидаги масалани қараймиз. Агар бу қатор берилган $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ нуктада абсолют яқинлашувчи бўлмаса, у ҳолда унинг яқинлашиши масаласи Риман теоремасига кўра, қатор ҳадларининг жойлашиш тартибига боғлиқ бўлади. Бу эса, қаторни $n_1, n_2, \dots, n_N$ индекслар бўйича жамлаш тартибига боғлиқ эканлигини билдиради.

Каррали тригонометрик Фурье қаторини жамлашнинг иккита усули кенг қўлланилади. Бу усуллар сферик ва тўғри бурчакли жамлаш усуллари дир. (3.3.1) каррали тригонометрик Фурье қаторининг сферик қисмий йиғиндиси деб

$$S_{\lambda}(x, f) = \sum_{|n| \leq \lambda} \hat{f}_n e^{-inx}$$

кўринишдаги йиғиндига айтилади, бу йиғинди

$|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_N^2} \leq \lambda$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $n_1, n_2, \dots, n_N$ бутун қийматлар бўйича олинган.

Агар $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_{\lambda}(x, f)$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда берилган x нуқтада сферик усул билан (3.3.1) каррали тригонометрик Фурье қатори жамланувчи деб айтилади.

(3.3.1) каррали тригонометрик Фурье қаторининг тўғри бурчакли қисмий йиғиндиси деб

$$S_{m_1 m_2 \dots m_N}(x, f) = \sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \dots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \hat{f}_n \cdot e^{-inx}$$

кўринишдаги йиғиндига айтилади. Агар

$$\lim_{\substack{m_1 \rightarrow \infty \\ m_2 \rightarrow \infty \\ \dots \\ m_N \rightarrow \infty}} S_{m_1 m_2 \dots m_N}(x, f)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда берилган x нуқтада тўғри бурчакли усул (ёки Принсгейм усули) билан (3.3.1) каррали тригонометрик Фурье қатори жамланувчи деб айтилади.

Ҳар иккала жамлаш усули ўзининг афзалликларига ва камчиликларига эга. Каррали тригонометрик Фурье қаторини ортонормал симтема буйича Фурье қатори деб қарасак, табиийки, унинг ҳадлари йиғиндисини $|n|$ нинг ўсиш тартибида жойлаштириш керак бўлади ва сферик қисмий йиғиндилар билан иш кўриш керак. Тўғри бурчакли қисмий йиғиндилар каррали даражали қаторларнинг яқинлашиш соҳасининг чегараси атрофида унинг ҳолатини тадқиқ этишда қўлланилади. Шунини таъкидлаш керакки, қатор йиғиндисини тўғри бурчакли қисмий йиғинди лимити сифатида аниқланганда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларининг чексиз тўпламига ҳеч қандай шарт қўйилмайди.

Каррали тригонометрик Фурье каторининг яқинлашиш шартларини ифодалашдан олдин N ўзгарувчили функциялар силлиқлигининг айрим характеристикаларини аниқлаймиз.

N – ўлчамли D соҳада аниқланган ва узлуксиз N ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функция берилган бўлсин.

1-таъриф. Ҳар бир $\delta > 0$ учун $f(x)$ функциянинг D соҳадаги узлуксизлик модули деб, $\rho(x', x'')$ масофа δ дан кичик бўладиган барча x' ва x'' нукталар тўпламида $|f(x') - f(x'')|$ айирма модулининг аниқ юқори чегарасига айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{\rho(x', x'') < \delta \\ x', x'' \in D}} |f(x') - f(x'')|$$

2-таъриф. $0 < \chi \leq 1$ ярим сегментдан олинган ҳар бир χ учун D соҳада $f(x)$ функциянинг узлуксизлик модули $0 < \chi < 1$ учун $\omega(\delta, f) = o(\delta^\chi)$ ва $\chi = 1$ учун $\omega(\delta, f) = O(\delta)$ тартибга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция D соҳада C^χ – Гёльдер синфига тегишли деб айтилади.

Энди α – ихтиёрий мусбат сон бўлсин. Бу сонни биз ҳамма вақт $\alpha = r + \chi$ шаклида тасвирлашимиз мумкин, бунда r – бутун сон, χ – эса, $0 < \chi \leq 1$ ярим сегментдан олинган сон.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функциянинг r – тартибли барча хусусий ҳосилалари D соҳада узлуксиз ва ҳар бир r – тартибли хусусий ҳосила $C^\chi(D)$ синфга тегишли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция D соҳада $\alpha > 0$ кўрсаткич билан C^α – Гёльдер синфига тегишли деб айтилади ва $f(x) \in C^\alpha(D)$ шаклида ёзилади.

Каррали тригонометрик Фурье қаторининг абсолют ва текис яқинлашишининг содда шартларини ўрнатамиз.

Теорема. Агар $f(x)$ функция ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π давр билан бутун R^N фазога давом эттирилган ва R^N да $s = \left[\frac{N}{2} \right] + 1$ тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг каррали тригонометрик Фурье қатори шу функцияга бутун R^N фазода абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади, бунда $\left[\frac{N}{2} \right] -$ орқали $\frac{N}{2}$ соннинг бутун қисми олинган.

Исбот. $\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m} \right)_n$ орқали $\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ ҳосиланинг $n = (n_1, \dots, n_N)$ номерли Фурье коэффициентларини белгилаймиз. Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_n = i n_k \hat{f}_n, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \right)_n = -n_k^2 \hat{f}_n$$

тенгликларни ҳосил қиламиз, бунда $k = 1, 2, \dots, N$ бўлган ихтиёрий сон. Шунга кўра,

$$-\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \right)_n = \hat{f}_n (n_1^2 + \dots + n_N^2)$$

бўлади. $s = \left[\frac{N}{2} \right] + 1$ сон жуфт бўлсин, яъни $s = 2m$. У ҳолда

$$\left((-\Delta + 1)^m f \right)_n = \hat{f}_n \left(|n|^2 + 1 \right)^m$$

ва бундан эса,

$$\left| \hat{f}_n \right| = \left(|n_1|^2 + \dots + |n_N|^2 + 1 \right)^{-m} \left| \left((-\Delta + 1)^m f \right)_n \right| \quad (3.3.4)$$

тенглик келиб чиқади. Бу

$$\left| \hat{f}_n \right| = \left(|n_1|^2 + \dots + |n_N|^2 + 1 \right)^{-m} \left| \sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \right)_n \right|$$

тенгликдан эса, бирданига

$$\left| \hat{f}_n \right| \leq \left(|n_1|^2 + \dots + |n_N|^2 + 1 \right)^{-m} \cdot \sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \right)_n \right| \quad (3.3.5)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда ўнг томондаги йиғинди барча манфиймас бутун $m_0, m_1, m_2, \dots, m_N$ сонлар $m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_N = m$ шартни қаноатлантирганда олинган. Бу йиғиндидаги қўшилувчилар сони $(N+1)^m$ га тенг бўлади. (3.3.5) дан ўз навбатида

$$\left| \hat{f}_n \right| \leq \frac{1}{2} \left(|n_1|^2 + \dots + |n_N|^2 + 1 \right)^{-2m} + \frac{(N+1)^m}{2} \sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \right)_n \right|^2 \quad (3.3.6)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда биз

$$|a| \cdot |b| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \text{ва} \quad \left(|a_1| + \dots + |a_p|\right)^2 \leq p(a_1^2 + \dots + a_p^2)$$

тенгсизликдан фойдаландик.

$s = \frac{N}{2} + \varepsilon$, бунда N сони жуфт бўлганда $\varepsilon = 1$, N сони тоқ бўлганда

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ бўлиб,

$$\begin{aligned} \left(|n_1|^2 + \dots + |n_N|^2 + 1\right)^{-2m} &= \left(|n_1|^2 + \dots + |n_N|^2 + 1\right)^{-s} = \\ &= \left(|n_1|^2 + \dots + |n_N|^2 + 1\right)^{-\frac{N}{2} - \varepsilon} \leq \left(|n_1|^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{N}} \dots \left(|n_N|^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{N}} \end{aligned}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, биз

$$\begin{aligned} \left|\hat{f}_n\right| &\leq \frac{1}{2} \left(|n_1|^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{N}} \dots \left(|n_N|^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{N}} + \\ &+ \frac{(N+1)^m}{2} \sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \right)_n \right|^2 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

(3.3.1) каррали тригонометрик Фурье қатори абсолют ва текис яқинлашувчи бўлиши учун Вейерштрасс аломатига кўра, $\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}_n\right|$

сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги етарлидир. Ҳар бир k учун

$\sum_{n_k=-\infty}^{\infty} \left(|n_k|^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{N}}$ сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги ва ҳар бир

$$m_0, m_1, m_2, \dots, m_N \quad \text{учун} \quad \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \right)_n \right|^2 \quad \text{каторнинг}$$

яқинлашувчи бўлишлиги эса Бессель тенгсизлигига кўра, $\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}}$

функцияларнинг узлуксиз эканлигидан келиб чиқади. Энди $s = \left[\frac{N}{2} \right] + 1$

сон тоқ бўлсин, яъни $s = 2m + 1$. У ҳолда

$$\left((-\Delta + 1)^m f \right)_n = \hat{f}_n \left(|n|^2 + 1 \right)^m$$

тенгликда f ўрнига $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ функцияни қўйсак,

$$\left((-\Delta + 1)^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_n \left(|n|^2 + 1 \right)^m = i n_k \hat{f}_n \left(|n|^2 + 1 \right)^m$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенгликлардан, эса қўшиш йўли билан

$$\begin{aligned} & \left| \hat{f}_n \right| \left(|n|^2 + 1 \right)^m \left(|n_1| + |n_2| + \dots + |n_N| + 1 \right) = \\ & = \left(\left| \left((-\Delta + 1)^m f \right)_n \right| + \sum_{k=1}^N \left| \left((-\Delta + 1)^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_n \right| \right) \end{aligned}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан, эса

$$\left| \hat{f}_n \right| = \left(|n|^2 + 1 \right)^{-m} \left(|n_1| + |n_2| + \dots + |n_N| + 1 \right)^{-1}.$$

$$\cdot \left(\left| \left((-\Delta + 1)^m f \right)_n \right| + \sum_{k=1}^N \left| \left((-\Delta + 1)^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_n \right| \right) \quad (3.3.4')$$

тенглик келиб чиқади. Бу

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n| &= \left(|n|^2 + 1 \right)^{-m} \left(|n_1| + |n_2| + \dots |n_N| + 1 \right)^{-1} \cdot \\ &\cdot \left(\left| \sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \right)_n \right| + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^N \left| \sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N}}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)_n \right| \right) \end{aligned}$$

тенгликдан эса, бирданига

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n| &\leq \left(|n|^2 + 1 \right)^{-m} \left(|n_1| + |n_2| + \dots |n_N| + 1 \right)^{-1} \cdot \\ &\cdot \left(\sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \right)_n \right| + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^N \sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N}}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)_n \right| \right) \quad (3.3.5') \end{aligned}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда ўнг томондаги йиғинди барча манфиймас бутун $m_0, m_1, m_2, \dots, m_N$ сонлар $m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_N = m$ шартни

қаноатлантирганда олинган. Бу ҳар бир йиғиндидаги қўшилувчилар сони $(N+1)^m$ га тенг бўлади. (3.3.5') дан ўз навбатида

$$\begin{aligned} & \left| \hat{f}_n \right| \leq \frac{1}{2} \left(|n|^2 + 1 \right)^{-2m} \left(|n_1| + |n_2| + \dots |n_N| + 1 \right)^{-2} + \\ & + (N+1)^m \cdot \left(\sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \right)_n \right|^2 + \right. \\ & \left. + N \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N}}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)_n \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.3.6')$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда биз

$$|a| \cdot |b| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \text{ва} \quad \left(|a_1| + \dots + |a_p| \right)^2 \leq p \left(a_1^2 + \dots + a_p^2 \right)$$

тенгсизликдан фойдаландик.

$$s = \frac{N}{2} + \varepsilon, \quad s = 2m+1, \quad \text{бунда } N \text{ сони жуфт бўлганда } \varepsilon = 1, \quad N \text{ сони тоқ}$$

$$\text{бўлганда } \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \text{бўлиб,}$$

$$\begin{aligned} & \left(|n_1|^2 + \dots + |n_N|^2 + 1 \right)^{-2m} \left(|n_1| + |n_2| + \dots |n_N| + 1 \right)^{-2} = \\ & = \left(|n_1|^2 + \dots + |n_N|^2 + 1 \right)^{-\frac{N}{2}-\varepsilon+1} \left(|n_1| + |n_2| + \dots |n_N| + 1 \right)^{-2} \leq \\ & \leq \left(|n_1|^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}} \dots \left(|n_N|^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}} \end{aligned}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, биз

$$\begin{aligned}
 \left| \hat{f}_n \right| \leq & \frac{1}{2} \left(|n_1|^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{N}} \dots \left(|n_N|^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{N}} + \\
 & + (N+1)^m \cdot \left(\sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \right)_n \right|^2 + \right. \\
 & \left. + N \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{m_0+m_1+\dots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1! \dots m_N!} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)_n \right|^2 \right) \quad (3.3.7')
 \end{aligned}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

(3.3.1) каррали тригонометрик Фурье қатори абсолют ва текис яқинлашувчи бўлиши учун Вейерштрасс аломатига кўра,

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}_n \right|$$

сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги етарлидир. Ҳар бир k учун

$$\sum_{n_k=-\infty}^{\infty} \left(|n_k|^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{N}} \quad \text{сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги ва ҳар бир}$$

$$m_0, m_1, m_2, \dots, m_N \quad \text{учун} \quad \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \right)_n \right|^2 \quad \text{ва}$$

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)_n \right|^2 \quad \text{қаторнинг ҳар бир } k \text{ учун яқинлашувчи}$$

бўлишлиги эса, Бессель тенгсизлигига кўра, $\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}}$ ва

$\frac{\partial^{2m_1+\dots+2m_N}}{\partial x_1^{2m_1} \dots \partial x_N^{2m_N}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$ функцияларнинг ҳар бир k узлуксиз эканлигидан келиб чиқади.

Қуйидаги теоремалар ҳам ўринлидир.

Теорема. Агар N ўзгарувчили $f(x_1, \dots, x_N)$ функция ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π даврга эга ва R^N фазода $\alpha > \frac{N}{2}$ учун C^α – Гёльдер синфига тегишли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг каррали тригонометрик Фурье қатори шу функцияга бутун R^N фазода абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади.

Теорема. (В.А. Ильин). Агар $N \geq 2$ ўзгарувчили $f(x_1, \dots, x_N)$ функция ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π даврга эга ва R^N фазода $\alpha \geq \frac{N-1}{2}$ учун C^α – Гёльдер синфига тегишли бўлса, у ҳолда каррали тригонометрик Фурье қаторининг сферик қисмий йиғиндиси шу $f(x_1, \dots, x_N)$ функцияга бутун R^N фазода текис яқинлашувчи бўлади.

Теорема. (В.А. Ильин). $0 < \alpha < \frac{N-1}{2}$ бўлган ихтиёрий сон ва $N -$ ўлчамли $\dot{I}$ кубдан олинган ихтиёрий x_0 нуқта учун R^N фазода $N \geq 2$ ўзгарувчили $f(x_1, \dots, x_N)$ функция ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π даврга эга ва C^α – Гёльдер синфига тегишли бўлиб, x_0 нуқтанинг δ – атрофида нолга тенг бўлган функция мавжуд бўлиб, унинг каррали тригонометрик Фурье қаторининг сферик қисмий йиғиндиси бу x_0 нуқтада лимитга эга бўлмайди.

Теорема. (Л.В. Жижиашвили) Агар N ўзгарувчили $f(x_1, \dots, x_N)$ функция ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π даврга эга ва $\alpha > 0$ учун R^N фазода C^α – Гёльдер синфига тегишли бўлса, у ҳолда қаррали тригонометрик Фурье қаторининг тўғри бурчакли қисмий йиғиндиси шу $f(x_1, \dots, x_N)$ функцияга бутун R^N фазода текис яқинлашувчи бўлади.

3.2-§. ТАҚРИБИЙ БЕРИЛГАН ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТЛАРИ БЎЙИЧА ФУНКЦИЯ ҚИЙМАТИНИ ҲИСОБЛАШ ҲАҚИДАГИ А.Н. ТИХОНОВ ТЕОРЕМАСИНИНГ КЎП ЎЛЧАМЛИ АНАЛОГИ

Бу параграфда кўп ўзгарувчили функция Фурье коэффицентларининг тақрибий қийматларида шу функцияни берилган нуқтада кичик хато билан тиклаш масаласи қараб чиқилади.

Айтайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функция ҳар бир x_j ($j = \overline{1, N}$) ўзгарувчи бўйича 2π - даврли даврий функция бўлиб, N – ўлчамли $T^N = \{x \in R^N : -\pi < x_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, N\}$ кубда

$$f(x) = \sum_{n \in Z^N} c_n e^{inx} \quad (3.2.1)$$

тригонометрик Фурье қатори шар бўйича текис яқинлашиш шартларини қаноатлантирсин. Бу ерда, одатда, $N > 1$ учун nx орқали $nx = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_N x_N$, $n \in Z^N$, $x \in R^N$ скаляр кўпайтма, ҳамда Z^N – орқали эса, бутун компонентаи барча векторлар тўплами, яъни агар $n_j = 0, \pm 1, \dots$ бўлса, у ҳолда $n = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in Z^N$ тушунилади.

R мусбат сони учун шарсимон $S_R(x)$ қисмий йиғинди $S_R(x) = \sum_{|n| \leq R} c_n e^{inx}$ кўринишида аниқланади.

Агар $\lim_{R \rightarrow \infty} S_R(x)$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда x нуқтада (3.2.1) қатор шар бўйича яқинлашувчи деб айтилади.

Агар $\lim_{R \rightarrow \infty} S_R(x)$ лимит $x \in T^N$ бўйича текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (3.2.1) қатор шар бўйича T^N кубда текис яқинлашувчи деб айтилади.

Айтайлик, бу кўп ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффициентларининг c_n аниқ қийматлари ўрнига шу Фурье коэффициентларининг $\tilde{c}_n$ тақрибий қийматларигина маълум бўлсин. Айнан шу ҳол кўпгина амалий масалаларда учрайди.

Тригонометрик Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларининг берилиш хатосини $l_2(Z^N)$ фазо нормаси маъносида кичик деб оламиз. Бу эса,

$$\sum_{n \in Z^N} |c_n - \tilde{c}_n|^2 \leq \delta^2, \quad (3.2.2)$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигини билдиради, бу ерда δ – етарлича кичик мусбат сон бўлиб, уни Фурье коэффициентлари берилишининг *четланиши* деб атаيمиз.

Табиий равишда, муҳим тадбиққа эга бўлган қуйидаги масала пайдо бўлади: кўп ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффициентларининг c_n аниқ қийматлари ўрнига шу Фурье коэффициентларининг $\tilde{c}_n$ тақрибий қийматлари бўйича берилган x нуктада $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функцияни $\delta \rightarrow 0$ да, нолга интилувчи $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ хато билан тиклаш талаб этилади.

Фурье коэффициентлари тақрибий қийматлари билан берилганда бевосита, тўғридан-тўғри

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \in Z^N} \tilde{c}_n e^{inx} \quad (3.2.3)$$

тригонометрик Фурье қаторини жамлаш йўли билан берилганда x нуктада $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функцияни ҳеч қандай аниқлик даражасида тиклашга эришиб бўлмаслигини кўрсатамиз.

Ихтиёрий кичик $\delta > 0$ четланишни оламиз ва $C = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|n|)^{2s}}}$

бўлсин, бунда $\frac{N}{2} < s < N$, $n \in \mathbb{Z}^N$. Айтайлик, бу кўп ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффициентларининг берилишида қуйидагича аниқ кўринишдаги четланишга эга бўлсин:

$$\frac{N}{2} < s < N, \quad n \in \mathbb{Z}^N \quad \text{учун} \quad c_n - \tilde{c}_n = \frac{\delta}{C(1+|n|)^s}.$$

Бундай тригонометрик Фурье коэффициентларининг аниқ четланишида, кўриниб турибдики, (3.2.2) муносабат аниқ тенглик белгиси билан ўринли бўлади. (3.2.1) аниқ Фурье қаторини Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (3.2.3) қатор билан алмаштирганда биз

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} (c_n - \tilde{c}_n) e^{inx}$$

қатор йиғиндисига тенг бўлган хатоликка эга бўлдамиз.

$x = 0$ нуқтада бу хатолик четланиш $\delta > 0$ қанча кичик бўлмасин, барибир

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} (c_n - \tilde{c}_n) = \frac{\delta}{C} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{1+|n|^s} = \infty$$

бўлади.

Шундай қилиб, (3.2.1) аниқ тригонометрик Фурье қатори $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функцияга қанча тез яқинлашувчи бўлмасин, Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (3.2.3) қатор билан алмаштирганда биз (3.2.2) муносабат билан берилган хатолик четланиш $\delta > 0$ қанча кичик бўлмасин, барибир тригонометрик Фурье қаторини тўғридан-тўғри жамлаш $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функцияни Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (3.2.3) қатор ёрдамида N -ўлчовли $T^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\pi < x_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, N\}$ кубдаги нуқтада ҳеч қандай аниқлик даражасида тиклаб бўлмайди.

Биз c_n ва $\tilde{c}_n$ Фурье коэффициентларига мос, (3.2.2) муносабат маъносида берилган характерловчи хатолик четланиши $\delta > 0$ қанча кичик бўлмасин, барибир бу иккита берилганларга мос тригонометрик Фурье коэффициентли (3.2.1) ва (3.2.3) қаторларини тўғридан-тўғри жамлашда йиғинди бир-биридан жуда кучли фарқ қилиши мумкин экан.

Бундай турдаги масалалар, яъни берилганларнинг жуда кичик четланишида (бу ерда берилганлар Фурье коэффициентлари тўпламидан иборат) уларга мос ечимларнинг (биз қараётган ҳолда ечим деб тригонометрик Фурье қаторининг тўғри йиғиндисини тушунамиз) исталганча катта фарқ қилишлиги математикада кўп учрайдиган ва тадбиқларга эга бўлган нокоррект қўйилган масала деб аталувчи масала тушунчасига олиб келади.

Бошқача сўз билан айтганда, биз қараётган тригонометрик Фурье қаторининг тўғри йиғиндисини топиш масаласи нокоррект қўйилган масала бўлади.

Нокоррект қўйилган масалаларнинг кенг синфларини ечишнинг умумий методлари академик А.Н. Тихонов томонидан ишлаб чиқилган ва регуляриштириш методлари деб номланади.

Бу ерда биз тригонометрик Фурье қаторининг йиғиндисини ҳақидаги масалага регуляриштириш методини қўллашга тўхталамиз.

Такрибий Фурье коэффициентлари билан берилган тригонометрик Фурье қаторининг йиғиндисини ҳақидаги масалага регуляриштириш методини қўллаш алгоритми $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функциянинг такрибий қиймати сифатида (3.2.3) қаторнинг йиғиндисини эмас, балки

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \tilde{c}_n e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma} \alpha, \quad (3.2.4)$$

қаторнинг йиғиндисини қарашдан иборат бўлиб, бунда $\gamma = \frac{N}{2} + \frac{3}{2}$ ва (3.2.3)

қаторнинг n – ҳадини «регуляриштириувчи» $\frac{1}{1 + |n|^\gamma} \alpha$ кўпайтувчига

кўпайтиришдан ҳосил қилинган. Бу ерда α параметр ҳам (3.2.2) муносабатдаги Фурье коэффициентларининг δ четланиши каби бир хил тартибдаги кичик миқдордан иборат.

Келтирилган алгоритмни асословчи А.Н. Тихонов теоремасининг кўп ўлчамли аналогини бўлган қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Теорема. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ функция N -ўлчамли T^N кубда ўзининг тригонометрик Фурье қатори шар бўйича текис яқинлашиш шартларини қаноатлантирувчи $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n e^{inx}$ Фурье қаторига ёйилган ва $f(x)$ функция $L_2(T^N)$ синфга тегишли бўлсин. У ҳолда ҳар бир $\delta > 0$ ва δ билан бир хил тартибли кичик миқдор бўлган $\alpha > 0$ учун (3.2.2) муносабатни қаноатлантирувчи $\tilde{c}_n$ коэффициентли (3.2.4) қатор йиғиндиси $f(x)$ функция билан $\delta \rightarrow 0$ да, нолга интилувчи $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ хато билан устма-уст тушади.

Исбот. Умумийликка ҳилоф қилмаган ҳолда, $\alpha = \delta$ деб ҳисоблаймиз (бошқача $\alpha = C(\delta) \cdot \delta$, бунда $0 < C_1 \leq C(\delta) \leq C_2$ бўлган ҳолда ҳам худди шунга ўхшаш қаралади). Ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун $\delta_0(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, берилган x нуқта учун $\delta \leq \delta_0(\varepsilon)$ шартни қаноатлантирувчи барча мусбат δ сонлар учун

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \tilde{c}_n e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \delta} - f(x) \right| \leq \varepsilon \quad (3.2.5)$$

тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилиш етарлидир.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин. Аввал, шу берилган ε сон учун $\delta_1(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $\delta \leq \delta_1(\varepsilon)$ шартни қаноатлантирувчи, барча мусбат δ сонлар учун

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} (\tilde{c}_n - c_n) e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \delta} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.2.6)$$

тенгсизлик ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

(3.2.6) муносабатни ўрнатиш учун $\delta \rightarrow 0+0$ да (3.2.6) тенгсизликнинг чап томонидаги ифоданинг нолга интилишини кўрсатиш етарлидир.

(3.2.6) тенгсизликнинг чап томонидаги ифодани иккита йиғиндига ажратамиз, бунда биринчи йиғиндига $|n| < \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}$ тенгсизликини каноатлантирувчи $n = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in Z^N$ номерли қўшилувчиларни, иккинчи йиғиндига эса, барча қолган қўшилувчиларни киритамиз ва ҳар иккала қўшилувчига Коши–Буняковский тенгсизлигини қўллаб,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n \in Z^N} (\tilde{c}_n - c_n) e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \delta} \right| \leq \left| \sum_{|n| < \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} (\tilde{c}_n - c_n) e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \delta} \right| + \\
& + \left| \sum_{|n| \geq \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} (\tilde{c}_n - c_n) e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \delta} \right| \leq \\
& \leq \sqrt{\sum_{|n| < \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} |\tilde{c}_n - c_n|^2} \sqrt{\sum_{|n| < \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} \left(\frac{1}{1 + |n|^\gamma \delta} \right)^2} + \\
& + \sqrt{\sum_{|n| \geq \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} |\tilde{c}_n - c_n|^2} \sqrt{\sum_{|n| \geq \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} \left(\frac{1}{1 + |n|^\gamma \delta} \right)^2} \leq \\
& \leq \sqrt{\sum_{|n| < \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} |\tilde{c}_n - c_n|^2} \sqrt{\sum_{|n| < \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} 1} + \sqrt{\sum_{|n| < \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} |\tilde{c}_n - c_n|^2} \sqrt{\sum_{|n| \geq \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} \frac{1}{|n|^{2\gamma} \delta^2}} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\sum_{|n| < \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} |\tilde{c}_n - c_n|^2} \sqrt{\frac{3^N}{\delta}} + \sqrt{\sum_{|n| \geq \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} |\tilde{c}_n - c_n|^2} \sqrt{C \cdot \sum_{k \geq \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} \frac{k^{N-1}}{k^{2\gamma} \delta^2}} \leq \\
&\leq C_1 \sqrt{\delta} + C_2 \sqrt{\sum_{k \geq \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} \frac{1}{k^{2\gamma-N+1}}} \leq C_1 \sqrt{\delta} + C_2 \sqrt{\sum_{k \geq \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} \frac{1}{k^4}}. \quad (3.2.7)
\end{aligned}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Коши–Маклорен интеграл аломатига кўра,

$$\sum_{k \geq \frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}} \frac{1}{k^4} = O\left(\delta^{\frac{3}{N}}\right)$$

муносабатга эга бўламиз ва буни ҳисобга олсак, биз (3.2.7) тенгсизликнинг ўнг томонида $O(\sqrt{\delta}) + O\left(\delta^{\frac{3}{2N}}\right)$ миқдорни ҳосил қиламиз.

Шунга кўра, (3.2.6) тенгсизлик исбот қилинган деб ҳисоблаш мумкин ва (3.2.5) тенгсизликни ўрнатиш учун биз ҳар бир танланган $\varepsilon > 0$ сони учун $\delta_2(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $\delta \leq \delta_2(\varepsilon)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча мусбат δ сонлар учун

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \delta} - f(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.2.8)$$

тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилиш етарлидир.

N -ўлчамли T^N кубда $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n e^{inx}$ тригонометрик Фурье қатори

шар бўйича текис яқинлашувчи эканлигидан, биз $S_R(x) = \sum_{|n| \leq R} c_n e^{inx}$ қисмий

йиғиндининг текис чегараланган эканлиги келиб чиқади, яъни

$$\exists M_0 > 0: \forall R > 0, \forall x \in T^N \rightarrow |S_R(x)| \leq M_0. \quad (3.2.9)$$

Ҳамда, Коши критериясидан фойдаланиб, (3.2.1) тригонометрик Фурье қаторининг шар бўйича текис яқинлашувчи эканлигидан

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists R_\varepsilon > 0: \forall R_1 \geq R_\varepsilon, \forall R_2 \geq R_\varepsilon, \\ R_2 > R_1, \forall x \in T^N \rightarrow |S_{R_1}^{R_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{8} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

тенгсизликка эга бўламиз, бунда $S_{R_1}^{R_2}(x) = S_{R_2}(x) - S_{R_1}(x)$.

$$\tilde{f}(x, \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \alpha} \quad \text{қаторнинг шар бўйича}$$

$$E = \{ \tilde{x}: \tilde{x} = (x, \alpha), x \in T^N, 0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \} \quad \text{тўпланда текис яқинлашувчи}$$

эканлигини исбот қиламиз. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини

$$\sigma_R(x, \alpha) = \sum_{|n| \leq R} c_n e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \alpha} \quad \text{орқали белгилаймиз. У ҳолда Абель}$$

алмаштиришини қўллаб

$$\begin{aligned} \sigma_{R_1}^{R_2}(x, \alpha) &= \sigma_{R_2}(x, \alpha) - \sigma_{R_1}(x, \alpha) = \sum_{R_1 < |n| \leq R_2} c_n e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \alpha} = \\ &= \sum_{R_1^2 < k \leq R_2^2} \sum_{|n|^2 = k} c_n e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \alpha} = \sum_{R_1^2 < k \leq R_2^2} \left(\frac{1}{1 + k^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} \sum_{|n|^2 = k} c_n e^{inx} \right) \end{aligned}$$

тенгликка эга бўламиз.

Маълумки

$$\sum_{|n|^2 = k} c_n e^{inx} = \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq k} c_n e^{inx} - \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq k-1} c_n e^{inx},$$

бўлгани учун

$$\begin{aligned} \sigma_{R_1}^{R_2}(x, \alpha) &= \sum_{R_1^2 < k \leq R_2^2} \left(\frac{1}{1 + k^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} \left(\sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq k} c_n e^{inx} - \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq k-1} c_n e^{inx} \right) \right) = \\ &= \sum_{R_1^2 < k \leq R_2^2} \left(\frac{1}{1 + k^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq k} c_n e^{inx} \right) - \sum_{R_1^2 < k \leq R_2^2} \left(\frac{1}{1 + k^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq k-1} c_n e^{inx} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{R_1^2 < k \leq R_2^2} \left(\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq k} c_n e^{in x} \right) - \\
&- \sum_{R_1^2 - 1 < k \leq R_2^2 - 1} \left(\frac{1}{1+(k+1)^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq k} c_n e^{in x} \right) = \\
&= \sum_{R_1^2 < k \leq R_2^2 - 1} \left(\left(\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} - \frac{1}{1+(k+1)^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} \right) \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq k} c_n e^{in x} \right) + \\
&+ \left(\frac{1}{1+R_2^{\gamma} \alpha} \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq R_2^2} c_n e^{in x} \right)
\end{aligned}$$

бўлади. Бундан эса, (3.2.10) шартни қўллаб

$$\begin{aligned}
\left| \sigma_{R_1}^{R_2}(x, \alpha) \right| &\leq \sum_{R_1^2 < k \leq R_2^2 - 1} \left| \frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} - \frac{1}{1+(k+1)^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} \right| \left| \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq k} c_n e^{in x} \right| + \\
&+ \left| \frac{1}{1+R_2^{\gamma} \alpha} \right| \left| \sum_{R_1^2 < |n|^2 \leq R_2^2} c_n e^{in x} \right| < \frac{\varepsilon}{8} \sum_{R_1^2 < k \leq R_2^2 - 1} \left(\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} - \frac{1}{1+(k+1)^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} \right) + \\
&+ \frac{\varepsilon}{8} \frac{1}{1+R_2^{\gamma} \alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шундай қилиб,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R_\varepsilon > 0: \forall R_1 \geq R_\varepsilon, \forall R_2 \geq R_\varepsilon, R_2 > R_1, \forall \tilde{x} = (x, \alpha) \in E \rightarrow \left| \sigma_{R_1}^{R_2}(x, \alpha) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

ва қаторнинг текис яқинлашиши ҳақидаги Коши критериясига кўра, биз

$$\tilde{f}(x, \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n e^{inx} \frac{1}{1+|n|^\gamma \alpha} \quad \text{қатор шар бўйича } E \text{ тўпланда текис}$$

яқинлашувчи бўлади. Бундан эса, $\tilde{f}(x, \alpha)$ функциянинг E тўпланда узлуксиз эканлигига эга бўламиз ва йиғинди белгиси остида лимитга ўтиш мумкин:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{f}(x, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \alpha} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n e^{inx} = f(x).$$

Шунга кўра, (3.2.8) тенгсизлик исбот бўлган деб ҳисоблаш мумкин, яъни ҳар бир тайинланган $\varepsilon > 0$ сон учун $\delta_2(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $\delta \leq \delta_2(\varepsilon)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча мусбат δ сонлар учун

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \delta} - f(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай бир $\delta_0(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\} > 0$ сон топилиб, берилган x нуқтада $\delta \leq \delta_0(\varepsilon)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча мусбат δ сонлар учун

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \tilde{c}_n e^{inx} \frac{1}{1 + |n|^\gamma \delta} - f(x) \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Теорема исбот бўлди.

ХУЛОСА

Ушбу диссертацияда каррали тригонометрик Фурье қаторининг жамланиши билан боғлиқ масалалар ўрганилди. Бунда аввалом бор, коррект қўйилган ва нокоррект қўйилган масалалар, ҳамда А.Н. Тихоновнинг регуляризация методи қараб чиқилди. Иккинчи бобда ортогонал система бўйича бир каррали Фурье қатори, бир каррали тригонометрик Фурье қатори қисмий йиғиндиси учун формула, бир каррали тригонометрик Фурье қаторининг нуктада яқинлашиши, бир каррали тригонометрик Фурье қаторини ҳадма-ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш, бир каррали тригонометрик Фурье қаторининг текис яқинлашиши, тақрибий берилган Фурье коэффициентлари бўйича бир ўзгарувчи функция қийматини ҳисоблаш ҳақидаги А.Н. Тихонов теоремаси қаралди.

Бундан ташқари диссертациянинг учинчи бобида каррали тригонометрик Фурье қатори учун Тихоновнинг регуляриштириш усули яратилди. Бу ерда аввалом бор, каррали тригонометрик Фурье қатори тушунчаси, Фурье қаторининг тўғри бурчакли ва сферик қисмий йиғиндилари ўрганилди, ҳамда тўғри бурчакли ва сферик қисмий йиғиндилар бўйича текис ва абсолют яқинлашиш ҳақидаги теореманинг янгича исботи келтирилди. Тақрибий берилган Фурье коэффициентлари бўйича кўп ўзгарувчи функция қийматини ҳисоблаш ҳақидаги А.Н. Тихонов теоремасининг кўп ўлчамли аналоги яратилди. Бунга кўра, кўп ўзгарувчи функция Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларида шу функцияни берилган нуктада кичик хато билан тиклаш масаласи ҳал этилди.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Ш.А. Алимов, В.А. Ильин, Е.М. Никишин. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. Успехи мат. наук. 1976. 31, №6. с. 23-83; 1977. 32, №1. С. 107-130.
2. В.А. Ильин, Ш.А. Алимов. Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов, I. Дифференциальные уравнения, т.7, №4, 1971, стр. 670-710.
3. В.А. Ильин, Ш.А. Алимов. Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов, I. Дифференциальные уравнения, т.7, №5, 1971, стр. 851-882.
4. В.А. Ильин. Проблемы локализации и сходимости рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа. Успехи мат. наук. 1968. 23, вып.2, стр. 61-120.
5. Л.В. Жижиашвили. О сопряженных функциях и тригонометрических рядах. Докторская диссертация, Москва, МГУ, 1967.
6. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
7. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
8. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, Основы математического анализа. Часть II, Москва. Наука. 1980. 448 с.
9. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов, Математический анализ. Москва. Наука. 1979.
10. С.М. Никольский, Курс математического анализа. Т. I, II. Москва. Наука. 1983.
11. Л.Д. Кудрявцев, Курс математического анализа. Т. I, II. Москва. Высшая школа. 1981.

12. Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, II, III. Москва. Наука. 1969.
13. В.А. Зорич, Математический анализ. Часть I, II. Москва. Наука. 1981, 1984.
14. А.М. Тер–Крикоров, М.И. Шабунин, Курс математического анализа. Москва. Наука. 1988.
15. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Наука, 1961.
16. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.
17. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
18. Садовничий В.А. Теория операторов. М. Издательство Московского университета, 1986.
19. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. Москва. Наука. 1981. 544 с.
20. М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва. Наука. 1980. 288 с.
21. С.И. Кабанихин. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск. Сибирское научное издательство. 2009. 460 с.
22. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Москва. Наука. 1965. 448 с.
23. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
24. Хаитбоев Г.С. Об одной теореме А.Н.Тихонова о вычислении значений функции по приближенно заданным коэффициентом Фурье. Ўзбекистон Миллий Университетининг 95 йиллигига бағишланган “Математика, Механика ва Информатика фанларининг ривожиди истеъдодли ёшларнинг ўрни” илмий-амалий семинари тезислари тўплами. Тошкент-2013. 102-103 бетлар.

25. Хаитбоев Г.С. Многомерный аналог теоремы А.Н.Тихонова о вычислении значений функции по приближенно заданным коэффициентом Фурье. Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения” 21-23 ноября 2013 года Ташкент-2013. С. 245
26. Хаитбоев Г.С. Многомерный аналог теоремы А.Н. Тихонова о вычислении значений функции по приближенно заданным коэффициентам Фурье. Узбекский Математический Журнал. 2014 г. №1. С. 119-125.